บทที่ 4

ผลและอภิปรายผล

ในบทนี้จะเป็นการนำเสนอผลการทดลองและการอภิปรายผลของข้อมูลที่ได้รับจากการทดลองวัดคาบ และความเร็วของเพนดูลัมอย่างง่ายเพื่อทำการเปรียบเทียบค่าที่ได้จากการทดลองกับค่าทางทฤษฎี การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่ของเพนดูลัม และการประยุกต์ใช้การเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมซึ่งจะนำเสนอตามลำดับดังนี้

4.1 ความสัมพันธ์ของคาบที่ได้จากการทดลองกับคาบในทางทฤษฎี

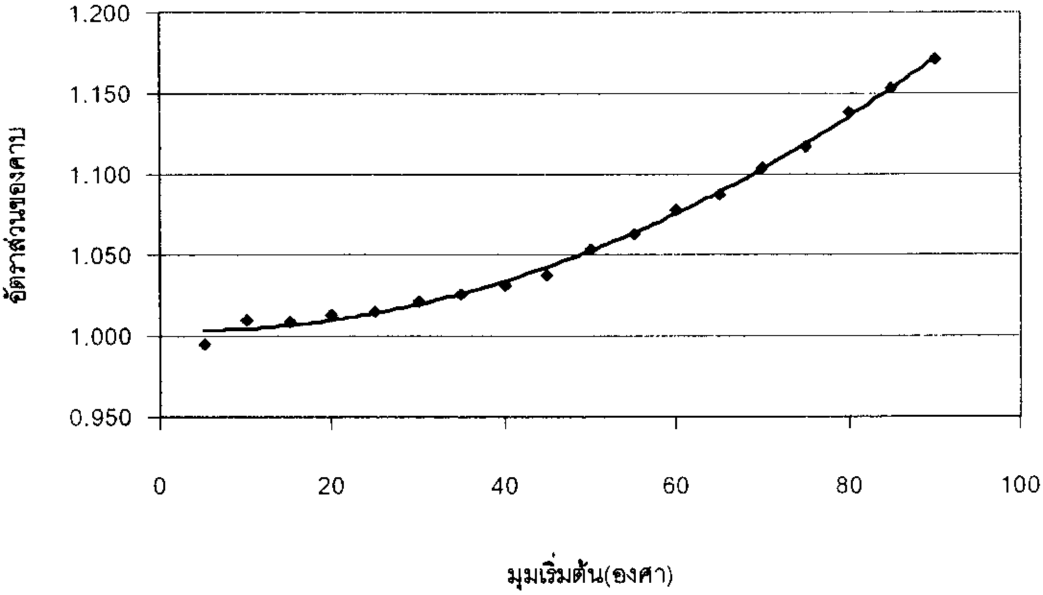
4.2 การเปลี่ยนแปลงของพลังงานจลน์ในการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัม

4.3 การประยุกต์ใช้การเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมในการหาจุดศูนย์กลางมวล

4.1 ความสัมพันธ์ของคาบที่ได้จากการทดลองกับคาบในทางทฤษฎี

4.1.1 อัตราส่วนของคาบที่ได้จากการทดลองกับคาบจากการคำนวณโดยทฤษฎี

เมื่อนำผลที่ได้จากการทดลองวัดคาบ(T_E)ของเพนดูลัมโดยให้มุมเริ่มต้นที่ใช้ในการทดลองมีขนาดเริ่มจาก 5 องศา และเพิ่มขึ้นครั้งละ 5 องศาจนถึงมุม 90 องศา แล้วจึงนำคาบที่ได้มาหาอัตราส่วนกับคาบ($T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$) ที่ได้จากการประมาณค่าในทางทฤษฎี ซึ่งผลจากการทดลองเมื่อนำผลการทดลองดังแสดงในภาคผนวก ค มาเขียนเป็นกราฟเพื่อแสดงความสัมพันธ์และหาแนวโน้มของอัตราส่วนของคาบเมื่อมุมเริ่มต้นมีขนาดมากขึ้น ซึ่งจะแสดงตัวอย่างผลการทดลองและวิเคราะห์ผลการทดลองดังต่อไปนี้ โดยในการทดลองใช้เชือกความยาว 34 เซนติเมตร ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก 9.781 m/s^2 ซึ่งให้คาบที่ได้จากการคำนวณ($T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$) เท่ากับ 1.171 วินาที เมื่อนำผลการทดลองจากภาคผนวก ง มาเขียนเป็นกราฟเพื่อหาความสัมพันธ์ของอัตราส่วนของคาบที่ได้จากการทดลอง(T_E) และคาบที่ได้จากการคำนวณ(T_0) กับมุมเริ่มต้นซึ่งจะได้กราฟแสดงผลการทดลองดัง ภาพประกอบ 11

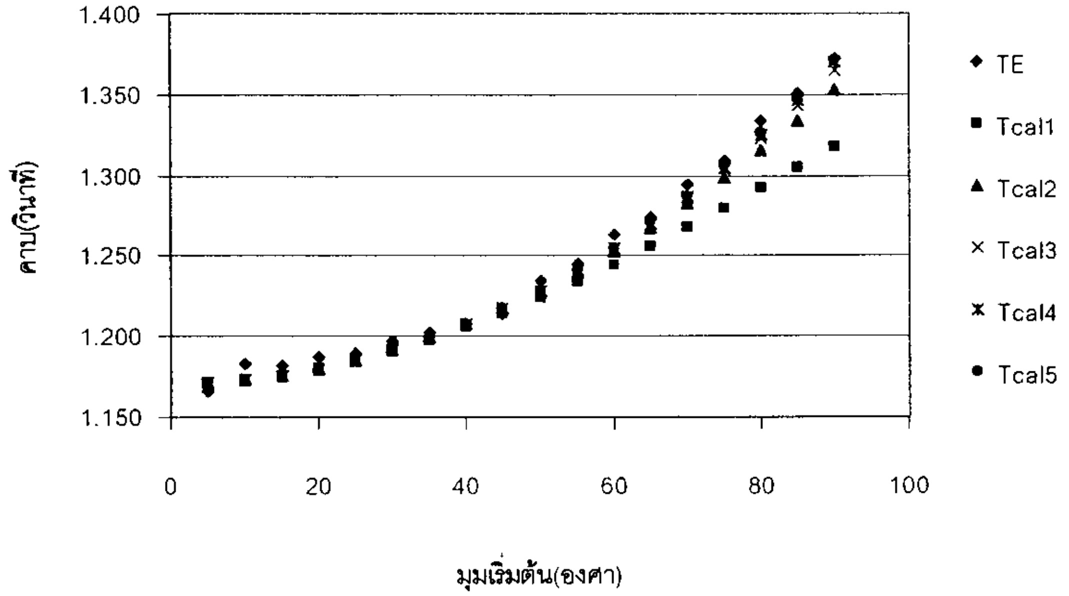


ภาพประกอบ 11 แสดงความสัมพันธ์ของอัตราส่วนของคาบ (T_E / T_C) กับมุมเริ่มต้น

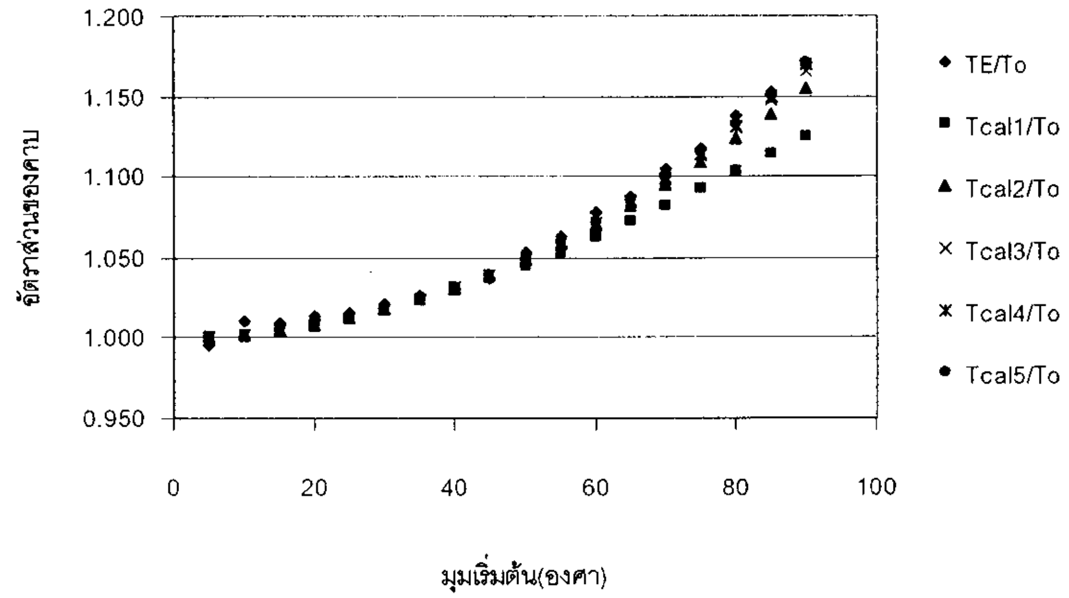
จากภาพประกอบ 11 พบว่าเส้นกราฟจะแสดงแนวโน้มให้เห็นว่าเมื่อมุมเริ่มต้นมีขนาดโตขึ้น อัตราส่วนของคาบที่วัดได้จากการทดลองกับคาบที่คำนวณได้จากการประมาณค่าทางทฤษฎีจะมีค่ามากขึ้นเรื่อยๆตามมุมเริ่มต้นที่มีขนาดเพิ่มมากขึ้น และเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบค่าคาบที่ได้จากผลการทดลองที่มุมเริ่มต้นต่างๆ พบว่าเมื่อมุมเริ่มต้นมีขนาดโตขึ้นค่าความแตกต่างของผลที่ได้จากการทดลองกับผลที่ได้จากการคำนวณก็มีความแตกต่างกันมากขึ้นด้วย ซึ่งหากนำผลการทดลองมาเปรียบเทียบกับคาบจากการคำนวณ โดยขยายเทอมที่ใช้ในการประมาณค่าคาบในทางทฤษฎีออกไปซึ่งจะอยู่ในรูป

$$T_{Cal} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^2 \sin^4\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\right)^2 \sin^6\frac{\theta_0}{2}+\ldots\right]$$

เมื่อแทนค่าแล้วนำค่าคาบของการเคลื่อนที่ที่ได้จากการคำนวณเปรียบเทียบกับคาบที่ได้จากการทดลองจะได้

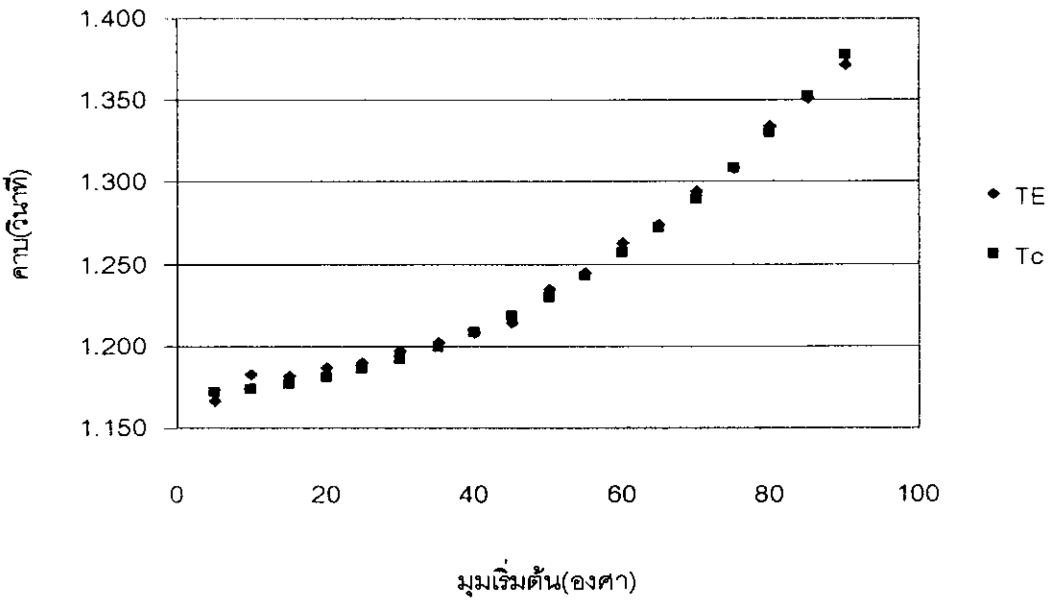


ภาพประกอบ 12 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของคาบที่ได้จากการทดลองและคาบจากการคำนวณโดยการขยายเทอมของการประมาณค่า



ภาพประกอบ 13 แสดงความสัมพันธ์ของอัตราส่วนของคาบกับมุมเริ่มต้น

จากภาพประกอบ 12 และภาพประกอบ 13 แสดงให้เห็นว่าคาบที่ได้จากการทดลองและคาบที่ได้จากการคำนวณโดยใช้การขยายเทอมเป็นเทอมที่ใช้ในการคำนวณทั้งในกรณีทั่วไปและในกรณีที่มุมเริ่มต้นมีค่าน้อยมาก จะให้แนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของคาบเป็นไปในลักษณะเดียวกันนั้นคือ เมื่อมุมเริ่มต้นมีขนาดน้อยกว่า 20 องศา คาบที่ได้จะมีลักษณะคงที่และมีค่าใกล้เคียงกับคาบที่ใช้โดยทั่วไปในการแกว่งของเพนดูลัม($T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$) และจากผลการทดลองยังแสดงให้เห็นว่าเมื่อมุมเริ่มต้นที่ใช้ในการทดลองมีขนาดมากกว่า 20 องศา คาบของการเคลื่อนที่จะไม่คงที่และมีค่ามากกว่าคาบที่ใช้ในการคำนวณโดยทั่วไป และหากทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้เทอมในการประมาณค่าจากสมการ 2.15 และ 2.16 เมื่อ $K = \sin\frac{\theta_0}{2}$ เราสามารถประมาณได้ว่า $K \cong \left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \left(\frac{\theta_0^3}{48}\right)$ ซึ่งจากสมการ 2.16 สามารถประมาณค่าของคาบใหม่ได้เป็น $T \cong T_0\left[1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4\right]$ ซึ่งเมื่อนำไปวิเคราะห์เทียบกับผลการทดลองจะได้



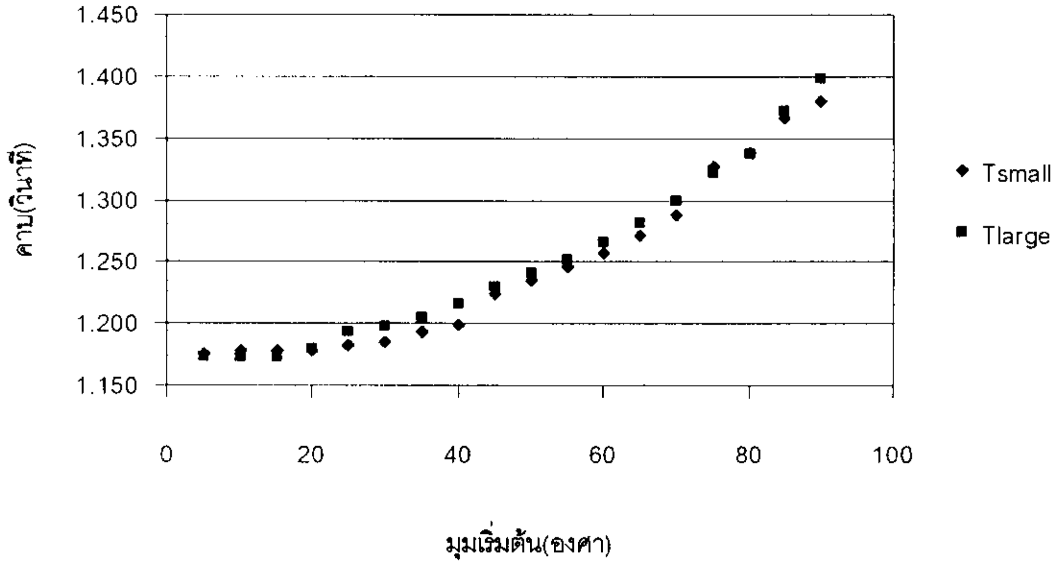
ภาพประกอบ 14 แสดงการเปรียบเทียบความสัมพันธ์ของคาบที่ได้จากการทดลองและคาบจากการคำนวณโดยการประมาณค่า $T \cong T_0\left[1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4\right]$

จากภาพประกอบ 14 จะเห็นได้ว่าการประมาณค่าคาบโดยใช้สมการ

$$T \cong T_0\left[1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4\right]$$

สามารถใช้ประมาณได้ดีพอสมควรโดยให้ผลสอดคล้องกับผลที่ได้จากการทดลอง

และเมื่อทำการทดลองเพื่อดูผลของแรงต้านอากาศที่มีต่อคาบของการเคลื่อนที่ โดยการเปลี่ยนขนาดของลูกตุ้มเพนดูลัมให้มีขนาดเล็กลง ซึ่งได้ผลการทดลองดังภาพประกอบ 15



ภาพประกอบ 15 เปรียบเทียบคาบที่ได้จากการทดลองระหว่างวัตถุ 2 ขนาด

จากภาพประกอบ 15 แสดงกราฟเปรียบเทียบคาบที่ได้จากการทดลองโดยการเปลี่ยนขนาดของลูกตุ้มเพนดูลัม 2 ขนาด ซึ่งพบว่าคาบของการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มเพนดูลัมทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันมาก แสดงว่าแรงต้านทานของอากาศซึ่งขึ้นอยู่กับรูปทรงของวัตถุไม่มีผลกับคาบของการเคลื่อนที่ของเพนดูลัม และจากการพิจารณาภาพประกอบ 12 13 และ 14 พบว่าในช่วงที่มุมเริ่มต้นมีขนาดไม่เกิน 20 องศา คาบที่ได้จากการคำนวณโดยทฤษฎีและคาบที่ได้จากการทดลองมีค่าใกล้เคียงกัน โดยสามารถพิจารณาจากกราฟที่แสดงอัตราส่วนของคาบจากการ

ทดลองกับคาบที่ได้จากการประมาณค่าทางทฤษฎี ซึ่งจากกราฟเมื่อมุมเริ่มต้นมีขนาดน้อยกว่า 20 องศา อัตราส่วนของคาบจะมีค่าใกล้เคียง1 และถึงแม้จะขยายเทอมที่ใช้ในการคำนวณไปจนถึงเทอมที่ 5 ก็จะให้ผลการเปรียบเทียบอัตราส่วนของคาบในลักษณะที่เหมือนกัน นั่นคือคาบการเคลื่อนที่ของมุมเริ่มต้นที่น้อยกว่า 20 องศา จะให้คาบการเคลื่อนที่คงที่ แต่เมื่อมุมมากกว่า 20 องศา คาบการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมจะมีลักษณะไม่คงที่และเพิ่มมากขึ้นเมื่อมุมเริ่มต้นมีขนาดโตขึ้น โดยผลต่างของคาบการเคลื่อนที่ที่มุมมากที่สุดที่ใช้ในการทดลอง(90 องศา)มีค่าแตกต่างกันเพียงประมาณ 1%

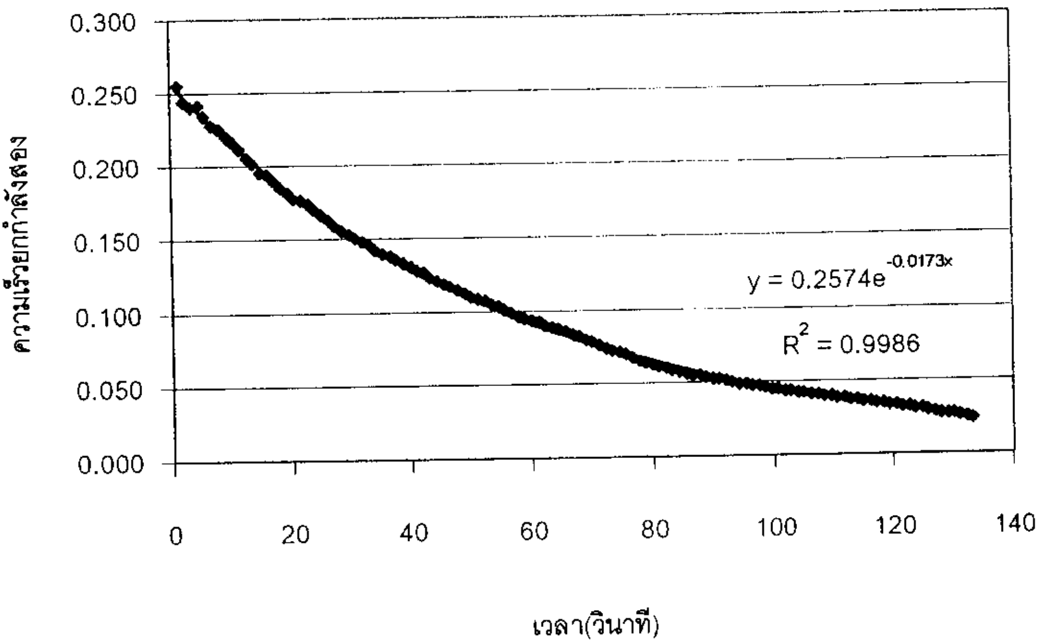
ดังนั้นผลจากการทดลองเปรียบเทียบข้อมูลที่ได้จากการทดลองกับค่าที่ได้จากการคำนวณโดยทฤษฎีแสดงให้เห็นว่าในกรณีที่มุมมีขนาดน้อยกว่า 20 องศา คาบของการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมจะมีค่าคงที่ และสามารถประมาณค่าคาบของการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมได้โดยใช้สมการ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ในกรณีที่มุมมีขนาดน้อยกว่า 20 องศา และในกรณีที่มุมมีขนาดโตขึ้นจนถึง 90 องศา อาจใช้สมการ $T = T_0\left[1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4\right]$ ในการประมาณค่าคาบซึ่งจากการทดลองพบว่าเป็นค่าประมาณที่ใช้ได้ดีพอสมควร โดยแรงต้านทานของอากาศไม่มีผลกับคาบการเคลื่อนที่ของเพนดูลัม

4.2 การเปลี่ยนแปลงของพลังงานจลน์ในการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัม

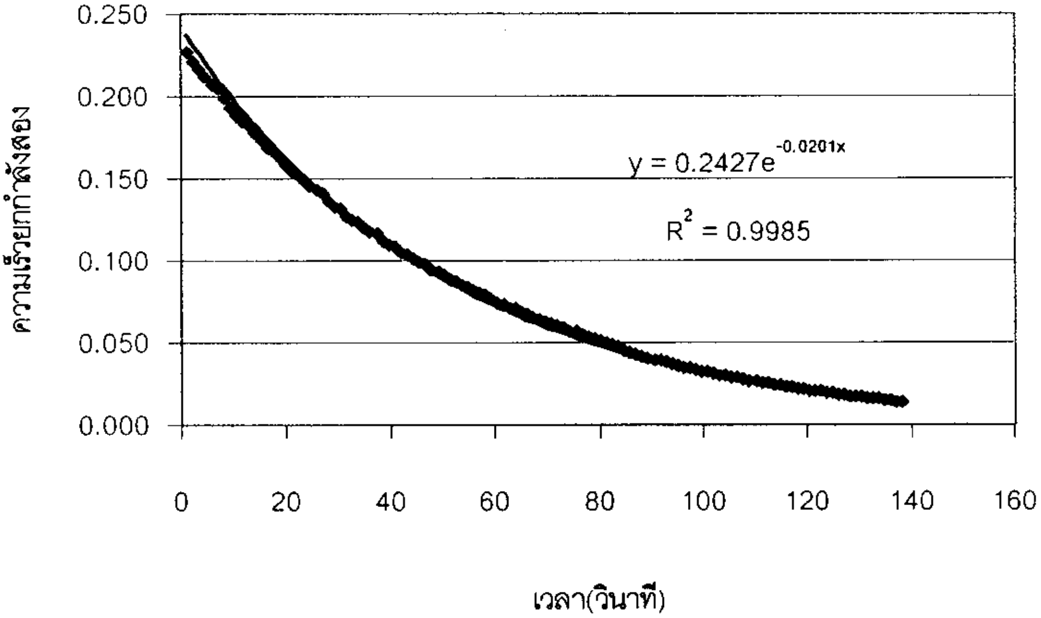
เมื่อนำข้อมูลที่ได้จากการทดลองวัดความเร็วในแต่ละรอบของการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมมาวิเคราะห์การสูญเสียพลังงานจลน์ที่เกิดขึ้นของการเคลื่อนที่เนื่องจากแรงต้านของอากาศ ซึ่งเป็นกรณีการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมที่ถูกหน่วงโดยแรงต้านของอากาศ โดยจะมีสมการการเคลื่อนที่อยู่ในรูปของ

$$\ddot{\theta}+2\gamma\dot{\theta}+\frac{g}{L}\theta=0$$ เมื่อ γ เป็นค่าคงที่ความหน่วง

และจากข้อมูลที่ได้จากการทดลองวัดคาบและความเร็วที่ตำแหน่งสมดุลของการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมโดยให้มุมเริ่มต้นเท่ากับ 15 องศา สามารถแสดงผลการทดลองได้ดังภาพประกอบ 16



ภาพประกอบ 16 แสดงการลดลงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลของความเร็วยกกำลังสองกับเวลาของทรงกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 4.5 เซ็นติเมตร



ภาพประกอบ 17 แสดงการลดลงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลของความเร็วยกกำลังสองกับเวลาของทรงกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 3.1 เซ็นติเมตร

ภาพประกอบ 16 และภาพประกอบ 17 แสดงให้เห็นการลดลงของความเร็วที่ตำแหน่งสมดุลยกกำลังสองของเพนดูลัมโดยกราฟมีลักษณะการลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ซึ่งสามารถเขียนสมการแสดงการลดลงโดยใช้โปรแกรม Microsoft Excel และเมื่อวิเคราะห์ดูค่าของความเร็วกำลังสองซึ่งเป็นเทอมของพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่ ในกรณีของทรงกลมเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด 4.50 เซ็นติเมตรก็จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์เป็น

$$v^2 = 0.2574e^{-0.0173t}$$

และของทรงกลมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 3.10 เซ็นติเมตร

$$v^2 = 0.2427e^{-0.0201t}$$

ซึ่งหากพิจารณาเปรียบเทียบสมการที่ได้ในเทอมของพลังงานทั่วไป $E(t) \approx E_0 e^{-2\gamma t}$ แสดงให้เห็นว่าพลังงานกลในการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมที่สูญเสียให้กับสิ่งแวดล้อมมีการลดลงแบบเอ็กโปเนนเชียล และหากพิจารณาแรงต้านของอากาศจากผลการทดลองจะได้จากทรงกลมเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด 4.5 เซ็นติเมตร

$$2\gamma = 0.0173$$

$$\gamma_1 = 8.65 \times 10^{-3}$$

และหาพิจารณาคาบจากสมการ

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \gamma^2}$$

จะได้

$$\omega_1' = \sqrt{\frac{9.781}{0.34} - (8.65 \times 10^{-3})^2}$$

$$= 5.3635 \qquad \text{rad/s}$$

ดังนั้น

$$T_1' = \frac{2\pi}{\omega_1'}$$

$$= \frac{2\pi}{5.3635}$$

$$T_1' = 1.1715 \qquad \text{s}$$

และในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาทรงกลมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 3.1 เซ็นติเมตร มวล 20.15 กรัม จะได้

$$\gamma_2 = 0.0101$$

$$\omega'_2 = 5.3635$$

$$T'_2 = 1.1715 \quad \text{s}$$

เมื่อนำค่าที่คำนวณได้จากการทดลองมาเทียบกับค่าที่ใช้ในกรณีทั่วๆไป

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$= \sqrt{\frac{9.781}{0.34}}$$

$$= 5.3635 \quad \text{rad/s}$$

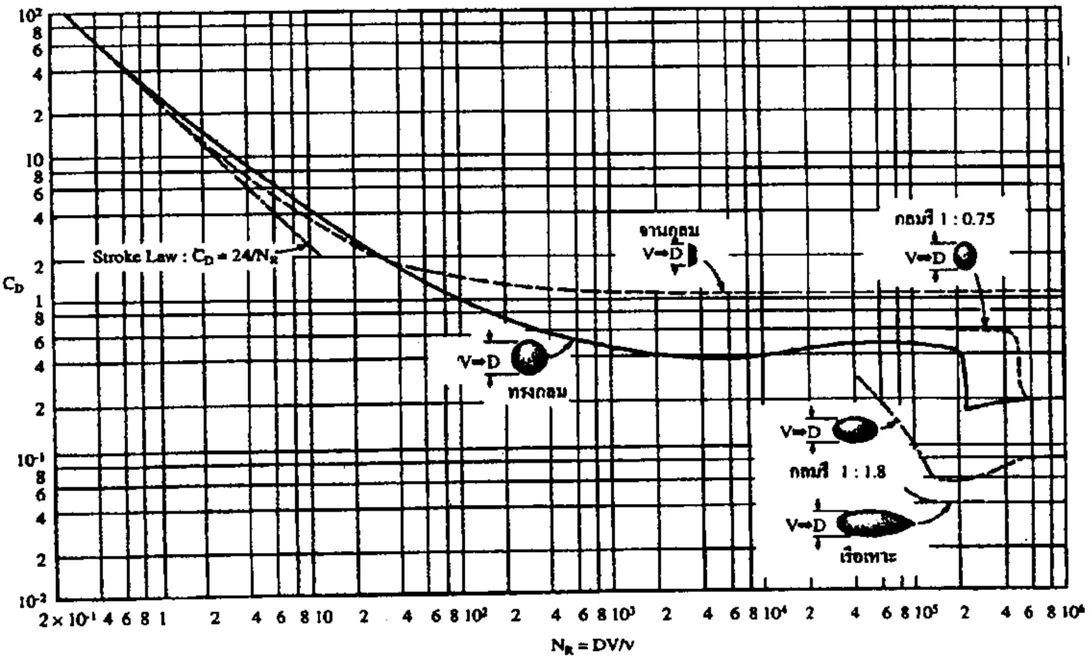
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{2\pi}{5.3635}$$

$$T = 1.1715 \text{ s}$$

จะเห็นได้ว่าคาบของการเคลื่อนที่ที่ได้จากการนำค่าคงที่ของแรงต้านมาคำนวณจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการคำนวณในกรณีที่ไม่คิดแรงต้านการเคลื่อนที่ แสดงให้เห็นว่าแรงต้านของอากาศมีผลต่อคาบการเคลื่อนที่น้อยมากจนสามารถตัดทิ้งไม่นำมาใช้คำนวณได้ แต่อย่างไรก็ตามเรายังสามารถนำผลที่ได้จากการทดลองไปวิเคราะห์หาสัมประสิทธิ์แรงต้านรวมที่กระทำกับ

วัตถุ 3 มิติ ซึ่งแรงต้านรวมจะมีค่าเท่ากับผลบวกของแรงต้านจากความเสียดทานกับแรงต้านจากความดัน โดยสามารถวิเคราะห์เปรียบเทียบกับภาพประกอบ 18



ภาพประกอบ 18 แสดงสัมประสิทธิ์แรงต้านของวัตถุที่มีรูปทรงต่างๆ

(ที่มา: กลศาสตร์ของไหล, 2545)

จากภาพประกอบ 18 จะได้ว่า

$$N_R = \frac{DV}{\upsilon}$$

เมื่อ N_R เป็นค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์

D เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวัตถุ(m)

υ เป็นความหนืดคิเนแมติก($1.32 \times 10^{-5} m^2/s$)

V เป็นความเร็วของวัตถุ(m/s)

เมื่อนำค่าความเร็วที่ได้จากการทดลองแทนในสมการข้างต้นจะได้

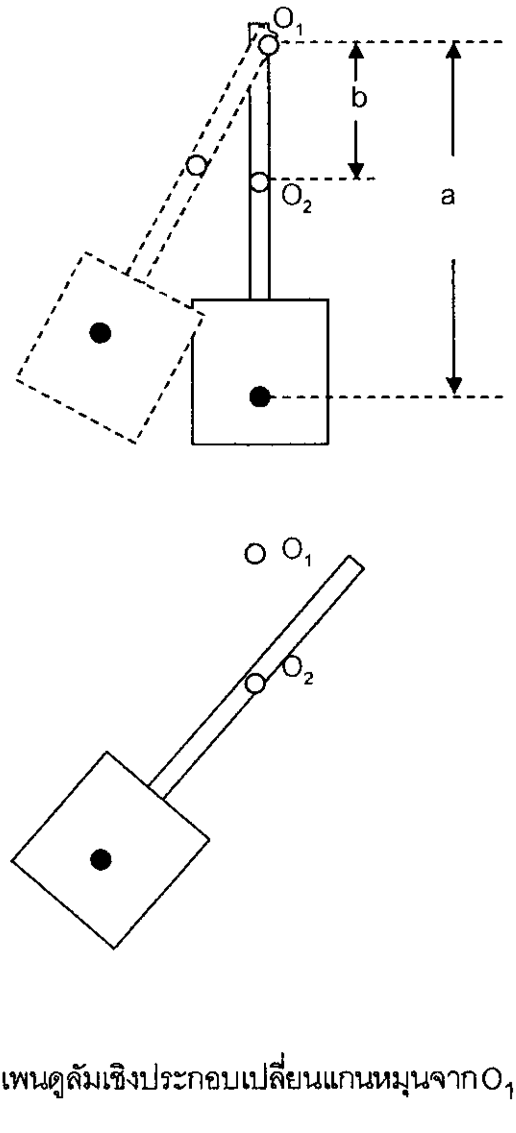
$$N_R = \frac{0.045 \times 0.5073}{1.32 \times 10^{-5}}$$

$$= 1729.4318$$

เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับภาพประกอบ 18 พบว่าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านมีค่าประมาณ 0.40 และด้วยการวิเคราะห์แบบเดียวกันในกรณีของทรงกลมขนาดต่างก็จะพบว่าสัมประสิทธิ์แรงต้านรวมของวัตถุทรงกลมจะอยู่ในช่วงประมาณ 0.4 - 0.5

4.3 การประยุกต์ใช้การเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมในการหาจุดศูนย์กลางมวล

ในงานวิจัยชิ้นนี้นอกจากการศึกษาการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมเพื่อเปรียบเทียบผลจากการทดลองกับผลที่ได้ทางทฤษฎีแล้ว ยังศึกษาการประยุกต์ใช้การเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมช่วยในการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุต่างๆ รัศมีไจเรชั่น และโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุโดยทำการวัดคาบที่ได้จากการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมเชิงประกอบและการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดหมุนสองตำแหน่งดังภาพประกอบ 19 แล้วจึงนำคาบที่ได้มาคำนวณโดยใช้สมการ 3.3 และสมการ 3.4 ซึ่งผลที่ได้จากการทดลองสามารถแสดงได้ดังตาราง 2



ภาพประกอบ 19 แสดงเพนดูลัมเชิงประกอบเปลี่ยนแกนหมุนจาก O_1 เป็น O_2

ตาราง 2 ตัวอย่างผลการทดลองหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล(a)และค่าโมเมนต์ความเฉื่อย(I_0) ของวัตถุ

รูปทรงวัตถุ	มวล (kg)	a จากการคำนวณ (m)	a จากผลการทดลอง (m)	% แตกต่าง	k (m)	$I_0 = mk^2$ $\times 10^{-3}$ (kgm^2)
แผ่นจานกลม	0.204	0.439	0.423	3.64	0.075	1.148
แผ่นจานกลม	0.352	0.439	0.432	1.59	0.074	1.928
หกเหลี่ยม	0.322	0.425	0.431	1.41	0.090	2.608
ทรงกระบอก	0.299	0.434	0.438	0.92	0.084	2.110
ทรงกระบอก	0.614	0.426	0.433	1.64	0.069	2.923

จากตาราง 2 ตัวอย่างวัตถุที่ใช้ในการทดลองจะเป็นวัตถุที่สามารถคำนวณหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล รัศมีไจเรชั่น และโมเมนต์ความเฉื่อยโดยใช้สมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผลที่ได้จากการทดลองพบว่าความแตกต่างของตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลที่ได้จากการคำนวณโดยสมการทางคณิตศาสตร์กับตำแหน่งที่ได้จากการทดลองมีค่าแตกต่างกันเพียงประมาณ 5% แสดงให้เห็นว่าเราสามารถใช้การทดลองหาคาบของเพนดูลัมเชิงประกอบช่วยในการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุใดๆ หรือวัตถุแข็งเกร็งที่ไม่สามารถจะคำนวณหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลหรือโมเมนต์ความเฉื่อยได้โดยตรงด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถจะประยุกต์ใช้เพื่อออกแบบอุปกรณ์หรือเครื่องมือเครื่องใช้ต่างๆ เช่น อุปกรณ์กีฬากระดานโต้คลื่น