

บทที่ 3

การประมวลผลสัญญาณเสียงต้นหัวใจ

3.1 หลักการวิเคราะห์สัญญาณเสียงต้นหัวใจ

การฟังเสียงหัวใจนั้นเปรียบได้กับการฟังเสียงดนตรีที่มีจังหวะและท่วงทำนอง โดยเฉพาะผู้ที่ชื่นชอบดนตรีแนวคลาสสิกที่บรรเลงโดยวงขนาดใหญ่ มีเครื่องดนตรีนับสิบ ๆ ชนิดเล่นประสานกันนั้นใดฉันนั้น เสียงหัวใจก็เช่นกันไม่ว่าจะเป็นของคนปกติหรือของคนที่ป่วยโรคหัวใจก็ตามจะประกอบด้วยเสียงหัวใจหลาย ๆ เสียงปะปนกัน ดังนั้น การฟังเสียงต้นหัวใจจะต้องแยกแยะองค์ประกอบของเสียง และจำแนกให้ได้ว่าเสียงนั้นเกิดขึ้นเมื่อใด มีที่มาจากไหน มีความสัมพันธ์อย่างไรกับรอบการเต้นของหัวใจ

มนุษย์มีความสามารถในการได้ยินเสียงค่อนข้างจำกัด โดยเฉพาะการฟังเสียงต้นหัวใจซึ่งเป็นเสียงที่เกิดในช่วงเวลาสั้น ๆ และมีความถี่ต่ำ (เสียงต้นหัวใจที่คนเราสามารถได้ยินอยู่ในช่วง 40 – 500 Hz) ทำให้บางครั้งการจำแนกองค์ประกอบของเสียงทำได้ไม่ง่ายนัก นอกจากนี้สัญญาณเสียงต้นหัวใจยังมีคุณลักษณะที่ไม่คงที่ (non-stationary) และจะเปลี่ยนแปลงตามเวลา (time varying) ดังนั้นในการวิเคราะห์สัญญาณเสียงต้นหัวใจจึงจำเป็นต้องศึกษาข้อมูลทั้งในเชิงความถี่และเวลา

ในอดีตที่ผ่านมา ความก้าวหน้าด้านการประมวลผลสัญญาณได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง โดยเฉพาะอย่างยิ่งการวิเคราะห์สัญญาณเสียงต้นหัวใจ ทำให้ทราบคุณลักษณะต่าง ๆ ขององค์ประกอบความถี่ของสัญญาณที่เวลาชั่วขณะใดขณะหนึ่งที่แตกต่างกัน ซึ่งจะช่วยให้เราเข้าใจรูปร่างลักษณะของสัญญาณและสามารถคัดแยกเสียงต้นหัวใจได้ง่ายขึ้น

งานวิจัยชิ้นนี้ได้นำเสนอวิธีการในการประมวลผลสัญญาณโดยพิจารณาทั้งในเชิงเวลาและความถี่ไปพร้อม ๆ กัน เรียกกราฟที่มีองค์ประกอบความถี่ของสัญญาณที่เวลาต่าง ๆ กันนี้ว่า สเปกโตรแกรม (spectrogram) ซึ่งในบทนี้จะอธิบายถึงหลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง รวมถึงขั้นตอนและกระบวนการในการประมวลผลสัญญาณด้วยวิธีดังกล่าวอย่างละเอียด ในตอนท้ายจะแสดงผลที่ได้จาก

การประมวลผลสัญญาณซึ่งสามารถบ่งบอกคุณลักษณะบางประการของสัญญาณเสียงหัวใจในแต่ละชนิดได้อย่างชัดเจน

3.1.1 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง (sampling theorem)

ในปี ค.ศ. 1949 C.E.Shannon ได้เสนอทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง (sampling theorem) ซึ่งระบุว่า ถ้าสัญญาณที่ต้องการสุ่มมีความถี่สูงสุดที่ f_{\max} เพื่อให้ได้สัญญาณที่สุ่มแล้วมีข้อมูลของสัญญาณเดิมครบถ้วนและเป็นตัวแทนที่สมบูรณ์ของสัญญาณนี้ ความถี่ในการสุ่มจะต้องมีค่ามากกว่าสองเท่าของความถี่สูงสุด และเรียกความถี่ที่เป็นสองเท่าของความถี่สูงสุดว่า ความถี่ไนควิสต์ (Nyquist frequency)

เมื่อความถี่ในการสุ่มมีค่าน้อยกว่าสองเท่าของความถี่สูงสุด สัญญาณในเชิงความถี่ที่เกิดขึ้นจะมีช่วงของความถี่ส่วนปลายที่ซ้อนทับกัน เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า การเคลือบแฝง (aliasing) ซึ่งเป็นผลร้ายกับระบบประมวลผลสัญญาณ เนื่องจากระบบแบบไม่ต่อเนื่องจะสนใจความถี่ในช่วงระหว่าง $-\frac{f_s}{2}$ จนถึง $\frac{f_s}{2}$ ซึ่งเรียกว่า ช่วงไนควิสต์ (Nyquist interval) ถ้าเกิด aliasing ในช่วงนี้ จะถือว่าสัญญาณที่สุ่มมาได้มีความผิดเพี้ยนไปก่อนที่จะมีการประมวลผลเสียอีก หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า สัญญาณที่สุ่มมาได้ไม่เป็นตัวแทนที่สมบูรณ์ของสัญญาณที่ถูกสุ่ม

ดังนั้น ความถี่ที่เหมาะสมในการสุ่มตัวอย่างคือ $f_s > 2f_{\max}$

เมื่อ f_s คือ อัตราการสุ่มตัวอย่าง (sampling rate)

f_{\max} คือ ความถี่สูงสุดของสัญญาณที่ถูกสุ่มตัวอย่าง

เราสามารถหาเวลาของการสุ่มตัวอย่าง ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ T (sample interval) ได้จากความสัมพันธ์ ดังนี้

$$T = \frac{1}{2f_{\max}}$$

ในการสุ่มตัวอย่าง หากสัญญาณที่นำมาประมวลผลมีข้อมูลจำนวนมาก เราสามารถลดจำนวนข้อมูลของสัญญาณได้โดยการลดอัตราการสุ่มตัวอย่างสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (decimation of a discrete time signal) ซึ่งมีหลักการดังนี้

ให้กำหนดช่วงเวลาการสุ่มตัวอย่างใหม่ ดังนี้

$$T' = NT$$

เมื่อ N คือ แฟกเตอร์การลดอัตราการสุ่มตัวอย่าง ซึ่งจะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า

$$\frac{1}{T'} = 2f_{\max}$$

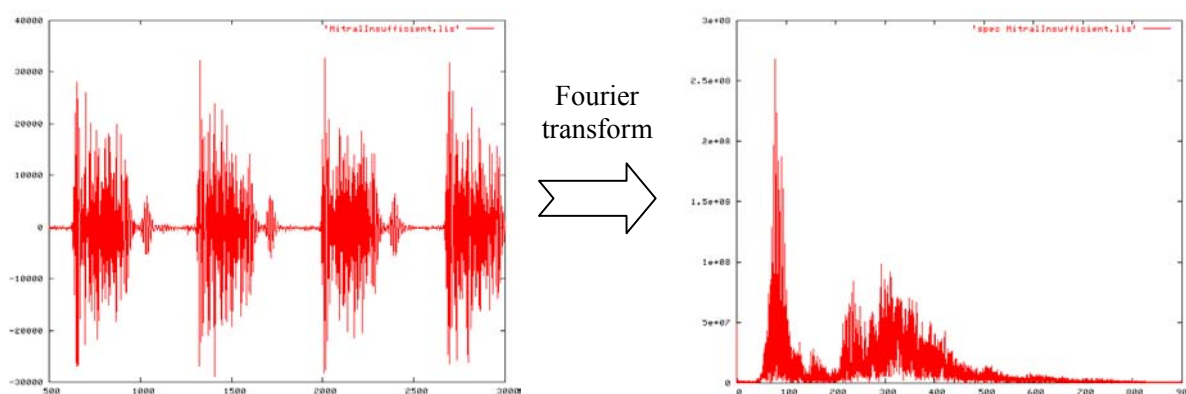
ดังนั้น อัตราการสุ่มตัวอย่างใหม่ ที่คำนวณได้จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของสมการ คือ

$$f_s' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{NT} > 2f_{\max}$$

สัญญาณกราฟเสียงเต้นหัวใจ (phonocardiogram :PCG) ที่นำมาวิเคราะห์ มักจะถูกสุ่มตัวอย่างด้วยอัตราการสุ่มตัวอย่าง (sampling rate) ที่ 11,025 หรือ 44,100 ตัวอย่างต่อวินาที (samples/seconds) ดังนั้นจำนวนข้อมูลจึงมีมากทำให้การประมวลผลทำได้ค่อนข้างช้า จึงจำเป็นต้องลดจำนวนข้อมูลโดยการลดอัตราการสุ่มตัวอย่างสัญญาณ (decimation of a discrete time signal) ทั้งนี้จะต้องคำนึงถึงผลกระทบที่อาจเกิดขึ้นจากการเคลือบแฝง (aliasing) ของสัญญาณหรือการผิดเพี้ยนของสัญญาณเมื่อเมื่อสร้างสัญญาณกลับคืน (reconstruction signal) และก่อนการนำสัญญาณมาทำการวิเคราะห์ใด ๆ นั้น เราจะนำสัญญาณเสียงเต้นหัวใจผ่านวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำ (low pass filter) เพื่อทำการกรองเฉพาะข้อมูลที่ต้องการนำมาวิเคราะห์ซึ่งจะเป็นการลดจำนวนข้อมูลที่ไม่จำเป็นได้อีกทางหนึ่ง

3.1.2 การวิเคราะห์สัญญาณเชิงเวลา-ความถี่ (time-frequency analysis)

ตั้งแต่ช่วงต้นศตวรรษที่ 19 เป็นต้นมา การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) กลายเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์สัญญาณและใช้กันอย่างแพร่หลายในงานด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ แนวคิดพื้นฐานของการแปลงฟูเรียร์มาจากสมมุติฐานที่ว่า สัญญาณใด ๆ ก็ตามโดยปกติแล้วจะสามารถแยกองค์ประกอบออกเป็นกลุ่มของกราฟรูปไซน์หลาย ๆ ความถี่ที่แตกต่างกันได้ ซึ่งเกิดจากกระบวนการโปรเจกชันสัญญาณบนกลุ่มของฟังก์ชันพื้นฐาน โดยในแต่ละฟังก์ชันพื้นฐานจะสร้างมาจากสัญญาณกราฟรูปไซน์ที่มีความถี่เดียว ค่าที่ได้จากการโปรเจกชันที่ความถี่หนึ่ง ๆ จะเป็นตัวบ่งชี้ถึง



ภาพประกอบ 3-1 การแปลงฟูเรียร์เป็นการแสดงถึงองค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณ

ความถี่เชิงของสัญญาณกับฟังก์ชันพื้นฐานรูปไซน์ที่ความถี่นั้น แล้วนำมาจัดเรียงให้อยู่ในรูปสเปกตรัมความถี่ ดังนั้น ผลจากการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณใด ๆ จะแสดงถึงองค์ประกอบความถี่ทั้งหมดของสัญญาณนั้น ๆ

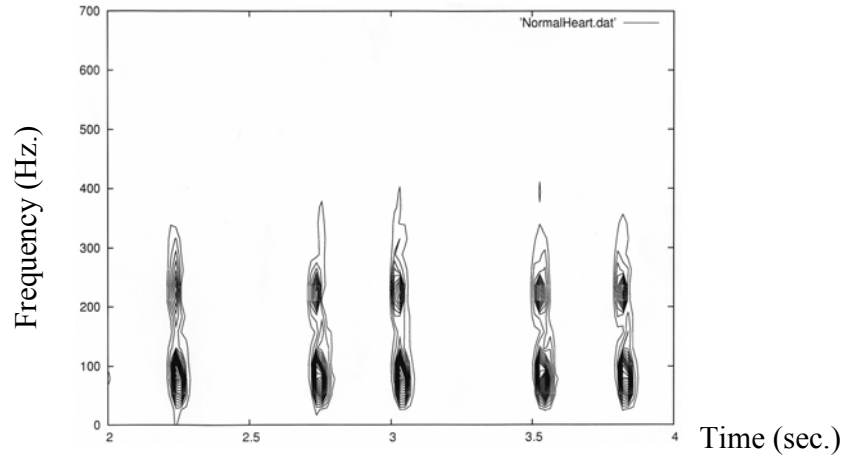
การแปลงฟูเรียร์จึงเป็นการวิเคราะห์องค์ประกอบเชิงความถี่ของสัญญาณ ที่นำมาใช้ประโยชน์เป็นอย่างมากสำหรับสัญญาณคงที่ (stationary signal) ในขณะที่สัญญาณส่วนใหญ่ที่พบในโลกของความเป็นจริงนั้นค่อนข้างซับซ้อนและมีองค์ประกอบเชิงความถี่ที่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ในกรณีนี้การใช้กราฟรูปไซน์อย่างง่ายมาแทนเป็นฟังก์ชันพื้นฐานของสัญญาณอาจจะไม่เพียงพอ ดังนั้นการอธิบายคุณลักษณะของสัญญาณด้วยสเปกตรัมความถี่เพียงอย่างเดียวอาจจะไม่เพียงพอ ดังนั้นการแปลงสัญญาณทั้งในเชิงเวลาและความถี่พร้อม ๆ กันจึงถูกพัฒนาขึ้น เพื่อใช้ในการอธิบายคุณลักษณะของสัญญาณที่มีองค์ประกอบเชิงความถี่ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา และเรียกกราฟที่แสดงองค์ประกอบของสัญญาณลักษณะดังกล่าวว่า “สเปกโตรแกรม” (spectrogram) โดยพื้นฐานแล้ว การสร้างสเปกโตรแกรมจะอาศัยหลักการหาองค์ประกอบเชิงความถี่ของสัญญาณในแต่ละวินโดว์ของเวลา (time window) ที่มีการเคลื่อนที่ ดังนั้น สเปกโตรแกรมจะประกอบด้วยข้อมูลขององค์ประกอบเชิงความถี่ของสัญญาณที่เวลาขณะใดขณะหนึ่งที่แตกต่างกัน

3.1.3 ผลการวิเคราะห์สัญญาณเชิงเวลา-ความถี่

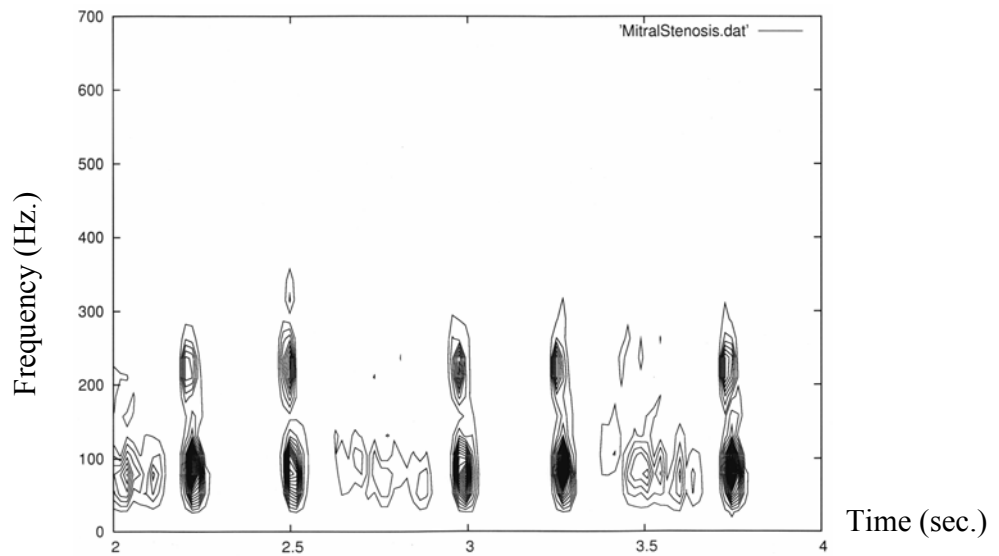
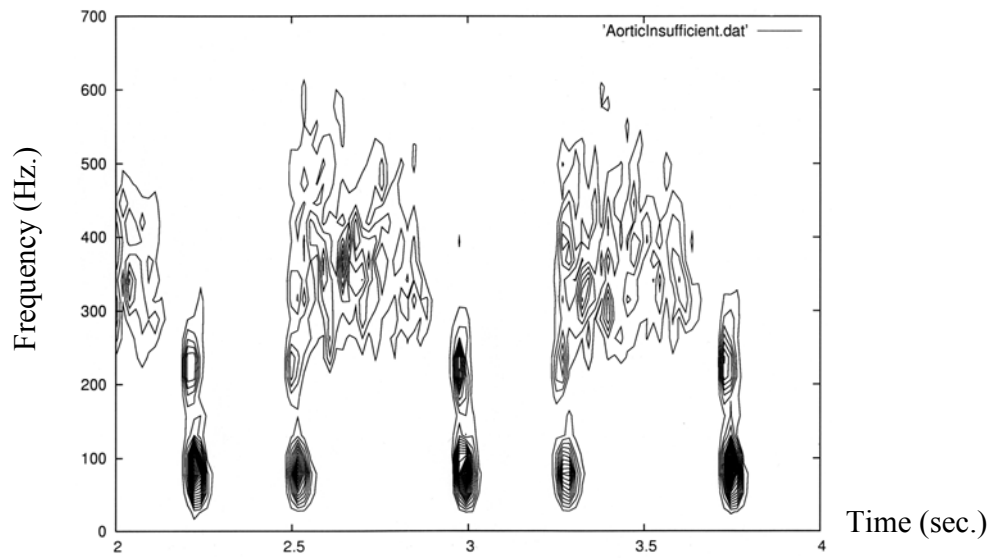
จากโปรแกรมการวิเคราะห์สัญญาณเชิงเวลา-ความถี่ที่พัฒนาขึ้นมาี้ สามารถแสดงกราฟเสียงต้นหัวใจที่เก็บบันทึกไว้ในรูปไฟล์ของข้อมูลที่มีนามสกุล .wav บนหน้าจอกอมพิวเตอร์ แล้วเลือกสัญญาณกราฟเสียงต้นหัวใจในช่วงเวลาที่ต้องการเพื่อนำสัญญาณมาวิเคราะห์ด้วยวิธีการเชิงเวลา-ความถี่

ตัวอย่างของผลการวิเคราะห์สัญญาณเสียงต้นหัวใจที่น่าแสดงนี้ เป็นตัวอย่างเสียงต้นหัวใจทั้งในคนปกติ และผู้ป่วยโรคหัวใจที่ทราบชนิดของโรค โดยตัวอย่างเสียงเหล่านี้ นำมาจากเว็บไซต์ http://www.3m.com/us/healthcare/professionals/littmann/jhtml/sounds/normal_split_first_heart_sound.jhtml วันที่ 14 พฤษภาคม 2546 ซึ่งประกอบด้วยตัวอย่างเสียงหัวใจที่ถูกบันทึกในรูปไฟล์ของข้อมูลบริเวณตำแหน่งที่มี maximum intensity ของแต่ละประเภทของโรค

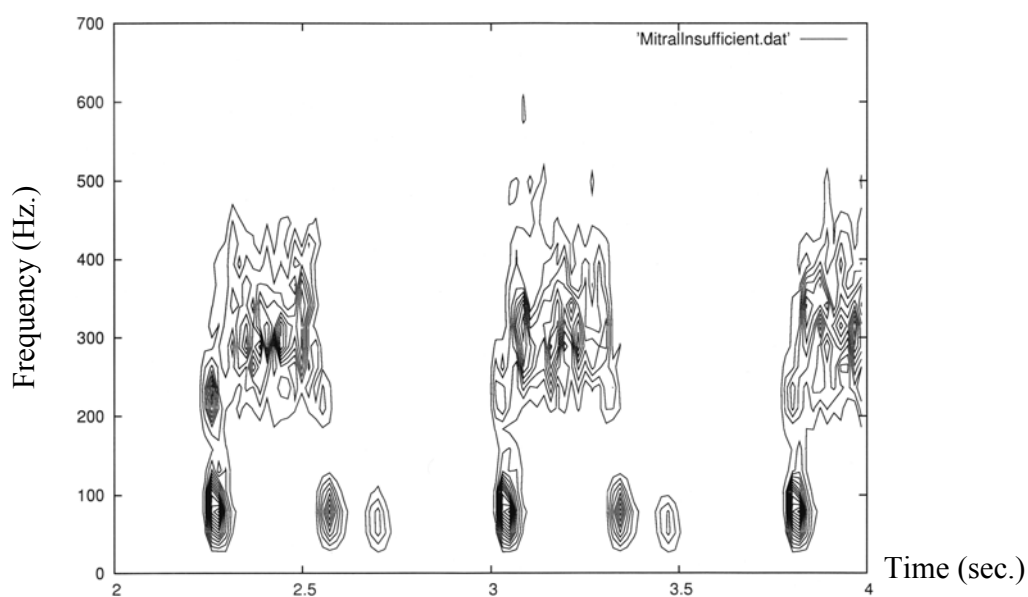
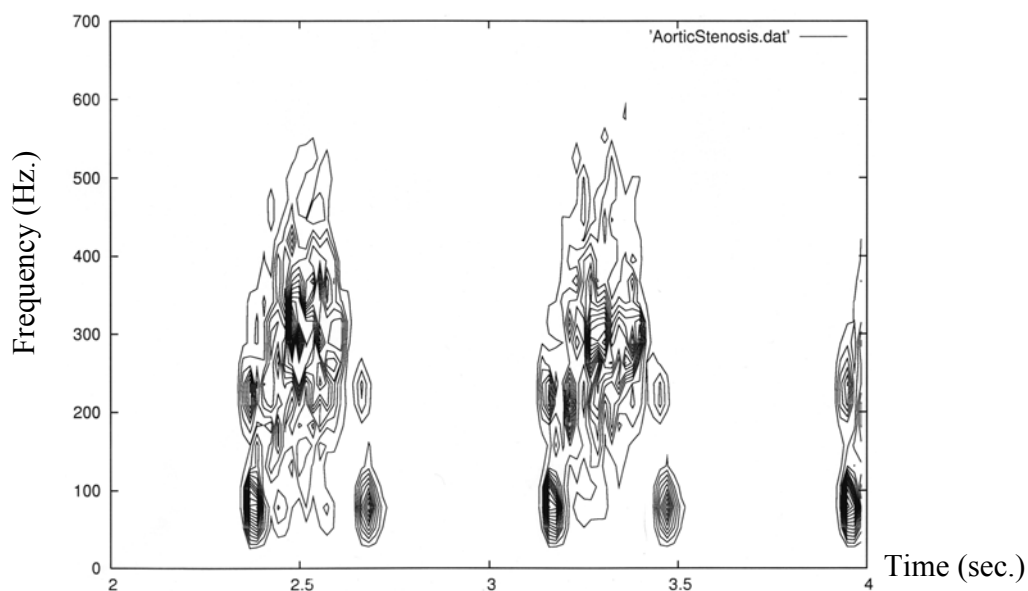
เมื่อเปรียบเทียบกราฟ spectrogram ของสัญญาณเสียงหัวใจของคนปกติและสัญญาณเสียงที่เป็นโรคหัวใจแต่ละประเภท พบว่ามีความแตกต่างอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้



ภาพประกอบ 3-2 กราฟสเปกโตรแกรมของสัญญาณเสียงหัวใจปกติ (Normal heart sound)



ภาพประกอบ 3-3 กราฟสเปกโตรแกรมของสัญญาณเสียงหัวใจที่เกิดจากลิ้นเออร์ติกรั่ว (บน)
และสัญญาณเสียงหัวใจที่เกิดจากลิ้นไมทรัลตีบ (ล่าง)



ภาพประกอบ 3-4 กราฟสเปกโตรแกรมของสัญญาณเสียงหัวใจที่เกิดจากลิ้นเอออร์ติกตีบ (บน)

และสัญญาณเสียงหัวใจที่เกิดจากลิ้นไมทรัลรั่ว (ล่าง)

กราฟสเปกโตรแกรมในภาพประกอบที่ 3-3 แสดงสัญญาณเสียงที่เกิดขึ้นขณะลิ้นหัวใจเอออร์ติกรั่วและลิ้นหัวใจไมทรัลตีบ ตามลำดับ บริเวณที่เส้นกราฟมีความเข้มมากแสดงว่าเป็นบริเวณที่มีแอมพลิจูดของเสียงสูงกว่าหรือเกิดเสียงดังชัดเจนกว่าบริเวณที่เส้นกราฟมีความเข้มน้อย จากกราฟพบว่า มี

เสียงที่มีความเข้มค่อนข้างสูง เกิดขึ้นเป็นคู่ ๆ ในเวลาใกล้เคียงกัน และเป็นเสียงที่มีความถี่ค่อนข้างต่ำ ลักษณะดังกล่าวถือว่าเป็นคุณสมบัติของเสียงหัวใจอันดับหนึ่งและอันดับสอง ตามลำดับ จากการสังเกตพบว่า มีเสียงที่เกิดขึ้นหลังจากเสียงหัวใจอันดับสอง ซึ่งจากความรู้ทางการแพทย์ระบุว่า เสียงหัวใจที่เกิดจากลิ้นเอออร์ติกรั่วหรือลิ้นไมทรัลตีบ จะพบเสียงเมอร์เมอร์ในระยะหัวใจคลายตัว (diastole) ซึ่งจะเกิดขึ้นหลังจากเสียงหัวใจอันดับสอง นอกจากนี้ ข้อมูลจากกราฟยังแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างเสียงหัวใจทั้งสองประเภท ซึ่งจะเห็นได้จากเสียงเมอร์เมอร์ที่เกิดจากลิ้นเอออร์ติกรั่วจะมีความถี่ที่สูงกว่าเสียงเมอร์เมอร์ที่เกิดจากลิ้นไมทรัลตีบ

ภาพประกอบที่ 3-4 แสดงกราฟสเปกโตรแกรมของสัญญาณเสียงที่เกิดขึ้นขณะที่ลิ้นหัวใจเอออร์ติคตีบและลิ้นหัวใจไมทรัลรั่ว ตามลำดับ จะเห็นว่า กราฟแสดงเสียงหัวใจอันดับหนึ่งและอันดับสองอย่างชัดเจน จากการสังเกตยังพบอีกว่า มีเสียงที่เกิดขึ้นระหว่างเสียงหัวใจอันดับหนึ่งและอันดับสอง ซึ่งจากประสบการณ์การฟังเสียงหัวใจของแพทย์ทำให้รู้ได้ว่า เสียงหัวใจที่เกิดจากลิ้นเอออร์ติคตีบหรือลิ้นไมทรัลรั่ว จะพบเสียงเมอร์เมอร์ในระยะหัวใจบีบตัว (systole) ซึ่งจะเกิดระหว่างเสียงหัวใจอันดับหนึ่งและอันดับสอง จึงสามารถสันนิษฐานได้ว่า เสียงดังกล่าวเป็นเสียงหัวใจที่เกิดจากลิ้นเอออร์ติคตีบหรือลิ้นไมทรัลรั่ว นอกจากนี้ ข้อมูลจากกราฟยังแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างเสียงหัวใจทั้งสองประเภท ซึ่งจะเห็นได้จากเสียงเมอร์เมอร์ที่เกิดจากลิ้นไมทรัลรั่ว จะไม่มีองค์ประกอบความถี่ต่ำ แต่จะมักจะเกิดเสียงที่มีความเข้มไม่มากนักและมีความถี่ต่ำหลังจากเสียงหัวใจอันดับสอง ซึ่งในที่นี้คือเสียงหัวใจอันดับสามนั่นเอง

จากผลการทดสอบ จึงพอสรุปได้ว่า กราฟสเปกโตรแกรมสามารถแสดงคุณลักษณะต่าง ๆ ของสัญญาณเสียงหัวใจได้ทั้งในเชิงเวลาและเชิงความถี่ ทำให้เราสามารถจำแนกส่วนประกอบของสัญญาณเสียงหัวใจได้อย่างชัดเจน ซึ่งจะทำการวิเคราะห์สัญญาณเสียงหัวใจทำได้ง่ายขึ้นและถูกต้องมากขึ้น

3.2 การดึงลักษณะเด่นของสัญญาณเสียงเต้นหัวใจ

หลังจากที่สามารถวิเคราะห์สัญญาณเสียงเต้นหัวใจและแสดงผลข้อมูลในเชิงกราฟสเปกโตรแกรมได้แล้ว ขั้นตอนต่อไปที่ถือว่าเป็นขั้นตอนที่งานวิจัยชิ้นนี้ให้ความสำคัญไม่น้อยไปกว่ากัน คือ การดึงคุณลักษณะเด่น (feature extraction) ของสัญญาณเสียงเต้นหัวใจ เนื่องจากสัญญาณเสียงเต้นหัวใจแต่ละแบบมีคุณลักษณะเด่นที่แตกต่างกัน จึงสามารถนำคุณลักษณะเด่นเหล่านี้เป็นข้อมูลในการคัดแยกเสียงเต้นหัวใจแต่ละประเภทได้

แนวคิดหลักในการดึงคุณลักษณะเด่นของสัญญาณ คือ การสร้างโมเดลที่สามารถดึงข้อมูลเฉพาะส่วนที่เป็นคุณลักษณะเด่นของสเปกโตรแกรมได้อย่างพอเหมาะ และโมเดลดังกล่าวจะต้องสามารถระบุคุณลักษณะเด่นเหล่านั้นเป็นค่าพารามิเตอร์ ซึ่งประกอบด้วย พิกัดของเวลาและความถี่ (position of time and frequency) , ช่วงกว้างของเวลา (temporal width) , ช่วงกว้างของความถี่ (band frequency width) และความเข้ม (intensity) ของสัญญาณในสเปกโตรแกรม

การสร้างโมเดลดังกล่าวจึงต้องใช้สมการทางคณิตศาสตร์ที่สามารถปรับฟังก์ชันให้พอดีกับส่วนที่เป็นคุณลักษณะเด่นในสเปกโตรแกรมมากที่สุด งานวิจัยชิ้นนี้เลือกใช้วิธีการกำลังสองน้อยสุด (least square method) โดยมีหลักการดังนี้

กำหนดให้ E เป็นฟังก์ชันของ mean square residue เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$E = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (f_M - S)^2$$

- เมื่อ f_M คือ ฟังก์ชันของโมเดลที่ต้องการสร้าง
 S คือ สเปกโตรแกรมของสัญญาณ
 E คือ ผลรวมของผลต่างกำลังสองระหว่างฟังก์ชันที่ต้องการสร้างกับสเปกโตรแกรม
 K คือ จำนวนชุดข้อมูลในสเปกโตรแกรม

ฟังก์ชัน f_M เป็นโมเดลที่ใช้สมการทางคณิตศาสตร์ในการจำลองแบบ ซึ่งประกอบด้วยพารามิเตอร์ที่ต้องการ และทำการปรับฟังก์ชันดังกล่าวให้พอดีกับข้อมูลในสเปกโตรแกรมมากที่สุด ในการสร้างโมเดลนี้จะใช้ฟังก์ชันของบัตเตอร์เวิร์ธ (Butterworth filter) ทั้งในแนวแกน x และแกน y เพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้น ให้เราจินตนาการโมเดลดังกล่าวเป็นลักษณะคล้ายกล่องสี่เหลี่ยมที่มีพารามิเตอร์ที่เราต้องการ ดังนั้น ฟังก์ชัน f_M สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

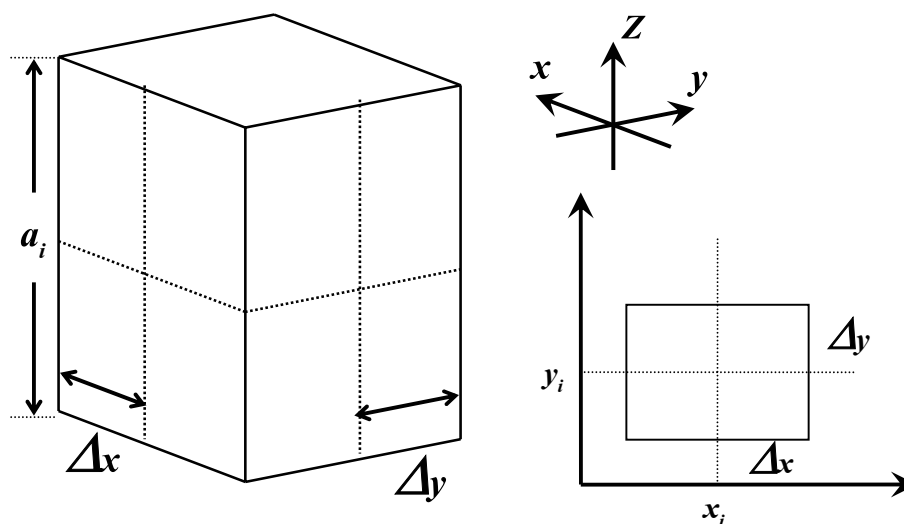
$$f_M = \sum_{i=1}^M a_i \cdot B_N \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right) \cdot B_N \left(\frac{y - y_i}{\Delta y_i} \right)$$

โดยที่

- B_N คือ ฟังก์ชันของ butterworth ซึ่งสามารถหาได้จาก $B_N(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^{2N}}}$
 a_i คือ ความสูงหรือแอมพลิจูดของโมเดล แทนด้วย ความเข้มของข้อมูล
 x_i คือ พิกัดในแนวแกน x แทนด้วย พิกัดของเวลา
 Δx_i คือ ช่วงเวลาแนวแกน x แทนด้วย ช่วงของเวลา

y_i คือ พิกัดในแนวแกน y แทนด้วย พิกัดของความถี่

Δy_i คือ ช่วงเวลาแนวแกน y แทนด้วย ช่วงของความถี่



ภาพประกอบ 3-5 แบบจำลองของฟังก์ชันที่ประกอบด้วยค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการ

ต้องการหาพารามิเตอร์ที่ทำให้ฟังก์ชัน E มีค่าน้อยที่สุด โดยใช้การประยุกต์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร นั่นคือ $\nabla E = 0$

ทำการประมาณฟังก์ชันแบบเชิงเส้นแล้วหาค่าด้วยวิธีการทำซ้ำของนิวตัน (Newton's method) สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร

3.2.1 วิธีการของนิวตัน (Newton's method)

วิธีการของนิวตัน เป็นวิธีการที่ใช้ในการหาค่าหรือคำตอบของฟังก์ชัน โดยการซ้ำ ๆ จนกระทั่งค่าที่ได้เข้าใกล้คำตอบมากที่สุด เรียกลักษณะเช่นนี้ว่า “การลู่เข้า” (convergence)

กำหนดให้ $E(\mathbf{x})$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่มี \mathbf{x} เป็นเวกเตอร์ ซึ่งมีสมาชิก 5 ตัว คือ x_1, x_2, x_3, x_4 และ x_5 ซึ่งแทนพารามิเตอร์ที่ต้องการทราบ จากอนุกรมเทย์เลอร์จะได้ว่า

$$E(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}_k) + \nabla E(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \nabla^2 E(\mathbf{x}_k) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \dots$$

ทำการอนุพันธ์ฟังก์ชัน $E(\mathbf{x})$ เทียบกับเวกเตอร์ \mathbf{x}

$$\nabla E(\mathbf{x}) \approx \nabla E(\mathbf{x}_k) + \nabla^2 E(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

หาค่าเวกเตอร์ \mathbf{x} ที่ทำให้ฟังก์ชัน $E(\mathbf{x})$ มีค่าน้อยที่สุดจากคำตอบของสมการ $\nabla E = 0$

$$\nabla E(\mathbf{x}) = \nabla E(\mathbf{x}_k) + \nabla^2 E(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = 0$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = -[\nabla^2 E(\mathbf{x}_k)]^{-1} [\nabla E(\mathbf{x}_k)]$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_k - [\nabla^2 E(\mathbf{x}_k)]^{-1} [\nabla E(\mathbf{x}_k)]$$

จะได้สูตรการทำซ้ำของนิวตันดังสมการ

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - d_k$$

โดยที่

$$d_k = H^{-1} \nabla E \quad \text{คือ Newton step}$$

$$H = \nabla^2 E \quad \text{คือ Hessian matrix}$$

$$\nabla E \quad \text{คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือ Gradient ของ } E$$

3.2.2 การหาค่าเกรเดียน (Gradient)

เกรเดียนของฟังก์ชัน E คือ การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน E ใช้สัญลักษณ์ ∇E ซึ่งสามารถหาได้ 2 วิธี คือ วิธือนาไลติก (analytic) และวิธีเชิงตัวเลข (numerical) ในงานวิจัยนี้จะหาอนุพันธ์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข เนื่องจากฟังก์ชัน E ที่นำมาวิเคราะห์ไม่อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่เห็นได้ชัดเจน แต่อยู่ในรูปของข้อมูลเชิงตัวเลขที่มีจำนวนมาก จึงสามารถหาค่าเกรเดียนได้ดังนี้

$$\nabla E = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E}{\partial x_2} \\ \frac{\partial E}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E}{\partial x_4} \\ \frac{\partial E}{\partial x_5} \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K 2(f_M - S) \cdot \frac{\partial f_M}{\partial u}, \quad u \in \{x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, x_{5n}\}$$

ค่า $\frac{\partial f_M}{\partial u}$ สามารถหาได้จากตาราง 3-1

ตาราง 3-1 สูตรการหาค่าอันดับหนึ่งของฟังก์ชัน f_M

$\frac{df_M}{da_n}$	$B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$
$\frac{df_M}{dx_n}$	$a_n \frac{dB_N}{dx_n} B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$
$\frac{df_M}{d\Delta x_n}$	$a_n \frac{dB_N}{d\Delta x_n} B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$
$\frac{df_M}{dy_n}$	$a_n B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) \frac{dB_N}{dy_n}$
$\frac{df_M}{d\Delta y_n}$	$a_n B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) \frac{dB_N}{d\Delta y_n}$

3.2.3 การหา Hessian matrix

เป็นการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน E ใช้สัญลักษณ์ H ซึ่งสามารถหาค่า Hessian matrix ได้ดังนี้

$$H = \nabla^2 E = \nabla \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E}{\partial x_2} \\ \frac{\partial E}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E}{\partial x_4} \\ \frac{\partial E}{\partial x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$H_{uv} = \frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K 2 \cdot \left\{ \frac{\partial f_M}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_M}{\partial v} + (f_M - S) \cdot \frac{\partial^2 f_M}{\partial u \partial v} \right\}, \quad u \in \{x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, x_{5n}\}$$

$$v \in \{x_{1p}, x_{2p}, x_{3p}, x_{4p}, x_{5p}\}$$

ค่า $\frac{\partial^2 f_M}{\partial u \partial v}$ สามารถหาได้จากตาราง 3-2

ตาราง 3-2 สูตรการหาค่าอันดับสองของฟังก์ชัน f_M

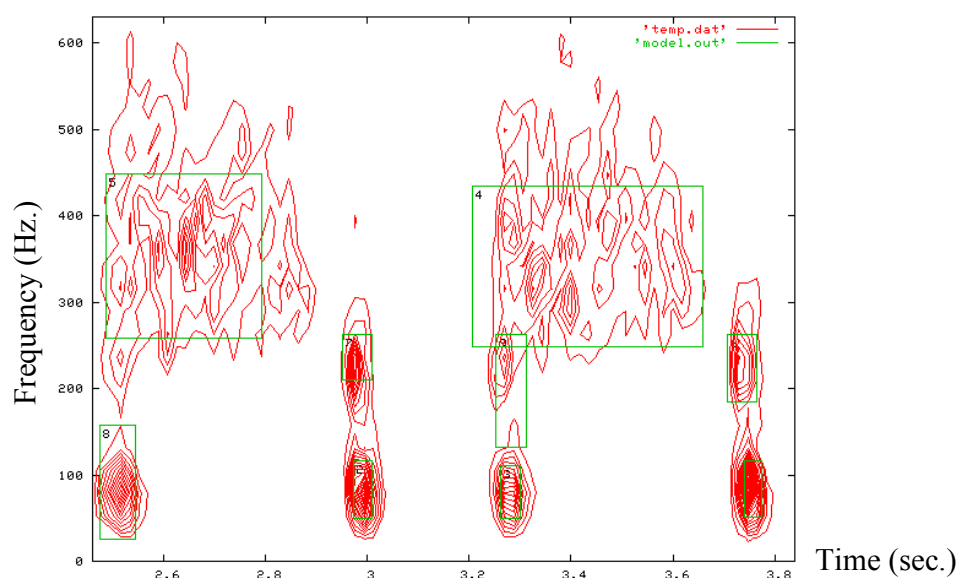
$\frac{d^2 f_M}{d \downarrow d \rightarrow}$	a_n	x_n	Δx_n	y_n	Δy_n
a_n	0	$\frac{dB_N}{dx_n} B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$	$\frac{dB_N}{d\Delta x_n} B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$	$B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) \frac{dB_N}{dy_n}$	$B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) \frac{dB_N}{d\Delta y_n}$
x_n	$\frac{dB_N}{dx_n} B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$	$a_n \frac{d^2 B_N}{dx_n^2} B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$	$a_n \frac{d^2 B_N}{dx_n d\Delta x_n} B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$	$a_n \frac{dB_N}{dx_n} \frac{dB_N}{dy_n}$	$a_n \frac{dB_N}{dx_n} \frac{dB_N}{d\Delta y_n}$
Δx_n	$\frac{dB_N}{d\Delta x_n} B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$	$a_n \frac{d^2 B_N}{d\Delta x_n dx_n} B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$	$a_n \frac{d^2 B_N}{d\Delta x_n^2} B_N \left(\frac{y - y_n}{\Delta y_n} \right)$	$a_n \frac{dB_N}{d\Delta x_n} \frac{dB_N}{dy_n}$	$a_n \frac{dB_N}{d\Delta x_n} \frac{dB_N}{d\Delta y_n}$
y_n	$B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) \frac{dB_N}{dy_n}$	$a_n \frac{dB_N}{dx_n} \frac{dB_N}{dy_n}$	$a_n \frac{dB_N}{d\Delta x_n} \frac{dB_N}{dy_n}$	$a_n B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) \frac{d^2 B_N}{dy_n^2}$	$a_n B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) \frac{d^2 B_N}{dy_n d\Delta y_n}$
Δy_n	$B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) \frac{dB_N}{d\Delta y_n}$	$a_n \frac{dB_N}{dx_n} \frac{dB_N}{d\Delta y_n}$	$a_n \frac{dB_N}{d\Delta x_n} \frac{dB_N}{d\Delta y_n}$	$a_n B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) \frac{d^2 B_N}{d\Delta y_n dy_n}$	$a_n B_N \left(\frac{x - x_n}{\Delta x_n} \right) \frac{d^2 B_N}{d\Delta y_n^2}$

3.2.4 ผลการทดสอบการดึงลักษณะเด่นของสัญญาณเสียงหัวใจ

เมื่อใช้สมการทางคณิตศาสตร์ในการสร้างโมเดลที่เหมาะสมเพื่อดึงคุณลักษณะเด่นของข้อมูลในกราฟสเปกโตรแกรมแล้ว ทำการทดสอบอัลกอริทึมของโปรแกรมกับตัวอย่างสัญญาณเสียงหัวใจที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา ได้ผลการทดสอบดังกราฟ

ตัวอย่างสัญญาณเสียงหัวใจที่แสดงการทดสอบนี้เป็นเสียงหัวใจที่เกิดขึ้นขณะลิ้นหัวใจเออรัติกรัว (aortic insufficiency) ซึ่งประกอบด้วยเสียงหัวใจอับดับหนึ่ง (S1) เสียงหัวใจอับดับสอง (S2) และเสียงเมอร์เมอร์ที่มีความถี่ค่อนข้างสูงและเกิดขึ้นหลังจากเสียงหัวใจอับดับสอง เสียงเหล่านี้ถือเป็นคุณลักษณะเด่นที่มีความจำเพาะเจาะจงและแตกต่างจากเสียงหัวใจประเภทอื่น ๆ

เมื่อทำการทดสอบโปรแกรม ปรากฏว่า โมเดลที่สร้างขึ้นสามารถดึงข้อมูลสำคัญของสัญญาณได้เกือบทั้งหมด ดังจะเห็นได้จาก รูปสี่เหลี่ยมที่ล้อมรอบบริเวณที่มีข้อมูลที่เป็นคุณลักษณะเด่นของสัญญาณ ซึ่งหมายความว่า แต่ละบริเวณที่เป็นคุณลักษณะเด่นของสัญญาณสามารถบ่งบอกคุณสมบัติ

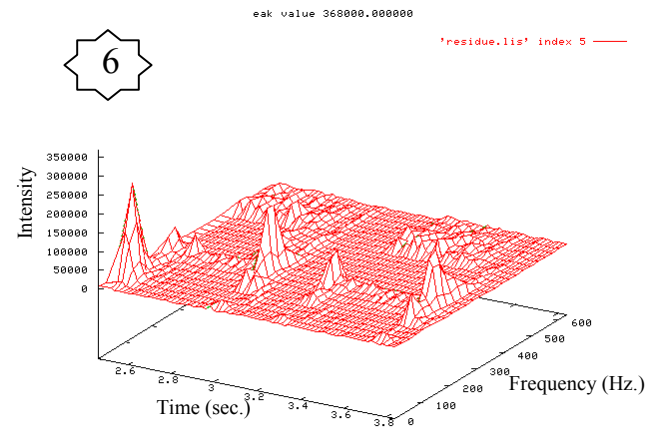
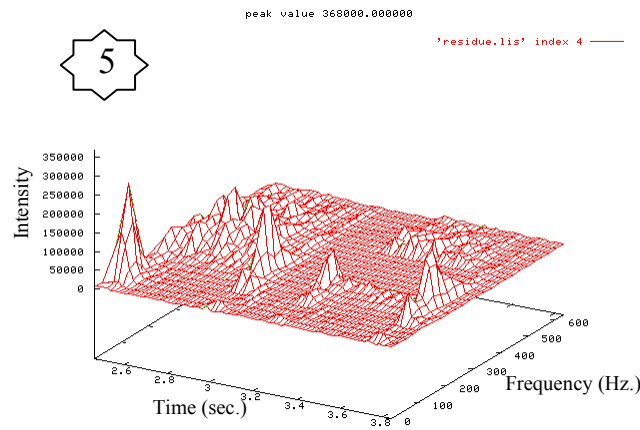
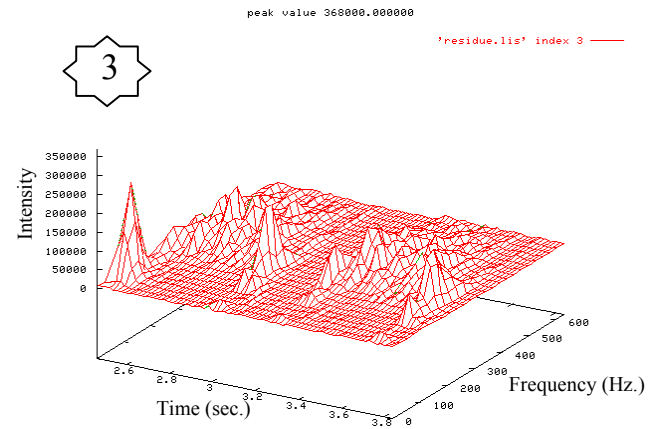
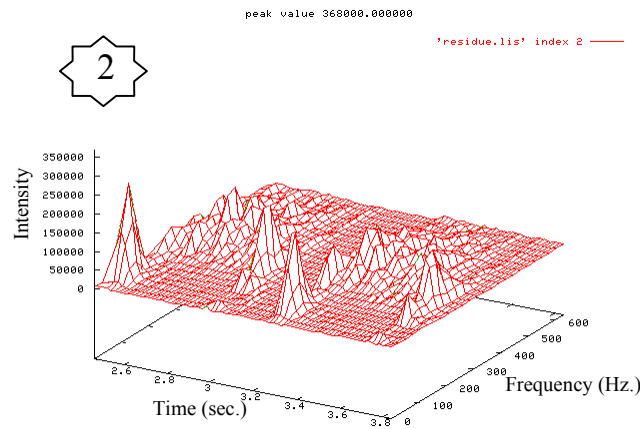
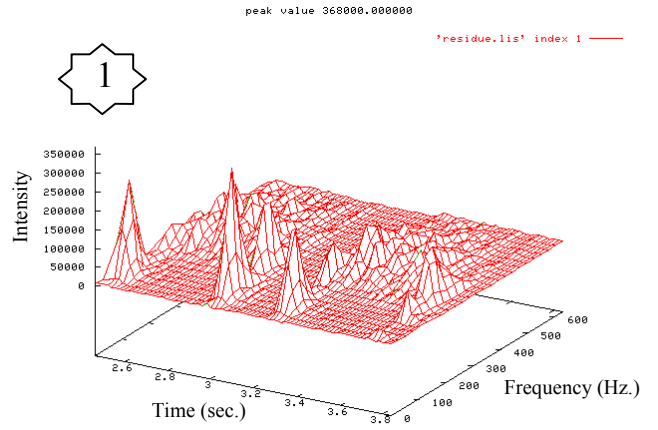
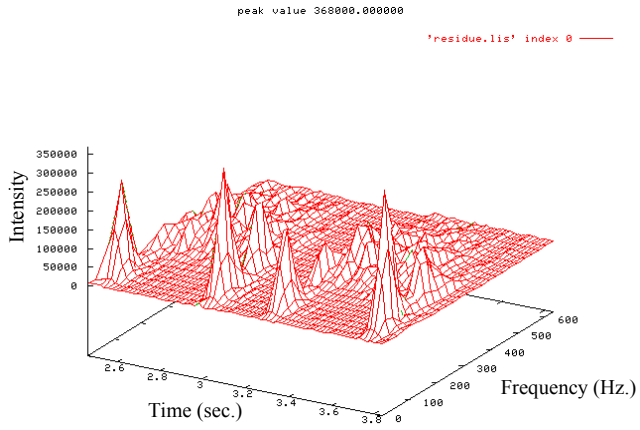


ภาพประกอบ 3-5 ผลทดสอบการดึงคุณลักษณะเด่นของสเปกโตรแกรมของสัญญาณโรคหัวใจ

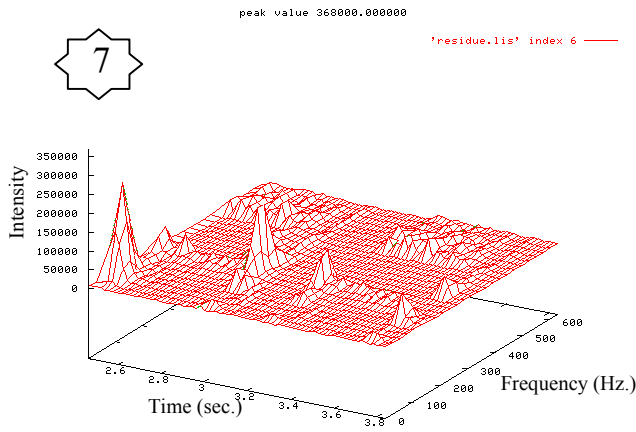
ของสัญญาณบริเวณนั้นด้วยค่าพารามิเตอร์ จากตัวอย่างสัญญาณเสียงหัวใจขณะลิ้นหัวใจเออรัติกรั่ว (aortic insufficiency) ได้ค่าพารามิเตอร์ดังต่อไปนี้

feature	intensity	temporal center(s)	central frequency(Hz)	duration (s)	bandwidth (Hz)
1	2.41e+05	84.00	3.721	0.040	65.22
2	1.43e+05	81.67	2.955	0.056	54.44
3	1.41e+05	82.27	3.251	0.046	65.66
4	3.94e+04	362.04	3.410	0.380	216.88
5	4.31e+04	369.69	2.634	0.318	236.58
6	1.09e+05	81.67	2.496	0.056	54.44
7	6.67e+04	231.39	3.708	0.056	81.66
8	4.67e+04	176.94	2.955	0.056	136.12
9	4.64e+04	214.53	2.476	0.032	60.76

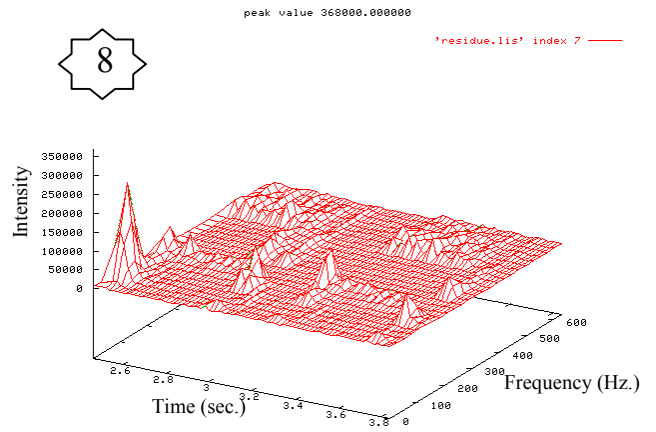
กราฟข้างล่างนี้แสดงกระบวนการดึงคุณลักษณะเด่นของข้อมูลในสเปกโตรแกรมเป็นลำดับขั้น จากสัญญาณเสียงเดิม ผ่านขั้นตอนการดึงคุณลักษณะเด่นของสัญญาณที่ละบริเวณจนเหลือเพียงข้อมูลที่ ไม่สำคัญและไม่มีความหมายในแง่การวินิจฉัยโรค



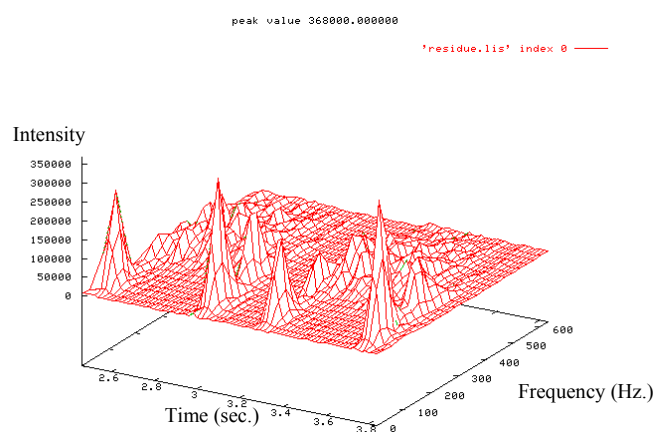
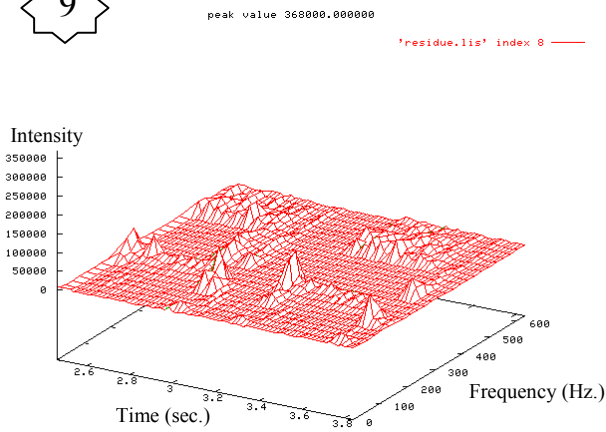
7



8

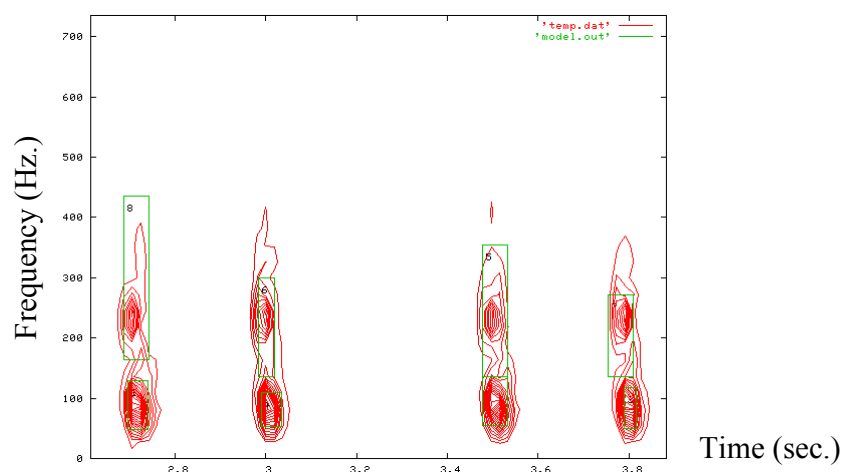


9

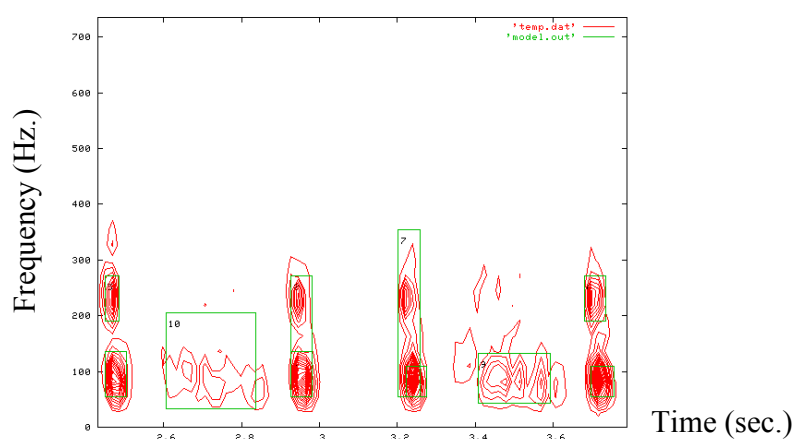


ภาพประกอบ 3-6 ลำดับขั้นตอนการดึงคุณลักษณะเด่นของตัวอย่างสัญญาณหัวใจขณะลิ้นหัวใจเอออร์ติกรั่ว (aortic insufficiency) เปรียบเทียบกับสัญญาณดั้งเดิม

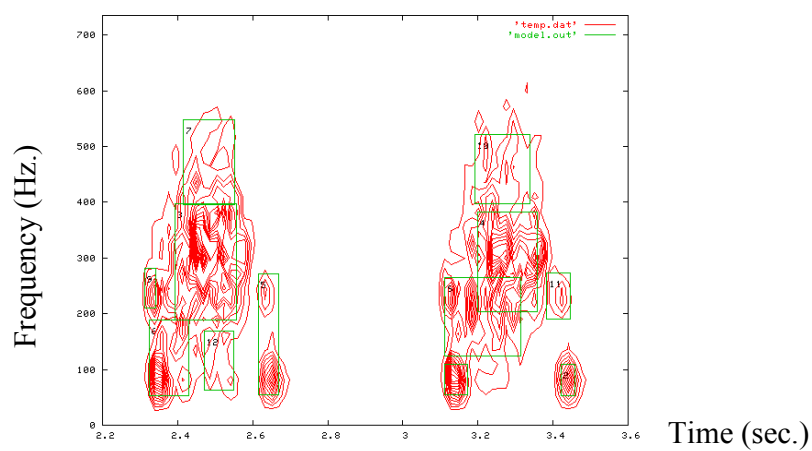
เมื่อทดสอบกับตัวอย่างสัญญาณเสียงหัวใจประเภทอื่น ๆ ปรากฏว่า ให้ผลการทดสอบที่คล้ายคลึงกัน กล่าวคือ กระบวนการประมวลผลสัญญาณสามารถดึงคุณลักษณะเด่นที่จำเพาะของตัวอย่างสัญญาณเสียงหัวใจแต่ละประเภทได้ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้



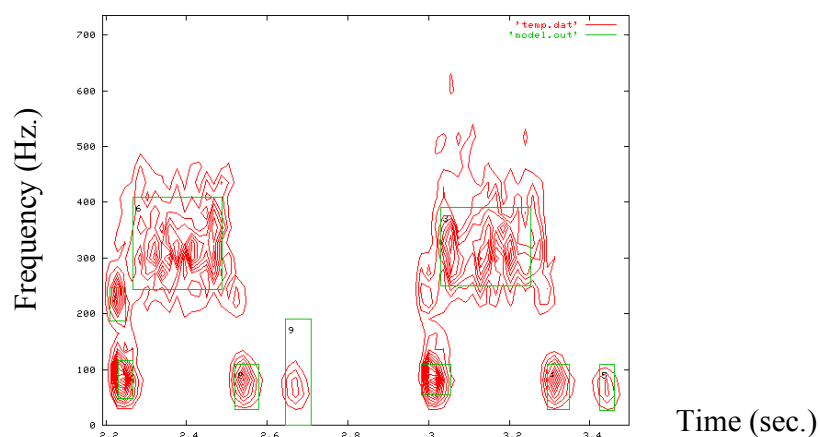
ภาพประกอบ 3-7 การดึงคุณลักษณะเด่นของสัญญาณเสียงหัวใจปกติ (Normal heart sound)



ภาพประกอบ 3-8 การดึงคุณลักษณะเด่นของสัญญาณเสียงหัวใจที่เกิดจากลิ้นไมตรีตติบ



ภาพประกอบ 3-9 การดึงคุณลักษณะเด่นของสัญญาณเสียงหัวใจที่เกิดจากลิ้นเออรัตติบ



ภาพประกอบ 3-10 การดึงคุณลักษณะเด่นของสัญญาณเสียงหัวใจที่เกิดจากคลื่นไมทรัลรั่ว

จากผลการทดสอบ จึงสรุปได้ว่า โปรแกรมเกี่ยวกับการประมวลผลสัญญาณสามารถบ่งชี้และดึงส่วนที่เป็นคุณลักษณะเด่นของข้อมูลในสเปกโตรแกรมได้ ค่อนข้างดี และยังสามารถระบุค่าพารามิเตอร์ของทุก ๆ ส่วนที่เป็นคุณลักษณะเด่นของสเปกโตรแกรมได้ ซึ่งค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวจะเป็นข้อมูลสำคัญที่ใช้ในขั้นตอนการวินิจฉัยโรคหัวใจของระบบผู้เชี่ยวชาญต่อไป