บทที่ 3
วิธีการวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 วัสดุและอุปกรณ์ที่ใช้ในงานวิจัย

3.1.1 เครื่องคอมพิวเตอร์ยี่ห้อ Hewlett Packard รุ่น Vectra มีคุณสมบัติทางฮาร์ดแวร์ ดังนี้

CPU Type	Pentium(R) III
CPU Speed	933 MHz
Cache Ram	256 MB
Base Memory	640 KB
Extended Memory	261120 KB

3.1.2 โปรแกรมที่ใช้

ระบบปฏิบัติการ Microsoft Windows 2000

โปรแกรมเชิงวิเคราะห์ MATLAB เวอร์ชัน 6.5

3.1.3 ไฟล์ข้อมูลเสียงเต้นหัวใจ นามสกุล .wav

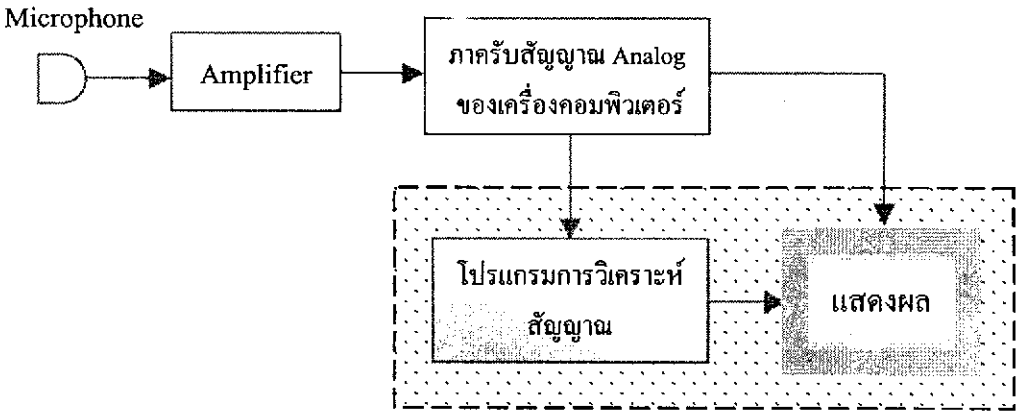
3.2 วิธีดำเนินงานวิจัย

แบ่งงานวิจัยเป็น 2 ส่วนใหญ่ๆคือ ฮาร์ดแวร์(Hardware) และซอร์ฟแวร์ (Software) ในส่วนของฮาร์ดแวร์จะทำการบันทึกเสียงเต้นหัวใจจากอาสาสมัคร โดยใช้ไมโครโฟนในการรับสัญญาณเสียงเต้นหัวใจซึ่งเป็นสัญญาณอะนาลอก (Analog signal) จากนั้นนำสัญญาณเสียงเต้นหัวใจมาผ่านวงจรขยายและแปลงเป็นสัญญาณดิจิตอล (Digital signal) โดยผ่านวงจรเอทูดี (A/D circuit) เพื่อส่งไปเก็บไว้บนฮาร์ดดิสก์ของเครื่องคอมพิวเตอร์ในรูปของไฟล์ข้อมูลที่เป็นนามสกุล .wav และในส่วนของซอร์ฟแวร์ จะนำข้อมูลที่บันทึกไว้ในเครื่องคอมพิวเตอร์มาแสดงผลเป็นกราฟเสียงเต้นหัวใจ (Phonocardiogram: PCG) บนหน้าจอคอมพิวเตอร์ และขณะเดียวกันก็สามารถนำข้อมูลนั้นมาประมวลผลและวิเคราะห์เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ด้วยวิธีการแม็ชชิงเพิซยูท (Matchig pursuit method) เพื่อให้แพทย์สามารถนำผลที่ได้ไปช่วยในการวินิจฉัยโรคต่อไป

สำหรับงานวิจัยที่ได้นำเสนอนี้จะทำในส่วนการวิเคราะห์กราฟเสียงเต้นหัวใจโดยเขียนซอร์ฟแวร์ด้วยโปรแกรมเชิงวิเคราะห์ MATLAB ซึ่งเหตุผลที่ผู้วิจัยเลือกใช้ MATLAB เนื่องจากงานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเชิงทฤษฎีเพื่อศึกษาวิธีการใหม่ๆที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์กราฟเสียงเต้นหัวใจและพิสูจน์ว่าวิธีการแม็ชชิงเพิซยูทสามารถวิเคราะห์กราฟเสียงเต้นหัวใจได้จริง และวิธีการนี้ประกอบ

ด้วยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน ซึ่ง MATLAB สามารถสนับสนุนการเขียนซอร์ฟแวร์เกี่ยวกับฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ได้ดี

และในส่วนของฮาร์ดแวร์นั้นได้มีผู้ทำการวิจัยไว้แล้ว แสดงบลอกไดอะแกรมของวิธีการวิจัย ดังภาพประกอบที่ 3-1



ภาพประกอบที่ 3-1 แสดงวิธีการดำเนินงานวิจัย

3.3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในงานวิจัย

3.3.1 วิธีแม็ชชิงเพิซยูท (The Matching Pursuit Method)

การวิเคราะห์สัญญาณด้วยวิธีแม็ชชิงเพิซยูท เป็นกระบวนการแยกสัญญาณใดๆแบบ Linear expansion โดยวิธีการนี้จะต้องใช้ดิกชันนารี (Dictionary) ซึ่งประกอบไปด้วยกลุ่มของฟังก์ชันที่เรียกว่า Time–frequency atoms และในการวิเคราะห์หรือการแยกสัญญาณนั้น ทำได้โดยการโปรเจกชัน (Projection) สัญญาณซ้ำๆไปยังอะตอมหรือ Time–frequency atoms ของฟังก์ชันดิกชันนารี (Function dictionary) ซึ่งอะตอมนั้นมีความสัมพันธ์กับสัญญาณในลักษณะที่ทำให้ขนาดของ Inner product ระหว่างอะตอมกับสัญญาณที่นำมาวิเคราะห์มีค่าสูงสุด และสำหรับการสร้างดิกชันนารีหรือเรียกว่า "รีดันแดนซ์ดิกชันนารี" (Redundant dictionary) ทำได้โดยการสเกล (Scaling) ทรานสเลท (Translating) และมอดูเลท (Modulating) วินโดว์ฟังก์ชัน (Window function: $g(t)$) หรือเรียก $g(t)$ นี้ว่า Gaussian window fuction

สามารถแสดงสัญญาณต่างๆของวิธีการแม็ชชิงเพิซยูท ได้ดังนี้

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g_{\gamma_n}(t) \qquad (3\text{-}1)$$

$$g_{\gamma_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_n}} g\left(\frac{t-u_n}{s_n}\right) e^{i\xi_n t} \qquad (3\text{-}2)$$

$$\gamma = (s_n, u_n, \xi_n)$$

เมื่อ $f(t)$ คือ สัญญาณใดๆที่ต้องการวิเคราะห์

$g_{\gamma_n}(t)$ คือ อะตอมใดๆที่เป็น Gaussian window function ซึ่งถูกบรรจุอยู่ในดิกชันนารี

a_n คือ สัมประสิทธิ์การยืดขยาย

s_n คือ Scale factor ซึ่งทำให้ค่า $\left\| g_{\gamma_n}(t) \right\| = 1$ เสมอ

p_n คือ ตัวเจาะจงตำแหน่ง

ξ_n คือ Frequency modulation

u_n คือ Translation

องค์ประกอบที่แยกออกมาด้วยวิธีแม็ชชิงเพิซยูทนั้น สามารถนำมาวิเคราะห์ได้ทั้งใน Time domain และ Frequency domain พร้อมๆกัน ซึ่งการกระทำอย่างนี้จะทำให้มองเห็นคุณสมบัติต่างๆ ของสัญญาณ $f(t)$ ได้ชัดเจนยิ่งขึ้น และองค์ประกอบที่แยกมาได้นี้สามารถนำกลับมารวมกันใหม่ ได้สัญญาณที่คล้ายคลึงกับสัญญาณเดิมมาก

เนื่องจากสัญญาณที่นำมาวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้เป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (Discrete–time signal) ดังนั้นเราจะแทนสัญญาณที่ต้องการวิเคราะห์ด้วยสัญลักษณ์ $f(n)$ หรือ $f[n]$

ในทางปฏิบัติ รีดันแดนซ์ดิกชันนารี $D = (g_\gamma(t))_{\gamma \in \Gamma}$ (อาจเรียกว่า Gabor dictionary) ของ Time-frequency atoms จะต้องถูกสร้างขึ้นก่อนเป็นอันดับแรก และในการแยกสัญญาณ $f(t)$ ไปเป็นชุดของอะตอมที่มีโครงสร้างแบบ Time-frequency ของสัญญาณได้นั้นต้องทำออโทกอนัลโปรเจกชัน (Orthogonal projection) สัญญาณ $f(n)$ ซ้ำๆ ลงไปบนดิกชันนารี

ให้ $g_{\gamma_0} \in D$ คืออะตอมหนึ่งใน Gabor dictionary ในการโปรเจกชันครั้งแรกจะแยกสัญญาณออกเป็นสองส่วนดังสมการ

$$f = < f, g_{\gamma_0} > g_{\gamma_0} + Rf \qquad (3\text{-}3)$$

เมื่อ

$< f, g_{\gamma_0} >$ คือ Inner product ของ f และ g_{γ_0}

$$< f, g >= \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\bar{g}[n]$$

$\bar{g}[n]$ คือ Complex conjugate ของ $g[n]$

Rf คือ The residue vector ซึ่งได้หลังจากการประมาณค่า f ในทิศทางของ g_{γ_0} โดยที่ Rf จะออโทกอนัลกับ g_{γ_0} ดังนั้น

$$\|f\|^2 = \left| < f, g_{\gamma_0} > \right|^2 + \|Rf\|^2 \tag{3-4}$$

จากสมการที่ (3-3) จะต้องหาอะตอม g_{γ_0} ที่เหมาะสมที่สุดซึ่งทำให้ $\|Rf\|$ มีค่าน้อยที่สุด หรือเมื่อนำ g_{γ_0} มา Inner product กับสัญญาณ f แล้ว ทำให้ $\left| < f, g_{\gamma_0} > \right|$ มีค่าสูงสุด โดยมีเงื่อนไขการหา g_{γ_0} ดังสมการที่ (3-5)

$$\left| < f, g_{\gamma_0} > \right| \geq \alpha \sup_{\gamma \in \Gamma} \left| < f, g_{\gamma} > \right| \tag{3-5}$$

เมื่อ

α คือ Optimality factor ซึ่ง $0 < \alpha \leq 1$

หลังจากนั้นทำกระบวนการนี้ซ้ำโดยการนำ Rf แทนที่ f ถ้ากระบวนการนี้ถูกทำซ้ำๆไปจนกระทั่งสัญญาณถูกแยกไปเป็นจำนวน m องค์ประกอบแล้ว จะสามารถแสดงการแยกองค์ประกอบ (Decompose) ของสัญญาณ f ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
f &= < f, g_{\gamma_0} > g_{\gamma_0} + R^1 f \\
&= < f, g_{\gamma_0} > g_{\gamma_0} + < R^1 f, g_{\gamma_1} > g_{\gamma_1} + R^2 f \\
&= < f, g_{\gamma_0} > g_{\gamma_0} + < R^1 f, g_{\gamma_1} > g_{\gamma_1} + < R^2 f, g_{\gamma_2} > g_{\gamma_2} + R^3 f \\
&= < f, g_{\gamma_0} > g_{\gamma_0} + < R^1 f, g_{\gamma_1} > g_{\gamma_1} + < R^2 f, g_{\gamma_2} > g_{\gamma_2} + \ldots + < R^m f, g_{\gamma_m} > g_{\gamma_m} + R^{m+1} f \\
f &= \sum_{n=0}^{m} < R^n f, g_{\gamma_n} > g_{\gamma_n} + R^{m+1} f
\end{aligned} \tag{3-6}$$

เมื่อ

$R^n f$ คือ Signal residue ของการทำซ้ำๆจำนวน n ครั้ง

$R^0 f = f$

และในทำนองเดียวกัน สามารถหาค่าพลังงานของ f ในสมการที่ (3-6) ได้ดังนี้

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{m} |< R^n f, g_{\gamma_n} >|^2 + \|R^{m+1} f\|^2 \tag{3-7}$$

ในสมการที่ (3-8) จะแสดงให้เห็นว่าเมื่อ m มีค่าเข้าใกล้ ∞ สัญญาณจะถูกแทนด้วยอนุกรมกำลังของ Time-frequency atoms จากดิกชันนารี โดยไม่มีการผิดเพี้ยนใดๆ ดังนี้

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} < R^n f, g_{\gamma_n} > g_{\gamma_n}$$
$$\lim_{m \to \infty} R^m f = 0 \tag{3-8}$$

และกำลังงานของสัญญาณ คือ

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |< R^n f, g_{\gamma_n} >|^2 \tag{3-9}$$

การแยกองค์ประกอบของสัญญาณด้วยวิธีการแม็ชชิงเพิซยูทนั้น องค์ประกอบของสัญญาณที่มีกำลังงานสูงกว่ามักจะถูกแยกออกมาก่อน ซึ่งองค์ประกอบเหล่านี้จะถูกพิจารณาว่าเป็นโคฮีเรนท์ (Coherent part) ของสัญญาณ เนื่องจากรูปคลื่นและสัญญาณมีลักษณะที่คล้ายๆกัน สำหรับการหยุดกระบวนการทำซ้ำ ทำได้โดยการกำหนดจำนวน m ของ Time-frequency atoms และ residual energy: ε^2 ไว้ล่วงหน้า โดยกำหนดให้ความสัมพันธ์ระหว่างค่า Signal residue และ energy threshold ดังสมการที่ (3-10)

$$|R^n f|^2 < \varepsilon^2 \tag{3-10}$$

สามารถคำนวณค่า Residual energy ได้จากสมการ (3-11) ดังนี้

$$R_m = log_{10} \frac{E - \sum_{i=1}^{m} a_i^2}{E} \tag{3-11}$$

เมื่อ

$E = \sum_{n=0}^{N-1} f^2(n)$ คือ Total energy ของ $f(n)$

a_i คือ ขนาดของแต่ละ Time-frequency atoms

และการคำนวณหาค่าผิดพลาดระหว่างสัญญาณดั้งเดิม (Original signal) และสัญญาณที่นำกลับมารวมกันใหม่ (Reconstructed signal) ได้จากสมการที่ (3-12) ดังนี้

$$NRMSE = 100\sqrt{\frac{\sum_{n=0}^{N-1} e^2(n)}{\sum_{n=0}^{N-1} f^2(n)}} \qquad (3\text{-}12)$$

เมื่อ

NRMSE คือ The normalized root-mean square error ระหว่างสัญญาณดั้งเดิมและสัญญาณที่นำกลับมารวมกันใหม่

f(n) คือ สัญญาณดั้งเดิม

e(n) คือ ผลต่างระหว่างระหว่างสัญญาณดั้งเดิมและสัญญาณที่นำกลับมารวมกันใหม่

ซึ่งการหยุดกระบวนการทำซ้ำนั้น นอกจากทำโดยการกำหนดจำนวน m ของ Time-frequency atoms และ residual energy: ε^2 ไว้ล่วงหน้าแล้ว เราอาจทำได้โดยการกำหนดค่าต่ำสุดของ *NRMSE* ไว้ในการเขียนโปรแกรมก็ได้

3.3.2 การสร้าง Gabor dictionary

ในการสร้าง Gabor dictionary หรือที่เรียกว่า "ดิกชันนารี" หรือ "รีดันแดนซ์ดิกชันนารี" นั้น เนื่องจากสัญญาณเสียงเต้นของหัวใจเป็นสัญญาณเสียงที่เบา และมีความซับซ้อน จากงานวิจัยของ Stéphane Mallet และ Zhang จึงสมมุติให้อะตอมในดิกชันนารีมีคุณสมบัติเป็น Gaussian window function *g(t)* ดังสมการที่ (3-13)

$$g(t) = 2^{1/4} e^{-\pi t^2} \qquad (3\text{-}13)$$

เมื่อ f เป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (Discrete-time signal) และเป็นคาบ มีจำนวน N ตัวอย่าง เราทำการนอร์มอลไลสมการที่ (3-13) และเพื่อให้ได้สัญญาณ $g_s(n)$ ที่เป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วยและมีคาบ (Periodic signal) จะทำการสุ่มตัวอย่าง (Sampled) และ Periodized *g(t)* เป็นจำนวน N ชุด แล้วสเกลด้วยค่า S ดังสมการที่ (3-14) ซึ่งเขียนแทนด้วย $g_s(n)$ และเรียกว่า The Discrete gaussian window function ดังนี้

$$g_s(n) = \frac{K_s}{\sqrt{s}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{n - pN}{s}\right) \qquad (3\text{-}14)$$

เมื่อ

K_s คือ Normalizes Constant ซึ่งทำให้ $\|g_s(n)\|=1$

s คือ scale factor ที่มีค่าระหว่าง 1 ถึง N หรือเขียนในเชิงคณิตศาสตร์คือ $]1,N[$

เพื่อให้ได้อะตอมในดิกชันนารีเป็นอะตอมที่ประกอบไปด้วยความถี่และเฟส จึงจัดสมการที่ (3-14) ใหม่ได้ดังนี้

$$g_\gamma(n)=g_s(n-p)e^{i\left(\frac{2\pi k}{N}\right)n} \tag{3-15}$$

เมื่อ

p และ k คือ จำนวนเต็ม(interger) ซึ่ง $0<p<N$ และ $0\le k<N$

s มีค่าระหว่าง 1 ถึง N หรือเขียนในเชิงคณิตศาสตร์คือ $]1,N[$

$$\gamma=(s,p,\frac{2\pi k}{N})$$

เรียกสมการที่ (3-15) ว่า The discrete complex Gabor dictionary หรือ The discrete complex Gabor atoms และได้ความสัมพันธ์ระหว่าง Real atoms และ Complex atoms ดังสมการที่ (3-16)

$$g_{(\gamma,\phi)}(n)=K_{(\gamma,\phi)}g_s(n-p)\cos\left(\frac{2\pi k}{N}n+\phi\right) \tag{3-16}$$

เมื่อ

$K_{(\gamma,\phi)}$ คือ Normalizes Constant ซึ่งทำให้ $\left\|g_{(\gamma,\phi)}\right\|=1$

$$\gamma=(s,p,\frac{2\pi k}{N})$$

$$\phi\in[0,2\pi[$$

เรียกสมการที่ (3-16) ว่า The real discrete time-frequency atoms ซึ่งเราจะใช้เป็น Real atom ใน Gabor dictionary สำหรับวิธีการแม็ชชิงเพิซยูทต่อไป

แต่ในทางปฏิบัติ พบว่าการเขียนโปรแกรมด้วยสมการที่ (3-16) ซึ่งเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะทำให้การประมวลผลช้า ดังนั้นเราจึงสร้าง The real discrete time-frequency atoms ด้วยฟังก์ชันเอกซ์โปเนเชียล (Exponential) ดังสมการที่ (3-17) ซึ่งให้ผลลัพธ์เช่นเดียวกันกับสมการที่ (3-16)

$$g_{(\gamma,\phi)} = \frac{K_{(\gamma,\phi)}}{2}\left(e^{i\phi} g_{\gamma} + e^{-i\phi} g_{\gamma^-}\right) \qquad (3\text{-}17)$$

เมื่อ

$K_{(\gamma,\phi)} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + Re(e^{i2\phi} < g_{\gamma}, g_{\gamma^-} >}}$ คือ ค่า Normalizes constant ซึ่งทำให้ได้ค่า

$$\left\| g_{(\gamma,\phi)} \right\| = 1$$

ϕ คือ Complex phase ϕ_{γ} ของ $< R^n f, g_{\gamma} >$ มีค่าอยู่ในช่วง [0,2π[

$\gamma = (s, p, \dfrac{2\pi k}{N})$

$\gamma^- = (s, p, -\dfrac{2\pi k}{N})$

3.3.3 การค้นหาอะตอมใน Gabor dictionary

เนื่องจากดิกชันนารีที่เราสร้างขึ้นมีขนาดใหญ่มาก ดังนั้นเพื่อลดเวลาในการค้นหาอะตอมในดิกชันนารี ที่จะทำการโปรเจกชันสัญญาณ f ลงไปบนดิกชันนารีนั้น เราจะทำการแบ่งดิกชันนารีที่มีขนาดใหญ่ $D = \left(g_{\gamma}\right)_{\gamma\in\Gamma}$ (Redundant dictionary) ให้เป็นดิกชันนารีย่อยๆ $D_{\alpha} = \left(g_{\gamma}\right)_{\gamma\in\Gamma_{\alpha}}$ (Subdictionary) แล้วทำการค้นหาอะตอม ตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ค้นหาอะตอมจากดิกชันนารีย่อยๆ $D_{\alpha} = \left(g_{\gamma}\right)_{\gamma\in\Gamma_{\alpha}}$ ซึ่งเป็น Complex Gabor dictionary $g_{\gamma(n)}$ ในสมการที่ (3-15) และเงื่อนไขในการค้นหาเป็นไปตามสมการที่ (3-5) ซึ่ง Γ_{α} ประกอบด้วย

$$\tilde{\gamma} = (a^j, pa^j \Delta u, ka^{-j} \Delta\xi)$$

เมื่อ

$$a = 2, \quad \Delta u = 1/2, \qquad \Delta\xi = \pi$$

และ

$$0 < j < \log_2 N, \qquad 0 \le p < N2^{-j+1}, \qquad 0 \le k < 2^{j+1}$$

ขั้นตอนที่ 2 เมื่อได้อะตอม $g_{\tilde{\gamma}_0}$ ซึ่งทราบค่าพารามิเตอร์คือ $\tilde{\gamma}_0 = (s_0, p_0, \frac{2\pi k_0}{N})$ จากนั้นนำค่าพารามิเตอร์นี้มาทำการค้นหาอะตอมในบริเวณรอบๆ (Neighborhood) โดยละเอียดอีกครั้งด้วยวิธีการของนิวตัน (Newton method) ก็จะได้ค่าพารามิเตอร์ $\gamma_0 = (s_0, p_0, \frac{2\pi k_0}{N})$ ซึ่งอยู่ในดิกชันนารี $D = \left(g_\gamma\right)_{\gamma \in \Gamma}$ ที่ถูกต้องตามเงื่อนไขในสมการที่ (3-5)

3.3.4 การกระจายกำลังงานของสัญญาณ *f(t)* ในแกนของเวลา-ความถี่ (The time-frequency energy distribution of a real function *f(t)*)

ในการกระจายกำลังงานของสัญญาณ *f(t)* ในแกนของเวลา–ความถี่นั้นหาได้จากการนำสมการการแยกองค์ประกอบของ *f(t)* ด้วยวิธีการแม็ชชิงเพิซยูท มาทำการกระจายกำลังงานด้วยวิธีการของวิกเนอร์ (Wigner energy distribution) ดังต่อไปนี้

การหา cross Wigner distribution ของฟังก์ชัน *f(t)* และ *h(t)* นิยามโดยสมการ

$$W[f,h](t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\frac{\tau}{2})\bar{h}(t-\frac{\tau}{2})e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (3\text{-}18)$$

เมื่อให้

$$Wf(t,\omega) = W[f,f](t,\omega)$$

ดังนั้น

$$Wf(t,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| < R^n f, g_{\gamma_n} > \right|^2 Wg_{\gamma_n}(t,\omega) \qquad (3\text{-}19)$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0, m\neq n}^{+\infty} < R^n f, g_{\gamma_n} > \overline{< R^m f, g_{\gamma_m} >} W[g_{\gamma_n}, g_{\gamma_m}](t,\omega)$$

ซึ่งสมการของการกระจายกำลังงานในระนาบของ เวลา-ความถี่ คือ

$$Ef(t,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| < R^n f, g_{\gamma_n} > \right|^2 Wg_{\gamma_n}(t,\omega) \qquad (3\text{-}20)$$

ในทำนองเดียวกันการกระจายกำลังงานด้วยสมการของวิกเนอร์ (Wigner energy distribution) ของอะตอม (Time-frequency atoms) ในสมการที่ (3-2) คือ

$$Wg_{\gamma_n}(t,\omega) = Wg(\frac{t-u}{s}, s(\omega-\xi)) \quad (3\text{-}21)$$

และสำหรับการกระจายกำลังงานของ Complex atoms คือ

$$Ef(t,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| < R^n f, g_{(\gamma_n,\phi_n)} > \right|^2 \frac{1}{2}(Wg_{\gamma_n}(t,\omega) + Wg_{\gamma_n^-}(t,\omega)) \quad (3\text{-}22)$$

เมื่อ

$$\gamma_n^- = (s_n, u_n, -\xi_n)$$

แทนสมการที่ (3-21) ลงใน (3-22) จะได้

$$Ef(t,\omega) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left| < R^n f, g_{(\gamma_n,\phi_n)} > \right|^2 (Wg(\frac{t-u_n}{s_n}, s_n(\omega-\xi_n)) + Wg(\frac{t-u_n}{s_n}, s_n(\omega+\xi_n))) \quad (3\text{-}23)$$

และได้การกระจายด้วยสมการของวิกเนอร์ ของอะตอม (Time-frequency atoms) ในสมการที่ (3-13) คือ

$$Wg(t,\omega) = 2e^{-2\pi(t^2+(\frac{\omega}{2\pi})^2)} \quad (3\text{-}24)$$

3.3.5 วิธีการของนิวตัน (Newton's method)

วิธีการของนิวตัน เป็นวิธีการที่ใช้ในการหารากหรือคำตอบของฟังก์ชัน โดยการทำซ้ำๆ จนกระทั่งค่าที่ได้เข้าใกล้คำตอบมากที่สุด เรียกลักษณะเช่นนี้ว่า "การลู่เข้า" (Convergence)

กำหนดให้ $f(x)$ คือ ฟังก์ชันใดๆ โดยที่ x เป็นเวกเตอร์ ที่มีจำนวน k ตัว จากอนุกรมเทย์เลอร์ จะได้ว่า

$$f(\mathbf{x}) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T (x-x_k) + \frac{1}{2}(x-x_k)^T \nabla^2 f(x_k)(x-x_k) + \ldots \quad (3\text{-}25)$$

ทำการอนุพันธ์ (Derivative) $f(x)$ ในสมการที่ (3-25) เทียบกับ x และ x จะเข้าสู่คำตอบก็ต่อเมื่อ $\nabla f(\mathbf{x}) \approx 0$ ดังนั้นจะได้

$$\nabla f(\mathbf{x}) \approx \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k)$$

เนื่องจาก $\nabla f(\mathbf{x}) \approx 0$ ดังนั้น

$$\nabla f(\mathbf{x}_k) + \nabla^2 f(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \approx 0$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = -\left[\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)\right]^{-1}\left[\nabla f(\mathbf{x}_k)\right] = \boldsymbol{d}_k$$

$$\therefore \quad \mathbf{d}_k = -\left(\boldsymbol{H}_k\right)^{-1}\left(\nabla f(\mathbf{x}_k)\right) \tag{3-26}$$

เมื่อ

$\boldsymbol{d}_k = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = \boldsymbol{H}^{-1}\nabla f$ คือ Newton step

∇f คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือ Gradient ของ f

$\boldsymbol{H} = \nabla^2 f$ คือ Hessian matrix

จะได้สูตรการทำซ้ำของนิวตัน ดังนี้

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \boldsymbol{d}_k \tag{3-27}$$

การหาค่าเกรเดียน (Gradient) หรืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน $f(x)$ โดยที่ x เป็นเวกเตอร์มิติ k ดังนั้นเกรเดียนของ $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ คือ $\nabla f(x_1, x_2, ..., x_k)$ การหาค่าเกรเดียน มีวิธีหาได้ 2 วิธีคือ วิธีอนาไลติก (Analytic) และวิธีเชิงตัวเลข (Numerical) ซึ่งในงานวิจัยนี้จะหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข เนื่องจากสัญญาณ f ที่นำมาวิเคราะห์ไม่อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่เห็นได้ชัดเจน แต่อยู่ในรูปของข้อมูลเชิงตัวเลขซึ่งจำนวนมาก สามารถหาค่าเกรเดียนได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdots \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_k) - f(x_1, x_2, ..., x_k)}{\Delta x_1} \\ \dfrac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_k) - f(x_1, x_2, ..., x_k)}{\Delta x_2} \\ \cdots \\ \cdots \\ \dfrac{f(x_1, x_2, ..., x_k + \Delta x_k) - f(x_1, x_2, ..., x_k)}{\Delta x_k} \end{bmatrix} \tag{3-28}$$

และเพื่อความสะดวกในการหาค่าอนุพันธ์และการเขียนโปรแกรม กำหนดให้

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_k = \Delta x \qquad \text{มีค่าน้อยมาก}$$

การหาค่า Hessian matrix เป็นการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x)$ ใช้สัญญลักษณ์ H สามารถหาค่า Hessian matrix ได้จากสมการต่อไปนี้

$$H = \nabla^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} \\ & \cdots & & \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1k} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2k} \\ & \cdots & & \\ & \cdots & & \\ H_{k1} & H_{k2} & \cdots & H_{kk} \end{bmatrix}$$

(3-29)

จากนิยามการหาค่าอนุพันธ์ จะได้แต่ละเอลิเมนท์ (Element) ของ Hessian matrix ดังนี้

$$H_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_k) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\Delta x_1}\right)$$

$$= \left(\frac{f(x_1 + 2\Delta x_1, x_2, \ldots, x_k) - f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\Delta x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \Big/ \Delta x_1$$

$$\vdots$$

$$H_{1k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\Delta x_k}\right)$$

$$= \left(\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k) - f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\Delta x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \Big/ \Delta x_1$$

$$H_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_k) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\Delta x_1} \right)$$

$$= \left(\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_k) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_k)}{\Delta x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \Big/ \Delta x_2$$

$$\vdots$$

$$H_{2h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_h} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_h}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_3 + \Delta x_h) - f(x_1, x_2, \ldots, x_h)}{\Delta x_h} \right)$$

$$= \left(\frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_3 + \Delta x_k) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_k)}{\Delta x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \Big/ \Delta x_2$$

$$\vdots$$

$$H_{k1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_k) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\Delta x_1} \right)$$

$$= \left(\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k)}{\Delta x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \Big/ \Delta x_k$$

$$\vdots$$

$$H_{kk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k) - f(x_1, x_2, x_k)}{\Delta x_k} \right)$$

$$= \left(\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + 2\Delta x_k) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k)}{\Delta x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \Big/ \Delta x_k$$

ขั้นตอนวิธี (Algorithm) การหาคำตอบด้วยวิธีนิวตัน มีขั้นตอนดังนี้

1. เดาค่าเริ่มต้น x_0 ซึ่งในงานวิจัยนี้ ใช้ค่าพารามิเตอร์ตัวชี้ $\tilde{\gamma}_0 = (s_0, p_0, \frac{2\pi k_0}{N})$
2. หาค่าเกรเดียนและ Hessian matrix ของ $f(x)$ เพื่อนำค่าที่ได้ไปหาค่า Newton step d_k
3. หาค่า x_{k+1} จากสมการที่ (3-27)
4. ทดสอบเงื่อนไข $|\nabla f| \leq \varepsilon$ ว่าจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้กลับไปทำในข้อที่ 2-4 ซ้ำอีกครั้ง แต่ถ้าเงื่อนไขนี้เป็นจริง แสดงว่าสามารถหาคำตอบของฟังก์ชันได้แล้ว

ในการทดสอบค่าเกรเดียน $|\nabla f| \leq \varepsilon$ นั้น เราจะกำหนดให้ ε มีค่าน้อยมากๆ จนเข้าใกล้ศูนย์ เนื่องจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันใดๆ เสมือนการหาความชันของฟังก์ชันนั้นๆ ดังนั้นกระบวนการทำซ้ำด้วยวิธีนิวตันนั้นคำตอบจะถูกต้องมากที่สุดก็ต่อเมื่อ ε มีค่าเข้าใกล้ศูนย์มากที่สุด

ข้อจำกัดของวิธีการของนิวตัน

วิธีการของนิวตันจะไม่สามารถหาคำตอบของฟังก์ชันได้ เมื่อ

- ค่าเริ่มต้นอยู่ไกลจากคำตอบที่แท้จริง
- $\nabla^2 f$ หรือ Hessian matrix เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ที่จุดใดๆ
- ฟังก์ชันนั้นไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง หรือไม่เป็นฟังก์ชันที่ Smooth

3.3.6 การลดอัตราการสุ่มตัวอย่างของสัญญาณเวลาเต็มหน่วย

กระบวนการหนึ่งในการเปลี่ยนสัญญาณอะนาลอกเป็นสัญญาณดิจิตอลเพื่อประมวลผล คือ การสุ่มตัวอย่าง ด้วยความถี่ที่เหมาะสม คือ

$$fs > 2f_{max} \tag{3-30}$$

เมื่อ

fs คือ อัตราการสุ่มตัวอย่าง (Sampling rate)

f_{max} คือ ความถี่สูงสุดของสัญญาณที่ถูกสุ่มตัวอย่าง

หากเราต้องการหาเวลาของการสุ่มตัวอย่าง โดยแทนด้วยสัญลักษณ์ T (Sample interval) สามารถเขียนเป็นสมการง่ายๆ คือ

$$T = \frac{1}{2f_{max}} \tag{3-31}$$

ในการสุ่มตัวอย่างที่ความถี่ $fs > 2f_{max}$ จะสามารถสร้างกลับคืนสัญญาณอะนาลอกต้นแบบได้ ในทางกลับกัน ถ้าเราสุ่มตัวอย่างที่ $fs < 2f_{max}$ ก็จะไม่สามารถสร้างกลับคืนสัญญาณอะนาลอกต้นแบบได้ หรือสร้างกลับคืนได้แต่จะมีรูปร่างหรือความถี่ที่เปลี่ยนไป ซึ่งเราเรียกเหตุการณ์เช่นนี้ว่า "การเคลือบแฝง" (Aliasing) และถ้าเราสุ่มตัวอย่างที่ความถี่ $fs = 2f_{max}$ เราเรียกว่า "อัตราไนควิสต์" (Nyquist rate) หรือ "ความถี่ไนควิสต์" (Nyquist frequency)

ซึ่งการสุ่มตัวอย่าง เป็นขั้นตอนในการเปลี่ยนสัญญาณเชิงเวลาต่อเนื่อง (The continuos time signal) หรือสัญญาณอะนาลอก (Analog signal) $x(t)$ ไปเป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (The discrete time signal) ซึ่งเราเขียนแทนด้วย $x(n)$ หรือ $x[n]$ โดยสัญญาณ $x[n]$ ที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างจะมีขนาดเท่ากันกับสัญญาณต้นแบบ $x(t)$

ในทางปฏิบัติ บางครั้งสัญญาณเวลาเต็มหน่วยที่ถูกนำมาวิเคราะห์มีจำนวนข้อมูลมาก นั่นคือสัญญาณต้นแบบถูกสุ่มตัวอย่างที่อัตราการสุ่มตัวอย่าง fs สูงๆ ซึ่งนับว่าเป็นผลดีในการสร้างกลับคืนสัญญาณต้นแบบ เพราะจะทำให้สัญญาณที่สร้างกลับคืนมานั้นไม่ผิดเพี้ยน แต่ผลเสียคือ จะต้องเสียพื้นที่ในหน่วยความจำที่เก็บสัญญาณที่เราสุ่มตัวอย่างแล้วนั้นมากขึ้น และหากเรานำสัญญาณนั้นมาวิเคราะห์หรือประมวลผลใดๆ ก็จะต้องใช้เวลามากขึ้น

ดังนั้นหากสัญญาณเวลาเต็มหน่วยที่เรานำมาประมวลผลมีข้อมูลจำนวนมาก นั่นคืออัตราการสุ่มตัวอย่าง $fs >> 2f_{max}$ มากๆ เราสามารถลดจำนวนข้อมูลของสัญญาณได้โดยการลดอัตราการสุ่มตัวอย่างสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (Decimation of a discrete time signal) ซึ่งมีหลักการดังนี้

จากสมการที่ (3-30) และ (3-31) ให้กำหนดช่วงเวลาการสุ่มตัวอย่างใหม่ ดังนี้

$$T' = MT \tag{3-32}$$

เมื่อ

M คือ แฟคเตอร์การลดอัตราการสุ่มตัวอย่าง ซึ่งแฟคเตอร์ M นี้ จะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า

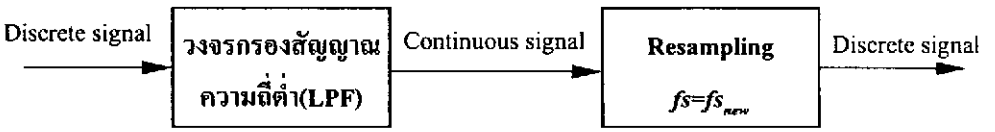
$$\frac{1}{T'} > 2f_{max} \tag{3-33}$$

ดังนั้น อัตราการสุ่มตัวอย่างใหม่ ที่คำนวณได้จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของสมการ (3-34) คือ

$$fs_{new} = \frac{1}{T'} = \frac{1}{MT} > 2f_{max} \tag{3-34}$$

หมายเหตุ ในทางปฏิบัติ เราจะใช้อัตราการสุ่มตัวอย่าง fs ประมาณ 4 – 5 เท่าของ f_{max}

สำหรับวิธีการของการลดอัตราการสุ่มตัวอย่าง มีกระบวนการดังภาพประกอบที่ 3-2



ภาพประกอบที่ 3-2 แสดงบลอกไดอะแกรมการทำงานของการลดอัตราการสุ่มตัวอย่าง

จากภาพประกอบที่ 3-2 อธิบายถึงการทำงานของการลดอัตราการสุ่มตัวอย่าง คือ นำสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (Discrete signal) ซึ่งมีลักษณะเป็นลำดับ (Sequence) ของข้อมูล มาผ่านวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำ (Low pass filter) เพื่อแปลงให้เป็นสัญญาณเวลาต่อเนื่อง (Continuous signal) จากนั้นทำการสุ่มตัวอย่างสัญญาณเวลาต่อเนื่องด้วยอัตราการสุ่มตัวอย่างที่คำนวณได้ในสมการที่ (3-34) ก็จะได้เอาท์พุทเป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วยที่มีอัตราการสุ่มตัวอย่าง เป็น fs_{new} ซึ่งมีจำนวนข้อมูลตามที่เราต้องการ