บทที่ 3

ตัวดำเนินการโคสแตนท์สำหรับโคเชียนของพีชคณิต su(5)/(su(4)×u(1))

ก่อนที่จะทำการวิเคราะห์สร้างตัวดำเนินการโคสแตนท์สำหรับปริภูมิโคเชียนของพีชคณิต su(5)/(su(4)×u(1)) จำเป็นที่จะต้องทราบตัวดำเนินการและตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์สถานะของ su(5)

พีชคณิต su(5) ประกอบด้วยตัวดำเนินการหมุนระนาบที่จะมีได้ทั้งหมดที่ทำให้ขนาดของเวกเตอร์ตำแหน่งในปริภูมิของจำนวนเชิงซ้อน 5 มิติไม่เปลี่ยนแปลง

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = const.$$

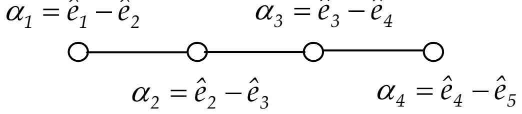
จากเมทริกซ์ของคาร์ตังของพีชคณิต su(5)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3-1}$$

รากมูลฐานในฐานหลักโอเมกาอ่านได้จากแต่ละแถวของเมทริกซ์

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= 2\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2 = \hat{e}_1 - \hat{e}_2 \\ \vec{\alpha}_2 &= -\hat{\omega}_1 + 2\hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_3 = \hat{e}_2 - \hat{e}_3 \\ \vec{\alpha}_3 &= -\hat{\omega}_2 + 2\hat{\omega}_3 - \hat{\omega}_4 = \hat{e}_3 - \hat{e}_4 \\ \vec{\alpha}_4 &= -\hat{\omega}_3 + 2\hat{\omega}_4 = \hat{e}_4 - \hat{e}_5 \end{aligned} \tag{3-2}$$

คอลัมน์สุดท้ายแสดงรากมูลฐานในฐานหลักของออร์ธอนอร์มอล ความสัมพันธ์ระหว่างรากมูลฐานเป็นตามแผนภาพดินกินดังนี้



นอกจากรากมูลฐานทั้งสี่แล้ว ยังมีรากที่ได้จากการรวมกันของรากมูลฐานดังนี้

$$\vec{\alpha}_5 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 = \hat{e}_1 - \hat{e}_3$$

$$\vec{\alpha}_6 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 = \hat{e}_2 - \hat{e}_4$$

$$\vec{\alpha}_7 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 = \hat{e}_1 - \hat{e}_4$$

$$\vec{\alpha}_8 = \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4 = \hat{e}_3 - \hat{e}_5$$

$$\vec{\alpha}_9 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4 = \hat{e}_2 - \hat{e}_5$$

$$\vec{\alpha}_{10} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_3 = \hat{e}_1 - \hat{e}_5 \qquad (3\text{-}3)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างฐานหลักโอเมกาและฐานหลักของออร์ธอนอร์มอลเป็น ดังนี้

$$\hat{\omega}_1 = \frac{1}{5}\left(4\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - \hat{e}_3 - \hat{e}_4 - \hat{e}_5\right) \qquad (3\text{-}4)$$

$$\hat{\omega}_2 = \frac{1}{5}\left(3\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3 - 2\hat{e}_4 - 2\hat{e}_5\right) \qquad (3\text{-}5)$$

$$\hat{\omega}_3 = \frac{1}{5}\left(2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 - 3\hat{e}_4 - 3\hat{e}_5\right) \qquad (3\text{-}6)$$

$$\hat{\omega}_4 = \frac{1}{5}\left(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3 + \hat{e}_4 - 4\hat{e}_5\right) \qquad (3\text{-}7)$$

สมมุติให้ Λ เป็นตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์สถานะของ su(5) เมื่อตัวดำเนินการคาร์ตัง $\vec{H} = H_1\hat{\omega}_1 + H_2\hat{\omega}_2 + H_3\hat{\omega}_3 + H_4\hat{\omega}_4$ กระทำต่อ Λ จะให้ผลดังนี้

$$\vec{H}\Lambda = (a_1, a_2, a_3, a_4)\Lambda$$

เรียก $a_{1,2,3,4}$ ว่าเลขกำหนดของดินกินซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
นำ a_1 คูณกับสมการ (3-4) จะได้

$$a_1\hat{\omega}_1 = \frac{a_1}{5}\left(4\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - \hat{e}_3 - \hat{e}_4 - \hat{e}_5\right) \qquad (3\text{-}8)$$

นำ a_2 คูณกับสมการ (3-5) จะได้

$$a_2\hat{\omega}_2 = \frac{a_2}{5}\left(3\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3 - 2\hat{e}_4 - 2\hat{e}_5\right) \tag{3-9}$$

นำ a_3 คูณกับสมการ (3-6) จะได้

$$a_3\hat{\omega}_3 = \frac{a_3}{5}\left(2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 - 3\hat{e}_4 - 3\hat{e}_5\right) \tag{3-10}$$

นำ a_4 คูณกับสมการ (3-6) จะได้

$$a_4\hat{\omega}_4 = \frac{a_4}{5}\left(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3 + \hat{e}_4 - 4\hat{e}_5\right) \tag{3-11}$$

จากผลรวมของสมการ (3-8) (3-9) (3-10) และ (3-11) จะได้ความสัมพันธ์ของตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์สถานะในฐานหลักของโอเมกากับฐานหลักของออร์ธอนอร์มัล ดังนี้

$$\begin{aligned}\underbrace{(a_1,a_2,a_3,a_4)}_{\omega-basis} \equiv & \underbrace{(\frac{1}{5}(4a_1+3a_2+2a_3+a_4),\frac{1}{5}(-a_1+3a_2+2a_3+a_4),\frac{1}{5}(-a_1-2a_2+2a_3+a_4),}_{orthonormal\ basis} \\ & \underbrace{(\frac{1}{5}(-a_1-2a_2-3a_3+a_4),(\frac{1}{5}(-a_1-2a_2-3a_3-4a_4)))}_{orthonormal\ basis}\end{aligned} \tag{3-12}$$

เทอมด้านขวาของสมการ (3-10) ในฐานหลักของออร์ธอนอร์มอลจะได้

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{5}(4a_1+3a_2+2a_3+a_4) \\ b_2 &= \frac{1}{5}(-a_1+3a_2+2a_3+a_4) \\ b_3 &= \frac{1}{5}(-a_1-2a_2+2a_3+a_4) \\ b_4 &= \frac{1}{5}(-a_1-2a_2-3a_3+a_4) \\ b_5 &= \frac{1}{5}(-a_1-2a_2-3a_3-4a_4) \end{aligned} \tag{3-13}$$

เงื่อนไขบังคับสำหรับ $b_{1,2,3,4,5}$ คือ $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=0$

สมการ (3-13) ให้ตัวดำเนินการคาร์ตังในฐานหลักออร์ธอนอร์มอล $h = h_1\hat{e}_1 + h_2\hat{e}_2 + h_3\hat{e}_3 + h_4\hat{e}_4 + h_5\hat{e}_5$ ในเทอมของตัวดำเนินการคาร์ตังในฐานหลักโอเมกา $\vec{H}$ ดังนี้

$$h_1 = \frac{1}{5}(4H_1 + 3H_2 + 2H_3 + H_4) \tag{3-14}$$

$$h_2 = \frac{1}{5}(-H_1 + 3H_2 + 2H_3 + H_4) \tag{3-15}$$

$$h_3 = \frac{1}{5}(-H_1 - 2H_2 + 2H_3 + H_4) \tag{3-16}$$

$$h_4 = \frac{1}{5}(-H_1 - 2H_2 - 3H_3 + H_4) \tag{3-17}$$

$$h_5 = \frac{1}{5}(-H_1 - 2H_2 - 3H_3 - 4H_4) \tag{3-18}$$

ในทางกลับกัน

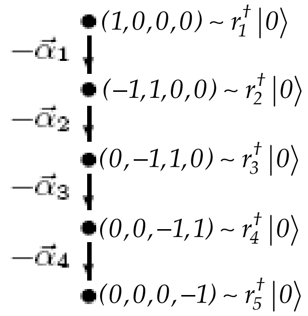
$$H_1 = h_1 - h_2 \tag{3-19}$$

$$H_2 = h_2 - h_3 \tag{3-20}$$

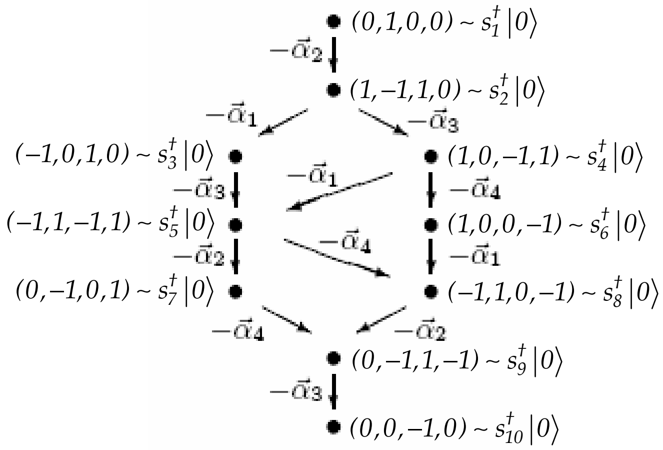
$$H_3 = h_3 - h_4 \tag{3-21}$$

$$H_4 = h_4 - h_5 \tag{3-22}$$

เพื่อสร้างตัวดำเนินการหมุนของ su(5) กำหนดให้ตัวออสซิลเลเตอร์ $r_i^\dagger, \bar{r}_i^\dagger$ และ $s_j^\dagger, \bar{s}_j^\dagger$ โดยที่ $i = 1,2,3,4,5$ และ $j = 1,2,...,10$ กระทำต่อสถานะสุญญากาศสอดคล้องกับเวกเตอร์ในตัวแทนปริภูมิ $(1,0,0,0)$ และ $(0,1,0,0)$ ดังแผนภาพ 3.1 และ 3.2 ส่วนตัวแทนปริภูมิ $(0,0,1,0)$ และ $(0,0,0,1)$ ได้จากการคูณ -1 และกลับทิศของลูกศรในแผนภาพของตัวแทนปริภูมิ $(0,1,0,0)$ และ $(1,0,0,0)$ ตามลำดับ



ภาพประกอบ 3.1 แสดงเวกเตอร์ตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์ *(1,0,0,0)*



ภาพประกอบ 3.2 แสดงเวกเตอร์ตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์ *(0,1,0,0)*

3.1 **ตัวดำเนินการของพีชคณิต** su(5)

พีชคณิต su(5) ประกอบไปด้วยตัวดำเนินการหมุนทั้งหมด 24 ตัว ตัวดำเนินการลดระดับสถานะและเพิ่มระดับสถานะสำหรับรากทั้งหมดอ่านจากแผนภาพ 3.1, 3.2 และรวมเทอมที่เป็นคอนจูเกตของตัวแทนปริภูมิดังกล่าว เป็นดังนี้

1. $T_1^{+} = r_1^{\dagger} r_2 + s_2^{\dagger} s_3 + s_4^{\dagger} s_5 + s_6^{\dagger} s_8 + \overline{r}_2^{\dagger} \overline{r}_1 + \overline{s}_3^{\dagger} \overline{s}_2 + \overline{s}_5^{\dagger} \overline{s}_4 + \overline{s}_8^{\dagger} \overline{s}_6$

2. $T_1^{-} = r_2^{\dagger} r_1 + s_3^{\dagger} s_2 + s_5^{\dagger} s_4 + s_8^{\dagger} s_6 + \overline{r}_1^{\dagger} \overline{r}_2 + \overline{s}_2^{\dagger} \overline{s}_3 + \overline{s}_4^{\dagger} \overline{s}_5 + \overline{s}_6^{\dagger} \overline{s}_8$

3. $T_2^{+} = r_2^{\dagger} r_3 + s_1^{\dagger} s_2 + s_5^{\dagger} s_7 + s_8^{\dagger} s_9 + \overline{r}_3^{\dagger} \overline{r}_2 + \overline{s}_2^{\dagger} \overline{s}_1 + \overline{s}_7^{\dagger} \overline{s}_5 + \overline{s}_9^{\dagger} \overline{s}_8$

4. $T_2^{-} = r_3^{\dagger} r_2 + s_2^{\dagger} s_1 + s_7^{\dagger} s_5 + s_9^{\dagger} s_8 + \overline{r}_2^{\dagger} \overline{r}_3 + \overline{s}_1^{\dagger} \overline{s}_2 + \overline{s}_5^{\dagger} \overline{s}_7 + \overline{s}_8^{\dagger} \overline{s}_9$

5. $T_3^{+} = r_1^{\dagger} r_3 - s_1^{\dagger} s_3 + s_4^{\dagger} s_7 + s_6^{\dagger} s_9 - \overline{r}_3^{\dagger} \overline{r}_1 + \overline{s}_3^{\dagger} \overline{s}_1 - \overline{s}_7^{\dagger} \overline{s}_4 - \overline{s}_9^{\dagger} \overline{s}_6$

6. $T_3^{-} = r_3^{\dagger} r_1 - s_3^{\dagger} s_1 + s_7^{\dagger} s_4 + s_9^{\dagger} s_6 - \overline{r}_1^{\dagger} \overline{r}_3 + \overline{s}_1^{\dagger} \overline{s}_3 - \overline{s}_4^{\dagger} \overline{s}_7 - \overline{s}_6^{\dagger} \overline{s}_9$

7. $T_4^{+} = r_3^{\dagger} r_4 + s_2^{\dagger} s_4 + s_3^{\dagger} s_5 + s_9^{\dagger} s_{10} + \overline{r}_4^{\dagger} \overline{r}_3 + \overline{s}_4^{\dagger} \overline{s}_2 + \overline{s}_5^{\dagger} \overline{s}_3 + \overline{s}_{10}^{\dagger} \overline{s}_9$

8. $T_4^{-} = r_4^{\dagger} r_3 + s_4^{\dagger} s_2 + s_5^{\dagger} s_3 + s_{10}^{\dagger} s_9 + \overline{r}_3^{\dagger} \overline{r}_4 + \overline{s}_2^{\dagger} \overline{s}_4 + \overline{s}_3^{\dagger} \overline{s}_5 + \overline{s}_9^{\dagger} \overline{s}_{10}$

9. $T_5^{+} = r_2^{\dagger} r_4 + s_1^{\dagger} s_4 - s_3^{\dagger} s_7 + s_8^{\dagger} s_{10} - \overline{r}_4^{\dagger} \overline{r}_2 - \overline{s}_4^{\dagger} \overline{s}_1 + \overline{s}_7^{\dagger} \overline{s}_3 - \overline{s}_{10}^{\dagger} \overline{s}_8$

10. $T_5^- = r_4^\dagger r_2 + s_4^\dagger s_1 - s_7^\dagger s_3 + s_{10}^\dagger s_8 - \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_4 - \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_4 + \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_7 - \overline{s}_8^\dagger \overline{s}_{10}$

11. $T_6^+ = r_1^\dagger r_4 - s_1^\dagger s_5 - s_2^\dagger s_7 + s_6^\dagger s_{10} - \overline{r}_4^\dagger \overline{r}_1 + \overline{s}_5^\dagger \overline{s}_1 + \overline{s}_7^\dagger \overline{s}_2 - \overline{s}_{10}^\dagger \overline{s}_6$

12. $T_6^- = r_4^\dagger r_1 - s_5^\dagger s_1 - s_7^\dagger s_2 + s_{10}^\dagger s_6 - \overline{r}_1^\dagger \overline{r}_4 + \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_5 + \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_7 - \overline{s}_6^\dagger \overline{s}_{10}$

13. $T_7^+ = r_4^\dagger r_5 + s_4^\dagger s_6 + s_5^\dagger s_8 + s_7^\dagger s_9 + \overline{r}_5^\dagger \overline{r}_4 + \overline{s}_6^\dagger \overline{s}_4 + \overline{s}_8^\dagger \overline{s}_5 + \overline{s}_9^\dagger \overline{s}_7$

14. $T_7^- = r_5^\dagger r_4 + s_6^\dagger s_4 + s_8^\dagger s_5 + s_9^\dagger s_7 + \overline{r}_4^\dagger \overline{r}_5 + \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_6 + \overline{s}_5^\dagger \overline{s}_8 + \overline{s}_7^\dagger \overline{s}_9$

15. $T_8^+ = r_3^\dagger r_5 + s_2^\dagger s_6 + s_3^\dagger s_8 - s_7^\dagger s_{10} - \overline{r}_5^\dagger \overline{r}_3 - \overline{s}_6^\dagger \overline{s}_2 - \overline{s}_8^\dagger \overline{s}_3 + \overline{s}_{10}^\dagger \overline{s}_7$

16. $T_8^- = r_5^\dagger r_3 + s_6^\dagger s_2 + s_8^\dagger s_3 - s_{10}^\dagger s_7 - \overline{r}_3^\dagger \overline{r}_5 - \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_6 - \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_8 + \overline{s}_7^\dagger \overline{s}_{10}$

17. $T_9^+ = r_2^\dagger r_5 + s_1^\dagger s_6 - s_3^\dagger s_9 - s_5^\dagger s_{10} - \overline{r}_5^\dagger \overline{r}_2 - \overline{s}_6^\dagger \overline{s}_1 - \overline{s}_9^\dagger \overline{s}_3 + \overline{s}_{10}^\dagger \overline{s}_5$

18. $T_9^- = r_5^\dagger r_2 + s_6^\dagger s_1 - s_9^\dagger s_3 - s_{10}^\dagger s_5 - \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_5 - \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_6 - \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_9 + \overline{s}_5^\dagger \overline{s}_{10}$

19. $T_{10}^+ = r_1^\dagger r_5 - s_1^\dagger s_8 - s_2^\dagger s_9 - s_4^\dagger s_{10} - \overline{r}_5^\dagger \overline{r}_1 + \overline{s}_8^\dagger \overline{s}_1 + \overline{s}_9^\dagger \overline{s}_2 + \overline{s}_{10}^\dagger \overline{s}_4$

20. $T_{10}^- = r_5^\dagger r_1 - s_8^\dagger s_1 - s_9^\dagger s_2 - s_{10}^\dagger s_4 - \overline{r}_1^\dagger \overline{r}_5 + \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_8 + \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_9 + \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_{10}$ (3-23)

สำหรับตัวดำเนินการคาร์ตังพีชคณิตย่อยนิยามจากคอมมิวเตเตอร์ ดังนี้

$$\begin{aligned} H_1 \equiv \left[T_1^+, T_1^-\right] &= r_1^\dagger r_1 - r_2^\dagger r_2 + s_2^\dagger s_2 - s_3^\dagger s_3 + s_4^\dagger s_4 - s_5^\dagger s_5 + s_6^\dagger s_6 - s_8^\dagger s_8 \\ &\quad - \overline{r}_1^\dagger \overline{r}_1 + \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_2 - \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_2 + \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_3 - \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_4 + \overline{s}_5^\dagger \overline{s}_5 - \overline{s}_6^\dagger \overline{s}_6 + \overline{s}_8^\dagger \overline{s}_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 \equiv \left[T_2^+, T_2^-\right] &= r_2^\dagger r_2 - r_3^\dagger r_3 + s_1^\dagger s_1 - s_2^\dagger s_2 + s_5^\dagger s_5 - s_7^\dagger s_7 + s_8^\dagger s_8 - s_9^\dagger s_9 \\ &\quad - \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_2 + \overline{r}_3^\dagger \overline{r}_3 - \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_1 + \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_2 - \overline{s}_5^\dagger \overline{s}_5 + \overline{s}_7^\dagger \overline{s}_7 - \overline{s}_8^\dagger \overline{s}_8 + \overline{s}_9^\dagger \overline{s}_9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3 \equiv \left[T_4^+, T_4^-\right] &= r_3^\dagger r_3 - r_4^\dagger r_4 + s_2^\dagger s_2 - s_4^\dagger s_4 + s_3^\dagger s_3 - s_5^\dagger s_5 + s_9^\dagger s_9 - s_{10}^\dagger s_{10} \\ &\quad - \overline{r}_3^\dagger \overline{r}_3 + \overline{r}_4^\dagger \overline{r}_4 - \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_2 + \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_4 - \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_3 + \overline{s}_5^\dagger \overline{s}_5 - \overline{s}_9^\dagger \overline{s}_9 + \overline{s}_{10}^\dagger \overline{s}_{10} \end{aligned}$$

$$H_4 \equiv \left[T_7^+, T_7^-\right] = r_4^\dagger r_4 - r_5^\dagger r_5 + s_4^\dagger s_4 - s_6^\dagger s_6 + s_5^\dagger s_5 - s_8^\dagger s_8 + s_7^\dagger s_7 - s_9^\dagger s_9$$
$$- \overline{r}_4^\dagger \overline{r}_4 + \overline{r}_5^\dagger \overline{r}_5 - \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_4 + \overline{s}_6^\dagger \overline{s}_6 - \overline{s}_5^\dagger \overline{s}_5 + \overline{s}_8^\dagger \overline{s}_8 - \overline{s}_7^\dagger \overline{s}_7 + \overline{s}_9^\dagger \overline{s}_9 \quad (3\text{-}24)$$

คอมมิวเตเตอร์ระหว่าง $\vec{H} = H_1\hat{\omega}_1 + H_2\hat{\omega}_2 + H_3\hat{\omega}_3 + H_4\hat{\omega}_4$ กับตัวดำเนินการเพิ่มและลดสถานะให้ผลเป็น ดังนี้

1) $\left[\vec{H}, T_1^\pm\right] = \pm(2\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)T_1^\pm = \pm\vec{\alpha}_1 T_1^\pm$

2) $\left[\vec{H}, T_2^\pm\right] = \pm(-\hat{\omega}_1 + 2\hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_3)T_2^\pm = \pm\vec{\alpha}_2 T_2^\pm$

3) $\left[\vec{H}, T_3^\pm\right] = \pm(\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_3)T_3^\pm = \pm(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)T_3^\pm$

4) $\left[\vec{H}, T_4^\pm\right] = \pm(-\hat{\omega}_2 + 2\hat{\omega}_3 - \hat{\omega}_4)T_4^\pm = \pm(\vec{\alpha}_3)T_4^\pm$

5) $\left[\vec{H}, T_5^\pm\right] = \pm(-\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 - \hat{\omega}_4)T_5^\pm = \pm(\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3)T_5^\pm$

6) $\left[\vec{H}, T_6^\pm\right] = \pm(\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_3 - \hat{\omega}_4)T_6^\pm = \pm(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3)T_6^\pm$

7) $\left[\vec{H}, T_7^\pm\right] = \pm(-\hat{\omega}_3 + 2\hat{\omega}_4)T_7^\pm = \pm(\vec{\alpha}_4)T_7^\pm$

8) $\left[\vec{H}, T_8^\pm\right] = \pm(-\hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4)T_8^\pm = \pm(\vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4)T_8^\pm$

9) $\left[\vec{H}, T_9^\pm\right] = \pm(-\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_4)T_9^\pm = \pm(\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4)T_9^\pm$

10) $\left[\vec{H}, T_{10}^\pm\right] = \pm(\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_4)T_{10}^\pm = \pm(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4)T_{10}^\pm$

คอมมิวเตเตอร์ของตัวดำเนินการที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่เหลือทั้งหมดมี ดังนี้

$$\left[T_3^+,T_3^-\right]=H_1+H_2=h_1-h_3 \qquad \left[T_5^+,T_5^-\right]=H_2+H_3=h_2-h_4$$

$$\left[T_6^+,T_6^-\right]=H_1+H_2+H_3=h_1-h_4 \qquad \left[T_8^+,T_8^-\right]=H_3+H_4=h_3-h_5$$

$$\left[T_9^+,T_9^-\right]=H_2+H_3+H_4=h_2-h_5 \qquad \left[T_{10}^+,T_{10}^-\right]=H_1+H_2+H_3+H_4=h_1-h_5$$

$$\left[T_1^\pm,T_2^\pm\right]=\pm T_3^\pm \qquad \left[T_1^\pm,T_5^\pm\right]=\pm T_6^\pm$$

$$\left[T_1^\pm,T_9^\pm\right]=\pm T_{10}^\pm \qquad \left[T_2^\pm,T_3^\mp\right]=\pm T_1^\mp$$

$$\left[T_2^\pm,T_4^\pm\right]=\pm T_5^\pm \qquad \left[T_2^\pm,T_5^\mp\right]=\mp T_4^\mp$$

$$\left[T_2^\pm,T_9^\mp\right]=\mp T_8^\mp \qquad \left[T_3^\pm,T_8^\pm\right]=\pm T_9^\pm$$

$$\left[T_4^\pm,T_7^\pm\right]=\pm T_8^\pm \tag{3-25}$$

3.2 **แกมมาเมทริกซ์ของปริภูมิโคเชียนของพีชคณิต** su(5)/(su(4)$\times$u(1))

ในการสร้างตัวดำเนินการโคสแตนท์บนปริภูมิโคเชียน 8 มิติ ใช้แกมมาเมทริกซ์ 8 ตัว ซึ่งสร้างขึ้นจากเมทริกซ์ของเพาลีและเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 2×2 ดังนี้

$$\gamma_1=\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_1 \qquad \gamma_2=\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_2$$

$$\gamma_3=\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3 \qquad \gamma_4=\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\underset{\sim}{1}$$

$$\gamma_5=\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3\otimes\underset{\sim}{1} \qquad \gamma_6=\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1}$$

$$\gamma_7=\sigma_1\otimes\sigma_3\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1} \qquad \gamma_8=\sigma_2\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1}$$

เพื่อใช้กับตัวดำเนินการเพิ่มและลดระดับสถานะ แกมมาเมทริกซ์นิยามใหม่เป็น ดังนี้

$$\gamma_7^\pm=(\gamma_1\pm i\gamma_2)=\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma^\pm$$

$$\gamma_8^\pm=(\gamma_3\pm i\gamma_4)=\left\{\left[\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma^+\otimes\frac{1}{2}(\sigma_3\pm\underset{\sim}{1})\right]+\left[\sigma_1\otimes\sigma_1\otimes\sigma^-\otimes\frac{1}{2}(\sigma_3\mp\underset{\sim}{1})\right]\right\}$$

$$\gamma_9^{\pm} = (\gamma_5 \pm i\gamma_6) = \left\{ \left[\sigma_1 \otimes \sigma^{+} \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 \pm \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma^{-} \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 \mp \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\}$$

$$\gamma_{10}^{\pm} = (\gamma_7 \pm i\gamma_8) = \left\{ \left[\sigma^{+} \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 \pm \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma^{-} \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 \mp \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\} \quad (3\text{-}26)$$

คอมมิวเตเตอร์ระหว่างคู่ของแกมมาเมทริกซ์มีผลเป็น

1) $\left[\gamma_7^{+}, \gamma_7^{-}\right] = \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3$ 2) $\left[\gamma_8^{+}, \gamma_8^{-}\right] = \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3$

3) $\left[\gamma_9^{+}, \gamma_9^{-}\right] = \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \underset{\sim}{1}$ 4) $\left[\gamma_{10}^{+}, \gamma_{10}^{-}\right] = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}$ (3-27)

3.3 **ตัวดำเนินการโคสแตนท์สำหรับพีชคณิต** su(5)/(su(4)×u(1))

ตัวดำเนินการหมุนของพีชคณิต su(5) 24 ตัว ตามที่แสดงไว้ในสมการ (3-23) และสมการ (3-24) ประกอบด้วยส่วนต่างๆ ดังนี้

1. ตัวดำเนินการหมุนของพีชคณิต su(4) ประกอบด้วยตัวดำเนินการ 15 ตัว ได้แก่

1. $T_1^{+} = r_1^t r_2 + s_2^t s_3 + s_4^t s_5 + s_6^t s_8 + \overline{r}_2^{\,t}\overline{r}_1 + \overline{s}_3^{\,t}\overline{s}_2 + \overline{s}_5^{\,t}\overline{s}_4 + \overline{s}_8^{\,t}\overline{s}_6$

2. $T_1^{-} = r_2^t r_1 + s_3^t s_2 + s_5^t s_4 + s_8^t s_6 + \overline{r}_1^{\,t}\overline{r}_2 + \overline{s}_2^{\,t}\overline{s}_3 + \overline{s}_4^{\,t}\overline{s}_5 + \overline{s}_6^{\,t}\overline{s}_8$

3. $T_2^{+} = r_2^t r_3 + s_1^t s_2 + s_5^t s_7 + s_8^t s_9 + \overline{r}_3^{\,t}\overline{r}_2 + \overline{s}_2^{\,t}\overline{s}_1 + \overline{s}_7^{\,t}\overline{s}_5 + \overline{s}_9^{\,t}\overline{s}_8$

4. $T_2^{-} = r_3^t r_2 + s_2^t s_1 + s_7^t s_5 + s_9^t s_8 + \overline{r}_2^{\,t}\overline{r}_3 + \overline{s}_1^{\,t}\overline{s}_2 + \overline{s}_5^{\,t}\overline{s}_7 + \overline{s}_8^{\,t}\overline{s}_9$

5. $T_3^{+} = r_1^t r_3 - s_1^t s_3 + s_4^t s_7 + s_6^t s_9 - \overline{r}_3^{\,t}\overline{r}_1 + \overline{s}_3^{\,t}\overline{s}_1 - \overline{s}_7^{\,t}\overline{s}_4 - \overline{s}_9^{\,t}\overline{s}_6$

6. $T_3^{-} = r_3^t r_1 - s_3^t s_1 + s_7^t s_4 + s_9^t s_6 - \overline{r}_1^{\,t}\overline{r}_3 + \overline{s}_1^{\,t}\overline{s}_3 - \overline{s}_4^{\,t}\overline{s}_7 - \overline{s}_6^{\,t}\overline{s}_9$

7. $T_4^{+} = r_3^t r_4 + s_2^t s_4 + s_3^t s_5 + s_9^t s_{10} + \overline{r}_4^{\,t}\overline{r}_3 + \overline{s}_4^{\,t}\overline{s}_2 + \overline{s}_5^{\,t}\overline{s}_3 + \overline{s}_{10}^{\,t}\overline{s}_9$

8. $T_4^{-} = r_4^t r_3 + s_4^t s_2 + s_5^t s_3 + s_{10}^t s_9 + \overline{r}_3^{\,t}\overline{r}_4 + \overline{s}_2^{\,t}\overline{s}_4 + \overline{s}_3^{\,t}\overline{s}_5 + \overline{s}_9^{\,t}\overline{s}_{10}$

9. $T_5^{+} = r_2^t r_4 + s_1^t s_4 - s_3^t s_7 + s_8^t s_{10} - \overline{r}_4^{\,t}\overline{r}_2 - \overline{s}_4^{\,t}\overline{s}_1 + \overline{s}_7^{\,t}\overline{s}_3 - \overline{s}_{10}^{\,t}\overline{s}_8$

10. $T_5^{-} = r_4^t r_2 + s_4^t s_1 - s_7^t s_3 + s_{10}^t s_8 - \overline{r}_2^{\,t}\overline{r}_4 - \overline{s}_1^{\,t}\overline{s}_4 + \overline{s}_3^{\,t}\overline{s}_7 - \overline{s}_8^{\,t}\overline{s}_{10}$

11. $T_6^{+} = r_1^t r_4 - s_1^t s_5 - s_2^t s_7 + s_6^t s_{10} - \overline{r}_4^{\,t}\overline{r}_1 + \overline{s}_5^{\,t}\overline{s}_1 + \overline{s}_7^{\,t}\overline{s}_2 - \overline{s}_{10}^{\,t}\overline{s}_6$

12. $T_6^- = r_4^t r_1 - s_5^t s_1 - s_7^t s_2 + s_{10}^t s_6 - \overline{r}_1^t \overline{r}_4 + \overline{s}_1^t \overline{s}_5 + \overline{s}_2^t \overline{s}_7 - \overline{s}_6^t \overline{s}_{10}$

13. $$H_1 \equiv \left[T_1^+, T_1^-\right] = r_1^t r_1 - r_2^t r_2 + s_2^t s_2 - s_3^t s_3 + s_4^t s_4 - s_5^t s_5 + s_6^t s_6 - s_8^t s_8 - \overline{r}_1^t \overline{r}_1 + \overline{r}_2^t \overline{r}_2 - \overline{s}_2^t \overline{s}_2 + \overline{s}_3^t \overline{s}_3 - \overline{s}_4^t \overline{s}_4 + \overline{s}_5^t \overline{s}_5 - \overline{s}_6^t \overline{s}_6 + \overline{s}_8^t \overline{s}_8$$

14. $$H_2 \equiv \left[T_2^+, T_2^-\right] = r_2^t r_2 - r_3^t r_3 + s_1^t s_1 - s_2^t s_2 + s_5^t s_5 - s_7^t s_7 + s_8^t s_8 - s_9^t s_9 - \overline{r}_2^t \overline{r}_2 + \overline{r}_3^t \overline{r}_3 - \overline{s}_1^t \overline{s}_1 + \overline{s}_2^t \overline{s}_2 - \overline{s}_5^t \overline{s}_5 + \overline{s}_7^t \overline{s}_7 - \overline{s}_8^t \overline{s}_8 + \overline{s}_9^t \overline{s}_9$$

15. $$H_3 \equiv \left[T_4^+, T_4^-\right] = r_3^t r_3 - r_4^t r_4 + s_2^t s_2 - s_4^t s_4 + s_3^t s_3 - s_5^t s_5 + s_9^t s_9 - s_{10}^t s_{10} - \overline{r}_3^t \overline{r}_3 + \overline{r}_4^t \overline{r}_4 - \overline{s}_2^t \overline{s}_2 + \overline{s}_4^t \overline{s}_4 - \overline{s}_3^t \overline{s}_3 + \overline{s}_5^t \overline{s}_5 - \overline{s}_9^t \overline{s}_9 + \overline{s}_{10}^t \overline{s}_{10} \quad (3\text{-}28)$$

2. ตัวดำเนินการหมุนของพีชคณิต u(1) มี 1 ตัว คือ

$$h_5 = \frac{1}{5}(-H_1 - 2H_2 - 3H_3 - 4H_4) \quad (3\text{-}29)$$

3. ตัวดำเนินการหมุนของโคเชียน su(5)/(su(4)×u(1)) มี 8 ตัวดังนี้

1. $T_7^+ = r_4^t r_5 + s_4^t s_6 + s_5^t s_8 + s_7^t s_9 + \overline{r}_5^t \overline{r}_4 + \overline{s}_6^t \overline{s}_4 + \overline{s}_8^t \overline{s}_5 + \overline{s}_9^t \overline{s}_7$

2. $T_7^- = r_5^t r_4 + s_6^t s_4 + s_8^t s_5 + s_9^t s_7 + \overline{r}_4^t \overline{r}_5 + \overline{s}_4^t \overline{s}_6 + \overline{s}_5^t \overline{s}_8 + \overline{s}_7^t \overline{s}_9$

3. $T_8^+ = r_3^t r_5 + s_2^t s_6 + s_3^t s_8 - s_7^t s_{10} - \overline{r}_5^t \overline{r}_3 - \overline{s}_6^t \overline{s}_2 - \overline{s}_8^t \overline{s}_3 + \overline{s}_{10}^t \overline{s}_7$

4. $T_8^- = r_5^t r_3 + s_6^t s_2 + s_8^t s_3 - s_{10}^t s_7 - \overline{r}_3^t \overline{r}_5 - \overline{s}_2^t \overline{s}_6 - \overline{s}_3^t \overline{s}_8 + \overline{s}_7^t \overline{s}_{10}$

5. $T_9^+ = r_2^t r_5 + s_1^t s_6 - s_3^t s_9 - s_5^t s_{10} - \overline{r}_5^t \overline{r}_2 - \overline{s}_6^t \overline{s}_1 - \overline{s}_9^t \overline{s}_3 + \overline{s}_{10}^t \overline{s}_5$

6. $T_9^- = r_5^t r_2 + s_6^t s_1 - s_9^t s_3 - s_{10}^t s_5 - \overline{r}_2^t \overline{r}_5 - \overline{s}_1^t \overline{s}_6 - \overline{s}_3^t \overline{s}_9 + \overline{s}_5^t \overline{s}_{10}$

7. $T_{10}^+ = r_1^t r_5 - s_1^t s_8 - s_2^t s_9 - s_4^t s_{10} - \overline{r}_5^t \overline{r}_1 + \overline{s}_8^t \overline{s}_1 + \overline{s}_9^t \overline{s}_2 + \overline{s}_{10}^t \overline{s}_4$

8. $T_{10}^- = r_5^t r_1 - s_8^t s_1 - s_9^t s_2 - s_{10}^t s_4 - \overline{r}_1^t \overline{r}_5 + \overline{s}_1^t \overline{s}_8 + \overline{s}_2^t \overline{s}_9 + \overline{s}_4^t \overline{s}_{10}$ (3-30)

ตัวดำเนินการโคสแตนท์ของโคเชียน su(5)/(su(4)×u(1)) เขียนในรูปทั่วๆได้ ดังนี้

$$\mathcal{K} = \sum_{i=7}^{10} (\gamma_i^+ T_i^- + \gamma_i^- T_i^+)$$

$$=\gamma_7^+T_7^- + \gamma_7^-T_7^+ + \gamma_8^+T_8^- + \gamma_8^-T_8^+ + \gamma_9^+T_9^- + \gamma_9^-T_9^+ + \gamma_{10}^+T_{10}^- + \gamma_{10}^-T_{10}^+ \qquad (3\text{-}31)$$

ตัวดำเนินการโคสแตนท์ที่สร้างขึ้นกระทำบนปริภูมิเวกเตอร์สถานะที่สร้างจากผลคูณเทนเซอร์ระหว่างตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์สถานะของสปินเนอร์กับตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์สถานะของ $su(u)$ ซึ่งแทนได้ด้วย $|\psi\rangle = |\pm\pm\pm\pm\rangle \otimes V_\lambda$

แกมมาเมทริกซ์ $\gamma^{\pm}_{7,8,9,10}$ กระทำต่อสปินเนอร์ของ $so(8)$ ให้ผลที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกับเครื่องหมาย ± ดังนี้

1) $\gamma_7^+ = (\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^+)$

$$\begin{aligned}
&|+++-\rangle\ ,\ |-++-\rangle,\\
&|++--\rangle\ ,\ |-+--\rangle,\\
&|+-+-\rangle\ ,\ |--+-\rangle,\\
&|+---\rangle\ ,\ |----\rangle.
\end{aligned}$$

2) $\gamma_7^- = (\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^-)$

$$\begin{aligned}
&|++++\rangle\ ,\ |-+++\rangle,\\
&|++-+\rangle\ ,\ |-+-+\rangle,\\
&|+-++\rangle\ ,\ |--++\rangle,\\
&|+--+\rangle\ ,\ |---+\rangle.
\end{aligned}$$

3) $\gamma_8^+ = \left\{\left[\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1})\right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1})\right]\right\}$

$$\begin{aligned}
&|++-+\rangle, && -|+++-\rangle,\\
&|+--+\rangle, && -|+-+-\rangle,\\
&|-+-+\rangle, && -|-++-\rangle,\\
&|---+\rangle, && -|--+-\rangle.
\end{aligned}$$

4) $\gamma_8^- = \left\{\left[\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1})\right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1})\right]\right\}$

$$\begin{aligned}
&-|++--\rangle, && |++++\rangle,\\
&-|+---\rangle, && |+-++\rangle,\\
&-|-+--\rangle, && |-+++\rangle,\\
&-|----\rangle, && |--++\rangle.
\end{aligned}$$

5) $$\gamma_9^+ = \left\{ \left[\sigma_1 \otimes \sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\}$$

$$\begin{array}{ll} |+-++\rangle, & -|++-+\rangle, \\ |+-+-\rangle, & -|++--\rangle, \\ |--++\rangle, & -|-+-+\rangle, \\ |--+-\rangle, & -|-+--\rangle. \end{array}$$

6) $$\gamma_9^- = \left\{ \left[\sigma_1 \otimes \sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\}$$

$$\begin{array}{ll} -|+--+\rangle, & |++++\rangle, \\ -|+---\rangle, & |+++-\rangle, \\ -|---+\rangle, & |-+++\rangle, \\ -|----\rangle, & |-++-\rangle. \end{array}$$

7) $$\gamma_{10}^+ = \left\{ \left[\sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\}$$

$$\begin{array}{ll} |-+++\rangle, & -|+-++\rangle, \\ |-++-\rangle, & -|+-+-\rangle, \\ |-+-+\rangle, & -|+--+\rangle, \\ |-+--\rangle, & -|+---\rangle. \end{array}$$

8) $$\gamma_{10}^- = \left\{ \left[\sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\}$$

$$\begin{array}{ll} -|--++\rangle, & |++++\rangle, \\ -|--+-\rangle, & |+++-\rangle, \\ -|---+\rangle, & |++-+\rangle, \\ -|----\rangle, & |++--\rangle. \end{array}$$

(3-32)

ในกรณีที่ $\not{K}|\psi\rangle = 0$ จะได้ระบบสมการ ดังนี้

1. $1\otimes(T_7^+ + T_8^+ + T_9^+ + T_{10}^+)\psi_{\lambda_1}^{++++} = 0$

2. $1\otimes(T_7^- - T_8^- + T_9^+ + T_{10}^+)\psi_{\lambda_2}^{+++-} = 0$

3. $1\otimes(T_7^+ + T_8^- - T_9^- + T_{10}^+)\psi_{\lambda_3}^{++-+} = 0$

4. $1\otimes(T_7^- - T_8^+ - T_9^- + T_{10}^+)\psi_{\lambda_4}^{++--} = 0$

5. $1\otimes(T_7^+ + T_8^+ - T_9^- - T_{10}^-)\psi_{\lambda_5}^{+-++} = 0$

6. $1\otimes(T_7^- - T_8^- + T_9^- - T_{10}^-)\psi_{\lambda_6}^{+-+-} = 0$

7. $1\otimes(T_7^+ + T_8^- - T_9^+ - T_{10}^-)\psi_{\lambda_7}^{+--+} = 0$

8. $1\otimes(T_7^- - T_8^+ - T_9^+ - T_{10}^-)\psi_{\lambda_8}^{+---} = 0$

9. $1\otimes(T_7^+ + T_8^+ + T_9^+ + T_{10}^-)\psi_{\lambda_1'}^{-+++} = 0$

10. $1\otimes(T_7^- - T_8^- + T_9^+ + T_{10}^-)\psi_{\lambda_2'}^{-++-} = 0$

11. $1\otimes(T_7^+ + T_8^- - T_9^- + T_{10}^-)\psi_{\lambda_3'}^{-+-+} = 0$

12. $1\otimes(T_7^- - T_8^+ - T_9^- + T_{10}^-)\psi_{\lambda_4'}^{-+--} = 0$

13. $1\otimes(T_7^+ + T_8^+ + T_9^- - T_{10}^+)\psi_{\lambda_5'}^{--++} = 0$

14. $1\otimes(T_7^- - T_8^- + T_9^- - T_{10}^+)\psi_{\lambda_6'}^{--+-} = 0$

$$15.\quad 1\otimes(T_7^{+}+T_8^{-}-T_9^{+}-T_{10}^{+})\psi_{\lambda_7^{/}}^{---+}=0$$

$$16.\quad 1\otimes(T_7^{-}-T_8^{+}-T_9^{+}-T_{10}^{+})\psi_{\lambda_8^{/}}^{----}=0 \qquad (3\text{-}34)$$

ซึ่งมีผลเฉลยสำหรับสปินเนอร์ที่เป็นบวก ดังนี้

$$1.\quad \psi_{\lambda_1}^{++++}=\left|++++\right\rangle\otimes(r_1^{\dagger})^{a_1}(s_1^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_{10}^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_5^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$2.\quad \psi_{\lambda_2}^{+++-}=\left|+++-\right\rangle\otimes(r_1^{\dagger})^{a_1}(s_1^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_7^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_4^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$3.\quad \psi_{\lambda_3}^{+---}=\left|++-+\right\rangle\otimes(r_1^{\dagger})^{a_1}(s_4^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_3^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_3^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$4.\quad \psi_{\lambda_4}^{++--}=\left|++--\right\rangle\otimes(r_1^{\dagger})^{a_1}(s_2^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_5^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_4^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$5.\quad \psi_{\lambda_5}^{+-++}=\left|+-++\right\rangle\otimes(r_4^{\dagger})^{a_1}(s_7^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_1^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_1^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$6.\quad \psi_{\lambda_6}^{+-+-}=\left|+-+-\right\rangle\otimes(r_5^{\dagger})^{a_1}(s_6^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_7^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_4^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$7.\quad \psi_{\lambda_7}^{+--+}=\left|+--+\right\rangle\otimes(r_2^{\dagger})^{a_1}(s_5^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_2^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_1^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$8.\quad \psi_{\lambda_8}^{++-+}=\left|+---\right\rangle\otimes(r_3^{\dagger})^{a_1}(s_3^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_4^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_4^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

สำหรับสปินเนอร์ที่เป็นลบ ดังนี้

$$9.\quad \psi_{\lambda_1^{/}}^{-+++}=\left|-+++\right\rangle\otimes(r_4^{\dagger})^{a_1}(s_7^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_6^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_1^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$10.\quad \psi_{\lambda_2^{/}}^{-++-}=\left|-++-\right\rangle\otimes(r_2^{\dagger})^{a_1}(s_8^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_7^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_4^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$11.\quad \psi_{\lambda_3^{/}}^{-+-+}=\left|-+-+\right\rangle\otimes(r_4^{\dagger})^{a_1}(s_{10}^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_1^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_1^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$12.\quad \psi_{\lambda_4^{/}}^{-+--}=\left|-+--\right\rangle\otimes(r_3^{\dagger})^{a_1}(s_9^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_5^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_4^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$13.\quad \psi_{\lambda_5^{/}}^{--++}=\left|--++\right\rangle\otimes(r_4^{\dagger})^{a_1}(s_7^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_8^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_2^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$14.\quad \psi_{\lambda_6^{/}}^{--+-}=\left|--+-\right\rangle\otimes(r_1^{\dagger})^{a_1}(s_6^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_7^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_4^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$15.\ \ \psi_{\lambda_7^{/}}^{---+} = \left|---+\right\rangle \otimes (r_4^{\dagger})^{a_1}(s_5^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_9^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_3^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle$$

$$16.\ \ \psi_{\lambda_8^{/}}^{----} = \left|----\right\rangle \otimes (r_1^{\dagger})^{a_1}(s_1^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_{10}^{\dagger})^{a_3}(\overline{r}_4^{\dagger})^{a_4}\left|0\right\rangle \qquad (3\text{-}35)$$

เพื่อหาเวกเตอร์สถานะในเทอมของพีชคณิตย่อย su(4)×u(1) จำเป็นต้องใช้ตัวดำเนินการคาร์ตังของพีชคณิตย่อยกระทำต่อ $\psi_{\lambda_i}^{\pm\pm\pm\pm}$ ในฐานหลักของโอเมกา ตัวดำเนินการคาร์ตังเป็น ดังนี้

$$D_1 = h_1 - h_2 + \frac{1}{2}\left(f_{+-1}^{10}\left[\gamma_{10}^{+},\gamma_{10}^{-}\right] - f_{+-2}^{9}\left[\gamma_9^{+},\gamma_9^{-}\right]\right)$$

$$= H_1 + \frac{1}{2}(\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \underset{\sim}{1})$$

$$D_2 = h_2 - h_3 + \frac{1}{2}\left(f_{+-2}^{9}\left[\gamma_9^{+},\gamma_9^{-}\right] - f_{+-3}^{8}\left[\gamma_8^{+},\gamma_8^{-}\right]\right)$$

$$= H_2 + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3)$$

$$D_3 = h_3 - h_4 + \frac{1}{2}\left(f_{+-3}^{8}\left[\gamma_8^{+},\gamma_8^{-}\right] - f_{+-4}^{7}\left[\gamma_7^{+},\gamma_7^{-}\right]\right)$$

$$= H_3 + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 - \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3)$$

$$D_4 = \frac{h_5}{2} + \frac{1}{4}\left(f_{+-5}^{7}\left[\gamma_7^{+},\gamma_7^{-}\right] + f_{+-5}^{8}\left[\gamma_8^{+},\gamma_8^{-}\right] + f_{+-5}^{9}\left[\gamma_9^{+},\gamma_9^{-}\right] + f_{+-5}^{10}\left[\gamma_{10}^{+},\ \gamma_{10}^{-}\right]\right)$$

$$= \frac{h_5}{2} - \frac{1}{4}\left(\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 + \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 + \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \underset{\sim}{1} + \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}\right)$$

(3-36)

ในกรณีที่ $V_\Lambda = 1$ นั่นคือ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ เมื่อนำตัวดำเนินการคาร์ตังของพีชคณิตย่อยกระทำต่อแก่นคำตอบให้ผลสำหรับสปินเนอร์ที่เป็นบวก ดังนี้

$$(D_1, D_2, D_3; D_4)\left|++++\right\rangle \otimes 1 = (0,0,0;-1)\left|++++\right\rangle \otimes 1$$

$$(D_1, D_2, D_3; D_4)\left|+++-\right\rangle \otimes 1 = (0,1,0;0)\left|+++-\right\rangle \otimes 1$$

$$(D_1, D_2, D_3; D_4)\left|++-+\right\rangle \otimes 1 = (1,0,-1;0)\left|++-+\right\rangle \otimes 1$$

$$(D_1, D_2, D_3; D_4)\left|++--\right\rangle \otimes 1 = (1,-1,1;0)\left|++--\right\rangle \otimes 1$$

$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|+-++\rangle\otimes 1=(0,-1,0;0)|+-++\rangle\otimes 1$$

$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|+-+-\rangle\otimes 1=(0,0,0;1)|+-+-\rangle\otimes 1$$

$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|+--+\rangle\otimes 1=(-1,1,-1;0)|+--+\rangle\otimes 1$$

$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|+---\rangle\otimes 1=(-1,0,1;0)|+---\rangle\otimes 1$$

สำหรับสปินเนอร์ที่เป็นลบ ดังนี้

$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|-+++\rangle\otimes 1=(-1,0,0;-\frac{1}{2})|-+++\rangle\otimes 1$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|-++-\rangle\otimes 1=(-1,1,0;\frac{1}{2})|-++-\rangle\otimes 1$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|-+-+\rangle\otimes 1=(0,0,-1;\frac{1}{2})|-+-+\rangle\otimes 1$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|-+--\rangle\otimes 1=(0,-1,1;\frac{1}{2})|-+--\rangle\otimes 1$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|--++\rangle\otimes 1=(1,-1,0;-\frac{1}{2})|--++\rangle\otimes 1$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|--+-\rangle\otimes 1=(1,0,0;\frac{1}{2})|--+-\rangle\otimes 1$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|---+\rangle\otimes 1=(0,1,-1;-\frac{1}{2})|---+\rangle\otimes 1$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)|----\rangle\otimes 1=(0,0,1;-\frac{1}{2})|----\rangle\otimes 1 \qquad (3\text{-}37)$$

ในกรณีทั่วไปให้ผล ดังนี้

$$(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi_{\lambda_1}^{++++}=(a_1,a_2,a_3;\frac{(b_5-2)}{2})\psi_{\lambda_1}^{++++}$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi_{\lambda_2}^{+++-}=(a_1,a_2+a_3+1,a_4;\frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_2}^{+++-}$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi_{\lambda_3}^{++-+}=(a_1+a_2+a_3+1,a_4,-a_2-a_3-a_4-1;\frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_3}^{+---}$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi_{\lambda_4}^{++--}=(a_1+a_2+a_3+1,-a_2-a_3-1,a_2+a_3+a_4+1;\frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_4}^{++--}$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi_{\lambda_5}^{+-++}=(-a_4,-a_2-a_3-1,-a_1;\frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_5}^{+-++}$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi_{\lambda_6}^{+-+-}=(a_2,a_3,a_4;\frac{(b_1+2)}{2})\psi_{\lambda_6}^{+-+-}$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi_{\lambda_7}^{+--+}=(-a_1-a_2-a_3-a_4-1,a_1+a_2+a_3+1,-a_2-a_3-1;\frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_7}^{+--+}$$
$$(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi_{\lambda_8}^{+---}=(-a_2-a_3-1,-a_1,a_1+a_2+a_3+a_4+1;\frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_8}^{++-+}$$

$$
\begin{aligned}
&(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi^{-+++}_{\lambda_1^{/}} = (-a_3-a_4-1,-a_2,-a_1;\frac{(b_4-1)}{2})\psi^{-+++}_{\lambda_1^{/}}\\
&(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi^{-++-}_{\lambda_2^{/}} = (-a_1-a_2-1,a_1+a_2+a_3+1,a_4;\frac{(b_2+1)}{2})\psi^{-++-}_{\lambda_2^{/}}\\
&(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi^{-+-+}_{\lambda_3^{/}} = (-a_4,-a_3,-1,-a_1-a_2-1;\frac{(b_2+1)}{2})\psi^{-+-+}_{\lambda_3^{/}}\\
&(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi^{-+--}_{\lambda_4^{/}} = (a_3,-a_1-a_2-a_3-1,a_1+a_2+a_3+a_4+1;\frac{(b_2+1)}{2})\psi^{-+--}_{\lambda_4^{/}}\\
&(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi^{--++}_{\lambda_5^{/}} = (a_3+a_4+1,-a_2-a_3-a_4-1,-a_1;\frac{(b_4-1)}{2})\psi^{--++}_{\lambda_5^{/}}\\
&(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi^{--+-}_{\lambda_6^{/}} = (a_1+a_2+1,a_3,a_4;\frac{(b_2+1)}{2})\psi^{--+-}_{\lambda_6^{/}}\\
&(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi^{---+}_{\lambda_7^{/}} = (-a_2,a_2+a_3+a_4+1,-a_1-a_2-a_3-a_4-1;\frac{(b_4-1)}{2})\psi^{---+}_{\lambda_7^{/}}\\
&(D_1,D_2,D_3;D_4)\psi^{----}_{\lambda_8^{/}} = (a_1,a_2,a_3+a_4+1;\frac{(b_4-1)}{2})\psi^{----}_{\lambda_8^{/}}
\end{aligned}
\tag{3-38}
$$