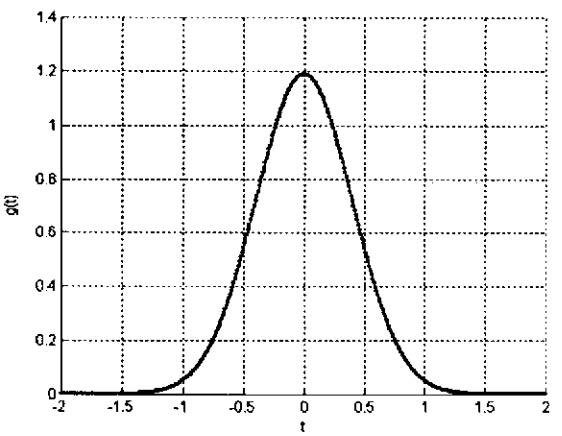
บทที่ 4
ขั้นตอนวิธีแม็ชชิงเพิซยูท

ในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนของการสร้างขั้นตอนวิธี (Algorithm) วิเคราะห์สัญญาณด้วยวิธีการแม็ชชิงเพิซยูท โดยที่เราจะทำการสร้างสัญญาณทดสอบ f ที่ทราบค่าพารามิเตอร์ของตัวชี้ γ แล้วเพื่อทดสอบโปรแกรมที่เขียนขึ้น สำหรับการสร้างขั้นตอนวิธี การวิเคราะห์สัญญาณวิธีการแม็ชชิงเพิซยูท มีลำดับดังต่อไปนี้

4.1 สร้างฟังก์ชันดิกชันนารีหรือ Gabor dictionary

จากการศึกษาวิธีวิเคราะห์สัญญาณด้วยวิธีการแม็ชชิงเพิซยูท สิ่งที่จะต้องทำเป็นอันดับแรก คือ สร้างฟังก์ชันดิกชันนารี $D=(g_\gamma(t))_{\gamma\in\Gamma}$ หรือที่เรียกว่า Gabor dictionary ซึ่งเป็นดิกชันนารีขนาดใหญ่ที่ประกอบด้วยอะตอม (เรียกอะตอมนี้ว่า Time-frequency atoms) ต่างๆมากมาย โดยที่ทุกๆ อะตอมในดิกชันนารีเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) และขนาดของดิกชันนารีหรือจำนวนอะตอมในดิกชันนารี ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของสัญญาณที่นำมาวิเคราะห์ นั่นคือประกอบด้วยอะตอมจำนวน $(N+1)log_2(N)$ เวกเตอร์

การสร้างฟังก์ชันดิกชันนารีหรือ Gabor dictionary หรือ Gabor time-frequency atoms เราจะกำหนดให้อะตอมในดิกชันนารีเป็น The Gaussian window function $g(t)$ ในสมการที่ (3-13) ซึ่งรูปร่างของฟังก์ชัน $g(t)$ มีลักษณะดังภาพประกอบที่ 4-1

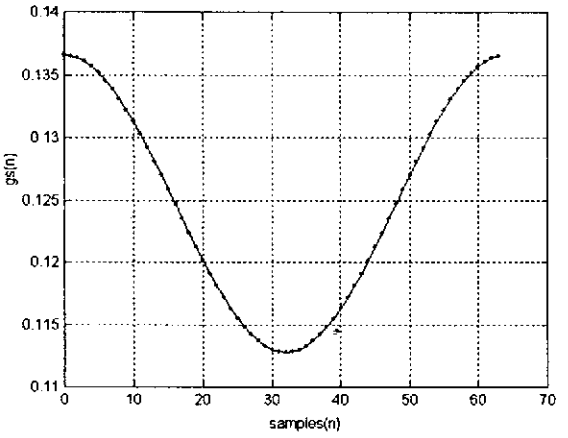


$$g(t)=2^{1/4}e^{-\pi t^2}$$

ภาพประกอบที่ 4-1 The Gaussian window function $g(t)$

เมื่อสัญญาณที่ต้องการนำมาวิเคราะห์เป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วยและมีคาบ มีจำนวนข้อมูล N ตัวอย่าง และให้สเกล S มีค่าระหว่าง 1 ถึง N จึงต้องทำการนอร์มอลไลฟังก์ชัน $g(t)$ ด้วยค่าคงที่ K_s และเพื่อให้ได้สัญญาณใหม่ที่เป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วยและมีคาบ เขียนแทนด้วย $g_s(n)$ เราจะทำการสุ่มตัวอย่าง(Sampled) และ periodized $g(t)$ เป็นจำนวน N จุด (points) แล้วสเกลด้วยค่า S ใดๆ ซึ่ง $s \in]1,N[$ จะได้รูปร่างของ $g_s(n)$ แสดงดังภาพประกอบที่ 4-2

(สมมติว่าสัญญาณมีจำนวน $N=2^6 = 64$ ตัวอย่าง)

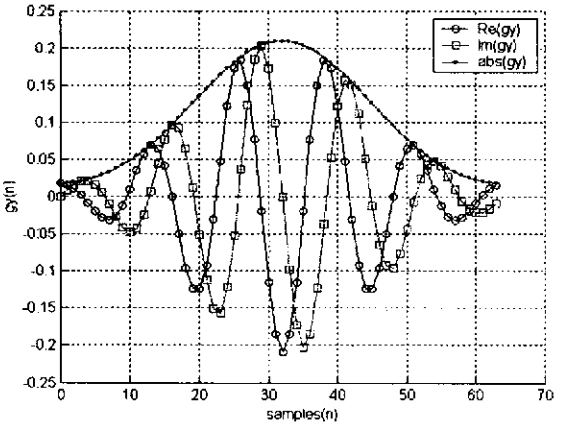


$$g_s(n) = \frac{K_s}{\sqrt{s}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{n-pN}{s}\right)$$

ภาพประกอบที่ 4-2 The Discrete Gaussian window function $g_s(n)$

สำหรับอะตอมหรือ Time-frequency atoms ที่อยู่ใน Gabor dictionary $D = (g_\gamma(t))_{\gamma \in \Gamma}$ นั้นคือฟังก์ชัน $g_\gamma(n)$ ในสมการที่ (3-15) โดยที่ $g_\gamma(n)$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทั้งความถี่และเฟส โดยให้ $s \in]1,N[$, p และ k เป็นจำนวนเต็ม (interger) ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง $0 < p < N$ และ $0 \le k < N$

สำหรับรูปร่างของ $g_\gamma(n)$ ที่แสดงในภาพประกอบที่ 4-3 จะแสดงอะตอม $g_\gamma(n)$ เพียงตัวเดียว โดยสมมติให้ตัวชี้ $\gamma = (s, p, \frac{2\pi k}{N})$ อยู่ที่ $s=32, p=32, k=5$ และ $N=64$ ตัวอย่าง

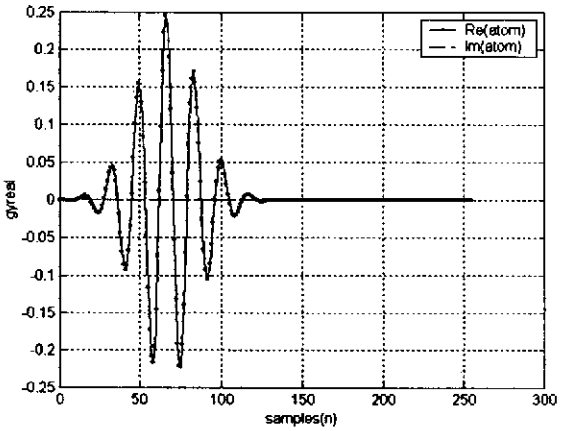


$$g_\gamma(n) = g_s(n-p)e^{i\left(\frac{2\pi k}{N}\right)n}$$

ภาพประกอบที่ 4-3 The Discrete complex Gabor atoms $g_\gamma(n)$

จากสมการที่ (3-16) แสดงความสัมพันธ์ของ Real atoms $g_{(\gamma,\phi)}(n)$ และ Complex atoms $g_\gamma(n)$ โดยที่ $s \in]1,N[$, p และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง $0< p <N$ และ $0\leq k <N$ และกำหนดให้ $\phi \in [0,2\pi[$

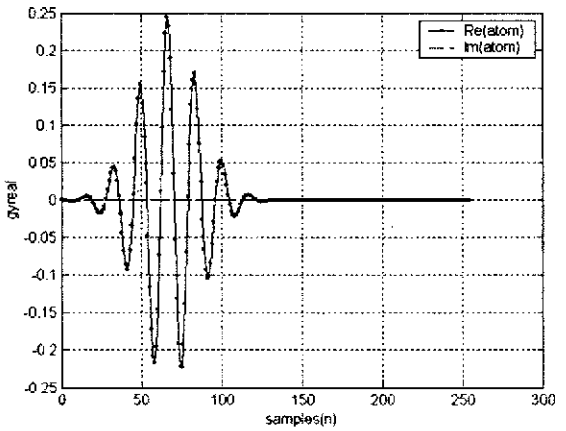
สำหรับรูปร่างของ $g_{(\gamma,\phi)}(n)$ ที่แสดงในภาพประกอบที่ 4-4 นั้นจะแสดงอะตอม $g_{(\gamma,\phi)}(n)$ เพียงตัวเดียว โดยสมมติให้ตัวชี้ $\gamma = (s,p,\frac{2\pi k}{N})$ อยู่ที่ $s=47, p=67, k=15, \phi = \frac{\pi}{4}$ และ $N=128$ ตัวอย่าง



$$g_{(\gamma,\phi)}(n) = K_{(\gamma,\phi)}g_s(n-p)\cos\left(\frac{2\pi k}{N}n+\phi\right)$$

ภาพประกอบที่ 4-4 The Real discrete time-frequency atoms $g_{(\gamma,\phi)}(n)$ จากสมการที่ (3-16)

และในการเขียนโปรแกรมจะใช้ The Real discrete time-frequency atoms ที่สร้างจากสมการที่ (3-17) ซึ่งเมื่อแสดงอะตอมที่มีตัวชี้อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน ก็จะได้รูปร่างของอะตอมที่เหมือนกัน แสดงดังภาพประกอบที่ 4-5



$$g_{(\gamma,\phi)} = \frac{K_{(\gamma,\phi)}}{2}\left(e^{i\phi} g_{\gamma} + e^{-i\phi} g_{\gamma^-}\right)$$

ภาพประกอบที่ 4-5 The Real discrete time-frequency atoms $g_{(\gamma,\phi)}(n)$ จากสมการที่ (3-17)

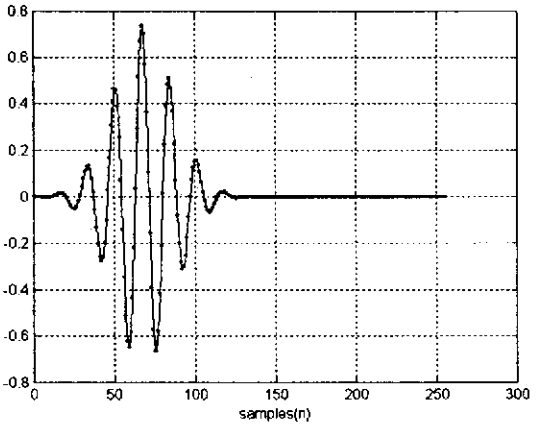
4.2 กำหนดค่าผิดพลาดเพื่อหยุดกระบวนการทำซ้ำของวิธีการแม็ชชิงเพิซยูท

เราทำการกำหนดค่าผิดพลาดที่ยอมรับได้เพื่อหยุดกระบวนการทำซ้ำของวิธีการแม็ชชิงเพิซยูท โดยใช้ค่า The normalized root-mean square error (*NRMSE*) ในสมการที่ (3-12) ซึ่งจะกำหนดไว้ในส่วนต้นๆ ของโปรแกรม

4.3 ค้นหาอะตอมใน Gabor dictionary

การค้นหาอะตอม $g_{\gamma}(n)$ จากดิกชันนารี แบ่งการค้นหาออกเป็น 2 ขั้นตอนดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3.3.3 โดยในการทดสอบขั้นตอนวิธีค้นหาอะตอมนี้ เราจะทำการสร้างสัญญาณทดสอบ f ซึ่งมีคุณลักษณะที่เหมือนกับอะตอมในดิกชันนารี โดยที่ฟังก์ชัน f นี้ เรากำหนดค่าพารามิเตอร์ของตัวชี้ γ ให้อยู่ที่ตำแหน่ง $s=47, p=67, k=15$ และ $N=128$ ตัวอย่าง

การสร้างสัญญาณ f ขึ้นมานั้น เพื่อทดสอบว่าโปรแกรมที่เขียนขึ้นมานี้สามารถค้นหาอะตอมจากดิกชันนารี และทำการโปรเจกชันสัญญาณลงบนอะตอมของดิกชันนารีได้อย่างถูกต้อง ซึ่งรูปร่างของสัญญาณทดสอบ f แสดงดังภาพประกอบที่ 4-6



ภาพประกอบที่ 4-6 แสดงสัญญาณที่ได้จากการสร้างฟังก์ชันทดสอบ f

ต่อไปคือขั้นตอนการค้นหาอะตอม $g_{\gamma(n)}$ จากดิชันนารี เพื่อทำการโปรเจกชันสัญญาณ f ไปบนอะตอมในดิกชันนารี โดยที่เงื่อนไขการค้นหาอะตอม เป็นไปดังสมการที่ (3-5) ซึ่งมีขั้นตอนการค้นหาดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ค้าหา Complex atom $g_{\tilde{\gamma}_0}$ จากดิกชันนารีย่อยๆ $D_\alpha = \left(g_\gamma\right)_{\gamma\in\Gamma_\alpha}$ โดยจำนวนของเวกเตอร์ใน D_α คือ $N log_2 N$ เวกเตอร์ ผลจากการค้นหานี้จะได้ค่าพารามิเตอร์ตัวชี้ตำแหน่ง $\tilde{\gamma}_0$ อยู่ที่ $s=s_0, p=p_0, k=k_0$

ขั้นตอนที่ 2 นำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการค้นหาในขั้นตอนที่ 1 มาเป็นค่าเริ่มต้นในการค้นหาอะตอมซ้ำอีกครั้งด้วยวิธีการของนิวตัน โดยจะทำการค้นหาอะตอม g_{γ_0} ในบริเวณรอบๆ $g_{\tilde{\gamma}_0}$ ภายใน Gabor dictionary $D = \left(g_\gamma\right)_{\gamma\in\Gamma}$ ซึ่งในขั้นตอนนี้จะทำให้ได้ค่า $\left|< f, g_{\gamma_0} >\right|$ สูงสุด

4.4 หาค่า Real atom

เมื่อได้ Complex atom g_{γ_0} แล้ว นำ g_{γ_0} มาหาค่า Real atom ในสมการที่ (3-17) โดยที่เราสามารถหามุม ϕ ได้ เนื่องจากทราบค่า f และ Complex atom g_{γ_0}

4.5 โปรเจกชันสัญญาณ f ไปบนดิกชันนารี

ทำการโปรเจกชันสัญญาณ f ไปบนอะตอมในดิกชันนารีที่เราค้นเจอ จากนั้นหาค่า Residual vector Rf จากสมการที่ (3-3) ดังนี้

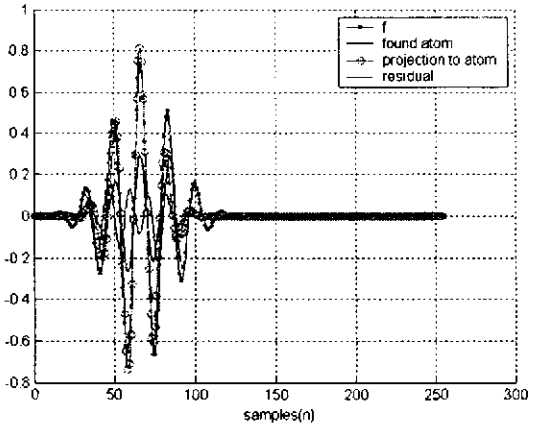
$$f = < f, g_{\gamma_0} > g_{\gamma_0} + Rf$$

$$Rf = f - < f, g_{\gamma_0} > g_{\gamma_0}$$

เมื่อ

$< f, g_{\gamma_0} > g_{\gamma_0}$ คือ การโปรเจกชันสัญญาณ f ไปบนอะตอม g_{γ_0} ในดิกชันนารี โดยที่อะตอม g_{γ_0} คือ Real atom

สามารถแสดงผลการค้นหาอะตอมและรูปร่างของสัญญาณที่ได้จากการโปรเจกชัน f ไปยังอะตอมในดิกชันนารี และค่า Residual Rf ดังภาพประกอบที่ 4-7 และ 4-8



ค่าพารามิเตอร์ $\tilde{\gamma}_0$ ที่ค้นเจอคือ

$s_0 = 32$

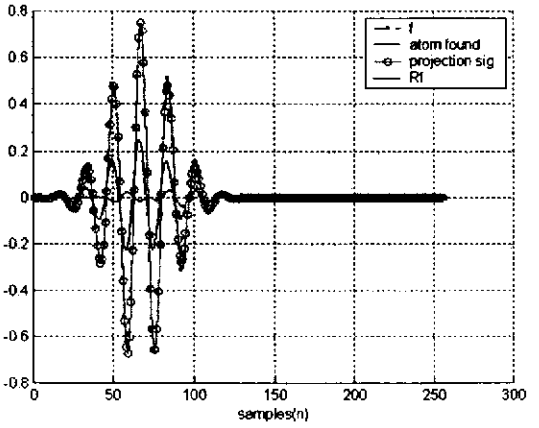
$p_0 = 64$

$k_0 = 16$

และ

$$\left| < f, g_{\tilde{\gamma}_0} > \right| = 1.9615$$

ภาพประกอบที่ 4-7 แสดงผลการค้นหาอะตอมและการโปรเจกชันสัญญาณ f ไปบนอะตอม $g_{\tilde{\gamma}_0}$ ซึ่งได้จากการค้นหาในขั้นตอนที่ 1



ค่าพารามิเตอร์ γ_0 ที่ค้นเจอคือ

$s_0 = 45.172$

$p_0 = 66$

$k_0 = 15$

และ

$$\left| < f, g_{\gamma_0} > \right| = 2.1189$$

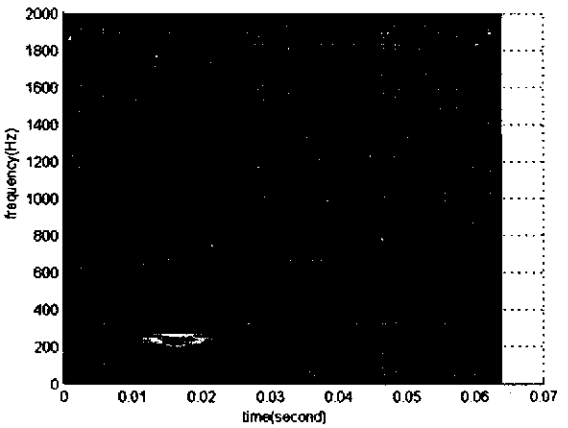
ภาพประกอบที่ 4-8 แสดงการผลการค้นหาอะตอมด้วยวิธีการของนิวตันและการโปรเจกชันสัญญาณ f ไปบนอะตอม g_{γ_0} ซึ่งได้จากการค้นหาในขั้นตอนที่ 2

4.6 คำนวณค่าผิดพลาด

นำค่าที่ค้นหาได้มาคำนวณหาค่าผิดพลาด *NRMSE* ด้วยสมการที่ (3-12) แล้วเปรียบเทียบกับค่าผิดพลาดที่กำหนดไว้ในหัวข้อที่ 4.2 ซึ่งถ้าค่า *NRMSE* ที่ได้จากการคำนวณมีค่ามากกว่าค่าผิดพลาดที่กำหนดไว้ ให้กลับไปเริ่มทำกระบวนการในหัวข้อที่ 4.3 ถึง 4.5 ซ้ำ จนกระทั่งได้ค่า *NRMSE* น้อยกว่าค่าผิดพลาดที่กำนหนดไว้ในหัวข้อ 4.3 และจะได้สมการสุดท้ายดังสมการที่ (3-6) นั่นก็คือแทนสัญญาณ f ให้อยู่ในรูปขององค์ประกอบย่อยๆ ที่เป็นลำดับของ Time-frequency atoms

4.7 แปลงกลับค่าพารามิเตอร์

ค่าที่ได้จากวิธีการแม็ชชิงเพิซยูทที่ได้กล่าวมานั้น เป็นค่าที่อยู่ในรูปของสัญญาณเวลาเต็มหน่วย ในขั้นตอนนี้จะทำการแปลงพารามิเตอร์ของสัญญาณที่เป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วย ให้เป็นพารามิเตอร์ของสัญญาณเวลาต่อเนื่อง เพื่อนำผลที่ได้นั้นไปกระจายกำลังงานในแกน เวลา–ความถี่ โดยวิธีกำรกระจายกำลังงานของวิกเนอร์ (Wigner energy distribution) หรือเรียกอีกอย่างว่า The time–frequency energy distribution ในสมการที่ (3-20) ซึ่งผลของการกระจายกำลังงานของสัญญาณทดสอบ f ที่สร้างขึ้นแสดงดังภาพประกอบที่ 4-9 โดยทำกระบวนการทำซ้ำของวิธีการแม็ชชิงเพิซยูทเพียงครั้งเดียว



ภาพประกอบที่ 4-9 แสดงการกระจายกำลังงานในแกนเวลา – ความถี่