บทที่ 4

อัลกอริทึมที่ใช้ในการเน้นภาพและโครงสร้างของโปรแกรม

การเน้นภาพหรือการปรับปรุงคุณภาพของภาพ มีวัตถุประสงค์เพื่อแสดงรายละเอียดของภาพในระดับสีเทาของวัตถุที่อยู่ในภาพให้เด่นชัดมากขึ้น โดยวัตถุที่มีระดับสีเทาใกล้เคียงกันสามารถแสดงความแตกต่างของระดับสีเทาให้เห็นเด่นชัดขึ้นซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการประมวลผลด้วยสายตาได้ดีขึ้น โดยทั่วไปการเน้นภาพจะเป็นการปรับค่าระดับสีเทาของจุดภาพแต่ละจุด เพื่อเน้นความแตกต่างของภาพให้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้น

ข้อมูลเชิงตัวเลขจะใช้แทนค่าการสะท้อนแสงหรือค่าระดับสีเทา โดยทั่วไปจะเป็นเลขฐานสอง 8 บิท (2^8) โดยจะมีค่าการสะท้อนแสงในระดับสีเทาอยู่ 256 ระดับ หรือเรียกว่า Digital Number (DN) คือมีค่าระหว่าง 0 ถึง 255 โดยที่ระดับ 0 จะแสดงถึงค่าของการสะท้อนต่ำสุด คือสีจะออกสีดำ และค่าที่ 255 จะแสดงค่าการสะท้อนมากที่สุด คือสีจะออกสีขาว

อัลกอริทึมที่ใช้เพื่อทำการเน้นภาพจะใช้หลักการ Dirichlet tessellation แบบ 2 และ 3 มิติ เพื่อให้ฮีสโตแกรมของภาพมีการกระจายออกอย่างสม่ำเสมอ เพื่อหาความเปรียบต่างที่ดีที่สุดของค่าระดับสีเทา

4.1 หลักการพัฒนาอัลกอริทึมเพื่อใช้ในการเน้นภาพ

หาความเปรียบต่างที่ดีที่สุดของค่าระดับสีเทา โดยการหาฮีสโตแกรมแบบ 3 มิติ จากภาพถ่ายดาวเทียมจำนวน 3 ช่วงคลื่น แล้วทำการเน้นภาพโดยใช้หลักการ Dirichlet tessellation แบบ 2 และ 3 มิติเพื่อให้ฮีสโตแกรมของภาพมีการกระจายออกอย่างสม่ำเสมอ ภาพที่ได้สุดท้ายจะทำให้เป็นภาพสีเพียงภาพเดียว โดยการส่งค่าแบบหนึ่งต่อหนึ่งจากภาพต้นแบบไปยังภาพสุดท้าย ซึ่งการส่งค่าแบบหนึ่งต่อหนึ่งต้องเป็นไปตามคุณสมบัติที่ต้องการคือ

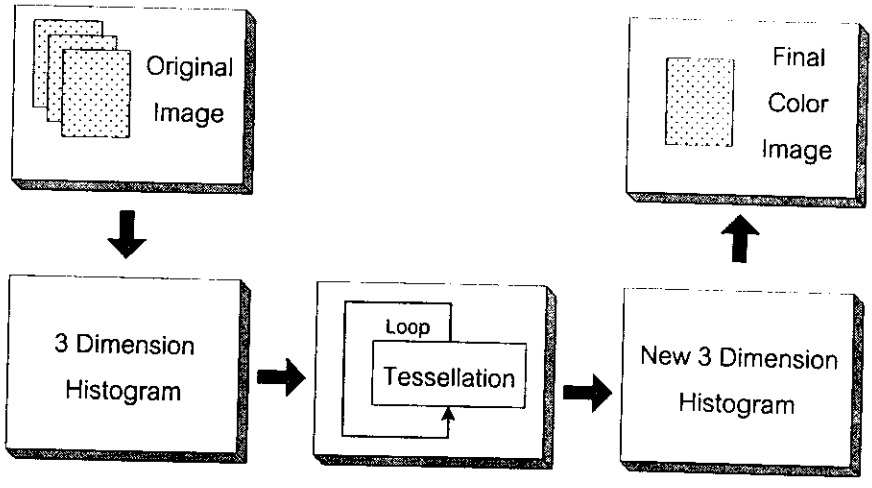
1) ค่าที่เหมือนกันของจุดภาพในภาพต้นแบบ เมื่อทำการส่งค่าแบบหนึ่งต่อหนึ่งไปยังภาพที่ทำการปรับปรุงแล้วจะต้องยังคงมีค่าที่เหมือนกันอยู่

2) ค่าที่ต่างกันของจุดภาพในภาพต้นแบบ เมื่อทำการส่งค่าแบบหนึ่งต่อหนึ่งไปยังภาพที่ทำการปรับปรุงแล้วจะต้องยังคงมีค่าที่ต่างกันอยู่

3) ค่าของจุดภาพของภาพต้นแบบที่มี Natural visual order ภาพที่ทำการปรับปรุงก็จะต้องมี Natural visual order ที่เหมือนกันด้วย

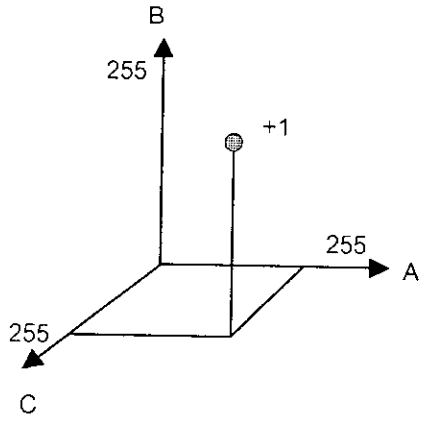
ภาพที่มี Natural visual order เป็นภาพที่มีระดับของสีที่ใกล้เคียงกัน กล่าวคือ ค่าระดับสีจะไม่ต่างกันมาก ในพื้นที่ที่ติดกัน ตัวอย่างเช่น สีแดง สีส้ม และสีเหลือง

วิธีการเน้นภาพเพื่อให้ภาพเด่นชัดจะดำเนินการตามภาพประกอบ 4-1 โดยที่ภาพที่จะทำการเน้นเป็นภาพถ่ายดาวเทียมหลายช่วงคลื่น จำนวน 3 ภาพ นำภาพถ่ายดาวเทียมทั้ง 3 ภาพมาหาฮีสโตแกรมแบบ 3 มิติ แล้วใช้หลักการ Dirichlet tessellation แบบ 3 มิติ กับฮีสโตแกรมที่ได้ จะได้ฮีสโตแกรมแบบ 3 มิติ แบบใหม่ ที่มีการกระจายของจุดฮีสโตแกรมอย่างสม่ำเสมอ หลังจากนั้นก็นำฮีสโตแกรมแบบใหม่ที่ได้ไปสร้างเป็นภาพถ่ายดาวเทียมจำนวน 3 ภาพ แล้วจึงนำทั้ง 3 ภาพมารวมเป็นภาพสี



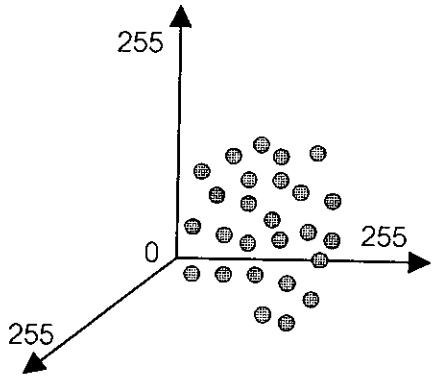
ภาพประกอบ 4-1 แผนภาพแสดงวิธีการเน้นภาพ

จากแผนภาพวิธีการเน้นภาพ ภาพต้นแบบที่ต้องการเน้นภาพ จะเป็นภาพถ่ายดาวเทียมหลายช่วงคลื่นจำนวน 3 ภาพคือ ช่วงคลื่น A ช่วงคลื่น B และช่วงคลื่น C โดยแต่ละภาพมีช่วงคลื่นที่ต่างกัน ที่ตำแหน่ง (x, y) เดียวกันของภาพทั้ง 3 ภาพ จะมีค่าระดับสีเทาเป็น $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ โดยที่ a เป็นค่าระดับสีเทาที่ตำแหน่ง (x, y) ของภาพ A b เป็นค่าระดับสีเทาที่ตำแหน่ง (x, y) ของภาพ B และ c เป็นค่าระดับสีเทาที่ตำแหน่ง (x, y) ของภาพ C นำค่าระดับสีเทาทั้ง 3 ค่าไปทำฮีสโตแกรม แบบ 3 มิติ ตามภาพประกอบ 4-2



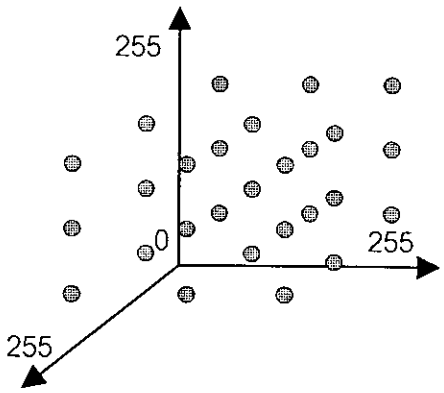
ภาพประกอบ 4-2 ฮีสโตแกรมแบบ 3 มิติ

ที่จุดภาพจุดอื่นๆ ทั้งหมดของภาพก็ทำเช่นเดียวกัน หลังจากทำ Histogram แบบ 3 มิติแล้ว ผลที่ได้ก็อาจเป็นไปตามภาพประกอบ 4-3



ภาพประกอบ 4-3 ฮีสโตแกรมแบบ 3 มิติ ของจุดภาพทั้งหมด

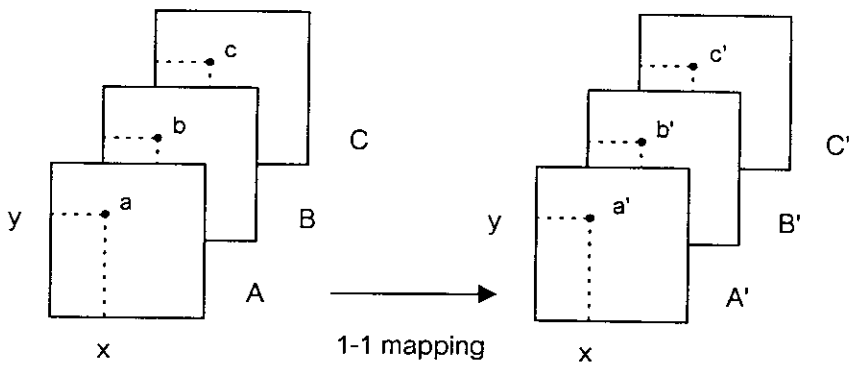
เมื่อได้ Histogram แบบ 3 มิติแล้ว ก็ใช้หลักการ Dirichlet tessellation กับ Histogram 3 มิติข้างต้น ก็จะได้ Histogram แบบ 3 มิติแบบใหม่ ซึ่งถ้าอัลกอริทึมที่ใช้ดีพอ ก็จะทำการกระจายของค่าระดับสีเทาที่สม่ำเสมอตามภาพประกอบ 4-4



ภาพประกอบ 4-4 ฮีสโตแกรม 3 มิติแบบใหม่ ที่ได้จากการใช้หลักการ Dirichlet tessellation

ค่าที่ได้จาก Histogram 3 มิติ แบบใหม่จะเป็นการส่งค่าแบบหนึ่งต่อหนึ่งจาก Histogram 3 มิติเดิม กล่าวคือ ที่จุดภาพ (x,y) เดิมมีค่าระดับสีเทาเป็น $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ เมื่อทำ Dirichlet tessellation แบบ 3 มิติ แล้วจะได้ค่าระดับสีเทาใหม่เป็น $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ โดยที่ a ส่งค่าแบบหนึ่งต่อหนึ่งไปเป็น a' b ส่งค่าแบบหนึ่งต่อหนึ่งไปเป็น b' และ c ส่งค่าแบบหนึ่งต่อหนึ่งไปเป็น c'

ผลที่ได้จากฮีสโตแกรมแบบ 3 มิติใหม่ทำให้ได้ภาพระดับสีเทาใหม่จำนวน 3 ภาพ คือ A' B' และ C' ซึ่งที่จุด (x, y) ของทั้ง 3 ภาพที่ค่าระดับสีเทาเป็น a' b' และ c' ตามลำดับตามภาพประกอบ 4-5



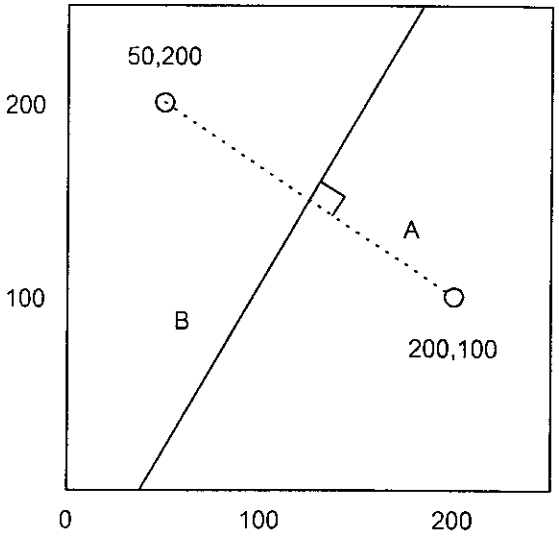
ภาพประกอบ 4-5 การส่งค่าแบบหนึ่งต่อหนึ่งจากภาพ A B และ C ไปยังภาพ A' B' และ C'

เมื่อได้ภาพระดับสีเทาทั้ง 3 ภาพแล้วก็จะทำการส่งค่าจากภาพระดับสีเทาทั้ง 3 ภาพไปเป็นภาพสี โดยให้แต่ละภาพระดับสีเทาเป็นค่าระดับสีแดง สีเขียว และสีน้ำเงิน เมื่อรวมทั้ง 3 ภาพเข้าด้วยกันก็จะได้ภาพสีซึ่งสามารถเลือกได้ว่าภาพใดทำการเน้นภาพได้ดีที่สุด

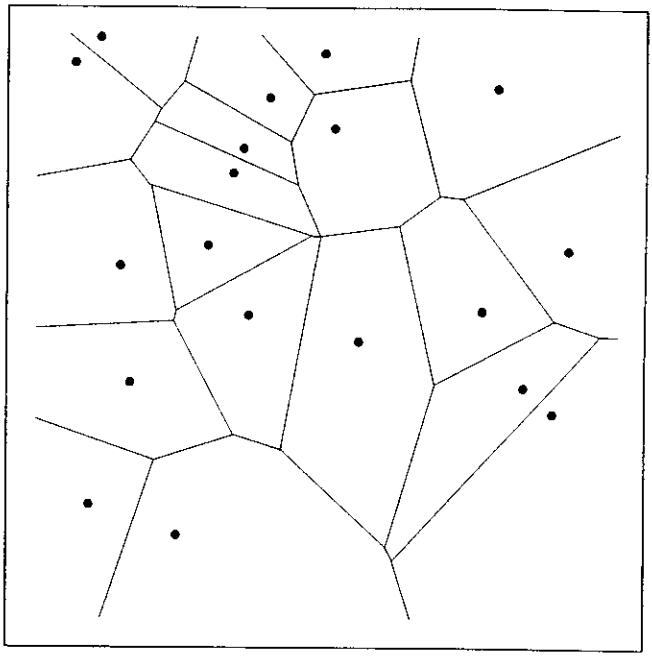
4.2 หลักการ Dirichlet tessellation

Dirichlet tessellation ใน 2 มิตินิยามถึงการแบ่งพื้นที่ด้วยจุดข้อมูลที่มีจำนวนจำกัด โดยแต่ละจุดมีความสัมพันธ์กับขอบเขตข้างเคียง การแบ่งขอบเขตจากจุดข้อมูลจะใช้เส้นตรงทำการแบ่ง ซึ่งเส้นตรงนี้ได้จากการลากเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งกับเส้นสมมติที่ลากจากจุดข้อมูลทั้งสองเส้นตรงที่ได้จะสิ้นสุดเมื่อไปชนกับเส้นที่ลากจากจุดแบ่งครึ่งและตั้งฉากของจุดข้อมูลคู่อื่น

ตัวอย่างเช่น มีจุดข้อมูลอยู่ 2 จุด ที่พิกัด 50,200 และ 200,100 จุดกึ่งกลางของเส้นตรง A ที่ลากระหว่างจุดข้อมูลทั้งสองอยู่ที่พิกัด 125,150 ที่จุด 125,150 ลากเส้นตรง B ตั้งฉากกับเส้นตรง A ไปจนสิ้นสุดขอบเขตพื้นที่ ซึ่งเส้นตรง B จะทำการแบ่งบริเวณออกเป็น 2 ส่วน จากจุดข้อมูล 2 จุด ตามภาพประกอบ 4-6 และภาพประกอบ 4-7 จะแสดงการทำ Dirichlet tessellation แบบ 2 มิติ กับข้อมูลจำนวน 19 จุด

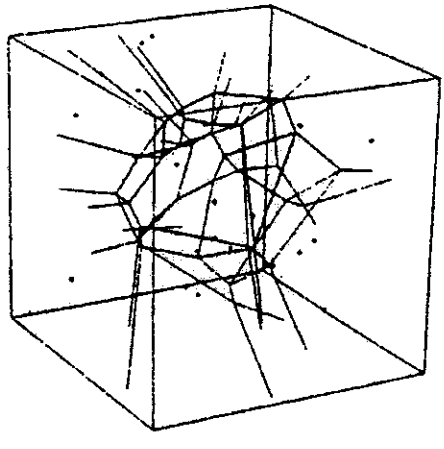


ภาพประกอบ 4-6 การทำ Dirichlet tessellation แบบ 2 มิติ กับข้อมูลจำนวน 2 จุด



ภาพประกอบ 4-7 การทำ Dirichlet tessellation แบบ 2 มิติ กับข้อมูลจำนวน 19 จุด

สำหรับ Dirichlet tessellation 3 มิติ มีหลักการคล้ายกับ Dirichlet tessellation 2 มิติ แต่จะแบ่งจุดข้อมูลด้วยระนาบและจุดข้อมูลจะอยู่ภายในรูปทรงหลายเหลี่ยมตามภาพประกอบที่ 4-8



ภาพประกอบ 4-8 การทำ Dirichlet tessellation แบบ 3 มิติ

อัลกอริทึมที่จะพัฒนาขึ้นเพื่อทำการเน้นภาพโดยการะบวนการ Dirichlet tessellation ใช้หลักการย้ายจุดข้อมูลภายในรูปหลายเหลี่ยมไปยังจุดศูนย์กลางมวลของรูปหลายเหลี่ยม เมื่อทำการย้ายจุดข้อมูลแล้ว รูปหลายเหลี่ยมจะไม่เป็นไปตามนิยามของ Dirichlet tessellation จึงต้อง

ทำกระบวนการ Dirichlet tessellation ใหม่อีกครั้ง แล้วพิจารณาจุดศูนย์กลางมวลอีกครั้ง ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนเมื่อจุดข้อมูลอยู่บนจุดศูนย์กลางมวลและเป็นไปตามนิยามของ Dirichlet tessellation แบบ 3 มิติ ก็จะได้ Histogram แบบ 3 มิติใหม่เพื่อทำการเน้นภาพให้ชัดเจนขึ้น

4.3 ส่วนประกอบต่างๆของการทำ Dirichlet tessellation

เนื่องจากอัลกอริทึมที่นำมาใช้เน้นภาพใช้หลักการของ Dirichlet tessellation ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาทางรูปเรขาคณิตบนคอมพิวเตอร์ ฉะนั้นจึงต้องมีการนิยามชื่อเรียกส่วนประกอบต่างๆ ของการทำ Dirichlet tessellation แบบ 3 มิติ จะส่งผลให้การแก้ปัญหามีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

ผลจากการทำ Dirichlet tessellation แบบ 3 มิติ จะได้รูปทรงหลายเหลี่ยมซึ่งมีจุดข้อมูลอยู่ภายใน ส่วนประกอบต่างๆ ของรูปทรงหลายเหลี่ยม ซึ่งได้นิยามชื่อเรียกส่วนต่างของรูปทรงหลายเหลี่ยมดังต่อไปนี้

cell เรียกรูปทรงหลายเหลี่ยมจำนวน 1 รูป

nucleus เรียกจุดข้อมูลที่อยู่ภายในรูปทรงหลายเหลี่ยม

face เรียกหน้าของรูปทรงหลายเหลี่ยม

node เรียกปุ่มต่างๆ ของรูปทรงหลายเหลี่ยม

branch เรียกกิ่งก้านของรูปทรงหลายเหลี่ยม

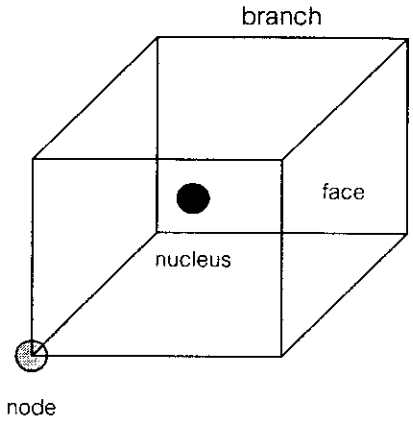
การนิยามชื่อเรียกส่วนประกอบต่างๆ ของการทำ Dirichlet tessellation แสดงตามภาพประกอบที่ 4-9 ซึ่งเป็นตัวอย่างของรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

นอกจากนี้ยังมีการนิยามชื่อเรียกของการทำ Dirichlet tessellation เพิ่มเติมจาก face node และ branch ได้แก่

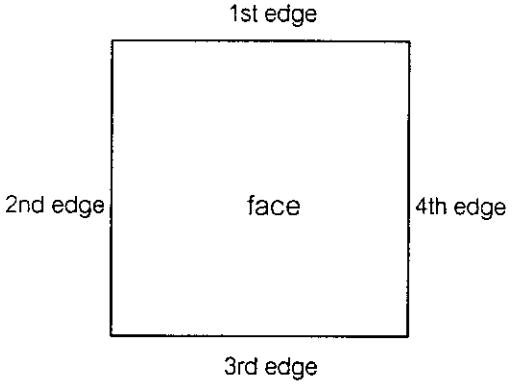
edge เรียกจำนวนเหลี่ยมของหน้าของรูปทรงหลายเหลี่ยม ดังภาพประกอบที่ 4-10 แสดงหน้าที่มีจำนวน 4 edge

link เรียกจำนวนกิ่งก้านที่ใช้ node ร่วมกัน ดังภาพประกอบที่ 4-11 แสดง node ที่มีจำนวน 3 link

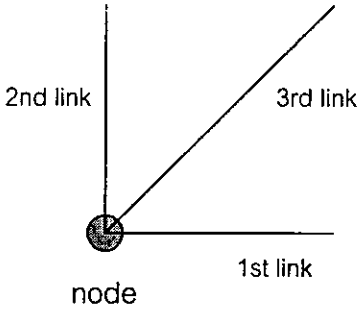
panel เรียกจำนวน face ที่ใช้ branch ร่วมกัน ดังภาพประกอบที่ 4-12 แสดง branch ที่มี 3 panel



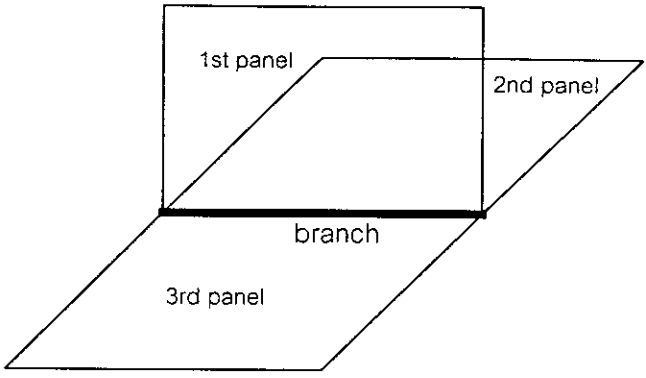
ภาพประกอบ 4-9 การนิยามชื่อเรียกส่วนประกอบต่างๆ ของการทำ Dirichlet tessellation



ภาพประกอบ 4-10 แสดงหน้าที่มีจำนวน 4 edge



ภาพประกอบ 4-11 แสดง node ที่มีจำนวน 3 link



ภาพประกอบ 4-12 แสดง branch ที่มี 3 panel

การนิยามคำเรียกต่างๆ ของส่วนประกอบการทำ Dirichlet tessellation จะทำให้การแก้ปัญหาทางรูปทรงเรขาคณิตบนคอมพิวเตอร์ง่ายยิ่งขึ้น

4.4 หลักการทางเรขาคณิต: Fitting Sphere

ภาพประกอบ 4-13 แสดงรูปทรงกลมที่มีรัศมี R มีจุดศูนย์กลางที่จุดพิกัด 3 มิติ (x,y,z) ซึ่งภาพแสดงจุดข้อมูลที่ต้องการปรับค่า จำนวน N ชุด ที่พิกัด (x_i,y_i,z_i) ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของทรงกลมถึงจุดข้อมูลต่างๆ คือ r_i ซึ่ง

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \quad (1)$$

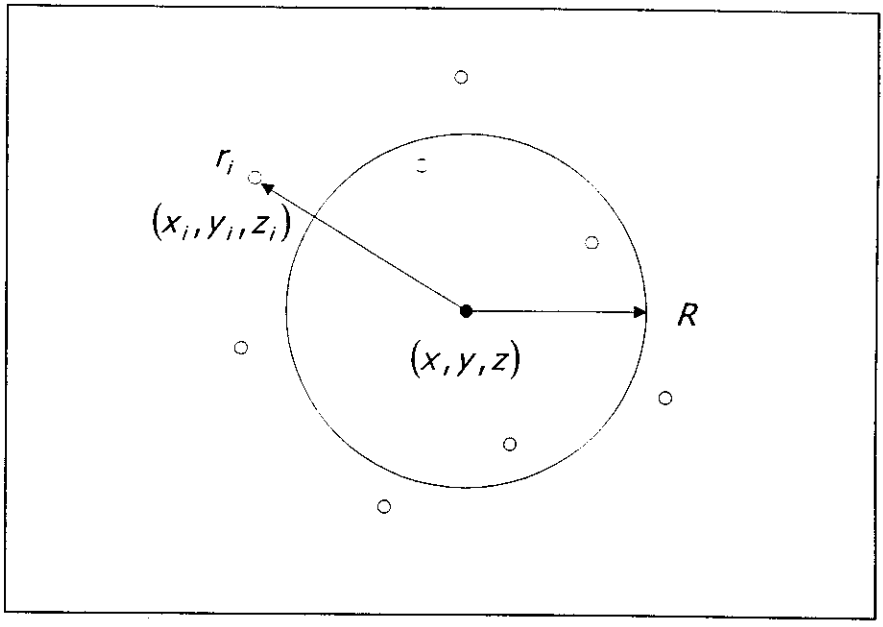
รัศมี R ของทรงกลมจะได้จากขนาดพื้นผิวของพิกัดทรงกลมที่ได้จากการหาค่าเฉลี่ยของพื้นผิวทรงกลมที่มีพิกัดจุดศูนย์กลางที่ (x,y,z) ที่ผ่านจุด (x_i,y_i,z_i) ใดๆ โดยที่

$$R^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i^2 \quad (2)$$

ถ้าจุดข้อมูล (x_i,y_i,z_i)สามารถหาจุดศูนย์กลางของทรงกลมที่จุด (x,y,z) และค่ารัศมี R ของทรงกลมทำให้ค่าของฟังก์ชัน F มีค่าต่ำสุด โดยที่

$$F = \sum_{k}\left(r_k^2 - R^2\right)^2 \quad (3)$$

เหตุที่เลือกใช้ค่า $r_k^2 - R^2$ แทนการใช้ค่า $r_k - R$ เนื่องจากต้องการหลีกเลี่ยงการหาค่ารากที่สองของสมการ



ภาพประกอบ 4-13 รูปทรงกลมที่ได้จากการปรับข้อมูลจากจุดข้อมูล (x_i, y_i, z_i)

ถ้าชุดข้อมูลทั้งหมด (x_i, y_i, z_i) อยู่บนผิวทรงกลมเดียวกัน ค่าของ (x, y, z) ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชัน F มีค่าต่ำสุดจะเป็นค่าเดียวกันกับค่าจุดศูนย์กลางของทรงกลม

ถ้าจุดข้อมูล (x_i, y_i, z_i) ไม่ได้อยู่บนผิวทรงกลมเดียวกัน ค่าของ (x, y, z) ที่ได้จากฟังก์ชัน F จะเป็นค่าจุดศูนย์กลางของทรงกลมที่ได้จากการหาค่าเฉลี่ยของค่าจุดศูนย์กลางของทรงกลมที่มีพื้นผิวผ่านจุดข้อมูล (x_i, y_i, z_i)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน F สามารถหาได้โดยหาค่า (x, y, z) ที่ให้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน F มีค่าเป็นศูนย์ โดยที่

$$F = \sum_k \left(r_k^2 - R_2\right)^2 = \sum_k \left(r_k^2 - \frac{1}{N} \sum_i r_i^2 \right)^2 \qquad (4)$$

ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเมื่อเทียบกับ x คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_k 2\left(r_k^2 - \frac{1}{N}\sum_l r_l^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(r_k^2\right) - \frac{1}{N}\sum_l \frac{\partial}{\partial x}\left(r_l^2\right)\right)$$

$$= 2\sum_k \left(\frac{1}{N}\sum_l \left(r_k^2 - r_l^2\right)\right)\left(2(x - x_k) - \frac{1}{N}\sum_l 2(x - x_l)\right)$$

$$= 4\sum_k \left(\frac{1}{N}\sum_l \left(r_k^2 - r_l^2\right)\right)\left(\frac{1}{N}\sum_l (x_l - x_k)\right)$$

$$\frac{N^2}{4}\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_k \left(\sum_l \left(r_k^2 - r_l^2\right)\right)\left(\sum_l (x_l - x_k)\right) \tag{5}$$

ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเมื่อเทียบกับ y และ z คือ

$$\frac{N^2}{4}\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_k \left(\sum_l \left(r_k^2 - r_l^2\right)\right)\left(\sum_l (y_l - y_k)\right) \tag{6}$$

$$\frac{N^2}{4}\frac{\partial F}{\partial z} = \sum_k \left(\sum_l \left(r_k^2 - r_l^2\right)\right)\left(\sum_l (z_l - z_k)\right) \tag{7}$$

ในทางพีชคณิตสามารถทำให้สมการง่ายขึ้นโดยการแทนค่าพิกัด x, y, z ด้วยพิกัด u, v, w ใน local coordinate ที่วัดจากจุดศูนย์กลางมวลของข้อมูล สมการจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{cases} x = \bar{x} + u \\ y = \bar{y} + v \\ z = \bar{z} + w \end{cases} \tag{8}$$

ซึ่งค่าจุดศูนย์กลางมวล $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ของข้อมูลทั้งหมดหาได้จาก

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i^N x_i \tag{9}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_i^N y_i \tag{10}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_i^N z_i \tag{11}$$

แทนค่า $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ลงในพจน์ของ $\sum x_l - x_k, \sum y_l - y_k, \sum z_l - z_k$ และ $\sum r_k^2 - r_l^2$ (ในสมการที่ 5 6 และ 7) ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\sum_I (x_I - x_k) = \sum_I \left[\left(\bar{x} + u_I \right) - \left(\bar{x} + u_k \right) \right]$$
$$= \sum_I (u_I - u_k)$$
$$= N(\bar{u} - u_k) \qquad (12)$$

เมื่อ $\bar{u}$ เป็นจุดศูนย์กลางมวลของข้อมูลในระบบ local coordinate อย่างไรก็ตามเราสามารถแทนค่า $\bar{u} \equiv 0$ ซึ่งจะได้

$$\sum_I (x_I - x_k) = \sum_I (u_I - u_k) = -Nu_k \qquad (13)$$

สำหรับ y และ z จะได้เป็น

$$\sum_I (y_I - y_k) = \sum_I (v_I - v_k) = -Nv_k \qquad (14)$$
$$\sum_I (z_I - z_k) = \sum_I (w_I - w_k) = -Nw_k \qquad (15)$$

สำหรับ r^2 จะได้เป็น

$$\sum_I \left(r_k^2 - r_I^2 \right) = \sum_I \left((x - x_k)^2 - (x - x_I)^2 + (y - y_k)^2 - (y - y_I)^2 + (z - z_k)^2 - (z - z_I)^2 \right)$$
$$= \sum_I \left((2x - x_k - x_I)(x_I - x_k) + (2y - y_k - y_I)(y_I - y_k) + (2z - z_k - z_I)(z_I - z_k) \right)$$
$$= \sum_I \left(2\bar{x} + 2u - \left(\bar{x} + u_k \right) - \left(\bar{x} + u_I \right) \right) \left(\bar{x} + u_I - \left(\bar{x} + u_k \right) \right)$$
$$+ \sum_I \left(2\bar{y} + 2v - \left(\bar{y} + v_k \right) - \left(\bar{y} + v_I \right) \right) \left(\bar{y} + v_I - \left(\bar{y} + v_k \right) \right)$$
$$+ \sum_I \left(2\bar{z} + 2w - \left(\bar{z} + w_k \right) - \left(\bar{z} + w_I \right) \right) \left(\bar{z} + w_I - \left(\bar{z} + w_k \right) \right)$$

$$= \sum_I \left((2u - u_k - u_I)(u_I - u_k) + (2v - v_k - v_I)(v_I - v_k) + (2w - w_k - w_I)(w_I - w_k) \right)$$
$$= 2u \sum_I (u_I - u_k) + 2v \sum_I (v_I - v_k) + 2w \sum_I (w_I - w_k)$$
$$- \sum_I (u_k + u_I)(u_I - u_k) - \sum_I (v_k + v_I)(v_I - v_k) - \sum_I (w_k + w_I)(w_I - w_k)$$

$$= 2u(-Nu_k) + 2v(-Nv_k) + 2w(-Nw_k) - \sum_i \left(u_i^2 - u_k^2\right) - \sum_i \left(v_i^2 - v_k^2\right) - \sum_i \left(w_i^2 - w_k^2\right)$$
$$= 2u(-Nu_k) + 2v(-Nv_k) + 2w(-Nw_k) - N\left(\overline{u^2} - u_k^2\right) - N\left(\overline{v^2} - v_k^2\right) - N\left(\overline{w^2} - w_k^2\right)$$
$$= -2N(uu_k + vv_k + ww_k) - N\left[\left(\overline{u^2} - u_k^2\right) + \left(\overline{v^2} - v_k^2\right) + \left(\overline{w^2} - w_k^2\right)\right] \quad (16)$$

โดยที่

$$\overline{u^2} = \frac{1}{N}\sum_i^N u_i^2 \quad (17)$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N}\sum_i^N v_i^2 \quad (18)$$

$$\overline{w^2} = \frac{1}{N}\sum_i^N w_i^2 \quad (19)$$

สมการผลเฉลยสามารถหาได้โดยการแทนค่าสมการที่ 13 14 15 และ 16 ในสมการที่ 5 6 และ 7

สมการอนุพันธ์ของ x

$$\frac{N^2}{4}\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_k \left\{-2N(uu_k + vv_k + ww_k) - N\left[\left(\overline{u^2} - u_k^2\right) + \left(\overline{v^2} - v_k^2\right) + \left(\overline{w^2} - w_k^2\right)\right]\right\} \times (-Nu_k)$$
$$\frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial x} = 2u\sum_k u_k^2 + 2v\sum_k u_k v_k + 2w\sum_k u_k w_k + \sum_k \left(\overline{u^2} - u_k^2\right)u_k + \sum_k \left(\overline{v^2} - v_k^2\right)u_k + \sum_k \left(\overline{w^2} - w_k^2\right)$$
$$\frac{1}{4N}\frac{\partial F}{\partial x} = 2u\overline{u^2} + 2v\overline{uv} + 2w\overline{uw} + \left(\overline{u}\,\overline{u^2} - \overline{u^3}\right) + \left(\overline{u}\,\overline{v^2} - \overline{uv^2}\right) + \left(\overline{u}\,\overline{w^2} - \overline{uw^2}\right)$$
$$\frac{1}{4N}\frac{\partial F}{\partial x} = 2u\overline{u^2} + 2v\overline{uv} + 2w\overline{uw} - \overline{u^3} - \overline{uv^2} - \overline{uw^2} \quad (20)$$

สมการอนุพันธ์ของ y

$$\frac{N^2}{4}\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_k \left\{-2N(uu_k + vv_k + ww_k) - N\left[\left(\overline{u^2} - u_k^2\right) + \left(\overline{v^2} - v_k^2\right) + \left(\overline{w^2} - w_k^2\right)\right]\right\} \times (-Nv_k)$$
$$\frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial y} = 2u\sum_k u_k v_k + 2v\sum_k v_k^2 + 2w\sum_k w_k^2 + \sum_k \left(\overline{u^2} - u_k^2\right)v_k + \sum_k \left(\overline{v^2} - v_k^2\right)v_k + \sum_k \left(\overline{w^2} - w_k^2\right)v_k$$
$$\frac{1}{4N}\frac{\partial F}{\partial y} = 2u\overline{uv} + 2v\overline{v^2} + 2w\overline{vw} + \left(\overline{u^2}\,\overline{v} - \overline{u^2 v}\right) + \left(\overline{v^2}\,\overline{v} - \overline{v^3}\right) + \left(\overline{w^2}\,\overline{v} - \overline{vw^2}\right)$$

$$\frac{1}{4N}\frac{\partial F}{\partial y} = 2u\overline{uv} + 2v\overline{v^2} + 2w\overline{vw} - \overline{u^2v} - \overline{v^3} - \overline{vw^2} \tag{21}$$

สมการอนุพันธ์ของ y

$$\frac{1}{4N}\frac{\partial F}{\partial z} = 2u\overline{uw} + 2v\overline{vw} + 2w\overline{w^2} - \overline{u^2w} - \overline{v^2w} - \overline{w^3} \tag{22}$$

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน F จะได้จากการกำหนดค่าอนุพันธ์ของสมการ 20 21 และ 22 ให้เท่ากับศูนย์ ได้เป็น

$$\begin{cases} 2u\overline{u^2} + 2v\overline{uv} + 2w\overline{uw} - \overline{u^3} - \overline{uv^2} - \overline{uw^2} = 0 \\ 2u\overline{uv} + 2v\overline{v^2} + 2w\overline{vw} - \overline{u^2v} - \overline{v^3} - \overline{vw^2} = 0 \\ 2u\overline{uw} + 2v\overline{vw} + 2w\overline{w^2} - \overline{u^2w} - \overline{v^2w} - \overline{w^3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u\overline{u^2} + v\overline{uv} + w\overline{uw} = \left(\overline{u^3} + \overline{uv^2} + \overline{uw^2}\right)/2 \\ u\overline{uv} + v\overline{v^2} + w\overline{uw} = \left(\overline{u^2v} + \overline{v^3} + \overline{vw^2}\right)/2 \\ u\overline{uw} + v\overline{vw} + w\overline{w^2} = \left(\overline{u^2w} + \overline{v^2w} + \overline{w^3}\right)/2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{u^2} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{uv} & \overline{v^2} & \overline{vw} \\ \overline{uw} & \overline{vw} & \overline{w^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\overline{u^3} + \overline{uv^2} + \overline{uw^2}\right)/2 \\ \left(\overline{u^2v} + \overline{v^3} + \overline{vw^2}\right)/2 \\ \left(\overline{u^2w} + \overline{v^2w} + \overline{w^3}\right)/2 \end{pmatrix} \tag{23}$$

ส่วนประกอบของเมตริก 3 x 3 ทางด้านซ้ายและเวกเตอร์ทางด้านขวาของสมการ 23 สามารถคำนวณจากจุดข้อมูล (x_i, y_i, z_i) และสามารถหาผลเฉลยสำหรับตัวแปร u v และ w

จุดศูนย์กลางของทรงกลม (x, y, z) หาได้จากสมการที่ 8 และค่ารัศมี R หาได้จากการแทนค่าตัวแปรที่ได้ในสมการที่ 2

4.5 Implementation

4.5.1 โครงสร้างการเก็บข้อมูลการทำ Dirichlet tessellation เนื่องจากการทำ Dirichlet tessellation จะทำให้การแก้ปัญหาทางรูปทรงเรขาคณิตบนคอมพิวเตอร์ ซึ่งในคอมพิวเตอร์จะมีการเก็บข้อมูลแบบตัวเลข ฉะนั้นจึงเป็นการข้อมูลจากรูปทรงเรขาคณิตในรูปของตัวเลข ซึ่งมีความสำคัญมากสำหรับโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากจะมีการทำหลักการ Dirichlet tessellation แบบวนซ้ำ และมีการเปลี่ยนแปลงข้อมูลอยู่เสมอ เพื่อความสะดวกในการเก็บข้อมูล และนำข้อมูลมาใช้จึงมีการเก็บข้อมูลแบบตารางข้อมูล หรือรายการข้อมูล ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 ตาราง ได้แก่ ตารางรายการของ cell ตารางรายการของ surface ตารางรายการของ branch และตารางรายการของ node

1) ตารางรายการของ cell เป็นการเก็บข้อมูลจำนวน cell ทั้งหมด ตามลำดับ โดยแต่ละ cell จะมีข้อมูลของ

- ตำแหน่งพิกัดของ nucleus ของ cell นั้นๆ ซึ่งจะอยู่ในพิกัด x y และ z
- จำนวน face ของ cell นั้นๆ โดยจะเก็บข้อมูลแบบอะเรย์ ที่ตำแหน่งแรกจะเป็นจำนวน face ของ cell และที่ตำแหน่งต่อๆ ไป จะเก็บหมายเลขของ face นั้นๆ

ตาราง 4-1 แสดงตารางรายการของ cell โดยแสดง cell ที่ 1 มี nucleus อยู่ที่พิกัด 20 50 และ 10 และเป็น cell ที่มี 6 หน้า คือหน้าที่มีหมายเลข 0 1 2 3 4 และ 5

ตาราง 4-1 แสดงตารางรายการของ cell

20 50 10 1	1 2 3 4 . . .	6 0 1 2 3 4 5
x y z d	n	faces
	. .	

2) ตารางแสดงรายการของ surface เป็นตารางเก็บข้อมูลของ surface ทั้งหมด ตามลำดับ โดยแต่ละ surface จะมีข้อมูลของ

- จำนวน cell และหมายเลข cell ที่ใช้ surface นั้นๆร่วมกัน โดยจะเก็บข้อมูลแบบอะเรย์ ที่ตำแหน่งแรกจะเป็นจำนวน cell และที่ตำแหน่งต่อๆ ไป จะเก็บหมายเลขของ cell นั้นๆ

- จำนวน edge และหมายเลข edge ของ surface นั้นๆ โดยจะเก็บข้อมูลแบบอะเรย์ ที่ตำแหน่งแรกจะเป็นจำนวน edge และที่ตำแหน่งต่อๆ ไป จะเก็บหมายเลขของ edge นั้นๆ

ตาราง 4-2 แสดงตัวอย่างตารางรายการของ surface โดยแสดง surface ที่ 1 มี cell ที่ใช้ surface ร่วมกันจำนวน 2 cell คือ cell หมายเลข 0 และ 1 และ surface นี้มี 4 edge คือ edge หมายเลข 0 1 2 และ 4

ตาราง 4-2 แสดงตารางรายการของ surface

2 0 1	1 2 3 4 . . .	4 0 1 2 3
cells	n	edges
	. .	

3) ตารางแสดงรายการของ branch เป็นตารางเก็บข้อมูลของ branch ทั้งหมด ตามลำดับ โดยแต่ละ branch จะมีข้อมูลของ

- จำนวน panel และหมายเลข panel ที่ใช้ branch นั้นๆ ร่วมกัน โดยจะเก็บข้อมูลแบบอะเรย์ ที่ตำแหน่งแรกจะเป็นจำนวน panel และที่ตำแหน่งต่อๆ ไป จะเก็บหมายเลขของ panel นั้นๆ

- จำนวน node และหมายเลข node ของ branch นั้นๆ โดยจะเก็บข้อมูลแบบอะเรย์ ที่ตำแหน่งแรกจะเป็นจำนวน node และที่ตำแหน่งต่อๆ ไป จะเก็บหมายเลขของ node นั้นๆ

ตาราง 4-3 แสดงตัวอย่างตารางรายการของ branch โดยแสดง branc ที่ 1 มี panel ที่ใช้ branch ร่วมกันจำนวน 3 panel คือ panel หมายเลข 0 1 และ 2 และ branch นี้มี 2 node คือ node หมายเลข 0 และ 1

ตาราง 4-3 แสดงตารางรายการของ branch

3 0 1 2	1 2 3 4 . . .	2 0 1
panels	n	nodes
	. .	

4) ตารางแสดงรายการของ node เป็นตารางเก็บข้อมูลของ node ทั้งหมด ตามลำดับ โดยแต่ละ node จะมีข้อมูลของ

- จำนวน link และหมายเลข link ที่ใช้ node นั้นๆ ร่วมกัน โดยจะเก็บข้อมูลแบบอะเรย์ ที่ตำแหน่งแรกจะเป็นจำนวน link และที่ตำแหน่งต่อๆ ไป จะเก็บหมายเลขของ link นั้นๆ

- พิกัด x y และ z ของ node นั้นๆ

ตาราง 4-4 แสดงตัวอย่างตารางรายการของ node โดยแสดง node ที่ 1 มี link ที่ใช้ node ร่วมกันจำนวน 3 link คือ link หมายเลข 0 1 และ 2 และ node มีพิกัดที่ 15 22 และ 76

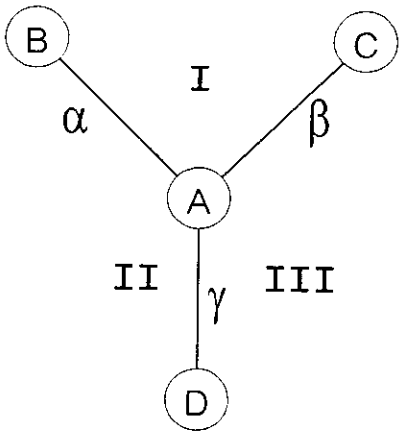
ตาราง 4-4 แสดงตารางรายการของ node

3 0 1 2	1 2 3 4 . . .	15 22 76 1
links	n	x y z d
	. .	

4.5.2 **เงื่อนไขในการกำหนดค่าของ node ที่ infinite** ค่าของข้อมูลที่ใช้ในการหา Dirichlet Tessellation เช่น ค่าที่ตำแหน่ง nucleus ของแต่ละ cell หรือค่าของ node ใด ๆ ในการออกแบบโปรแกรมส่วนนี้จะระบุค่าที่ตำแหน่งนั้นๆ ในรูปของพิกัด (x, y, z, d) โดยค่า x y และ z ใด ๆ คือค่าของจุดภาพข้อมูลหลังจากการทำ histogram ส่วนค่า d จะมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ดังนั้นค่าของจุดที่ทำการหา Dirichlet Tessellation จะมีค่าเป็น (x/d, y/d, z/d)

สำหรับค่าของ node ที่ infinite กำหนดได้โดยการให้ค่า d มีค่าเท่ากับศูนย์ และค่า (x, y, z) ใด ๆ จะระบุด้วยค่าของจุดที่ตำแหน่งใด ๆ บนเส้นตรงซึ่งลากผ่านจุดนั้น ๆ การกำหนดค่าเช่นนี้ช่วยให้ปัญหาที่เกิดจาก node ที่ infinite ในการทำ Dirichlet Tessellation ไม่ส่งผลต่อโปรแกรมที่จะพัฒนาขึ้นมา

4.5.3 **Data abstraction ในการหา** Dirichlet Tessellation ใด ๆ นั้น จากที่กล่าวมาแล้วว่าโปรแกรมที่ออกแบบจะประกอบด้วยข้อมูลการทำ Dirichlet Tessellation เป็นจำนวนมาก ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการใช้งานจึงมีการกำหนดชื่อฟังก์ชันให้สัมพันธ์กับการทำงานในแต่ละส่วน ตัวอย่างเช่น กรณีที่มีการหาค่าต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กับ node ที่ตำแหน่งใด ๆ สามารถแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ ดังภาพประกอบ 4-14



ภาพประกอบ 4-14 Data abstraction

ตัวอย่างตามภาพที่ 4-14 โปรแกรมที่เขียนขึ้นจะมีฟังก์ชันที่ใช้สำหรับเรียกใช้ข้อมูลได้ทันที ทำให้สะดวกและรวดเร็วในการนำข้อมูลมาใช้ เช่น

หากต้องการทราบว่าที่ node A มี link ใดบ้างที่ใช้ node A ร่วมกัน ก็ใช้ฟังก์ชัน node_get_link ก็จะได้คำตอบคือ link α β และ γ

หากต้องการทราบว่าที่ node A มี node ใดบ้างที่เชื่อมต่อกับ link ที่ใช้ node A ร่วมกัน ก็ใช้ฟังก์ชัน node_get_node ก็จะได้คำตอบคือ node B C และ D

หากต้องการทราบว่าที่ node A มี cell ใดบ้างที่ใช้ node A ร่วมกัน ก็ใช้ฟังก์ชัน node_get_cell ก็จะได้คำตอบคือ cell I II และ III

หากต้องการทราบว่าที่ node A มีพิกัดอยู่ที่ตำแหน่งใด ก็ใช้ฟังก์ชัน node_get_site ก็จะได้คำตอบคือ node A มีพิกัดอยู่ที่ x y z ใดๆ

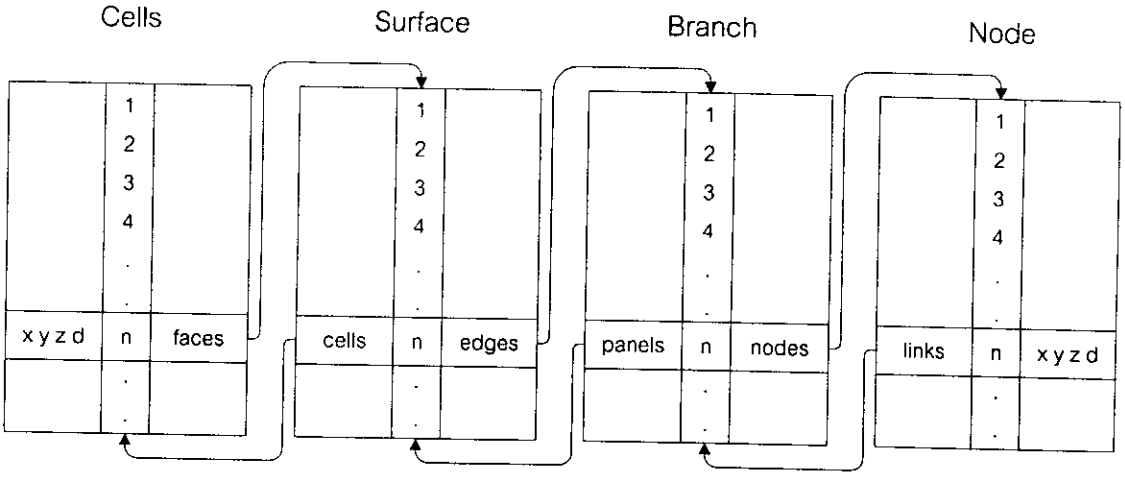
4.5.4 ขั้นตอนการเพิ่มเซลล์ใหม่ให้กับการทำ Dirichlet Tessellation ในหัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึงโครงสร้างการเก็บข้อมูลในรูปแบบตาราง คือตารางรายการของ cell ตารางรายการของ surface ตารางรายการของ branch และตารางรายการของ node ซึ่งตารางรายการทั้ง 4 สามารถเข้าถึงข้อมูลกันได้ ตามภาพประกอบ 4-15 ซึ่งเรียกตารางรายการทั้ง 4 รวมกันว่าตารางการทำ tessellation

ในการทำ Dirichlet Tessellation ต้องใช้โครงตาราง tessellation จำนวน 3 ชุด ประกอบด้วย

1) โครงสร้างการเก็บข้อมูลหลัก ซึ่งเก็บข้อมูลทั้งหมดของการทำ Dirichlet Tessellation มีขนาดใหญ่และมีความสำคัญ

2) โครงสร้างการเก็บข้อมูลที่ต้องมีการแก้ไข จะเก็บข้อมูลของ node branch surface และ cell ที่จะต้องมีการแก้ไขอันเนื่องมาจากการเพิ่มเซลล์ใหม่ให้กับการทำ Dirichlet Tessellation มีขนาดเล็ก

3) โครงสร้างการเก็บข้อมูลที่ทำการแก้ไขแล้ว จะเก็บข้อมูลของ node branch surface และ cell ที่แก้ไขแล้วอันเนื่องมาจากการเพิ่มเซลล์ใหม่ให้กับการทำ Dirichlet Tessellation มีขนาดเล็ก



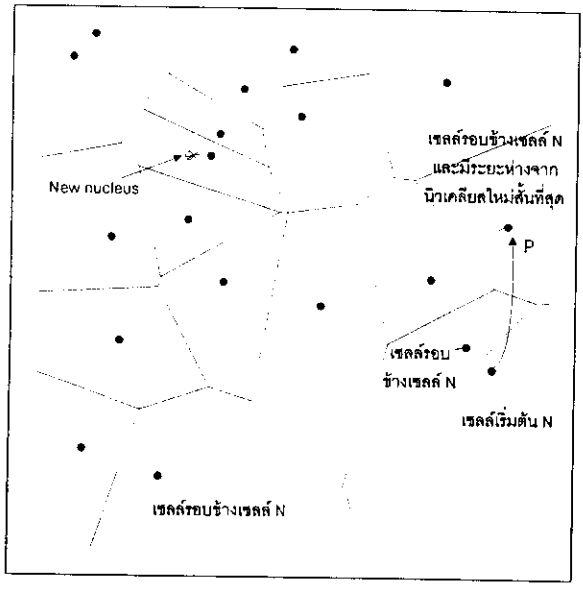
ภาพประกอบ 4-15 โครงสร้างตารางการเก็บข้อมูลของการทำ Dirichlet Tessellation

ในขั้นตอนการเพิ่มเซลล์ใหม่ จะทำการเพิ่มเซลล์ใหม่ให้กับโครงสร้างการเก็บข้อมูลหลัก แล้วจึงหาส่วนประกอบต่างๆ ที่ต้องแก้ไขเก็บไว้ในโครงสร้างการเก็บข้อมูลส่วนที่ต้องแก้ไข หลังจากนั้นทำการแก้ไข ส่วนประกอบต่างคือ node branch surface และ cell แล้วจึงนำข้อมูลที่แก้ไขแล้วเก็บไว้ในโครงสร้างการเก็บข้อมูลที่แก้ไขแล้ว สุดท้ายจะทำการปรับปรุงข้อมูลในโครงสร้างการเก็บข้อมูลหลัก จากข้อมูลในโครงสร้างการเก็บข้อมูลทั้ง 3 ก็จะเสร็จสิ้นกระบวนการเพิ่มเซลล์ใหม่ แล้วจึงทำการเพิ่มเซลล์ต่อๆไป

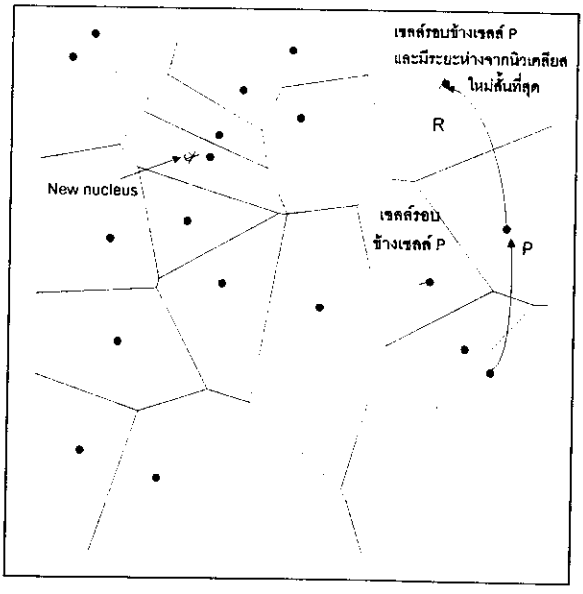
กระบวนการเพิ่มเซลล์ใหม่ให้กับการทำ Dirichlet Tessellation มีขั้นตอนดังนี้

1) หาเซลล์ที่มีนิวเคลียสใกล้กับนิวเคลียสใหม่ที่สุด โดยเริ่มจากนิวเคลียสของเซลล์ N แล้วทำการหาระยะห่างระหว่างนิวเคลียสใหม่กับนิวเคลียส N เปรียบเทียบกับระยะห่างกับนิวเคลียสของเซลล์รอบข้างเซลล์ N จะได้เซลล์ P ที่มีระยะห่างใกล้นิวเคลียสใหม่ที่สุด ตามภาพประกอบ 4-16 แล้วจึงทำการหาระยะห่างที่สั้นที่สุดจากนิวเคลียสใหม่กับนิวเคลียสของเซลล์รอบข้างเซลล์ P อีก

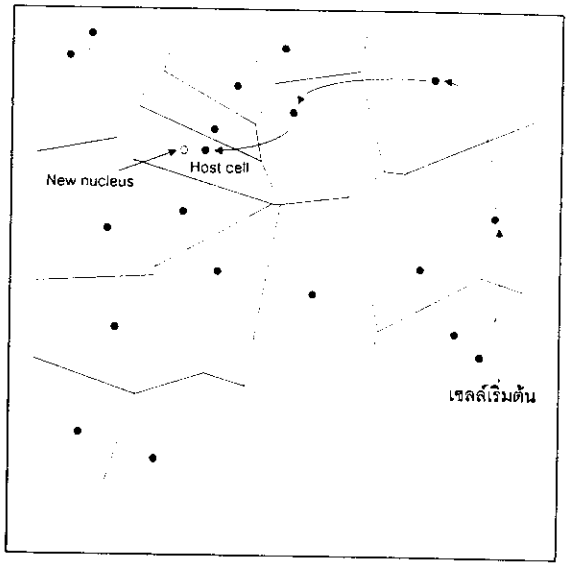
ครั้ง จะกระทั่งได้นิวเคลียสของเซลล์ที่ใกล้กับนิวเคลียสใหม่ที่สุดคือเซลล์ R ตามภาพประกอบ 4-17 จนกระทั่งได้เซลล์ที่มีนิวเคลียสใกล้นิวเคลียสใหม่ที่สุดและเรียกเซลล์ดังกล่าวว่า host cell ตามภาพประกอบ 4-18 สำหรับเซลล์ที่ได้ทำการเปรียบเทียบแล้วจะไม่นำมาคำนวณหาระยะห่างเพื่อเปรียบเทียบอีก



ภาพประกอบ 4-16 การหาเซลล์รอบข้างเซลล์เริ่มต้นที่มีนิวเคลียสใกล้นิวเคลียสใหม่ที่สุด

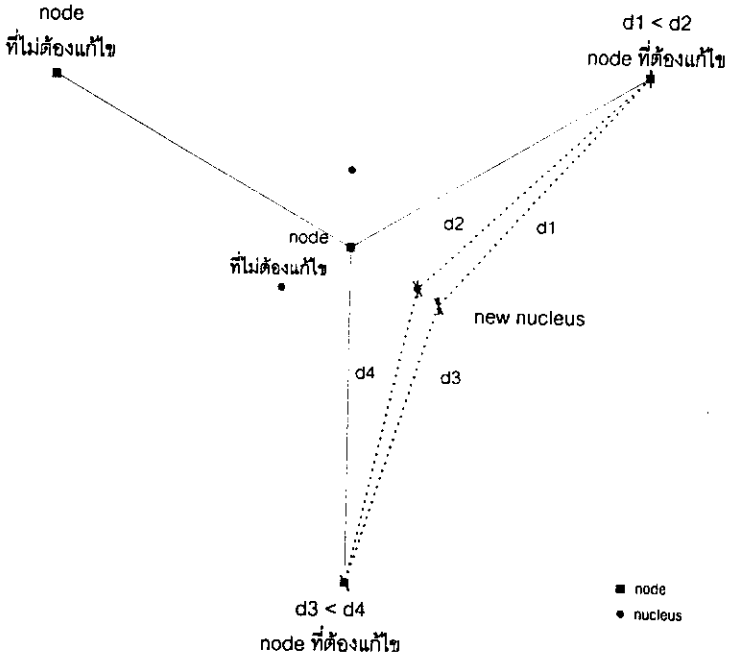


ภาพประกอบ 4-17 การหาเซลล์รอบข้างเซลล์ P ที่มีนิวเคลียสใกล้นิวเคลียสใหม่ที่สุด



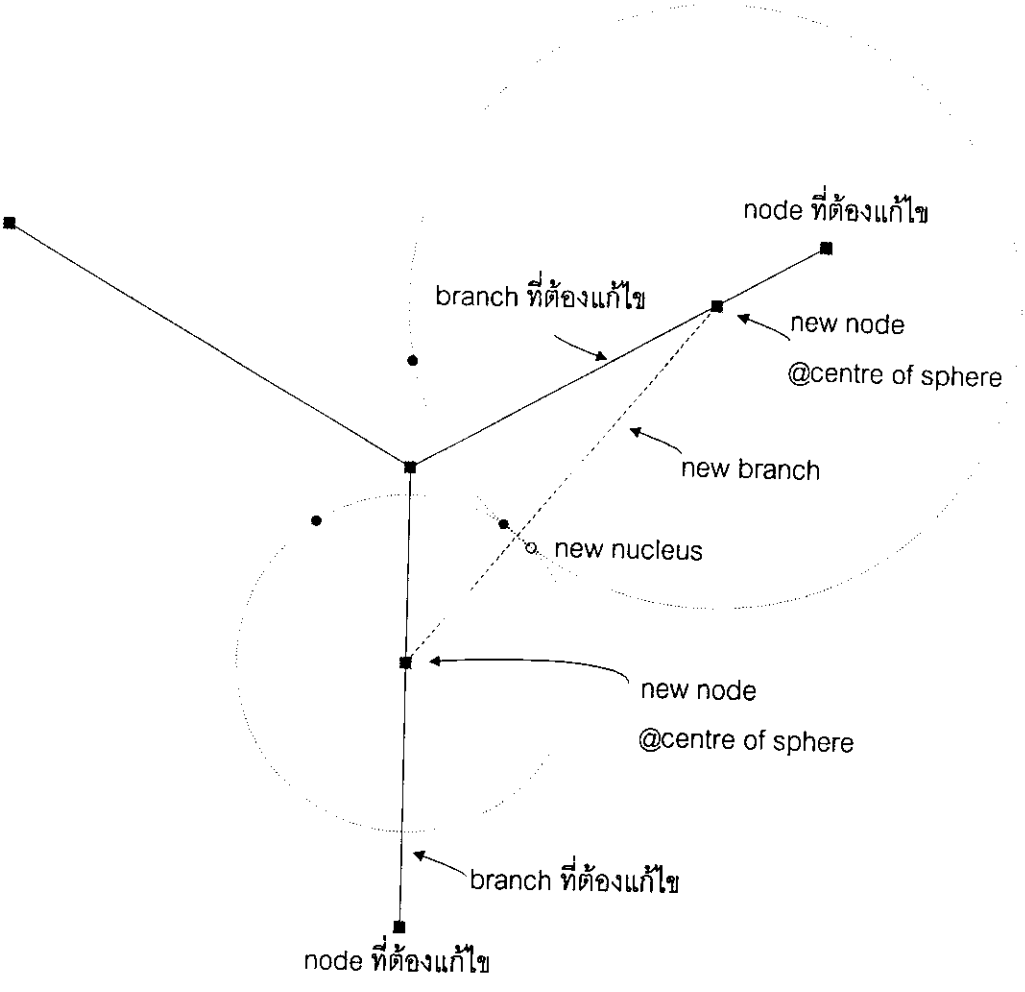
ภาพประกอบ 4-18 วิธีการหาเซลล์ที่มีนิวเคลียสใกล้นิวเคลียสใหม่ที่สุด

2) หา node ต่างๆ ของ host cell ที่ต้องแก้ไข โดยเปรียบเทียบระยะห่างระหว่าง node กับนิวเคลียสของ host cell และ ระยะห่างระหว่าง node กับนิวเคลียสใหม่ ถ้าหากระยะห่างระยะห่างจาก node ถึงนิวเคลียสใหม่มีค่าน้อยกว่า node นั้นจะเป็น node ที่ต้องทำการแก้ไข ส่วน branch surface และ cell ที่ร่วมใช้ node นั้นก็จะต้องเป็นส่วนที่ต้องทำการแก้ไขด้วย ตามภาพประกอบ 4-19 โดยข้อมูลของส่วนที่ต้องการแก้ไขจะเก็บไว้ในโครงสร้างการเก็บข้อมูลที่ต้องแก้ไข



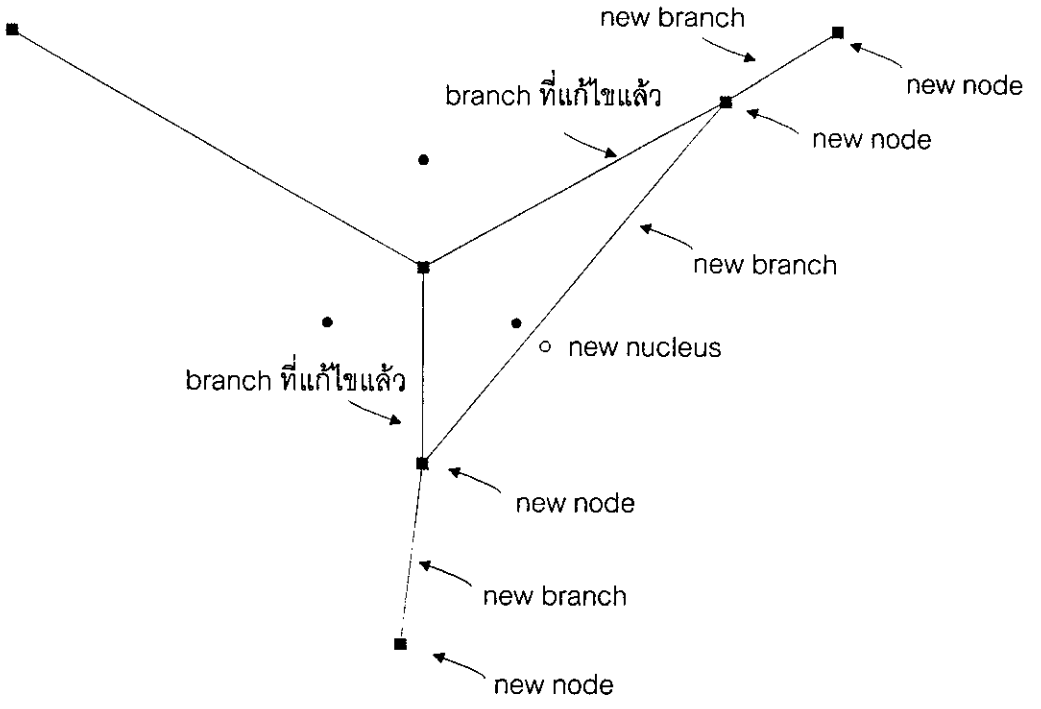
ภาพประกอบ 4-19 วิธีการหา node ที่ต้องทำการแก้ไขของ host cell

3) ทำการแก้ไข node branch surface และ cell ที่ต้องแก้ไข โดยการคำนวณหาตำแหน่งของ node ใหม่ โดยวิธี Fitting Sphere ตามภาพประกอบ 4-20 หลังจากได้ตำแหน่งของ node ใหม่แล้วจึงทำการหา branch surface และปรับปรุงข้อมูลของ cell ตามลำดับ ตามภาพประกอบ 4-21 โดยข้อมูลของส่วนที่แก้ไขแล้วจะเก็บไว้ในโครงสร้างการเก็บข้อมูลที่แก้ไขแล้ว



ภาพประกอบ 4-20 วิธีการหา node ใหม่โดยวิธี Fitting sphere

4) ทำการแก้ไขข้อมูลในโครงสร้างการเก็บข้อมูลหลัก โดยการแก้ไขหรือลบข้อมูลของ node branch และ surface ที่ไม่ใช้หรือที่เปลี่ยนแปลงออกจากโครงสร้างการเก็บข้อมูลหลัก แล้วเพิ่ม node branch surface และ cell ใหม่ในโครงสร้างการเก็บข้อมูลหลัก



ภาพประกอบ 4-21 วิธีการหา branch ใหม่ ปรับปรุง branch และ cell

หลังจากทำครบกระบวนการแล้วก็จะเริ่มทำใหม่อีกครั้ง จนกระทั่งครบจำนวนข้อมูลทั้งหมด จึงจะเสร็จสิ้นการทำ Dirichlet Tessellation