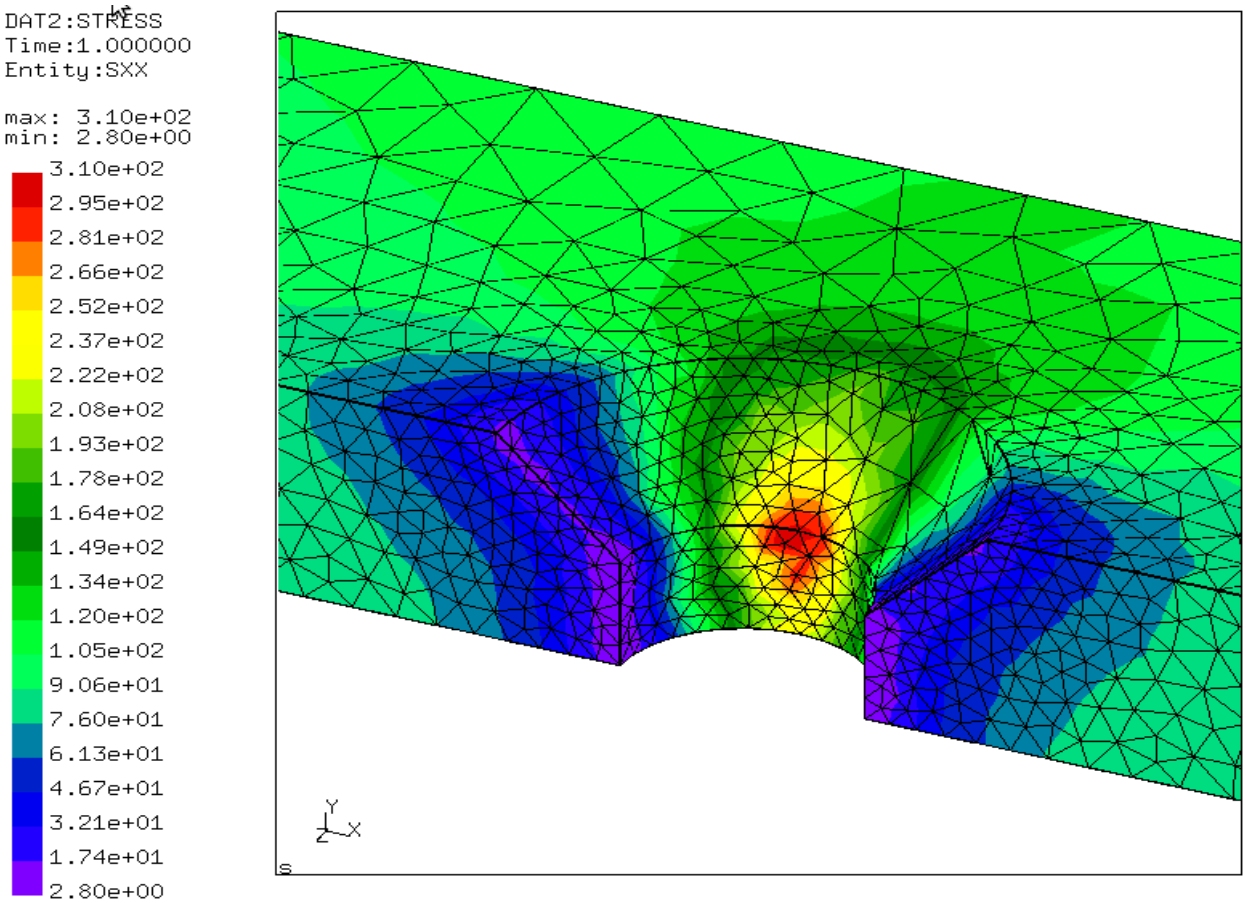
การใช้โปรแกรมไฟไนเอลิเมนต์ CalculiX จากตัวอย่าง

(Using Finite Element Program-CalculiX by Example)



เจริญยุทธ เดชวายุกุล

ชื่อหนังสือ:
การใช้โปรแกรมไฟไนเอลิเมนต์ CalculiX จากตัวอย่าง
(Using Finite Element Program-CalculiX by Example)

ชื่อผู้แต่ง: เจริญยุทธ เดชวายุกุล

จัดทำโดย: ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ หาดใหญ่ สงขลา 90110

พิมพ์ครั้งที่: 1

เดือนและปี พ.ศ. ที่จัดพิมพ์: เดือน กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2561

ISBN(E-Book): 978-616-271-452-8

คำนำ

ปัจจุบันถือว่าเป็นยุคที่งานวิศวกรรมก้าวหน้าด้วยวิทยาการคอมพิวเตอร์ ระเบียบวิธีไฟไนเอลิเมนต์เป็นวิธีหนึ่งที่ประยุกต์หลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้หาคำตอบหรือผลลัพธ์ของปัญหาทางด้านวิศวกรรมด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ปัจจุบันมีการประดิษฐ์ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เพื่อใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมด้วยระเบียบวิธีไฟไนเอลิเมนต์ ซอฟต์แวร์ดังกล่าวมีมากมายทั้งในเชิงพาณิชย์และไม่เชิงพาณิชย์ กรณีไม่เชิงพาณิชย์มีซอฟต์แวร์ที่น่าสนใจหลายตัวเกิดขึ้นจากการร่วมกันพัฒนาของนักพัฒนาโปรแกรมทั่วโลก CalculiX คือซอฟต์แวร์ฟรี(ไม่เชิงพาณิชย์)ทางไฟไนเอลิเมนต์ตัวหนึ่งภายใต้ GNU General Public License (GNU GPL) ซึ่งเป็นที่นิยมนำมาใช้แก้ปัญหาทางกายภาพที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงบนขอบเขต (field Problem) ทั้งในเงื่อนไขการเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้น (Linearity) และแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinearity) เช่น ปัญหาด้านโครงสร้าง (structural) และทางเครื่องกล (mechanical) CalculiX มีรูปแบบเอลิเมนต์หลากหลายตระเตรียมไว้ให้ใช้งานตั้งแต่หนึ่งมิติ (1-D) สองมิติ (2-D) และสามมิติ (3-D) อีกทั้งชุดคำสั่งของอินต์พุตไฟล์ (inp file) นั้นมีรูปแบบเหมือนกันกับที่ใช้งานกับ ABAQUS (ซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์) สามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาที่ซับซ้อนได้โดยง่ายและมีความถูกต้องแม่นยำ จึงเป็นที่นิยมใช้ในหมู่นักศึกษา วิศวกร นักวิทยาศาสตร์ และนักวิจัยทั่วโลก โดยเฉพาะในกลุ่มประเทศแถบทวีปยุโรป CalculiX จึงเป็นสิ่งที่ผู้เขียนให้ความสนใจเพราะเป็นโปรแกรมที่สามารถประยุกต์ใช้ได้หลายด้าน ไม่ต้องซื้อหา อีกทั้งผู้ที่มีความคุ้นเคยกับการใช้งาน ABAQUS มาก่อนแล้วสามารถนำไปใช้ได้โดยไม่ต้องศึกษาใหม่ทั้งหมด จึงเริ่มลองฝึกเล่นโปรแกรม CaluliX ด้วยตนเองตั้งแต่ปี 2547 โดยเริ่มต้นจากอุปสรรคหลายๆอย่างตั้งแต่การติดตั้งซอฟต์แวร์ การประมวลผล การวิเคราะห์ ซึ่งต้องใช้เวลาเรียนรู้เป็นเวลานาน ในช่วงปี 2555 หลังจากที่ผ่านอุปสรรคในการเรียนรู้และลองใช้งานแบบผิดๆถูกไปสักระยะหนึ่งจึงเกิดความคิดอยากเผยแพร่ประสบการณ์ที่เรียนรู้มาด้วยตนเองให้นักศึกษาที่สนใจในซอฟต์แวร์ฟรีทางด้านไฟไนเอลิเมนต์มาใช้งานเพื่อการเรียนรู้ในการแก้ปัญหาวิศวกรรมรวมถึงการทำวิจัยจึงเริ่มนำ CalculiX ไปใช้ในการเรียนการสอนรายวิชาวิธีทางไฟไนเอลิเมนต์ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2556 ต่อมาในปี 2558 ผู้เขียนมีความตั้งใจจะมีเอกสารเป็นภาษาไทยเกี่ยวกับการใช้งาน CalculiX เพื่อเป็นแหล่งอ้างอิงในการฝึกใช้งาน CalculiX ด้วยตนเองของนักศึกษาหรือผู้สนใจจึงเป็นที่มาของการแต่งหนังสือเล่มนี้

แนวทางของหนังสือเล่มนี้ไม่ได้อยู่ที่การนำเสนอเนื้อหาของวิธีทางไฟไนเอลิเมนต์ แต่ๆอยู่ที่การแนะนำให้รู้จักการใช้คำสั่งและการเขียนชุดคำสั่งพื้นฐานหรือเรียนว่าการเขียนโปรแกรม เริ่มต้นจากการใช้เอลิเมนต์ประเภทต่างๆมาแก้ปัญหาโจทย์ตัวอย่างง่ายๆ เป็นการเริ่มต้นฝึกเรียนรู้การเขียนชุดคำสั่งเพื่อประมวลผลลัพธ์ให้ถูกต้อง ในส่วนท้ายของทุกตัวอย่างมีแนวคิดและแนวทางในการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์เพื่อยืนยันความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์ที่ได้จากซอฟต์แวร์ก่อนที่จะตัดสินใจเชื่อในผลลัพธ์ที่ได้มา สิ่งนี้ผู้เขียนคิดว่าเป็นสิ่งจำเป็นในการใช้งานให้เกิดผลลัพธ์และประโยชน์สูงสุด

ณ จุดนี้ การเขียนหนังสือเล่มนี้ผู้เขียนพยายามยึดแนวทางแห่งตนเองตลอดทั้งเล่ม เริ่มจากซอฟต์แวร์ที่ใช้เขียนได้เน้นเป็นอย่างยิ่งในการใช้ซอฟต์แวร์ที่ไม่ละเมิดลิขสิทธิ์เช่น LibreOffice บนระบบปฏิบัติการ Linux อีกทั้งรูปภาพต่างๆที่ใช้ประกอบในหนังสือนั้นผู้เขียนพยายามวาดและประดิษฐ์ด้วยตนเองตามแนวทางแห่งตน มีโจทย์ตัวอย่างที่ต้องนำมาจากแหล่งอื่นๆแต่ก็ได้มีการอ้างอิงถึงแหล่งที่มา ด้วยวิธีการเขียนด้วยแนวทางแห่งตนนั้นอาจมีความผิดพลาดตกหล่นทั้งในแง่ความรู้และการถ่ายทอดมายังผู้อ่าน ผู้เขียนจึงขออภัยมาอย่างสูง และผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นแหล่งเรียนรู้ให้แก่ผู้อ่านสามารถศึกษาการใช้คำสั่งด้วยตนเองและสามารถเขียนชุดคำสั่งเพื่อใช้งาน CalculiX ได้เป็นอย่างถูกต้อง คงชื่นชอบในการใช้โปรแกรมดีและฟรีต่อไปในอนาคตและสามารถเผยแพร่การใช้งานในวงกว้างต่อไปเพราะไม่ว่าที่ไหนที่มีอินเตอร์เนตที่นั้นสามารถเข้าถึงการใช้งานของ CalculiX โดยไม่ต้องลงทุนซื้อ

ในท้ายนี้ผู้เขียนต้องขอขอบคุณ Guido Dhondt และ Klaus Witting ผู้ประดิษฐ์ CalculiX ขึ้นมาให้ใช้งานฟรีโดยไม่มีค่าใช้จ่าย ขอขอบคุณ คุณพ่อสมนึกคุณแม่อารมณ์ เดชวายุกุลและครอบครัว ที่เน้นสอนแนวแห่งตนให้ผู้เขียนตั้งแต่เกิด ครูบาอาจารย์ทุกคนที่ได้ติดตั้งและเกื้อกูลองค์ความรู้ให้ผู้เขียนมาถึงจุดนี้ เริ่มตั้งแต่ชั้นอนุบาลและประถมที่โรงเรียนอนุบาลสตูล ชั้นมัธยมที่โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ระดับปริญญาตรีที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรีและระดับปริญญาโทเอกที่ Vanderbilt University, USA. ขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ที่อนุมัติให้ผู้เขียนลาเพิ่มพูนวิชาการเพื่อมีเวลาในการเขียนหนังสือเล่มนี้อย่างเต็มที่ ขอขอบคุณ รศ.ดร. วรวุธ วิสุทธิ์เมธางกูร ที่แนะนำให้รู้จักกับ CalculiX ตั้งแต่ปี 2546 และ รศ. ปัญญารักษ์ งามศรีตระกูล ที่แนะนำให้รู้จักการ download และติดตั้งโปรแกรมบนระบบ Linux (Ubuntu) ขอขอบคุณ คุณกิติวรรณ เดชวายุกุล ภรรยาที่ช่วยตรวจทานและพิสูจน์อักษรรวมถึงคอยอยู่เป็นเพื่อนช่วยดูแลความสะดวกสบายตลอดการเขียนหนังสือเล่มนี้ ขอขอบคุณ คุณเกรียงศักดิ์ แต่สุวรรณ และครอบครัว ที่เอื้อเฟื้อสถานที่พักอาศัยรวมถึงการกินอยู่อย่างดีในระหว่างการเขียนหนังสือในจังหวัดระนอง ขอขอบคุณ คุณทรงศักดิ์ แต่สุวรรณ และครอบครัว ในการเอื้อเฟื้อสถานที่ดีๆสงบๆ ที่ อำเภอวังน้ำเขียว จังหวัดนครราชศรีมา ในการเขียนบทสุดท้ายของหนังสือเล่มนี้ ขอขอบคุณ คุณอุชุ เชื้อบ่อคา คุณน้ำเพชร งดงามทวีสุข และครอบครัวที่อนุเคราะห์สถานที่พักอาศัยในยามที่ต้องตระเวณระหว่างทางเพื่อขบคิดหาตัวอย่างประกอบของหนังสือเล่มนี้ และคงมีอีกหลายคนที่ไม่สามารถกล่าวในที่นี้ได้ อย่างไรก็ตามประโยชน์ที่เกิดขึ้นจากหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขออุทิศให้แก่ทุกๆคนที่ช่วยกันหล่อเลี้ยงจิตวิญญาณของผู้เขียนและขอให้วงการวิศวกรรมของไทยมีความก้าวหน้าจากการใช้ซอฟต์แวร์ฟรีทางด้านไฟไนเอลิเมนต์ยิ่งๆขึ้นไป

เจริญยุทธ เดชวายุกุล
22/9/2560

สารบัญ

หน้าที่

บทที่ 1 รู้จักซอฟต์แวร์ CalculiX....1
1.1 บทนำ....1
1.2 การใช้งาน CalculiX เบื้องต้น....2
1.3 องค์ประกอบของ inp file....4
1.4 รูปแบบ inp file....6
1.5 การประมวลผล....14
1.6 การตรวจผลลัพธ์และความถูกต้อง....15
1.7 การแสดงผลทางคอมพิวเตอร์กราฟิก....18
1.8 เอกสารอ้างอิงบทที่ 1....19
บทที่ 2 การใช้งานสปริงเอลิเมนต์....21
2.1 สปริงเอลิเมนต์ (SPRING ELEMENT)....21
2.2 การใช้งานสปริงเอลิเมนต์แบบเชิงเส้นในแบบ 1-D....23
2.3 การใช้งานสปริงเอลิเมนต์แบบเชิงเส้นในแบบ 2-D....47
2.4 การใช้งานสปริงเอลิเมนต์แบบเชิงเส้นในแบบ 3-D....64
2.5 เอกสารอ้างอิงบทที่ 2....73
2.6 แบบฝึกหัดบทที่ 2....74
บทที่ 3 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน....81
3.1 รูปแบบของเอลิเมนต์แบบคานใน 1 มิติ....81
3.2 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน B32 กับภาระแรงแบบต่างๆ....83
3.3 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน B32 กับหน้าตัดคานแบบต่างๆ....97
3.4 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน B32 กับหน้าตัดคานประกอบจากวัสดุหลายชนิด....107
3.5 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน B32 กับชิ้นงานที่มีความเค้นผสมจากแรงดึงและดัด....114
3.6 เอกสารอ้างอิงบทที่ 3....121
3.7 แบบฝึกหัดบทที่ 3....122
บทที่ 4 ปัญหาโครงสร้างในระนาบ....125
4.1 การเลือกใช้เอลิเมนต์แบบคานกับปัญหาโครงสร้างในระนาบ....125
4.2 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน B32 แทนเอลิเมนต์สปริง SPRINGA....127
4.3 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน(B32)ร่วมกับสปริงเอลิเมนต์(SPRINGA)....131
4.4 การใช้งานเอลิเมนต์ B32 กับโครงสร้างแบบ 2 มิติในระนาบ....140
4.5 ทดสอบเอลิเมนต์ B32 กับตัวอย่างโครงสร้างแบบ 2 มิติในระนาบ....148
4.6 การใช้เอลิเมนต์ B32 กับชิ้นงานรับแรงบิดในระนาบ....155
4.7 การใช้เอลิเมนต์ B32 กับชิ้นงานโครงสร้างที่รับแรงใน 3-D....161
4.8 เอกสารอ้างอิงบทที่ 4....170
4.9 แบบฝึกหัดบทที่ 4....171

หน้าที่

บทที่ 5 เอลิเมนต์ของแข็งในระนาบวิเคราะห์ความเค้นในสองมิติ....177
5.1 เอลิเมนต์ในระนาบรูปสามเหลี่ยมอันดับที่หนึ่ง (Triangular First Order Plane Element)...177
5.2 คำสั่งที่เกี่ยวข้องกับการเขียน inp file....190
5.3 เอลิเมนต์ในระนาบรูปสามเหลี่ยมอันดับที่สอง (Triangular Second Order Plane Element) 203
5.4 เอลิเมนต์ในระนาบรูปสี่เหลี่ยม (Rectangular Plane Element)....210
5.5 การใช้ GMSH ช่วยสร้างโหนดและเอลิเมนต์....215
5.6 เอลิเมนต์สมมาตรรอบแกนหมุน (axisymmetric 2-D element)....235
5.7 แบบฝึกหัดบทที่ 5....262
บทที่ 6 เอลิเมนต์ของแข็งในสามมิติวิเคราะห์ความเค้น....269
6.1 ความเค้นและความเครียดใน 3 มิติ (3-D) ตามระบบพิกัดฉาก....270
6.2 เอลิเมนต์ของแข็งในสามมิติ....273
6.3 สตีฟเนสเมตริกซ์ของเอลิเมนต์ C3D4....275
6.4 ตัวอย่างการใช้งานเอลิเมนต์ C3D4 วิเคราะห์ความเค้น....281
6.5 เอกสารอ้างอิงบทที่ 6....305
6.6 แบบฝึกหัดบทที่ 6....306
บทที่ 7 ปัญหาการถ่ายเทความร้อน....313
7.1 บทนำ....313
7.2 สมการการถ่ายเทความร้อนเบื้องต้น....314
7.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อน....316
7.4 คำสั่งของ CalculiX เพื่อแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน....323
7.5 ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน....326
7.6 เอกสารอ้างอิงบทที่7....354
7.7 แบบฝึกหัดบทที่ 7....355
บทที่ 8 ปัญหาความเค้นและความเครียดจากความร้อน....361
8.1 ความเครียดและความเค้นที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ....362
8.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาความเครียดและความเค้นจากความร้อน....365
8.3 คำสั่งพื้นฐานสำคัญของ CalculiX ที่ใช้กับปัญหาความเค้นจากความร้อน....367
8.4 ตัวอย่างปัญหาความเค้นจากความร้อน....368
8.5 เอกสารอ้างอิงบทที่8....401
8.6 แบบฝึกหัดบทที่ 8....402

สารบัญรูป

หน้าที่

รูปที่ 1.1 กระบวนการและไฟล์ในการประมวลผลของ CalculiX....3
รูปที่ 1.2 ตัวอย่างการแสดงผลด้วยภาพกราฟิกจาก frd file....4
รูปที่ 1.3 ตัวอย่างโครงสร้างข้อหมุน....6
รูปที่ 1.4 จำลองโครงสร้างด้วยสปริงเอลิเมนต์....7
รูปที่ 1.5 หมายเลขกำกับองศาอิสระการเคลื่อนที่ในทิศต่างๆ....12
รูปที่ 1.6 หน้าตาของ launcher....14
รูปที่ 1.7 ตัวอย่าง dat file....15
รูปที่ 1.8 แผนผังแรงของโครงสร้าง....16
รูปที่ 1.9 ตัวอย่างการแสดงผลด้วย CGX....18
รูปที่ 2.1 สปริงเอลิเมนต์เคลื่อนที่เฉพาะในแนวแกนของตนเอง....21
รูปที่ 2.2 ชิ้นงานหน้าตัดกลมรับแรงในแนวแกน....23
รูปที่ 2.3 แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์ 1 D....24
รูปที่ 2.4 dat file แสดงค่าการเคลื่อนตัวที่โหนดและแรงปฏิกิริยาที่โหนดของแบบจำลองสปริง....27
รูปที่ 2 5 การวิเคราะห์เปรียบเทียบแรงและระยะเคลื่อนตัวในสปริงเอลิเมนต์....29
รูปที่ 2.6 ค่าความเค้นและความเครียดในแนวแกนที่วิเคราะห์ได้จากการใช้สปริงเอลิเมนต์....31
รูปที่ 2.7 ตัวอย่างปัญหาแบบ statically indeterminate....32
รูปที่ 2.8 dat file รายงานค่าการเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยาที่โหนด....34
รูปที่ 2.9 ผังแสดงแรงและระยะการเคลื่อนตัวที่โหนดต่างๆ....35
รูปที่ 2.10 ค่าความเค้นในแนวแกนที่เกิดขึ้น....38
รูปที่ 2.11 ตัวอย่างชิ้นงานทำจากวัสดุต่างกันรับแรงในแนวแกน....39
รูปที่ 2.12 แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์....39
รูปที่ 2.13 dat file....43
รูปที่ 2.14 ผังแสดงแรงและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้น....44
รูปที่ 2.15 ค่าความเค้น และความเครียด ในแนวแกนที่เกิดขึ้น....46
รูปที่ 2.16 โครงสร้างข้อหมุนเหวี่ยงในระนาบ....47
รูปที่ 2.17 แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์ของโครงสร้างข้อหมุนเหวี่ยง....48
รูปที่ 2.18 dat file แสดงค่าการเคลื่อนตัวและแรงที่โหนด....52
รูปที่ 2.19 แรงกริยาและปฏิกิริยาของโครงสร้าง....53
รูปที่ 2.20 ผังแรงของแต่ละชิ้นส่วนของโครงสร้าง....54
รูปที่ 2.21 ค่าการเคลื่อนตัวและแรงในสปริงเอลิเมนต์หมายเลข 7....55
รูปที่ 2.22 ค่าแรงในสปริงเอลิเมนต์หมายเลข 7 เพื่อการคำนวณความเค้น....57
รูปที่ 2.23 แรงในสปริงเอลิเมนต์ที่ 6....58
รูปที่ 2.24 แรงในสปริงเอลิเมนต์ที่ 5....59
รูปที่ 2.25 แรงในสปริงเอลิเมนต์ที่ 4....60
รูปที่ 2.26 แรงในสปริงเอลิเมนต์ที่ 3....61
รูปที่ 2.27 แรงในสปริงเอลิเมนต์ที่ 2....62

หน้าที่

รูปที่ 2.28 โครงสร้างข้อหมุนเหวี่ยงใน 3-D....64
รูปที่ 2.29 แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์ในแบบ 3-D....65
รูปที่ 2.30 dat file แสดงค่าการเคลื่อนตัวและแรงของสปริงเอลิเมนต์แบบ 3-D....69
รูปที่ 2.31 ผังแรงที่โหนด B....70
รูปที่ 2.32 ผังแรงแสดงค่าแรงกริยาและแรงปฏิกิริยาของแบบจำลองโครงสร้างใน 3-D....71
รูปที่ 3.1 เอลิเมนต์แบบคาน B32....81
รูปที่ 3.2 แบบจำลอง B32 หนึ่งมิติที่จำลองการใช้งานในสามมิติ....82
รูปที่ 3.3 คานยื่นปลายอิสระ....83
รูปที่ 3.4 การจำลองโหนดและเอลิเมนต์ของคาน AB....84
รูปที่ 3.5 dat file แสดงค่าความเค้น ระยะการเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยา....88
รูปที่ 3.6 เปรียบเทียบผลลัพธ์จาก CalculiX กับทฤษฎี....89
รูปที่ 3.7 หน้าต่างของ Launcher สำหรับรับการแสดงผลและประมวลผล....91
รูปที่ 3.8 การแสดงภาพด้วย CGX....91
รูปที่ 3.9 การแสดงการใช้คำสั่งให้แสดงผลความเค้นด้วย CGX....92
รูปที่ 3.10 ภาพผลลัพธ์ของความเค้น....93
รูปที่ 3.11 คานรับแรงกระจายและโมเมนต์ดัด....94
รูปที่ 3.12 ผลลัพธ์จาก dat file....96
รูปที่ 3.13 เปรียบเทียบผลลัพธ์จาก CalculiX กับทฤษฎี....96
รูปที่ 3.14 คานหน้าตัดรูปตัว T....97
รูปที่ 3.15 หน้าตัดของคานประกอบ....98
รูปที่ 3.16 แสดงผล dat file....102
รูปที่ 3.17 เปรียบเทียบผลลัพธ์จาก CalculiX กับทฤษฎี....103
รูปที่ 3.18 ผังแรงของคาน....104
รูปที่ 3.19 ผลของความเค้นแสดงด้วย CGX....105
รูปที่ 3.20 หน้าตัดคานมีวัสดุหลายชนิด....107
รูปที่ 3.21 แสดงการกำหนดระยะออฟเซตของหน้าตัดคานประกอบ....109
รูปที่ 3.22....112
รูปที่ 3.23 ผลัพธ์ซองความเค้นแสดงด้วย CGX....113
รูปที่ 3.24 คานรับแรงดึงและดัด....114
รูปที่ 3.25 การจำลองเอลิเมนต์และโหนด....115
รูปที่ 3.26 แสดงผลใน dat file....118
รูปที่ 3.27 ความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดใดๆ เนื่องจากแรงผสม....119
รูปที่ 3.28 ผลลัพธ์ของความเค้นแสดงด้วย CGX....120
รูปที่ 4.1 ตัวอย่างโครงสร้างในระนาบ....125
รูปที่ 4.2 แรงภายในของแต่ละชิ้นงานที่ประกอบเป็นโครงสร้าง....126
รูปที่ 4.3 จุดต่อของเอลิเมนต์แบบคาน B32 เมื่อเอลิเมนต์อยู่ในทิศต่างกัน....126
รูปที่ 4.4 ภาพจำลองเอลิเมนต์แบบสปริงและแบบคาน....127
รูปที่ 4.5 dat file....128

หน้าที่

รูปที่ 4.6 dat file....129
รูปที่ 4.7 เปลี่ยนเงื่อนไขจับยึด....130
รูปที่ 4.8 สปริงเอลิเมนต์และคานใช้งานร่วมกัน....131
รูปที่ 4.9 โครงสร้างที่ใช้สปริงเอลิเมนต์และเอลิเมนต์แบบคาน....132
รูปที่ 4.10 การจำลองโหนดและเอลิเมนต์....132
รูปที่ 4.11 dat file....137
รูปที่ 4.12 ผังแรงของแต่ละชิ้นงาน....138
รูปที่ 4.13 การเคลื่อนตัวในแนวขวาง....139
รูปที่ 4.14 ตัวอย่างโครงสร้างในระนาบ....141
รูปที่ 4.15 การจำลองโหนดและเอลิเมนต์....141
รูปที่ 4.16 ผลลัพธ์ที่แสดงใน dat file....145
รูปที่ 4.17 ภาพจำลองการเปลี่ยนรูปด้วย CGX....146
รูปที่ 4.18 แรงที่กระทำในแต่ละส่วนของโครงสร้าง....147
รูปที่ 4.19 ตัวอย่างโครงสร้างในระนาบ....148
รูปที่ 4.20 การจำลองโหนดและเอลิเมนต์....149
รูปที่ 4.21 ผลลัพธ์ที่แสดงใน dat file....153
รูปที่ 4.22 เปรียบเทียบผลลัพธ์ของแรงปฏิกิริยา....154
รูปที่ 4.23 แรงในแนวต่างๆ ที่กระทำต่อเอลิเมนต์ B32....155
รูปที่ 4.24 เพลาตันหน้าตัดกลมและการจำลองโหนดและเอลิเมนต์....156
รูปที่ 4.25 dat file....160
รูปที่ 4.26 ผลลัพธ์ของความเค้นแสดงด้วย CGX....160
รูปที่ 4.27 ตัวอย่างโครงสร้างและการจำลองโหนดและเอลิเมนต์....161
รูปที่ 4.28 ผลลัพธ์ที่แสดงใน dat file....165
รูปที่ 4.29 ความเค้นตั้งฉากที่แสดงด้วย CGX....166
รูปที่ 4.30 ความเค้นเฉือนที่แสดงด้วย CGX....167
รูปที่ 4.31 สภาวะความเค้นที่จุด H....167
รูปที่ 4.32 แรงภายในหน้าตัดที่ทำให้เกิดความเค้นที่จุด H....168
รูปที่ 4.33 von Mises stress....169
รูปที่ 5.1 รูปลักษณะเอลิเมนต์อันดับที่หนึ่งใช้ในปัญหาความเค้นในระนาบและความเครียดในระนาบ....177
รูปที่ 5.2 ลักษณะการเคลื่อนตัวของโหนดของเอลิเมนต์แบบ CPS3 และ CPE3....178
รูปที่ 5.3 แรงแบบต่างๆ ที่กระทำต่อชิ้นงานในระนาบ....183
รูปที่ 5.4 แรงกระจายที่กระทำที่ขอบเอลิเมนต์ตามผิวของชิ้นงาน....186
รูปที่ 5.5 แผ่นอลูมินัมมีแรงดึงกระทำที่จุด....191
รูปที่ 5.6 โหนด ตำแหน่งโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ของตัวอย่าง 5.1....191
รูปที่ 5.7 dat file ของตัวอย่างที่ 5.1....195
รูปที่ 5.8 แสดงค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x....197
รูปที่ 5.9 แสดงค่าความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x....197
รูปที่ 5.10 รูปแบบและลักษณะของแรงกระทำต่อผิว {FS} ที่ขอบเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม....198

หน้าที่

รูปที่ 5.11 แรงดึงกระจายกระทำต่อชิ้นงาน....199
รูปที่ 5.12 แรงเฉือนกระจายที่ขอบผิวชิ้นงาน....201
รูปที่ 5.13 เอลิเมนต์ 2-D รูปสามเหลี่ยมอันดับที่สอง (triangular second order element)....203
รูปที่ 5.14 ค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดของเอลิเมนต์แบบ CPS6 และ CPE6....204
รูปที่ 5.15 แรงดึงกระจายที่ขอบผิวชิ้นงานของตัวอย่างที่ 5.4....208
รูปที่ 5.16 ลักษณะเอลิเมนต์ 2D ทรงสี่เหลี่ยมที่ใช้กับปัญหาในระนาบ....210
รูปที่ 5.17 โหนดและองศาอิสระการเคลื่อนตัวของโหนดในเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมในระนาบ....211
รูปที่ 5.18 แสดงหมายเลขกำกับผิวขอบเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลียม....214
รูปที่ 5.19 ชิ้นงานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีรูเจาะตรงกลาง....215
รูปที่ 5.20 รูปแบบแสดงการแบ่งแบบสมมาตรและเงื่อนไขขอบเขตของตัวอย่างที่ 5.5....216
รูปที่ 5.21 ชิ้นงานที่เกิดการแบ่งเอลิเมนต์....217
รูปที่ 5.22 ชิ้นงานที่แบ่งเอลิมเนต์และแสดงหมายเลขโหนด....218
รูปที่ 5.23 รูปแบบหน้าต่างของ Launcher เพื่อแปลง inp file....219
รูปที่ 5.24 การใช้คำสั่งใน terminal และ CGX เพื่อให้แสดงหมายเลขโหนด....221
รูปที่ 5.25 หมายเลขโหนดและหมายเลขเอลิเมนต์ที่แสดงโดย CGX....222
รูปที่ 5.26 ค่าความเค้นในแนวแกน x (Sxx) เกิดจากการใช้เอลิเมนต์แบบ CPS3 แสดงด้วย CGX....226
รูปที่ 5.27 หมายเลขโหนดและหมายเลขเอลิเมนต์เมื่อใช้เอลิเมนต์แบบ CPS6....228
รูปที่ 5.28 ค่าความเค้นในแนวแกน x (Sxx) ที่เกิดจากการใช้เอลิเมนต์แบบ CPS6....231
รูปที่ 5.29 หมายเลขโหนดและเอลิเมนต์เมื่อใช้เอลิเมนต์แบบ CPS3 มากขึ้น....233
รูปที่ 5.30 ค่าความเค้นในแนวแกน x (Sxx) ที่เกิดจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์แบบ CPS3 มากขึ้น....233
รูปที่ 5.31 หน้าต่างของ GMSH เพื่อใช้กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์....234
รูปที่ 5.32 a) ชิ้นงานสมมาตรรอบแกนหมุน b) แบบสองมิติจำลองชิ้นงานสมมาตรรอบแกนหมุน....235
รูปที่ 5.33 ความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นงานสมมาตรรอบแกนหมุน....236
รูปที่ 5.34 สภาวะความเค้นที่เกิดขึ้นที่จุดใดๆ ของชิ้นงานที่สมมาตรรอบแกนหมุน....238
รูปที่ 5.35 แบบของเอลิเมนต์ที่ใช้งานกับปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน....239
รูปที่ 5.36 การเคลื่อนตัวของโหนดของเอลิเมนต์แบบ CAX3....241
รูปที่ 5.37 a) ภาชนะทรงกระบอกหนารับความดันภายใน b) แบบจำลองเพื่อใช้กับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์....245
รูปที่ 5.38 หมายเลขโหนดและเอลิเมนต์แบบ CAX3 ของตัวอย่าง 5.6....246
รูปที่ 5.39 แสดงความเค้นตลอดความความหนาของภาชนะรับความดัน....250
รูปที่ 5.40 การใช้งานหน้าต่างของ CGX เพื่อให้แสดงค่าความเค้น Sxx ตลอดความหนา....251
รูปที่ 5.41 ค่าของความเค้นที่โหนดต่างๆ ตลอดความหนาโดยรายงานผ่าน Terminal....251
รูปที่ 5.42 เปรียบเทียบความเค้น Sxx ตลอดความหนาในแนวรัศมี....252
รูปที่ 5.43 เพลาหน้าตัดกลมตันมีบ่า....253
รูปที่ 5.44 แบบจำลองของชิ้นงานสำหรับสร้างต้นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน....254
รูปที่ 5.45 โหนดและเอลิเมนต์ที่ได้จากการสร้างด้วย GMSH แสดงด้วย CGX....257
รูปที่ 5.46 ค่าความเค้นสูงสุดในแนวแกนเพลา (Syy) เกิดขึ้นที่บ่าเพลา....259
รูปที่ 5.47 ค่าตัวประกอบความเข้มความเค้น (SCF) ของเพลากลมมีบ่า....259
รูปที่ 6.1 สมมาตรของชิ้นงานแผ่นโลหะที่มีรูเจาะเรียวตามความหนา....269

หน้าที่

รูปที่ 6.2 สมมาตรของชิ้นงานแผ่นโลหะที่มีรูเจาะตรงตามความหนา....269
รูปที่ 6.3 สภาวะความเค้นในสามมิติตามระบบพิกัดฉาก....270
รูปที่ 6.4 องศาอิสระของแต่ละโหนดของเอลิเมนต์แบบ C3D4....275
รูปที่ 6.5 เอลิเมนต์แบบ C3D4 และตำแหน่งของโหนด....281
รูปที่ 6.6 แบบสามมิติของคานฝังปลายยื่นอิสระ (cantilever beam)....284
รูปที่ 6.7 เส้นแสดงขอบและปริมาตรของชิ้นงานจาก GMSH....285
รูปที่ 6.8 การแบ่งเอลิเมนต์ด้วย GMSH....285
รูปที่ 6.9 แสดงการการโก่งตัวของคานด้วย CGX....293
รูปที่ 6.10 ค่าความเค้นที่เกิดจากการดัด (Syy) แสดงด้วย CGX....294
รูปที่ 6.11 แผ่นโลหะมีรูเจาะแบบมีบ่า (countersunk hole)....295
รูปที่ 6.12 ตำแหน่งของจุดสำหรับสร้างต้นแบบ....296
รูปที่ 6.13 เงื่อนไขแรงและขอบเขตของแบบจำลองสามมิติ....297
รูปที่ 6.14 การสร้างผิวของรูเจาะตรงด้วย GMSH....297
รูปที่ 6.15 การสร้างผิวเอียงที่เป็นบ่าของรูเจาะ....298
รูปที่ 6.16 แบบจำลองด้วยเส้นแสดงขอบผิวของชิ้นงานและรูปชิ้นงาน....299
รูปที่ 6.17 จุดกลมกลางรูปที่แสดงถึงการมีปริมาตรของชิ้นงาน....299
รูปที่ 6.18 ลักษณะและความหนาแน่นของเอลิเมนต์ในแบบสามมิติ....300
รูปที่ 6.19 ความเค้นในแนวแกน x (Sxx) ที่เกิดขึ้นที่รูเจาะเมื่อรับแรงดึง....304
รูปที่ 7.1 การนำความร้อนและการเกิดความร้อนในแนวแกนตามยาวของชิ้นงาน....314
รูปที่ 7.2 โหนดและเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติ....317
รูปที่ 7.3 ความยาวรอบรูปที่ล้อมปิดพื้นที่....320
รูปที่ 7.4 แท่งกลม (bar) มีฉนวนหุ้มภายนอกตลอดความยาว....326
รูปที่ 7.5 โหนดและเอลิเมนต์....327
รูปที่ 7.6 กราฟแสดงอุณหภูมิเปรียบเทียบผลการคำนวณตลอดความยาวของชิ้นงาน....331
รูปที่ 7.7 ต้นแบบชิ้นงานสมมาตรรอบแกนหมุน....332
รูปที่ 7.8 หน้าต่างเมนูของ CGX เพื่อให้แสดงตัวแปรอุณหภูมิ....336
รูปที่ 7.9 น้าต่างเมนูของ CGX เพื่อให้แสดงอุณหภูมิ....337
รูปที่ 7.10 การกระจายของอุณหภูมิตลอดความยาวแสดงด้วย CGX....337
รูปที่ 7.11 ครีบ (fin) ที่มีรูปทรงเป็นสี่เหลี่ยมมีการพาความร้อนรอบรูป....338
รูปที่ 7.12 ต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของครีบความร้อนในสองมิติ....339
รูปที่ 7.13 เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของอุณหภูมิกับผลจากโปรแกรม....344
รูปที่ 7.14 ชิ้นงานในระนาบรูปทรงสี่เหลี่ยมหุ้มฉนวนสามด้าน....345
รูปที่ 7.15 ต้นแบบสร้างด้วย GMSH....346
รูปที่ 7.16 เปรียบเทียบอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลจากโปรแกรม....352
รูปที่ 7.17 แสดงการกระจายอุณหภูมิด้วย CGX....353
รูปที่ 8.1 ความยาวชิ้นงาน A เปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ....361
รูปที่ 8.2 เงื่อนไขที่มีการบังคับจากภายนอก....362
รูปที่ 8.3 ชิ้นงานประกอบ A และ B เงื่อนไขที่มีการบังคับจากภายใน....363

หน้าที่

รูปที่ 8.4 ชิ้นงาน A ระหว่างผนังแข็งเกร็ง....368
รูปที่ 8.5 เอลิเมนต์ B31....368
รูปที่ 8.6 ชิ้นงานประกอบจากเหล็กและอลูมินัม....373
รูปที่ 8.7 ต้นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน....374
รูปที่ 8.8 bimetallic strip....383
รูปที่ 8.9 ต้นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน....384
รูปที่ 8.10 การใช้ MENU ใน CGX แสดงผล SXX (ความเค้นในแกน x)....392
รูปที่ 8.11 ผล SXX (ความเค้นในแกน x) ตลอดความหนา....392
รูปที่ 8.12 ผลการ plot ค่า SXX (ความเค้นในแกน x) ตลอดความหนาในรูปแบบ post script file....393
รูปที่ 8.13 ผลการ plot ค่าความเค้นที่บันทึกได้จาก file.out โดย spread sheet....394
รูปที่ 8.14 โครงสร้างข้อหมุน....395
รูปที่ 8.15 ต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์แบบ SPRINGA และ B31....396
รูปที่ 8.16 แรงปฏิกิริยาจากภายนอกที่จุดรองรับโครงสร้าง....400

สารบัญตาราง

หน้าที่

ตารางที่2.1 เงื่อนไขของแรงที่เปลี่ยนแปลง....33
ตารางที่2.2 เงื่อนไขของแรงที่เปลี่ยนแปลง....48
ตารางที่2.3 ค่าความแข็งสปริงของแต่ละเอลิเมนต์หรือแต่ละชิ้นส่วน....49
ตารางที่2.4 เปรียบเทียบแรงปฏิกิริยา....53
ตารางที่2.5 พลังงานความเครียดของแต่ละชิ้นส่วน....54
ตารางที่2.6 ข้อมูลโหนด....65
ตารางที่2.7 ค่าความแข็งสปริงของแต่ละเอลิเมนต์....66
ตารางที่2.8 เปรียบเทียบค่าแรงปฏิกิริยา....72
ตารางที่3.1 เปรียบเทียบแรงปฏิกิริยา....104
ตารางที่3.2 เปรียบเทียบผลของความเค้นดัดสูงสุด....106
ตารางที่3.3 เปรียบเทียบผลของความเค้นดึงสูงสุด....114
ตารางที่4.1 กำหนดชื่อเอลิเมนต์ หมายเลขและชนิด....133
ตารางที่4.2 กำหนดชื่อเอลิเมนต์ หมายเลขและชนิด....142
ตารางที่4.3 ชนิดเอลิเมนต์และโหนดเชื่อมต่อ....150
ตารางที่4.4 กำหนดชื่อเอลิเมนต์ หมายเลขและชนิด....157
ตารางที่4.5 กำหนดชื่อเอลิเมนต์ หมายเลข ชนิดและโหนดเชื่อมต่อ....162
ตารางที่5.1 คำสั่งพื้นฐานที่สอดคล้องกับระเบียบวิธีและสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับใช้แก้ปัญหา 2D....190
ตารางที่5.2 ชื่อเอลิเมนต์และหมายเลขโหนดของแต่ละเอลิเมนต์....192
ตารางที่5.3 การกำหนดทิศและหมายเลขด้านของเอลิเมนต์ทรงสามเหลี่ยมในระนาบ....199
ตารางที่5.4 หมายเลขเอลิเมนต์ ชื่อเอลิเมนต์และชนิดของเอลิเมนต์....209
ตารางที่5.5 การปรับเรียงหมายเลขโหนดให้สอดคล้องกับหมายเลขของผิวเอลิเมนต์....223
ตารางที่5.6 เปรียบเทียบความแตกต่างของผลลัพธ์เมื่อใช้จำนวนและเอลิเมนต์แบบต่างๆ....234
ตารางที่5.7 ฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวของโหนดบนเอลิเมนต์แต่ละแบบที่ใช้กับปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน....240
ตารางที่6.1 รูปแบบเอลิเมนต์ของแข็งในสามมิติ....273

บทที่ 1 รู้จักซอฟต์แวร์ CalculiX

1.1 บทนำ

CalculiX คือซอฟต์แวร์ฟรีภายใต้ GNU General Public License (GNU GPL) เป็นซอฟต์แวร์ทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์ที่นิยมนำมาใช้แก้ปัญหาทางกายภาพที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงบนขอบเขต (field Problem) สามารถใช้ในการวิเคราะห์แก้ปัญหาด้านโครงสร้าง (structural) และทางเครื่องกล (mechanical) มีรูปแบบเอลิเมนต์หลากหลายตั้งแต่หนึ่งมิติ (1-D) สองมิติ (2-D) และสามมิติ (3-D) สามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาที่ซับซ้อนได้โดยง่ายและมีความถูกต้องแม่นยำ จึงเป็นที่นิยมใช้ในหมู่นักศึกษา วิศวกร นักวิทยาศาสตร์และนักวิจัยในต่างประเทศ โดยเฉพาะในแถบประเทศยุโรป [1]

CalculiX ถูกประดิษฐ์ขึ้นโดย Guido Dhondt และ Klaus Witting สันนิษฐานว่าน่าจะเริ่มประดิษฐ์ขึ้นในช่วงปี 1998 โดย Guido Dhondt เป็นผู้รับผิดชอบด้าน Solver ส่วน Klaus Witting เป็นผู้รับผิดชอบทางด้าน Pre-Post Processor เป้าหมายหลักของพวกเขาคือการประดิษฐ์ซอฟต์แวร์ฟรีที่มีศักยภาพและเปิดโอกาสให้ผู้สนใจทั่วโลกเข้าร่วมพัฒนาซอฟต์แวร์ โดยเริ่มต้นประดิษฐ์ขึ้นมาเพื่อใช้งานบนระบบปฏิบัติการลินุกซ์เป็นหลัก ต่อมาในปี 2003 Jeff Baylor ผู้ก่อตั้งบริษัท Convergent Mechanical หรือที่เรียกว่า bConverged ได้ดำเนินการแปลงซอฟต์แวร์ให้สามารถใช้งานบนระบบปฏิบัติการวินส์โดว์ได้ด้วย จึงเป็นเหตุหนึ่งให้มีผู้เริ่มนิยมใช้อย่างกว้างขวาง เพราะสามารถใช้งานบนระบบปฏิบัติการหลากหลาย ในปัจจุบันมีการนำ CalculiX มาใช้งานบนระบบ Sun Grid อีกทั้งยังมีการพัฒนาเครื่องมือชื่อ Pycalculix โดย Justin Black เพื่อการสร้างต้นแบบและวิเคราะห์ด้วยภาษา Python นอกจากนั้นยังมีการจัดตั้งกลุ่ม calculix@yahoogroups.com เพื่อแลกเปลี่ยนความรู้และประสบการณ์การใช้งาน มุ่งช่วยกันตอบคำถามเกี่ยวกับปัญหาและอุปสรรคต่างๆ ในการใช้งาน ปัจจุบัน CalculiX สามารถดาวน์โหลดทางอินเตอร์เน็ตได้ที่ www.calculix.de

CalculiX ประกอบด้วยสองส่วนหลัก ส่วนแรกคือ CalculiX GraphiX (CGX) คือส่วนใช้ที่ใช้แสดงผลเรียกว่า CGX ส่วนนี้ใช้โปรแกรมทางด้านกราฟิกคือ openGL API สำหรับเขียนรูปต้นแบบและแสดงผลลัพธ์การคำนวณ ส่วนที่สองคือ CalculiX CrunchiX (CCX) คือส่วนที่ใช้สำหรับการคำนวนทั้งในรูปแบบชัดเจน (explicit) และรูปแบบโดยนัย (implicit) เรียกว่า CCX ส่วนนี้ใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์สองตัวหลักสำหรับจัดการแก้สมการทางคณิตศาสตร์และประมวลผลลัพธ์การคำนวณตามระเบียบวิธีทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งหลักๆ เกี่ยวข้องกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและระบบสมการเชิงเส้น ตัวแรกคือ SPOOLES (SParse Object Oriented Linear Equations Solver) เป็นคลังโปรแกรมคำสั่งภาษา C ที่มีความสามารถในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นของระบบจำนวนจริงและเชิงซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพจึงถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหาทางด้านสถิตยศาสตร์ ตัวที่สองคือ ARPACK เป็นชุดคำสั่งที่พัฒนาขึ้นมาจากภาษาฟอร์แทรนเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงทางคณิตศาสตร์ (Eigenvalue Problem) ซึ่งทั้ง SPOOLES และ ARPACK เป็นโปรแกรมฟรีทางคณิตศาสตร์ที่ประสิทธิภาพ ใช้ได้สะดวกและมีให้ดาวน์โหลดได้ทางอินเตอร์เน็ต จากเหตุผลที่ CalculiX นั้นได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นจากชุดโปรแกรมฟรีข้างต้น ทีมงานผู้พัฒนาจึงมีความคิดว่าซอฟต์แวร์ตัวนี้จึงสมควรจะเป็นซอฟต์แวร์ที่บุคคลที่สนใจสามารถนำมาใช้งานได้ฟรีด้วยเช่นกัน

เพื่อให้ CalculiX เป็นที่นิยมใช้ในปี 2000 จึงมีการเปิดให้สามารถดาวน์โหลดผ่านทางอินเตอร์เน็ตและมีการพัฒนาซอฟต์แวร์ให้มีความสามารถหลายด้านเช่น แก้ปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิต (Geometric Nonlinearity) สามารถใช้กับวัสดุที่มีพฤติกรรมแบบไฮเปอร์อีลาสติกและวิสคออีลาสติก (hyperelastic and viscoelasticity constitutive) และที่สำคัญ inp file (input file) หรือที่เรียกทั่วไปว่า inp file (ต่อไปขอเรียกว่า inp file แทนคำว่าอินพุตไฟล์)

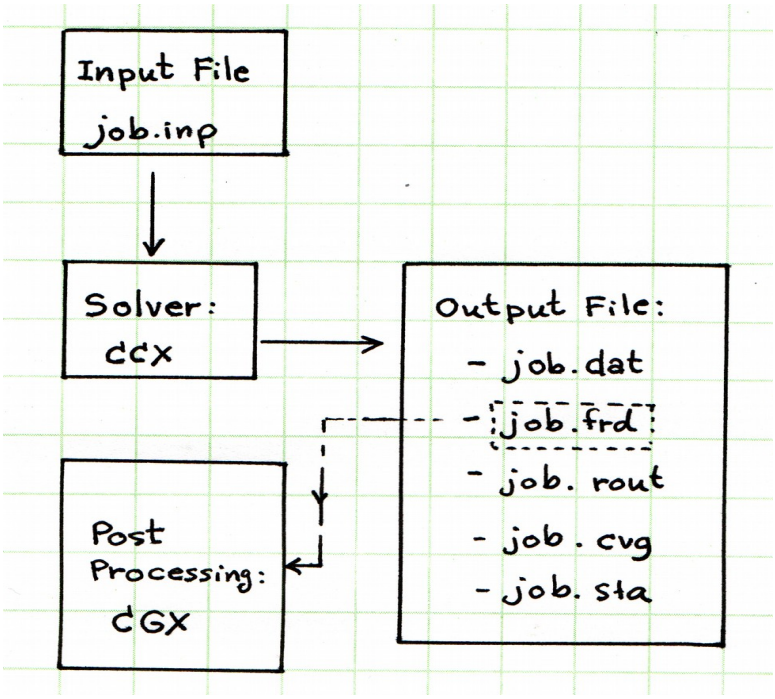
inp file ของ CalculiX นั้นได้ออกแบบให้มีรูปแบบการเขียน inp file เหมือนซอฟต์แวร์เชิงพานิชย์อย่าง ABAQUS ซึ่งถือว่าเป็นจุดเด่นของ CalculiX ทั้งนี้เพราะผู้ที่รู้และคุ้นเคยกับใช้คำสั่งของ ABAQUS มาก่อนนั้นมีอยู่มาก ผู้ใช้กลุ่มนี้สามารถเรียนรู้และหันมาสนใจ CalculiX ได้มากขึ้นอีกทางหนึ่ง อย่างไรก็ตามในการทำเช่นนั้น CalculiX เองก็ได้รับอนุญาตจาก ABAQUS ให้ใช้รูปแบบและการเขียนชุดคำสั่งของ inp file ที่คล้ายกันได้ จากจุดนั้นเป็นต้นมา CalculiX จึงได้รับการตอบรับอย่างแพร่หลาย ปัจจุบันมีผู้เข้ามาร่วมพัฒนาให้สามารถใช้ได้ทั้งบน Linux และ Windows รวมถึงได้สร้างเครื่องมือในการแปลงไฟล์ (converter) ที่ได้จาก CalculiX ไปเป็นไฟล์ในรูปแบบของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์อื่นๆ อีกหลายตัวเช่น Nastran, Abaqus, Ansys, dolfyn, ISAAC และ OpenFOAM.

1.2 การใช้งาน CalculiX เบื้องต้น

การใช้งาน CalculiX มีหลายแนวทาง ในหนังสือเล่มนี้ขอนำเสนอเฉพาะแนวทางการเขียนชุดคำสั่ง (keyword card) หรือที่เรียกว่าการเขียนชุดคำสั่งของ inp file เพื่อวิเคราะห์ปัญหา สิ่งสำคัญคือผู้เขียนควรเข้าใจความหมายและรูปแบบการใช้คำสั่ง (keyword) จากนั้นสามารถเลือกใช้และกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ของคำสั่งได้สอดคล้องและเหมาะกับปัญหา การเข้าใจการเขียนชุดคำสั่งได้นอกจากจะช่วยให้วิเคราะห์ปัญหาได้ถูกต้องแล้วยังช่วยทำให้เราสามารถดัดแปลงแก้ไขไฟล์หรือปรับเปลี่ยนเงื่อนไขต่างๆ เพื่อเข้าถึงผลลัพธ์ได้อย่างง่ายรวดเร็วไม่ต้องทำงานซ้ำซ้อนเพราะสามารถลบหรือเพิ่มเติมคำสั่งได้โดยตรงจาก inp file

การเขียน inp file สามารถเขียนได้จากโปรแกรมที่ใช้พิมพ์ตัวอักษรประเภท Text Editor ต่างๆ เมื่อเขียนชุดคำสั่งครบเราสามารถกำหนดเป็นชื่อไฟล์อะไรก็ได้ตามที่ต้องการแต่ต้องตามด้วย .inp จากนั้นส่ง inp file เข้าสู่การประมวลผลโดย CCX ผลจากการประมวลด้วย CCX จะให้ไฟล์ผลลัพธ์ดังรูปที่ 1.1 จากตัวอย่างในรูป inp file คือ job.inp หน้าที่หลักๆ คือ การเขียนชุดคำสั่งใน job.inp ให้ละเอียดถูกต้องที่สุดเท่าที่จะทำได้ ซึ่งมีขั้นตอนที่สำคัญดังนี้

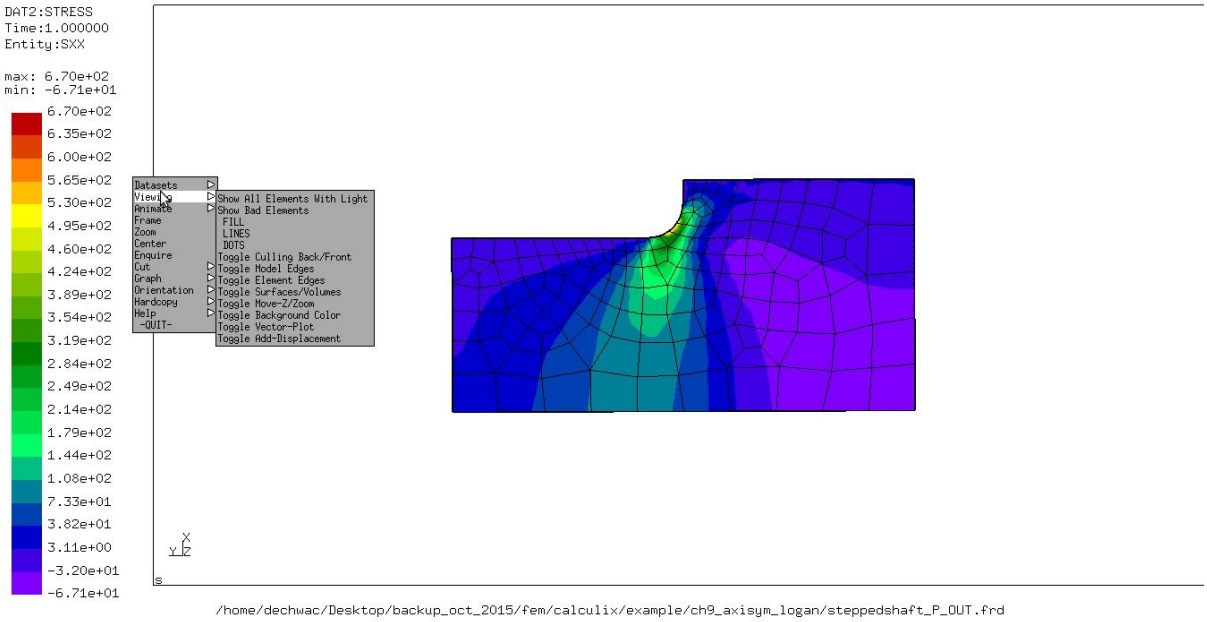
-ขั้นตอนการกำหนดโหนด (node definition)
-ขั้นตอนกำหนดการเชื่อมโยงเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ (connectivity and element type)
-ขั้นตอนกำหนดสมบัติวัสดุ (materials properties)
-ขั้นตอนกำหนดภาระแรงและเงื่อนไขขอบเขต (load and boundary conditions)
-ขั้นตอนการกำหนดประเภทการวิเคราะห์ (step and analysis type)
-ขั้นตอนการกำหนดรายงานตัวแปรผลลัพธ์ (output definitions)



รูปที่ 1.1 กระบวนการและไฟล์ในการประมวลผลของ CalculiX

ในทุกขั้นตอนเราควรเข้าใจคำสั่งและตัวแปรที่เกี่ยวข้องซึ่ง CalculiX ได้ออกแบบคำสั่งไว้มากมาย ผู้เขียน inp file สามารถจะกำหนดให้ละเอียดถูกต้องได้อย่างไรนั้นก็ขึ้นกับการเข้าใจในส่วนหลักวิธีของไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งหนังสือเล่มนี้ไม่ได้กล่าวถึงหลักวิธีของไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างละเอียด ผู้อ่านอาจหาอ่านเพิ่มเติมในส่วนของหลักวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เอง อย่างไรก็ตามในหนังสือเล่มนี้ได้พยายามสอดแทรกเนื้อหาเท่าที่เกี่ยวข้องและจำเป็นทั้งนี้เพื่อให้ผู้เขียนได้เข้าใจว่าคำสั่งแต่ละบรรทัดนั้นเกี่ยวข้องกับวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างไร

ในการเริ่มต้นเขียน inp file เราอาจใช้โปรแกรมช่วยสร้างโหนดและเอลิเมนต์เช่น โปรแกรม GMSH NETGEN เมื่อสร้าง inp file เสร็จแล้วสามารถเรียกใช้ CCX เพื่อประมวลหาผลลัพธ์ ถ้า inp file ถูกต้องเราจะได้ไฟล์ผลลัพธ์ (output files) ออกมา ตัวแรกก็คือ job.dat เป็นไฟล์ตัวอักษรหรือที่เรียกว่า text file (ต่อไปจะขอเรียกว่า dat file) ไฟล์นี้รายงานผลลัพธ์การคำนวณของที่โหนดและเอลิเมนต์ ตัวต่อไปคือ job.frd (ต่อไปขอเรียกว่า frd file) เป็นไฟล์ที่นำไปใช้ในการแสดงผลลัพธ์ในรูปแบบคอมพิวเตอร์กราฟิกและสามารถนำไปพล็อตแสดงค่าต่างๆ ที่ต้องการได้ สำหรับ job.rout เป็นไฟล์ที่บรรจุค่าผลลัพธ์ตามขั้นตอนที่ต้องการ ไฟล์ job.sta เป็นไฟล์แสดงค่าพารามิเตอร์ที่แสดงลู่เข้าของการคำนวณเชิงตัวเลข ส่วนไฟล์ job.cvg เป็นข้อมูลบอกจำนวนเอลิเมนต์ที่มีแรงภายในตกค้าง โดยส่วนใหญ่ในหนังสือเล่มนี้เน้นการใช้งาน dat file กับ frd file มากกว่าตัวอื่นๆ รูปที่ 1.2 คือตัวอย่างการแสดงผลลัพธ์ในรูปแบบคอมพิวเตอร์กราฟิกจาก frd file โดยใช้ CGX เรียกให้แสดงผล



รูปที่ 1.2 ตัวอย่างการแสดงผลด้วยภาพกราฟิกจาก frd file

1.3 องค์ประกอบของ inp file

1.3.1 รูปแบบทางเรขาคณิตของต้นแบบและเอลิเมนต์ (Geometry and Mesh)

ส่วนนี้ประกอบไปด้วยการกำหนดพิกัดของโหนดอ้างอิงตามระบบพิกัดฉาก xyz และการกำหนดโหนดที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์ รวมถึงการต่อเชื่อมต่อเอลิเมนต์ทั้งหมดเข้ากันเป็นโครงสร้างร่างแหต้นแบบเรียกว่า เมช (Mesh) สำหรับ CalculiX มีการตระเตรียมรูปแบบเอลิเมนต์ (Element Type) ไว้ให้ใช้งานแตกต่างกันออกไปขึ้นกับปัญหาและการวิเคราะห์ เช่น การกำหนดเอลิเมนต์ให้เป็นเส้นเมื่อวิเคราะห์ในรูปแบบ 1-D เช่น ปัญหาของสปริง ชิ้นงานแท่ง คาน เสา การกำหนดเอลิเมนต์แบบระนาบรูปร่างสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมกับการแก้ปัญหาบนระนาบของปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็ง และการกำหนดเอลิเมนต์แบบมีปริมาตรเพื่อให้เหมือนรูปทรงของต้นแบบ

รูปแบบทางเรขาคณิตของเอลิเมนต์นั้นมีความเกี่ยวข้องกับจำนวนโหนดและองศาการเคลื่อนตัวอิสระ (degree of freedom) จำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ทั้งหมดในต้นแบบมีผลต่อการคำนวณ ยิ่งมีเอลิเมนต์มากเท่าใดก็จะให้ผลการคำนวณที่แม่นยำยิ่งขึ้น การมีจำนวนเอลิเมนต์ที่หนาแน่น (mesh density) เปรียบเสมือนการตีร่างแหที่ละเอียดจะเชื่อมโยงกับจำนวนโหนดที่มากขึ้นส่งผลให้มีจำนวนตัวแปรในการคำนวณมากขึ้นตามไปด้วย

1.3.2 การกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ (Element Section Properties)

เมื่อมีการกำหนดเอลิเมนต์ขึ้นมาต้องมีการกำหนดลักษณะหน้าตัดของเอลิเมนต์ขึ้นให้สอดคล้องกับชิ้นงานจริง เช่น เอลิเมนต์เป็นสปริงก็ต้องมีการกำหนดหน้าตัดให้เป็นสปริง เอลิเมนต์เป็นคานก็กำหนดหน้าตัดให้เป็นคาน เอลิเมนต์เป็นของแข็งก็ต้องกำหนดหน้าตัดเป็นของแข็ง เอลิเมนต์เป็นเปลือกบางก็กำหนดให้หน้าตัดเป็นเปลือกบาง เป็นต้น

1.3.3 การกำหนดสมบัติทางกายภาพของวัสดุ (Materials Data)

เมื่อมีการกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ ก็ต้องมีการกำหนดสมบัติวัสดุของเอลิเมนต์ให้เหมาะกับปัญหาที่กำลังศึกษา เช่น ปัญหาโครงสร้างที่วัสดุมีสมบัติความยืดหยุ่นเชิงเส้นก็มีการกำหนดค่ามอดุลัสและอัตราส่วนปัวซองให้กับวัสดุ ถ้าเป็นปัญหาทางความร้อนก็กำหนดเป็นค่าสัมประสิทธิ์ทางความร้อน เป็นต้น

1.3.4 การกำหนดเงื่อนไขของภาระและขอบเขต (Loads and Boundary Conditions)

ส่วนนี้เป็นการกำหนดภาระและเงื่อนไขของต้นแบบ ภาระต่างๆ ที่ว่าขึ้นกับปัญหาที่เรากำลังวิเคราะห์ ถ้าเป็นปัญหาทางโครงสร้างก็หมายถึงแรงกริยาซึ่งมีหลายรูปแบบอาจเป็นจุดหรือกระจายกระทำต่อผิวหรือที่จุดศูนย์ถ่วง ความดันต่างๆ หรือถ้าเป็นปัญหาทางความร้อนก็อาจหมายถึงความร้อนเข้ามาที่ตำแหน่งใดๆ ของชิ้นงาน ส่วนเงื่อนไขขอบเขตขึ้นกับลักษณะของแต่ละปัญหา เช่น ปัญหาทางโครงสร้างก็ต้องพิจารณาว่ามีการจับยึดที่ขอบเขตอย่างไร หรือถ้าเป็นปัญหาทางความร้อนก็ต้องพิจารณาว่ามีการหุ้มฉนวนหรือกันความร้อนอย่างไร ซึ่งที่กล่าวมาเป็นการยกตัวอย่าง สำหรับในปัญหาจริงนั้นจะต้องพิจารณาส่วนนี้ให้มีความถูกต้องเพราะจะมีผลต่อผลลัพธ์การคำนวณ

1.3.5 การกำหนดประเภทของการวิเคราะห์ (Analysis Types)

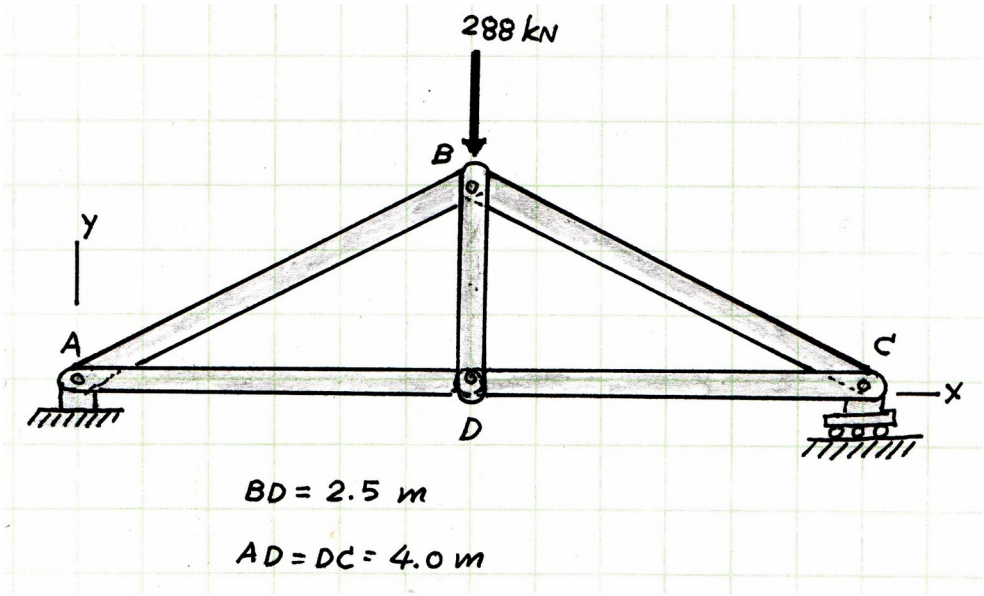
ส่วนนี้เป็นการระบุประเภทการวิเคราะห์ลงไปในไฟล์ให้มีความสอดคล้องกับปัญหาที่เราต้องการศึกษา เช่น การระบุปัญหาให้เป็นปัญหาเชิงสมดุลแรงทางสถิตยศาสตร์ ปัญหาเชิงพลศาสตร์ ปัญหาทางความร้อน หรือปัญหาอื่นๆ ที่ CalculiX รองรับการคำนวณ ส่วนนี้ต้องระบุให้ถูกต้อง

1.3.6 การกำหนดผลลัพธ์ที่ต้องการให้แสดง (Outputs Data)

ส่วนนี้คือการกำหนดผลลัพธ์ของตัวแปรใดที่ต้องการให้มีการรายงานผลออกมา สามารถใช้คำสั่งระบุลงไปในส่วนท้ายของ inp file เช่น ถ้าเป็นปัญหาทางโครงสร้างสามารถระบุระยะเคลื่อนตัวของแต่ละโหนด และสามารถให้รายงานค่าของแรงกระทำที่โหนดต่างๆ ค่าความเค้นและความเครียดของแต่ละเอลิเมนต์ ถ้าเป็นปัญหาทางความร้อนก็สามารถให้รายงานค่าอุณภูมิที่โหนดต่างๆ รวมถึงความร้อนที่เกิดขึ้นในแต่ละเอลิเมนต์ ส่วนนี้ขึ้นกับความต้องการของผู้วิเคราะห์ว่าจะให้รายงานค่าไหนหรือที่ตำแหน่งใดออกมา

1.4 รูปแบบ inp file

เพื่อความเข้าใจในองค์ประกอบต่างๆ ของ inp file ในหัวข้อ 1.3 จึงขอยกตัวอย่างโจทย์เกี่ยวกับโครงสร้างข้อหมุน (truss with pin connection) ดังแสดงในรูปที่ 1.3 เป็นโครงสร้างที่แต่ละชิ้นส่วนทำจากเหล็กกล้ามีค่ามอดุลัสเท่ากับ 200 GPa รับแรงในแนวดิ่งที่จุด B เท่ากับ 288 kN ให้เขียน inp file เพื่อหาระยะการเคลื่อนตัวของจุดต่อของโครงสร้าง และให้หาแรงปฏิกิริยา ที่ A และ C เมื่อทุกชิ้นส่วนมีพื้นที่หน้าตัดเท่ากันคือ 2,400 mm^2 [2]



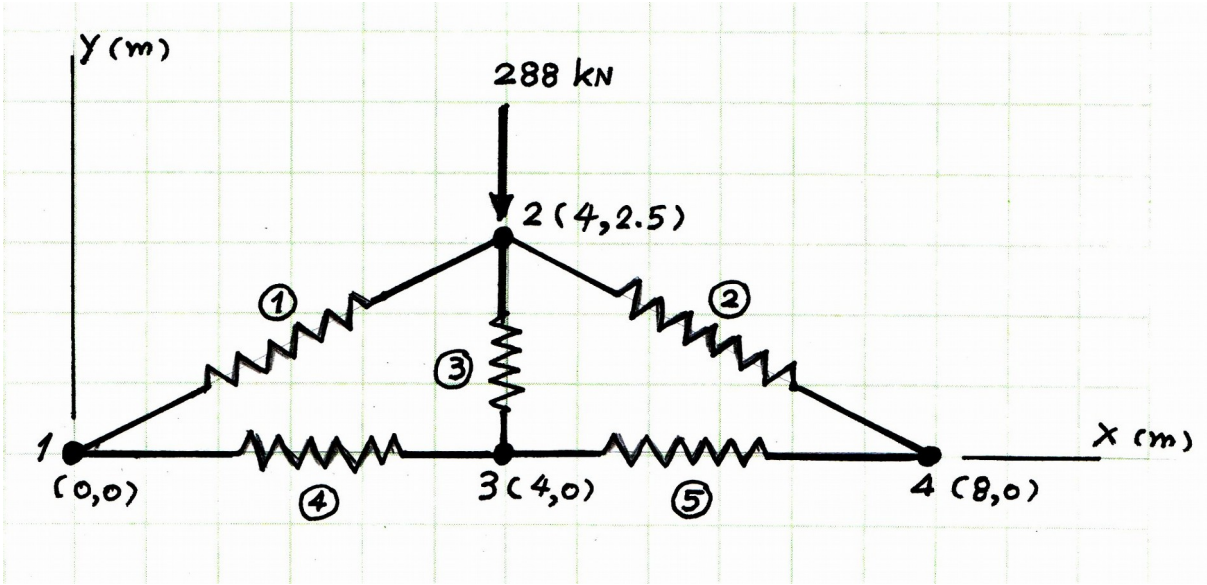
รูปที่ 1.3 ตัวอย่างโครงสร้างข้อหมุน

จากปัญหาตัวอย่างนี้เป็นโครงสร้างประกอบด้วยชิ้นงานแท่งตรง 5 ชิ้นคือ AB, BC, BD, AD และ DC กำหนดให้เป็นปัญหาที่เคลื่อนตัวบนระนาบ xy เท่านั้น ไม่มีการเคลื่อนตัวในแกนตั้งฉากกับระนาบหรือไม่มีการเคลื่อนตัวในแกน z จากเหตุผลดังกล่าวจึงสามารถกำหนดชิ้นงานแต่ละชิ้นให้เป็นเอลิเมนต์ที่มีการยืดตัวในแนวแกนชิ้นงานหรือแกนกำหนดให้ชิ้นงานแต่ละชิ้นเป็นสปริงเอลิเมนต์ที่มีค่าความแข็งสปริงดังนี้

$$k_{ab}=k_{bc}=\left(\frac{EA}{l}\right)_{ab}=\frac{200\left(10^3\right)\text{MPa}\left(2400\,\text{mm\^{}2}\right)}{\sqrt{4000^2+2500^2}\,\text{mm}^2}=\ 101{,}759.809\ \ \text{kN/m} \qquad \text{a)}$$

$$k_{ad}=k_{cd}=\left(\frac{EA}{l}\right)_{ad}=\frac{200\left(10^3\right)\text{MPa}\left(2400\,\text{mm\^{}2}\right)}{4000\,\text{mm}}=\ 120{,}000\ \ \text{kN/m} \qquad \text{b)}$$

$$k_{bd}=\left(\frac{EA}{l}\right)_{bd}=\frac{200\left(10^3\right)\text{MPa}\left(2400\,\text{mm\^{}2}\right)}{2500\,\text{mm}}=\ 192{,}000\ \ \text{kN/m} \qquad \text{c)}$$



รูปที่ 1.4 จำลองโครงสร้างด้วยสปริงเอลิเมนต์

จากปัญหาจริงสามารถนำเสนอในรูปแบบจำลองเพื่อแก้ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังรูปที่ 1.4 กำหนดให้โครงสร้างนี้ประกอบด้วยสปริงเอลิเมนต์ที่สามารถเคลื่อนที่ในแกนของสปริง จำนวนทั้งหมด 5 เอลิเมนต์และมีโหนดทั้งหมด 4 โหนดคือ โหนดหมายเลข 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ

-ทำการระบุโหนดบนระบบพิกัด (xyz) ดังนี้

โหนดหมายเลข 1 คือคู่ลำดับ (0,0,0)

โหนดหมายเลข 2 คือคู่ลำดับ (4,2.5,0)

โหนดหมายเลข 3 คือคู่ลำดับ (4,0,0)

โหนดหมายเลข 4 คือคู่ลำดับ (8,0,0)

-ทำการประกอบกันเป็นเอลิเมนต์และกำหนดให้มีสมบัติดังนี้

เอลิเมนต์หมายเลข 1 ประกอบจากโหนดหมายเลข 1 และ 2 มีค่าความแข็งสปริงเท่ากับ k_{ab}

เอลิเมนต์หมายเลข 2 ประกอบจากโหนดหมายเลข 2 และ 4 มีค่าความแข็งสปริงเท่ากับ k_{bc}

เอลิเมนต์หมายเลข 3 ประกอบจากโหนดหมายเลข 2 และ 3 มีค่าความแข็งสปริงเท่ากับ k_{bd}

เอลิเมนต์หมายเลข 4 ประกอบจากโหนดหมายเลข 1 และ 3 มีค่าความแข็งสปริงเท่ากับ k_{ad}

เอลิเมนต์หมายเลข 5 ประกอบจากโหนดหมายเลข 3 และ 4 มีค่าความแข็งสปริงเท่ากับ k_{dc}

-ทำการกำหนดเงื่อนไขแรงกระทำและเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

ที่โหนดหมายเลข 2 มีแรงกระทำในแนวดิ่ง (y) เท่ากับ -288 kN (ทิศลง)

ที่โหนดหมายเลข 1 ไม่มีการเคลื่อนตัวของโหนดในแนวแกน x, y และแกน z

ที่โหนดหมายเลข 4 ไม่มีการเคลื่อนตัวของโหนดในแนวแกน y และแกน z มีแต่การเคลื่อน ตัวในแกน x

-สุดท้ายทำการกำหนดให้โปรแกรมคำนวณและรายงานผลระยะเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยาของแต่ละโหนด จากข้อมูลข้างต้นสามารถนำมาเขียนเป็น inp file ได้ดังนี้

```
*HEADING
Example of2D Truss
*NODE,NSET=nall
1,0.0,0.0,0.0
2,4.0,2.5,0.0
3,4.0,0.0,0.0
4,8.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,2,4
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,2,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el4
4,1,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el5
5,3,4
*SPRING,ELSET=el1
101759.81
*SPRING,ELSET=el2
101759.81
*SPRING,ELSET=el3
192000
*SPRING,ELSET=el4
120000
*SPRING,ELSET=el5
120000
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
2,3,3,0.0
3,3,3,0.0
4,2,3,0.0
*CLOAD
2,2,-288
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
*END STEP
```

จาก inp file ตัวอย่างข้างต้น สามารถแยกองค์ประกอบเพื่ออธิบายความหมายของแต่ละคำสั่งได้ดังนี้

1.4.1 การกำหนดหัวเรื่อง (heading or title)

ขึ้นต้นไฟล์ด้วยคำสั่ง **`*HEADING`** คือคำสั่งระบุชื่อหัวเรื่องของปัญหา จากตัวอย่างนี้ระบุชื่อปัญหาคือ `Example of 2D truss` คำสั่งเรียกว่า keyword จะมีเครื่องหมาย * (asterisk) หรือเครื่องหมายดอกจันนำหน้าเสมอ เช่น

```
*HEADING
Example of 2D truss
```

1.4.2. การกำหนดโหนดของต้นแบบ (node definition)

รูปแบบการใช้งาน:
`*NODE,NSET=`ชื่อกลุ่มของโหนด

คำอธิบาย:
เป็น keyword ที่ใช้เพื่อระบุพิกัดของโหนด จะตามด้วย `NSET` เพื่อกำหนดชื่อกลุ่มโหนดที่ประกอบขึ้นมาเป็นต้นแบบ จากตัวอย่างนี้ได้กำหนดให้กลุ่มโหนดของต้นแบบนี้มีชื่อว่า `nall` ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 1 ถึง 4 และมีพิกัด xyz ตามที่ระบุในบรรทัดเรียงลงมาคือ

1,0.0,0.0,0.0 หมายถึงกำหนดให้โหนดหมายเลข 1 มีพิกัด xyz คือ (0.0,0.0,0.0)
2,4.0,2.5,0.0 หมายถึงกำหนดให้โหนดหมายเลข 2 มีพิกัด xyz คือ (4.0,2.5,0.0)
3,4.0,0.0,0.0 หมายถึงกำหนดให้โหนดหมายเลข 3 มีพิกัด xyz คือ (4.0,0.0,0.0)
4,8.0,0.0,0.0 หมายถึงกำหนดให้โหนดหมายเลข 4 มีพิกัด xyz คือ (8.0,0.0,0.0)

ในส่วนนี้ค่าของจุดพิกัดต้องมีความสอดคล้องกับหน่วยที่ใช้ด้วย เช่น จะให้เป็นเมตรหรือมิลลิเมตร ต้องกำหนดตัวเลขลงไป ผู้เขียนต้องรู้เองว่าพิกัดที่กำลังใช้อยู่นั้นเป็นหน่วยอะไร จากตัวอย่างนี้มีหน่วยเป็นเมตร ถ้าจะใช้หน่วยเป็นมิลลิเมตรจะต้องเปลี่ยนค่าตัวเลขของพิกัดของแต่ละโหนดเพิ่มอีก 1000 เท่า เป็นต้น

```
*NODE,NSET=nall
1,0.0,0.0,0.0
2,4.0,2.5,0.0
3,4.0,0.0,0.0
4,8.0,0.0,0.0
```

1.4.3 การกำหนดเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ (element connectivity and element type)

รูปแบบการใช้งาน:
`*ELEMENT,TYPE=`ระบุประเภทเอลิเมนต์,`ELSET=`ตั้งชื่อเอลิเมนต์
ระบุหมายเลขเอลิเมนต์, หมายเลขโหนดแรก, หมายเลขโหนดที่สอง, หมายเลขโหนดถัดไป, ...

คำอธิบาย:
เป็น keyword ที่ใช้กำหนดเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ ตัวอย่างเช่นคำสั่ง

```
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,2
```

อธิบายได้ว่า เอลิเมนต์หมายเลข 1 ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 1 และหมายเลข 2 มีรูปแบบของเอลิเมนต์เป็นแบบสปริง (SPRINGA) และกำหนดให้เอลิเมนต์นี้มีชื่อว่า `el1` จากตัวอย่างกำหนดหมายเลขเอลิเมนต์หมายเลข 1 ถึงหมายเลข 5 มีชื่อเรียงกันไปคือ `el1, el2, el3, el4` และ `el5` โดยแต่ละเอลิเมนต์เป็น

สปริงเอลิเมนต์ (SPRINGA) ดังนี้

```
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,2,4
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,2,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el4
4,1,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el5
5,3,4
```

1.4.4. การกำหนดสมบัติและหน้าตัดของเอลิเมนต์ (materials property and element section)

รูปแบบการใช้งาน:
`*SPRING,ELSET=`อ้างถึงชื่อเอลิเมนต์ที่ได้ตั้งชื่อไปแล้ว
ระบุค่าความแข็งของสปริงชื่อนั้นๆ

คำอธิบาย:
เป็น keyword ที่ใช้กำหนดหน้าตัดและค่าของเอลิเมนต์นั้นๆ จากตัวอย่าง

```
*SPRING,ELSET=el1
101759.81
```

อธิบายได้ว่า เอลิเมนต์ที่ชื่อ el1 มีหน้าตัดแบบสปริง
กำหนดให้มีค่าความแข็งสปริงเท่ากับ 101759.81 kN/m
ในส่วนนี้สามารถใช้คำสั่งซ้ำจนครบเอลิเมนต์ที่ต้องการ ในตัวอย่างมีจำนวน 5 เอลิเมนต์ สิ่งที่ควรคำนึงถึงคือหน่วยของความแข็งสปริงในที่นี้ไม่มีการระบุหน่วยลงไป ตัวเลขที่ระบุควรสอดคล้องกับมิติของระยะตามที่ระบุในพิกัดโหนดด้วย จึงเขียนเป็นคำสั่งได้ดังนี้

```
*SPRING,ELSET=el1
101759.81
*SPRING,ELSET=el2
101759.81
*SPRING,ELSET=el3
192000
*SPRING,ELSET=el4
120000
*SPRING,ELSET=el5
120000
```

1.4.5 กำหนดรูปแบบการวิเคราะห์ (analysis type)

***STEP**

คำสั่งนี้เป็นการกำหนดให้มีการคำนวณตามขั้นตอนที่กำหนด ในขั้นตอนนี้สามารถกำหนดรูปแบบการคำนวณแบบเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้นทางรูปร่างเรขาคณิต ถ้ากำหนดตัวเลือก (option) เป็น **NLGEOM** แสดงว่าต้องการให้คำนวณตามขั้นตอนที่ไม่เป็นเชิงเส้นทางรูปร่างเรขาคณิต (nonlinearity geometry) แต่ถ้าไม่ระบุอะไรแสดงว่าให้คำนวณตามขั้นตอนเรขาคณิตเชิงเส้น

***STATIC**

คำสั่งนี้ใช้ระบุเพื่อให้คำนวณตามรูปแบบของปัญหา สำหรับ keyword นี้ต้องระบุให้ตรงกับรูปแบบปัญหาต่างๆ สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก CCX manual [3] สำหรับในตัวอย่างนี้ระบุให้แก้ปัญหาแบบสถิตศาสตร์ จึงระบุ keyword คือ ***STATIC** หากเป็นปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อนก็ใช้ ***HEAT TRANSFER** ตัวอย่างคำสั่งคือ

```
*STEP
*STATIC
```

1.4.6 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)

รูปแบบการใช้งาน:

***BOUNDARY**

หมายเลขโหนด,หมายเลขของศาอิสระแรกของโหนด, หมายเลขของศาอิสระสุดท้ายของโหนด, ระยะการเคลื่อนตัวตามแนวองศาอิสระ

คำอธิบาย:
เป็น keyword ที่ใช้กำหนดเงื่อนไขขอบเขตเช่น

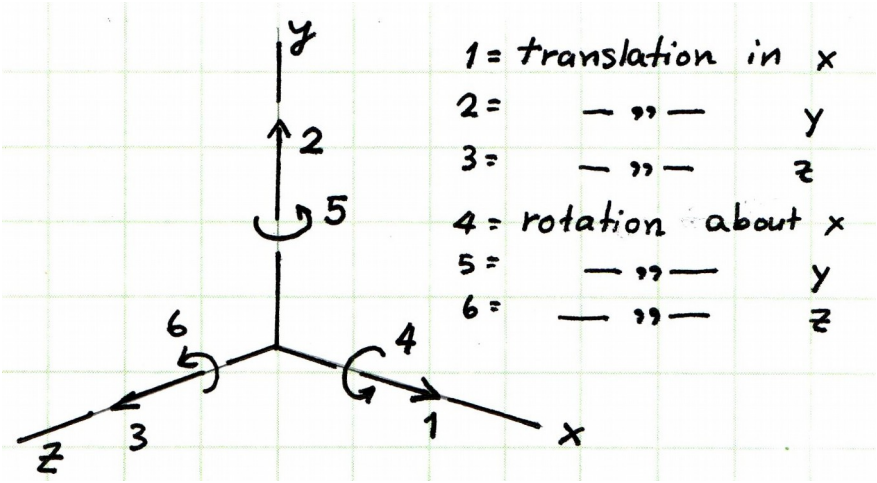
```
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
```

อธิบายได้ว่า ที่โหนดหมายเลข 1 กำหนดให้ระยะเคลื่อนตัวในแกน 1 ถึง 3 คือ 0.0 หรือมีการเคลื่อนตัวเป็นศูนย์และไม่อนุญาตให้เคลื่อนที่อิสระในทิศ x,y และ z เนื่องจากเป็น fixed end สามารถต่อเงื่อนไขที่โหนดอื่นในบรรทัดถัดไปได้เช่น 2,3,3,0.0 หมายถึง ที่โหนดหมายเลข 2 กำหนดให้ระยะการเคลื่อนตัวเฉพาะในแกน 3 คือ 0.0 หรือบังคับไม่ให้เคลื่อนตัวในแกน z แต่ปล่อยให้เคลื่อนอิสระในแกน x และ y ได้อิสระ

สำหรับ 4,2,3,0.0 หมายถึง ที่โหนดหมายเลข 4 กำหนดให้การเคลื่อนตัวในแกน 2 ถึง 3 คือ 0.0 หรือไม่มีอิสระในการเคลื่อนตัวในแกน y และ z แต่ปล่อยให้เคลื่อนอิสระเฉพาะในแกน x ได้ เนื่องจากเป็นลูกกลิ้ง

ไร้ความเสียดทาน (roller support) เขียนเป็นตัวอย่างชุดคำสั่งได้ดังนี้

```
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
2,3,3,0.0
3,3,3,0.0
4,2,3,0.0
```



รูปที่ 1.5 หมายเลขกำกับองศาอิสระการเคลื่อนที่ในทิศต่างๆ

สำหรับหมายเลขต่างๆ ที่ใช้กำกับองศาอิสระกับคำสั่ง BOUNDARY ในไฟล์นั้นค่าตัวเลขและความหมายตัวเลขแสดงในรูปที่ 1.5

รูปแบบการใช้งาน:

***CLOAD**
หมายเลขโหนด, หมายเลของศาอิสระของแนวแรง, ขนาดและและทิศของแรง

คำอธิบาย:
เป็น keyword ที่ใช้กำหนดเงื่อนไขของแรงกระทำที่โหนด

```
*CLOAD
2,2,-288
```

อธิบายได้ว่าที่โหนดหมายเลข 2 มีแรงกระทำลงที่จุดโดยแรงที่กระทำมีองศาอิสระการเคลื่อนตัวตามแนวแกน y (หมายเลข 2) มีขนาดของแรงเท่ากับ -288 kN (แรงลงไปทิศทาง -y) สามารถใส่แรงที่โหนดได้ตามที่

ต้องการหลัง keyword โดยขึ้นบรรทัดใหม่ จึงเขียนเป็นคำสั่งได้ดังนี้

```
*CLOAD
2,2,-288
```

1.4.7 การกำหนดไฟล์ผลลัพธ์ (results definition)

รูปแบบการใช้งาน:

`*NODE PRINT,NSET`=ชื่อกลุ่มโหนดที่กำหนดไว้แล้ว
ค่าการเคลื่อนตัว, แรงปฏิกิริยาหรือค่าที่ต้องการให้รายงาน

คำอธิบาย:

เป็น keyword ที่ใช้กำหนดรายงานผลลัพธ์การคำนวณลงใน dat file เช่น

```
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
```

จากตัวอย่างนี้กำหนดให้รายงานผลโดยพิมพ์ผลการคำนวณค่าการเคลื่อนตัว U (displacements) และ RF (reaction forces) ของกลุ่มโหนดที่ชื่อว่า nall ลงใน dat file

รูปแบบการใช้งาน:

`*NODE FILE,NSET`=ชื่อกลุ่มโหนดที่กำหนดไว้แล้ว
ค่าการเคลื่อนตัว, แรงปฏิกิริยาหรือค่าที่ต้องการให้รายงาน

คำอธิบาย:

เป็น keyword ที่ใช้กำหนดรายงานผลลัพธ์การคำนวณลงใน frd file เช่น

```
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
```

จากตัวอย่างนี้กำหนดให้รายงานผลโดยพิมพ์ผลการคำนวณค่าการเคลื่อนตัว U (displacements) และ RF (reaction forces) ของกลุ่มโหนดที่ชื่อว่า nall ลงใน frd file เพื่อสามารถนำไปแสดงค่า ในแบบคอมพิวเตอร์กราฟิกซึ่งสามารถเรียกใช้กับงานกับโปรแกรม CGX ต่อไป จึงเขียนเป็นคำสั่งได้ ดังนี้

```
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
```

1.4.8 จบขั้นตอนการวิเคราะห์ (ending)

```
*END STEP
```

เป็นคำสั่งเพื่อใช้สิ้นสุดการวิเคราะห์คำนวณตามที่กำหนดโดยคำสั่ง *STEP

1.5 การประมวลผล

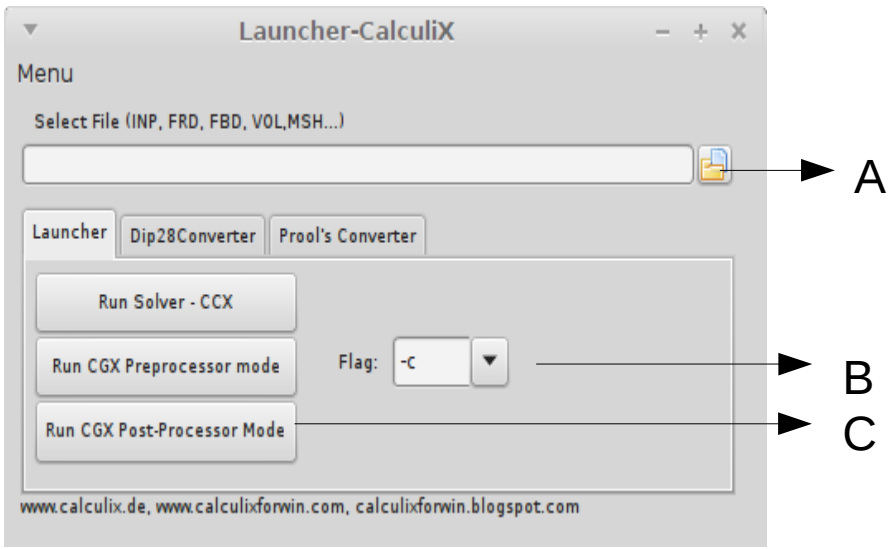
เมื่อสร้าง inp file เสร็จแล้ว ขั้นตอนต่อไปคือการส่ง inp file เข้าไปใน solver (CCX) เพื่อประมวลผล สามารถทำได้ 2 ทาง

ทางแรกผ่านทาง terminal ทำการระบุตำแหน่งของไฟล์ตามที่วางไว้ในไดเรกตอรี่ที่กำหนด จากนั้นเรียกโปรแกรมโดยการพิมพ์ CCX ตามด้วย file_name.inp

```
>ccx file_name.inp
```

ถ้าเขียนโปรแกรมไม่ผิดพลาดจะได้ไฟล์ file_name.dat และ file_name.frd โดยให้เปิดดู file_name.dat ว่ามีข้อมูลผลลัพธ์ออกมาหรือไม่ ถ้ามีแต่ชื่อไฟล์ออกมาโดยไม่มีข้อมูลภายในแสดงว่าโปรแกรมที่เขียนยังไม่ถูกต้อง ผู้เขียนต้องกลับไปทบทวนการเขียนโปรแกรมใหม่อาจมีข้อบกพร่องอยู่ที่จุดใดจุดหนึ่งในตัวโปรแกรม

อีกแนวทางหนึ่งสามารถประมวลผลผ่าน launcher ซึ่งตั้งแต่เวอร์ชั่น 2.8 มี launcher รองรับ การติดตั้ง launcher นี้มีประโยชน์ต่อการเรียกใช้ CCX เพื่อการประมวลผลและ CGX เพื่อดูผลลัพธ์โดยไม่ต้องเรียกผ่าน terminal รูปแบบหน้าตาของ launcher ดังแสดงในรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.6 หน้าตาของ launcher

-ตำแหน่ง A ใช้สำหรับกำหนด path ของ inp file

-ตำแหน่ง B ใช้สำหรับเรียก CGX ใช้งานเพื่อแสดงภาพกราฟิกจาก inp file โดยตรง ขั้นตอนนี้เรียกใช้สำหรับศึกษาตรวจสอบโครงสร้างร่างแห รวมถึงหมายเลขโหนด หมายเลขเอลิเมนต์ ก่อนส่งไป solver เพื่อคำนวณผลต่อไป

-ตำแหน่ง C ใช้สำหรับเรียก frd file ในส่วนนี้จะเรียก CGX ดูผลลัพธ์หลังจากการประมวลผล inp file อย่างถูกต้องแล้ว

1.6 การตรวจผลลัพธ์และความถูกต้อง

ค่าผลลัพธ์การคำนวณจะถูกรายงานใน dat file ซึ่งได้กำหนดไว้ในการเขียนโปรแกรมไว้แล้วว่าให้รายงานค่าอะไรออกมาบ้าง จากรูปที่ 1.7 แสดงผลลัพธ์ดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  1.920000E-03 -8.109745E-03  0.000000E+00
         3  1.920000E-03 -8.109745E-03  0.000000E+00
         4  3.840000E-03  0.000000E+00  0.000000E+00

forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1 -1.315756E+00  1.437273E+02  0.000000E+00
         2  0.000000E+00 -2.865168E+02  0.000000E+00
         3  0.000000E+00 -9.377889E-01  0.000000E+00
         4  1.315756E+00  1.437273E+02  0.000000E+00
```

รูปที่ 1.7 ตัวอย่าง dat file

เนื่องจากใน inp file มีการใช้คำสั่ง ***NODE PRINT** ค่าของ U และ RF ของกลุ่มโหนดที่ชื่อว่า nall โดย nall ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 1-4 ดังนั้นใน dat file จึงรายงานค่า U ซึ่งหมายถึงระยะเคลื่อนตัว และ RF หมายถึง แรงปฏิกิริยาที่โหนดของกลุ่มที่ถูกระบุออกมาให้โดยรายงานออกมาเป็นค่าตัวเลขทั้งในสามแนวคือ x, y และ z ซึ่งใน คอลัมน์แรกหมายถึงหมายเลขโหนดและคอลัมน์ถัดไปคือ

vx คือ ค่าเคลื่อนตัวของโหนดในแนวแกน x

vy คือค่าเคลื่อนตัวของโหนดในแนวแกน y

vz คือค่าเคลื่อนตัวตัวของโหนดในแนวแกน z

fx คือแรงปฏิกิริยาที่โหนดในแนวแกน x

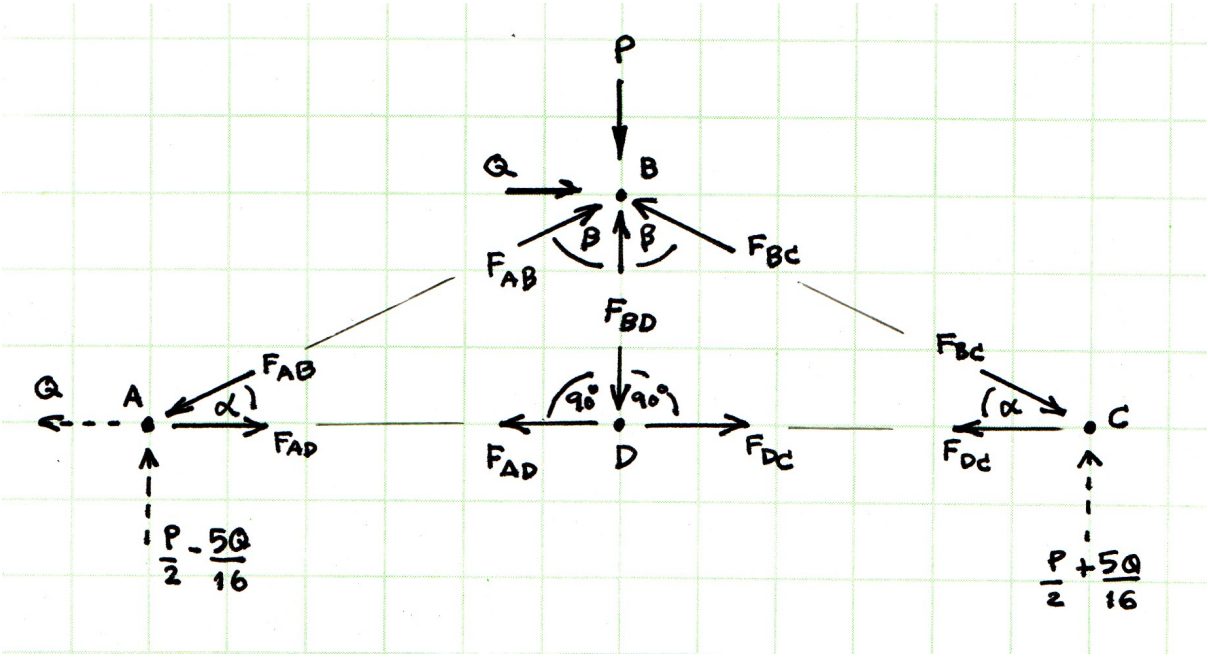
fy คือแรงปฏิกิริยาที่โหนดในแนวแกน y

fz คือแรงปฏิกิริยาที่โหนดในแนวแกน z

ถ้าสนใจผลลัพธ์ค่าเคลื่อนตัวของโหนดหมายเลข 2 จาก dat file นี้สามารถตอบได้ว่า ที่โหนดหมายเลข 2 มีค่าการเคลื่อนตัวของโหนด ในแนวแกน x เท่ากับ 0.00192 m หรือ 1.92 mm ไปทางขวามือและมีค่าการเคลื่อน

ตัวในทิศแกน y เท่ากับ 0.00811 m หรือประมาณ 8.11 mm ในทิศดิ่งลง และถ้าตรวจสอบสมดุลสถิตยศาสตร์ของแรงพบว่ามีแรงปฏิกิริยาในแนวแกน y ทิศขึ้นเท่ากับ 143.727 kN กระทำที่โหนด 1 และ 4 เท่ากันซึ่งสมดุลกับแรงที่กระทำในแนวแกน y คือ 288 kN (ซึ่งในเชิงตัวเลขยังมีความคลาดเคลื่อนอยู่บ้างเล็กน้อย)

สำหรับความถูกต้องของผลลัพธ์สามารถตรวจสอบค่าการเคลื่อนตัวได้โดยใช้หลักการพลังงาน การตรวจสอบผลลัพธ์เพื่อยืนยันความถูกต้องนั้นมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องทำ โดยต้องพยายามแสดงความสอดคล้องของผลลัพธ์หรือหาหลักฐานยืนยันว่าผลการคำนวณด้วย CalculiX มีความเป็นไปได้และน่าเชื่อถือ จากตัวอย่างนี้ ลองใช้ทฤษฎี Castigliano [2] วิเคราะห์หาผลลัพธ์ของการเคลื่อนตัวที่โหนดหมายเลข 2 โดยสมมติแรงที่กระทำจากภายนอกที่โหนดนี้คือ P และ Q ดังแสดงในรูปที่ 1.8



รูปที่ 1.8 แผนผังแรงของโครงสร้าง

จากสมดุลแรงในแนวแกนพบว่า แรงปฏิกิริยาที่จุด A มีค่าเท่ากับ $\frac{P}{2}-\frac{5Q}{16}$ แนวตั้งทิศขึ้น และ Q ในแนวนอนไปทางซ้าย

และ แรงปฏิกิริยาที่จุด C มีค่าเท่ากับ $\frac{P}{2}+\frac{5Q}{16}$ แนวตั้งทิศขึ้น

จากนั้นหาแรงภายใน F_{AB}, F_{AD}, F_{BC} และ F_{DC} ซึ่งเป็นแรงในแนวแกนของชิ้นส่วน AB BC AD และ DC พบว่า

$$F_{AB}=\frac{P}{2\sin\alpha}-\frac{5Q}{16\sin\alpha}$$

$$F_{AD}=F_{DC}=\frac{P}{2}\cot\alpha+\frac{Q}{2}$$

$$F_{BC}=\frac{P}{2\sin\alpha}+\frac{Q}{2\cos\alpha}$$

$$F_{BD}=\frac{10}{16}Q$$

เมื่อ L คือความยาวของชิ้นงาน A คือหน้าตัดชิ้นงาน E คือมอดุลัสของชิ้นงานและ U คือพลังงานความเครียดรวมในโครงสร้างดังนั้นจะได้

$$U=\frac{1}{2}((\frac{F^2L}{EA})_{AB}+(\frac{F^2L}{EA})_{BC}+(\frac{F^2L}{EA})_{BD}+(\frac{F^2L}{EA})_{DC}+(\frac{F^2L}{EA})_{AD})$$

หาระยะเคลื่อนตัวในแนวแกนนอนของโหนด 2 หรือที่จุด B เมื่อ $\delta_{2x}=\frac{\partial U}{\partial Q}$ และจากผลการหาอนุพันธ์ย่อยของพลังงานความเครียดของโครงสร้างจากชิ้นงานทั้งหมดเทียบกับแรงที่จุดนั้นในทิศที่เคลื่อนตัว
เมื่อ $Q=\ 0\ kN$ และ $P=\ 288\ kN$ จะได้

$$\delta_{2x}=\frac{\partial U}{\partial Q}=\frac{2P\cot\alpha}{EA}=\ 1.91\,x\,10^{-3}\ \text{m}$$

ทำนองเดียวกันหาค่าระยะเคลื่อนตัวในแนวตั้งของโหนดหมายเลข 2 จะได้

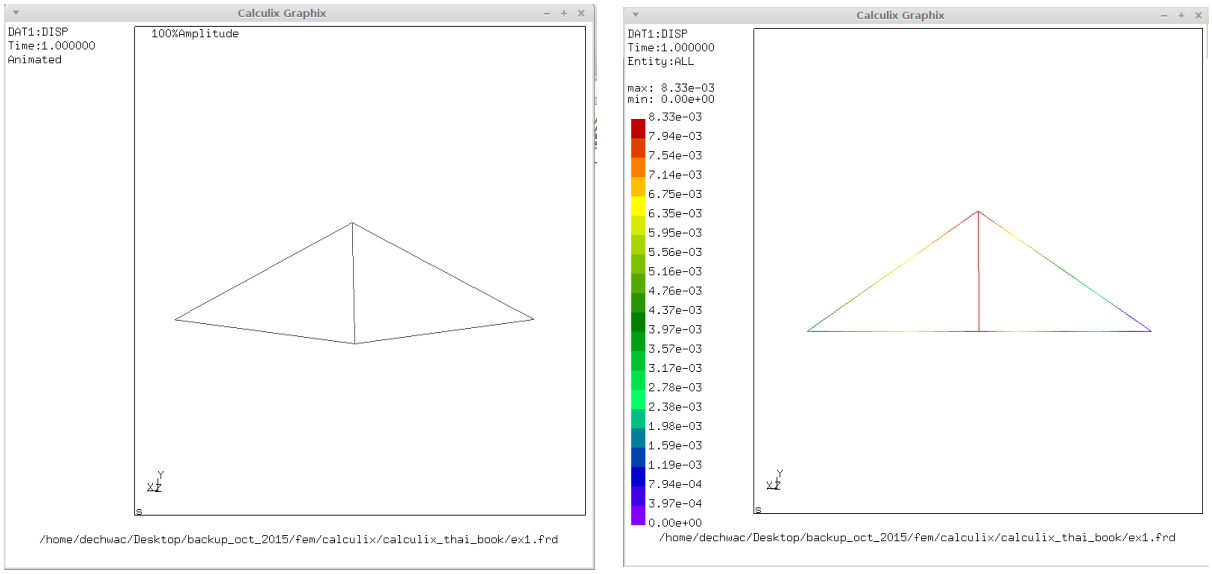
$$\delta_{2y}=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{P}{EA}(\frac{5}{4\sin^3\alpha}+2\cot^2\alpha)=\ 8.138\,x\,10^{-3}\ \text{m}$$

ที่จุดต่อของชิ้นงานมีการเคลื่อนตัวในระนาบเกิดจากชิ้นงานมีการยืดหดตัวในแนวแกนเมื่อมีแรงกระทำ โดยการเคลื่อนตัวนี้มีความสอดคล้องกันระหว่างชิ้นงานในโครงสร้างตามระบบแรงภายในที่เกิดขึ้นจากแรงที่ถ่ายเทเข้ามาในแต่ละชิ้นงาน (compatibility) เมื่อเปรียบเทียบค่าระยะการเคลื่อนตัวที่โหนดหมายเลข 2 ด้วยวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์กับทางทฤษฎีพบว่ามีค่าใกล้เคียงกันและเมื่อตรวจสอบสมดุลแรงระหว่างแรงกริยาและปฏิกิริยาพบว่ามีความสอดคล้องตามหลักสมดุล (equilibrium)

ประเด็นความถูกต้องและความน่าเชื่อถือของผลการคำนวณจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นมีความสำคัญมาก ผู้ใช้งานโปรแกรมควรหาหลักตรวจสอบด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งเพื่อหาประจักษ์หลักฐานว่าผลการคำนวณมีแนวโน้มที่จะออกมาในแนวที่กำลังทำการศึกษา โดยทั่วไปอาจยืนยันผลจากผลการทดลองถ้าไม่สามารถคำนวณทางทฤษฎีได้ หรือแม้มีทฤษฎีรองรับแต่ไม่อาจคำนวณให้ครอบคลุมเงื่อนไขทั้งหมดก็ควรที่จะแสดงความใกล้เคียงและความเป็นได้ของผลลัพธ์

1.7 การแสดงผลทางคอมพิวเตอร์กราฟิก

ในส่วนการแสดงผลทางคอมพิวเตอร์กราฟิกสามารถทำได้โดยการใช้ CGX เรียก file_name.frd ด้วย CGX Manual [4] ผ่านทาง launcher ที่ตำแหน่ง B ดังแสดงในรูปที่ 1.6 เมื่อเรียกใช้สามารถให้แสดงผลของระยะการเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยาที่โหนดทั้งหมดของทั้งต้นแบบได้ ภาพตัวอย่างดังแสดงในรูปที่ 1.9



รูปที่ 1.9 ตัวอย่างการแสดงผลด้วย CGX

ในบทนี้แนะนำให้รู้จัก CalculiX ในขั้นต้นพอจะเข้าใจถึงขั้นตอนสำคัญๆ ในการใช้งาน สิ่งที่เน้นคือการสามารถเขียน inp file ได้อย่างถูกต้อง ทั้งนี้ถ้าเราสามารถเขียน inp file ได้ถูกต้อง ผลลัพธ์ที่ได้ก็จะมีความถูกต้องแม่นยำ ขั้นตอนการเขียน inp file มี 8 ขั้นตอนหลัก ผู้เขียนต้องรู้จักโครงสร้างของไฟล์ รู้จักคำสั่ง (key card) ว่าจะเลือกให้เหมาะสมกับปัญหาที่เรากำลังศึกษาอย่างไร การเลือกคำสั่งก็เกี่ยวข้องกับความเข้าใจในหลักการวิธีของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เมื่อได้ไฟล์ผลลัพธ์ผู้เขียนควรมีการตรวจสอบความถูกต้องของการประมวลผล ซึ่งถือว่าเป็นกระบวนการขั้นสุดท้ายที่สำคัญ โดยตรวจสอบจาก dat file และ frd file เป็นหลัก สำหรับ dat file นั้นรายงานออกมาเป็นตัวเลขผลลัพธ์ที่โหนดและเอลิเมนต์ ส่วน frd file แสดงผลลัพธ์ด้วย CGX ในรูปแบบภาพและสีที่สัมพันธ์กับตัวเลขผลลัพธ์ ถ้าผู้เขียนตรวจสอบว่าผลลัพธ์ไม่ถูกต้อง สามารถกลับไปแก้ไข inp file ให้มีความถูกต้องเหมาะสมกับปัญหา จากนั้นทำการประมวลผลด้วย CCX แล้วตรวจสอบผลลัพธ์จนกว่าจะถูกต้อง สำหรับในบทต่อไปจะเกี่ยวข้องกับการเขียน inp file เพื่อการใช้งานเอลิเมนต์ต่างๆ โดยนำเสนอกับปัญหาตัวอย่าง

1.8 เอกสารอ้างอิงบทที่ 1

[1] Guido Dhondt, “The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications”, John Wiley & Sons , London, 2004

[2] Ferdinand Beer, E. Russel Johnston, Jr. John Dewolf, David Mazurek, “Mechanics of Materials”, 7th Edition, McGrawHill, New York, 2015

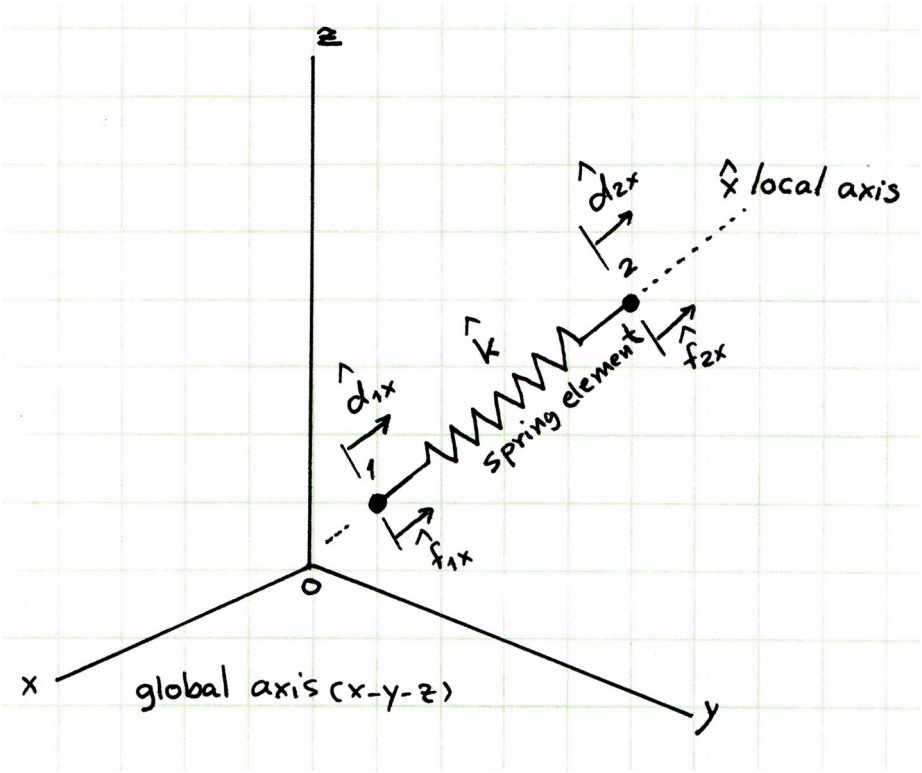
[3] Guido Dhondt, “CalculiX CrunchiX USER'S MANUAL”, version 2.8p2, March 19, 2015, www.calculix.de

[4] Klaus Wittings, “CalculiX GraphiX USER'S MANUAL”, version 2.8p2, March 19, 2015, www.calculix.de

บทที่ 2 การใช้งานสปริงเอลิเมนต์

2.1 สปริงเอลิเมนต์ (SPRING ELEMENT)

ชิ้นงานที่มีการยืดและหดตัวในแนวแกนสามารถจำลองด้วยสปริงเอลิเมนต์ สปริงเอลิเมนต์จะมีแนวแกนของสปริงเอง (local axis) เมื่อมีแรงกระทำสปริงจะมีการยืดหรือหดในแนวแกน ซึ่งพฤติกรรมการยืดหดตัวของสปริงกับแรงที่ถ่ายทอดภายในตัวสปริงเป็นไปได้ทั้งแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ในบทนี้จะนำการใช้งานสปริงเอลิเมนต์มาแก้ปัญหาทางด้านกลศาสตร์วัสดุและปัญหาทางด้านโครงสร้างกับต้นแบบ 1 มิติ (1-D) 2 มิติ (2-D) 3 มิติ (3-D) โดยกำหนดให้สปริงมีพฤติกรรมการยืดหดตัวมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นกับแรง



รูปที่ 2.1 สปริงเอลิเมนต์เคลื่อนที่เฉพาะในแนวแกนของตนเอง $\hat{x}$

จากรูปที่ 2.1 แสดงรูปแบบของสปริงเอลิเมนต์ แกนของสปริงคือ $\hat{x}$ (local axis) สปริงเชื่อมต่อระหว่างสองโหนดในแนวแกนของสปริง ระยะเคลื่อนที่ระหว่างสองโหนดสัมพันธ์กับแรงที่ถ่ายทอดในแกนของสปริงแบบเชิงเส้นตามระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

$$\{\hat{f}\}=[\hat{k}]\{\hat{d}\} \qquad 2.1)$$

เมื่อ $\{\hat{f}\}$ คือแรงในแนวแกนของสปริง $[\hat{k}]$ คือค่าความแข็งของสปริง และ $\{\hat{d}\}$ คือระยะเคลื่อนตัวในแนวแกนของสปริง ซึ่งในการแก้ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีการแปลงสมการอยู่ในระบบแกนทั่วไป (global axis) ดังนี้

$$\{F\}=[K]\{d\} \qquad 2.2)$$

เมื่อ $\{F\}$ คือแรงที่โหนดในระบบพิกัดทั่วไป $[K]$ คือค่าความแข็งของสปริงในระบบพิกัดทั่วไป และ $\{d\}$ คือระยะเคลื่อนตัวที่โหนดในระบบพิกัดทั่วไป สำหรับที่มาและรายละเอียดของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถหาอ่านเพิ่มเติมได้จากหนังสือทางด้านการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไป [1]

คำสั่งที่เรียกใช้งานสปริงเมนต์ใน inp file คือ

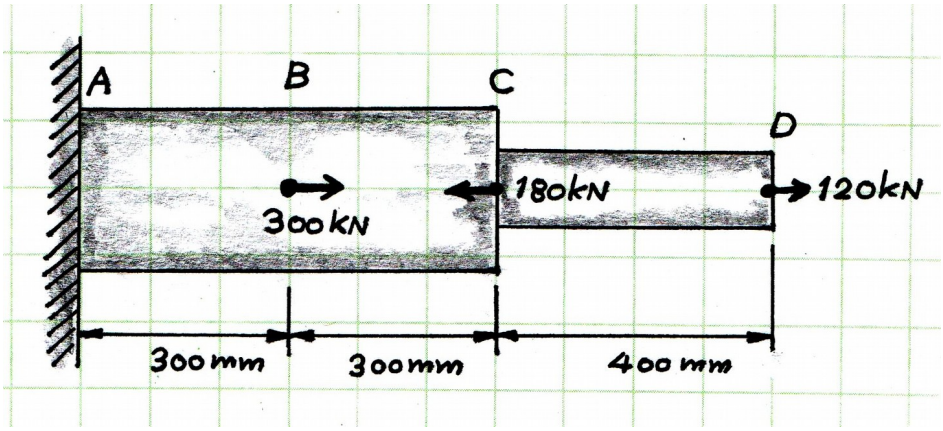
```
*SPRING,ELSET=_________, NONLINEAR
```

เป็นคำสั่งใช้ระบุค่าสปริงหรือความสัมพันธ์ระหว่างแรงและระยะยืดของสปริง สามารถกำหนดให้มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้น (linear or nonlinear) ถ้าไม่ระบุคำว่า **NONLINEAR** ในท้ายคำสั่ง จะถือว่าเป็นการระบุให้มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น สำหรับ ELSET คือคำสั่งระบุชื่อกลุ่มของเอลิเมนต์หรือชื่อเอลิเมนต์ที่กำหนดให้เป็นแบบ SPRINGA รายละเอียดเพิ่มเติมในการใช้งาน ***SPRING** สามารถอ่านเพิ่มเติมได้จาก [2] สำหรับคำสั่งนี้สามารถกำหนดให้มีสมบัติที่ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิได้อีกด้วยแต่ไม่กล่าวถึงในหนังสือเล่มนี้

ต่อไปเป็นการนำสปริงเอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาทางกลศาสตร์วัสดุโดยเน้นนำโจทย์จากวิชากลศาสตร์วัสดุมาเป็นตัวอย่าง โดยเริ่มจากปัญหาแบบ 1-D 2-D และ 3-D ในแบบที่แก้ได้โดยสมดุลสถิตยศาสตร์ (statically determinate) และแบบแก้ไม่ได้โดยสมดุลสถิตยศาสตร์ (statically indeterminate) ในตัวอย่างจะมีการแนะนำตามลำดับขั้นที่ได้นำเสนอไปแล้วในบทที่ 1

2.2 การใช้งานสปริงเอลิเมนต์แบบเชิงเส้นในแบบ 1-D

ตัวอย่างที่ 2.1 [3] ชิ้นงานเหล็กกล้าแท่งหน้าตัดกลม ABCD มีหน้าตัดต่างกันในช่วง ABC และ CD เมื่อมีแรงกระทำในแนวแกนดังรูปที่ 2.2 กำหนดให้มอดุลัสของเหล็กกล้ามีค่าเท่ากับ 200 GPa ช่วง ABC มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 580 mm^2 ช่วง CD มีหน้าตัดเท่ากับ 190 mm^2 จงเขียน inp file เพื่อหาระยะยืดในแนวแกนของชิ้นงานและนำผลไปวิเคราะห์หาความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน

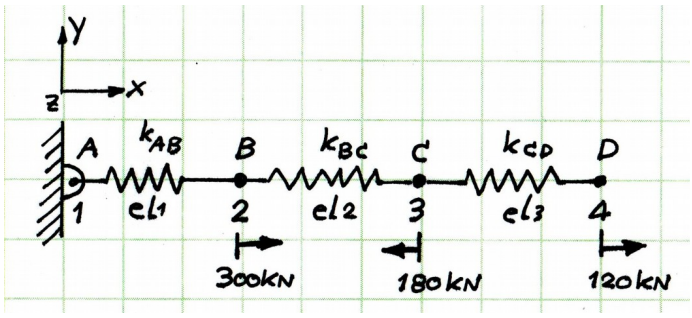


รูปที่ 2.2 ชิ้นงานหน้าตัดกลมรับแรงในแนวแกน

การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา

1.กำหนดหัวข้อและโหนด (heading and node definition) โดยเริ่มต้นจากการแปลงโจทย์ปัญหาเป็นต้นแบบทางไฟไนต์เอลิเมต์โดยใช้สปริงเอลิเมนต์สามสปริงเอลิเมนต์มีโหนดทั้งหมด 4 โหนด ดังรูปที่ 2.3 จากต้นแบบนี้เราเลือกใช้สปริงจำนวน 3 เอลิเมนต์มีโหนดทั้งหมด 4 จุด พร้อมตั้งชื่อปัญหานี้คือ stepped bar in axial loading และกำหนดหมายเลขโหนดและคู่ลำดับดังนี้

โหนดหมายเลข 1 มีพิกัด xyz คือ (0.0,0.0,0.0)
โหนดหมายเลข 2 มีพิกัด xyz คือ (300.0,0.0,0.0)
โหนดหมายเลข 3 มีพิกัด xyz คือ (600.0,0.0,0.0)
โหนดหมายเลข 4 มีพิกัด xyz คือ (1000.0,0.0,0.0)
และตั้งชื่อ `NSET=nall`



รูปที่ 2.3 แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์ 1 D

ในส่วนนี้สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*HEADING
ex21.inp stepped bar in
axial loading
*NODE,NSET=nall
1,0.0,0.0,0.0
2,300.0,0.0,0.0
3,600.0,0.0,0.0
4,1000.0,0.0,0.0
```

2.กำหนดเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ (element connectivity and element type) และกำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ที่ใช้คือ SPRINGA ดังนี้
ช่วง AB คือสปริงตัวที่ 1 มีชื่อว่า el1 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1 และ 2
ช่วง BC คือสปริงตัวที่ 2 มีชื่อว่า el2 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 2 และ 3
และช่วง CD คือสปริงตัวที่ 3 มีชื่อว่า el3 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 3 และ 4
ดังนั้นคำสั่งในการกำหนดเอลิเมนต์คือ

```
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,2,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,3,4
```

3. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section) โดยทำการกำหนดความแข็งของแต่ละสปริงเอลิเมนต์โดยมีค่าดังนี้

-สปริงตัวที่ 1 หรือ el1 มีค่าความแข็งสปริงเท่ากับ

$$k_{AB}=(\frac{A\,E}{L})_{AB}=\frac{580\,mm^2(200\,x\,10^3\,N/mm^2)}{300\,mm}=386{,}666.67\quad N/mm$$

-สปริงตัวที่ 2 หรือ el2 มีค่าความแข็งสปริงเท่ากับ สปริงตัวที่ 1 เนื่องจากเป็นวัสดุตัวเดียวกัน หน้าตัดเท่ากัน และยาวเท่ากันดังนั้น $k_{AB}=k_{BC}$

-สปริงตัวที่ 3 หรือ el3 มีค่าความแข็งสปริงเท่ากับ

$$k_{CD}=(\frac{A\,E}{L})_{CD}=\frac{190\,mm^2(200\,x\,10^3\,N/mm^2)}{400\,mm}=95{,}000\quad N/mm$$

จึงเขียนคำสั่งกำหนดค่าความแข็งของสปริงแต่ละตัวได้ดังนี้คือ

```
*SPRING,ELSET=el1
386666.67
*SPRING,ELSET=el2
386666.67
*SPRING,ELSET=el3
95000
```

4. กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

5. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)
กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า
-โหนดหมายเลข 1 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x y และ z เนื่องจากถูกจับยึดไว้
-โหนดหมายเลข 2 3 และ 4 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน y และ z เนื่องจากอิสระในการเคลื่อนที่ในแนวแกนชิ้นงานแต่ถูกบังคับไม่ให้เคลื่อนตัวออกจากระนาบ xy และไม่ให้เคลื่อนตัวแกน y
สามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขตได้ดังนี้

```
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
2,2,3,0.0
3,2,3,0.0
4,2,3,0.0
```

6.กำหนดภาระแรงโดยพิจารณาจากแรงกริยา จากโจทย์ที่มีแรงกระทำเฉพาะที่โหนดคือ
-โหนดหมายเลข 2 มีแรงกระทำในแนวแกน x ทิศบวกเท่ากับ 300,000 N
-โหนดหมายเลข 3 มีแรงกระทำในแนวแกน x ทิศลบเท่ากับ 180,000 N
-โหนดหมายเลข 4 มีแรงกระทำในแนวแกน x ทิศลบเท่ากับ 120,000 N
สามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดแรงกระทำได้ดังนี้

```
*CLOAD
2,1,300000
3,1,-180000
4,1,120000
```

7. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้รายงานผลใน dat file โดยให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
```

ทำนองเดียวกันต้องการแสดงผลทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
```

8. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง *END STEP

9.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-8 เป็น inp file คือ ex21.inp

```
*HEADING
stepped bar in axial loading (ex21.inp)
*NODE,NSET=nall
1,0.0,0.0,0.0
2,300.0,0.0,0.0
3,600.0,0.0,0.0
4,1000.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
```

```
1,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,2,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,3,4
*SPRING,ELSET=el1
386666.67
*SPRING,ELSET=el2
386666.67
*SPRING,ELSET=el3
95000
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
2,2,3,0.0
3,2,3,0.0
4,2,3,0.0
*CLOAD
2,1,300000
3,1,-180000
4,1,120000
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
*END STEP
```

10. ส่ง ex21.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้ dat file คือ ex21.dat ดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  6.206896E-01  0.000000E+00  0.000000E+00
         3  4.655172E-01  0.000000E+00  0.000000E+00
         4  1.728675E+00  0.000000E+00  0.000000E+00

forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1 -2.400000E+05  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  3.000000E+05  0.000000E+00  0.000000E+00
         3 -1.800000E+05  0.000000E+00  0.000000E+00
         4  1.200000E+05  0.000000E+00  0.000000E+00
```

รูปที่ 2.4 dat file แสดงค่าการเคลื่อนตัวที่โหนดและแรงปฏิกิริยาที่โหนดของแบบจำลองสปริง

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

11. อ่านผลลัพธ์จากใน dat file ดังแสดงในรูปที่ 2.4 พบว่าค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดดังนี้
-โหนดหมายเลข 1 หรือที่จุด A ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x, y และ z จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ในทุกแกน
-โหนดหมายเลข 2 หรือที่จุด B มีค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกน x เท่ากับ 0.62069 mm ในทิศทางบวก
-โหนดหมายเลข 3 หรือที่จุด C มีค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกน x เท่ากับ 0.4655 mm ในทิศทางบวก
-โหนดหมายเลข 4 หรือที่จุด D มีค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกน x เท่ากับ 1.7287 mm ในทิศทางบวก

12. ศึกษาวิเคราะห์สมดุลแรงจากไฟล์ผลลัพธ์ของแต่ละโหนดดังนี้
โหนดหมายเลข 1 (ที่จุด A) ผนังมีแรงปฏิกิริยาที่ผนังกระทำต่อชิ้นงานเท่ากับ 240 kN ในทิศทางลบของแกน x ส่วนที่โหนดที่เหลือก็คือค่าของแรงกริยาที่ระบุไว้ตั้งแต่ต้น จากข้อมูลใน dat file สามารถนำมาแสดงสมดุลแรง (forces equilibrium) ของสปริงแต่ละตัวในรูปที่ 2.5 พบว่าสปริงเอลิเมนต์ตัวที่ 1 หรือ el1 มีแรงดึงกระทำเท่ากับ 240 kN ในขณะตัวที่สองหรือ el2 สปริงถูกตัวด้วยแรงกด 60 kN และตัวที่สามหรือ el3 สปริงถูกดึงด้วยแรง 120 kN

13.ศึกษาวิเคราะห์ความสอดคล้องของแรงกับการเคลื่อนตัวที่ได้จากหลักสมดุลสถิตยศาสตร์ นำมาเปรียบกับผลคำนวณทางวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ว่ามีความสอดคล้องกันหรือไม่

- ที่สปริงเอลิเมนต์ตัวที่ 1 หรือ el1 รับแรงดึงเท่ากับ 240 kN ดังนั้นระยะยืดของสปริงได้เท่ากับ

$\delta_{BA}=\frac{240}{386.667}=+0.62068\ \ mm$ เมื่อ $\delta_{BA}=\delta_B-\delta_A$ และ $\delta_A=0$ ได้ $\delta_B=0.62068\ \ mm$ ซึ่งใกล้เคียงกับผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

- ที่สปริงเอลิเมนต์ตัวที่ 2 หรือ el2 มีแรงกดเท่ากับ 60 kN ดังนั้นระยะหดของสปริงได้เท่ากับ

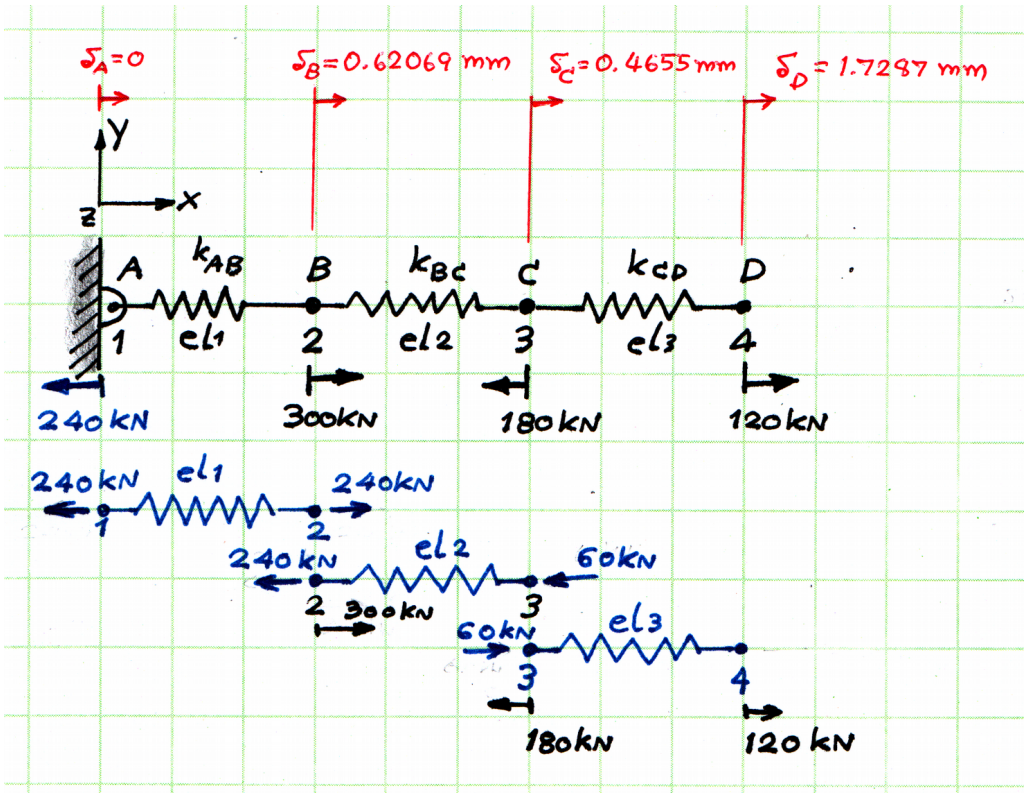
$\delta_{CB}=\frac{-60}{386.667}=-0.15517\ \ mm$ เมื่อ $\delta_{CB}=\delta_C-\delta_B$ และ $\delta_B=0.62068\ \ mm$ จะได้

$\delta_C=0.4655\ \ mm$ ซึ่งใกล้เคียงกับผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

- ที่สปริงเอลิเมนต์ตัวที่ 3 หรือ el3 มีแรงดึงเท่ากับ 120 kN ดังนั้นระยะยืดของสปริงได้เท่ากับ

$\delta_{DC}=\frac{120}{95}=1.263\ \ mm$ เมื่อ $\delta_{DC}=\delta_D-\delta_C$ และ $\delta_C=0.4655\ \ mm$ จะได้

$\delta_D=1.7287\ \ mm$ ซึ่งใกล้เคียงกับผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 2 5 การวิเคราะห์เปรียบเทียบแรงและระยะเคลื่อนตัวในสปริงเอลิเมนต์

14.นำผลไปวิเคราะห์หาความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน

จากค่าของแรงที่ได้จากการคำนวณของโปรแกรมและได้ตรวจสอบความถูกต้องในเบื้องต้นโดยหลักการสมดุลแรง รวมถึงการเปลี่ยนรูปของชิ้นงานตามความสัมพันธ์ของความแข็งของสปริง สามารถนำค่าแรงและระยะยืดหดที่ได้ไปคำนวณหาค่าความเค้นและความเครียดในแต่ละส่วนของชิ้นงานได้ดังนี้

ในช่วง AB หรือที่สปริงเอลิเมนต์ตัวที่ 1 รับแรงดึงในแนวแกนเท่ากับ 240 kN บนพื้นที่หน้าตัด 580 mm^2 ดังนั้นความเค้นตั้งฉากในแนวแกนชิ้นงานในช่วง AB คือ

$$\sigma_{BA} = \frac{240\,kN}{580\,mm^2} = \ 413.8 \ \ MPa$$ ซึ่งเป็นความเค้นดึง

และช่วง AB ที่ยาว 300 mm มีการยืดตัวออกเนื่องจากการดึงในแนวแกนเท่ากับ 0.62068 mm ดังนั้นความเครียดตั้งฉากในแนวแกนของชิ้นงานในช่วง AB คือ

$$\epsilon_{BA} = \frac{0.6208\,mm}{300\,mm} = 2.069\,x\,10^{-3}$$

ในช่วง BC หรือที่สปริงเอลิเมนต์ตัวที่ 2 รับแรงกดในแนวแกนเท่ากับ -60 kN บนพื้นที่หน้าตัด 580 mm^2 ดังนั้นความเค้นตั้งฉากในแนวแกนชิ้นงานในช่วง BC คือ

$$\sigma_{CB}=\frac{-60\,kN}{580\,mm^2}=\ -103.45\ \ MPa$$ ซึ่งเป็นความเค้นอัด

และช่วง BC ที่ยาว 300 mm มีการหดตัวเข้าในแนวแกนเนื่องจากการกดเท่ากับ -0.15517 mm ดังนั้นความเครียดตั้งฉากในแนวแกนของชิ้นงานในช่วง BC คือ

$$\epsilon_{CB}=\frac{-0.15517\,mm}{300\,mm}=-0.5172\,x\,10^{-3}$$

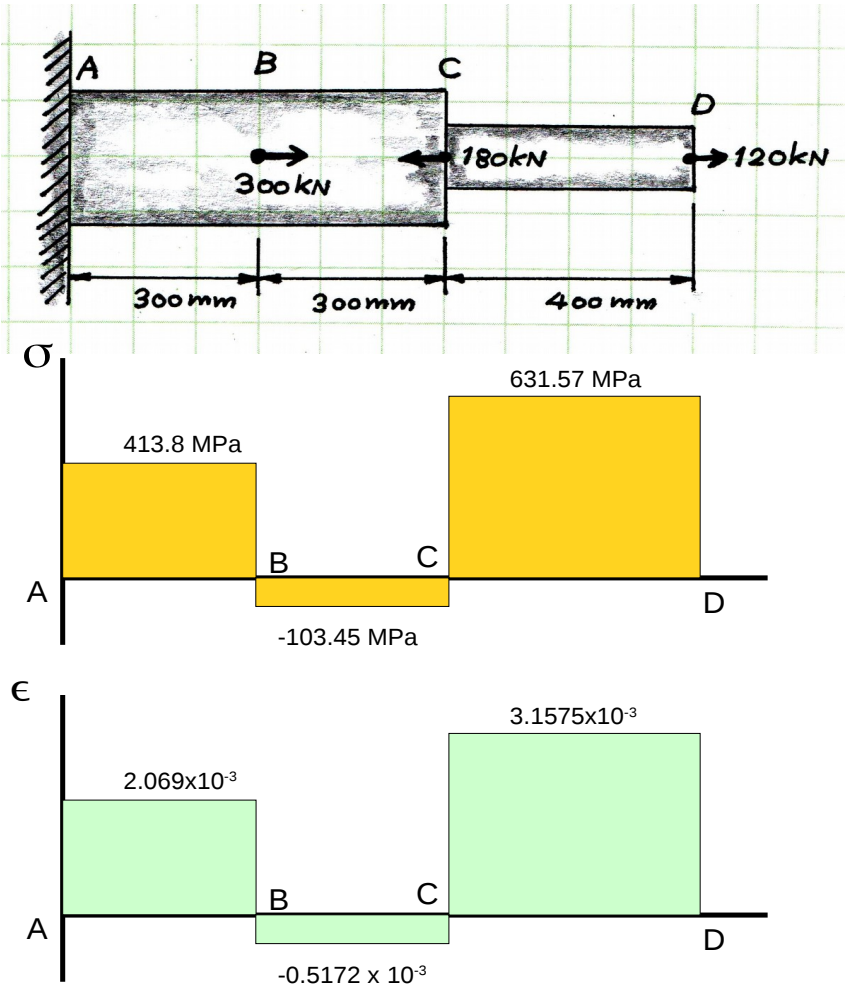
ในช่วง CD หรือที่สปริงเอลิเมนต์ตัวที่ 3 รับแรงดึงในแนวแกนเท่ากับ 120 kN บนพื้นที่หน้าตัด 190 mm^2 ดังนั้นความเค้นตั้งฉากในแนวแกนชิ้นงานในช่วง CD คือ

$$\sigma_{DC}=\frac{120\,kN}{190\,mm^2}=\ 631.57\ \ MPa$$ ซึ่งเป็นความเค้นดึง

และช่วง CD ที่ยาว 400 mm มีการยืดตัวออกในแนวแกนเนื่องจากการดึงเท่ากับ 1.263 mm ดังนั้นความเครียดตั้งฉากในแนวแกนของชิ้นงานในช่วง CD คือ

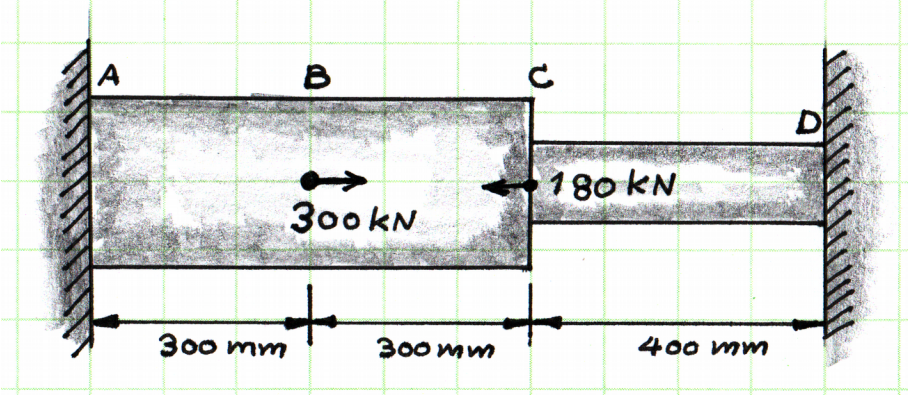
$$\epsilon_{DC}=\frac{1.263\,mm}{400\,mm}=3.1575\,x\,10^{-3}$$

ซึ่งพบว่าชิ้นงานมีการดึงเกิดขึ้นในสองช่วงคือ AB และ CD ในขณะที่ช่วง BC เกิดการกด และพบว่าความเค้นและความเครียดตั้งฉากสูงสุดเกิดขึ้นในช่วง CD จากการดึงมีค่าความเค้นและความเครียดสูงสุดคือ 631.57 MPa และ 0.0031575 ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ค่าความเค้นและความเครียดในแนวแกนที่วิเคราะห์ได้จากการใช้สปริงเอลิเมนต์

ตัวอย่างที่ 2.2 [2] จากตัวอย่าง 2.1 ชิ้นงานเดิมแต่กำหนดให้มีการยึดชิ้นงานไว้ที่ปลาย AD ดังรูปที่ 2.7 กำหนดให้มอดุลัสของเหล็กกล้ามีค่าเท่ากับ 200 GPa กำหนดให้ช่วง ABC มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 580 mm^2 ช่วง CD มีหน้าตัดเท่ากับ 190 mm^2 และมีแรงกระทำที่จุด B และ C เหมือนเดิม จงเขียน inp file เพื่อหาระยะยืดในแนวแกนของชิ้นงานและนำผลไปวิเคราะห์หาความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน



รูปที่ 2.7 ตัวอย่างปัญหาแบบ statically indeterminate

การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา

1. ปัญหาตัวอย่างนี้มีส่วนเหมือนกับตัวอย่างที่ 2.1 มีความแตกต่างตรงที่ปลาย A ยึดติดผนังทำให้ปัญหาข้อนี้เป็นปัญหา statically indeterminate กล่าวคือไม่สามารถใช้สมดุลสถิตหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ D ได้

2. เนื่องจากปัญหานี้มีรูปร่างทางเรขาคณิต หน้าตัด ความยาว และสมบัติวัสดุ เหมือนกับตัวอย่างที่ 2.1 สามารถสมมติให้ชิ้นงานแทนด้วยสปริงเอลิเมนต์ 3 ตัวที่สามารถยืดหดในแนวแกน และมีค่าความแข็งของสปริงเหมือนกับตัวอย่างที่ 2.1 เพียงแต่มีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่โหนด 4 ไม่ให้มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน xyz และไม่มีแรงกริยาที่จุดนี้แต่จะต้องหาแรงปฏิกิริยาแทน ทั้งนี้เนื่องจากโหนด 4 หรือจุด D มีการจับยึดมาแทนที่ ดังนั้นในปัญหานี้แค่เพียงดัดแปลงเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงจาก inp file เดิมให้ถูกต้อง ก็สามารถหาผลลัพธ์ได้ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตใหม่คือการบังคับองศาอิสระของการเคลื่อนตัวของโหนด 4 ให้เป็นศูนย์ในทุกแกน และเงื่อนไขของแรงใหม่คือการลบแรงกระทำที่โหนด 4 เดิมออกไปดังแสดงในตารางที่ 2.1 ดังนี้

ตารางที2.1 เงื่อนไขของแรงที่เปลี่ยนแปลง

เดิม	ใหม่
*BOUNDARY 1,1,3,0.0 2,2,3,0.0 3,2,3,0.0 4,2,3,0.0	*BOUNDARY 1,1,3,0.0 2,2,3,0.0 3,2,3,0.0 4,1,3,0.0
*CLOAD 2,1,300000 3,1,-180000 4,1,120000	*CLOAD 2,1,300000 3,1,-180000

ดังนั้น inp file ใหม่ คือ ex22.inp

```
*HEADING
ex22.inp stepped bar in axial loading ( statically indeterminate )
*NODE,NSET=nall
1,0.0,0.0,0.0
2,300.0,0.0,0.0
3,600.0,0.0,0.0
4,1000.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,2,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,3,4
*SPRING,ELSET=el1
386666.67
*SPRING,ELSET=el2
386666.67
*SPRING,ELSET=el3
95000
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
2,2,3,0.0
3,2,3,0.0
4,1,3,0.0
*CLOAD
2,1,300000
3,1,-180000
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
*END STEP
```

3. ส่ง ex22.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้ dat file คือ ex22.dat ดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  3.359079E-01  0.000000E+00  0.000000E+00
         3 -1.040462E-01  0.000000E+00  0.000000E+00
         4  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1 -1.298844E+05  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  3.000000E+05  0.000000E+00  0.000000E+00
         3 -1.800000E+05  0.000000E+00  0.000000E+00
         4  9.884393E+03  0.000000E+00  0.000000E+00
```

รูปที่ 2.8 dat file รายงานค่าการเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยาที่โหนด

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

4. อ่านผลลัพธ์จากใน dat file รู้ค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดดังนี้
-โหนดหมายเลข 1 หรือที่จุด A ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x y และ z จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ในทุกแกน
-โหนดหมายเลข 2 หรือที่จุด B มีค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกน x เท่ากับ 0.3359 mm ในทิศทางบวก
-โหนดหมายเลข 3 หรือที่จุด C มีค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกน x เท่ากับ -0.104 mm ในทิศทางลบ
-โหนดหมายเลข 4 หรือที่จุด D ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x y และ z จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ในทุกแกน

5. ศึกษาแรงจาก dat file ของแต่ละโหนดดังนี้
-โหนดหมายเลข 1 (ที่จุด A) ผนังมีแรงปฏิกิริยาที่ผนังกระทำต่อชิ้นงานเท่ากับ 129.88 kN ในทิศทางลบของแกน x
-โหนดหมายเลข 4 (ที่จุด D) มีแรงปฏิกิริยาจากผนังกระทำต่อชิ้นงานเท่ากับ 9.88 kN ในทิศทางบวกของแกน x
-ส่วนที่โหนดที่เหลือก็คือค่าของแรงกริยาที่ระบุไว้ตั้งแต่ต้น

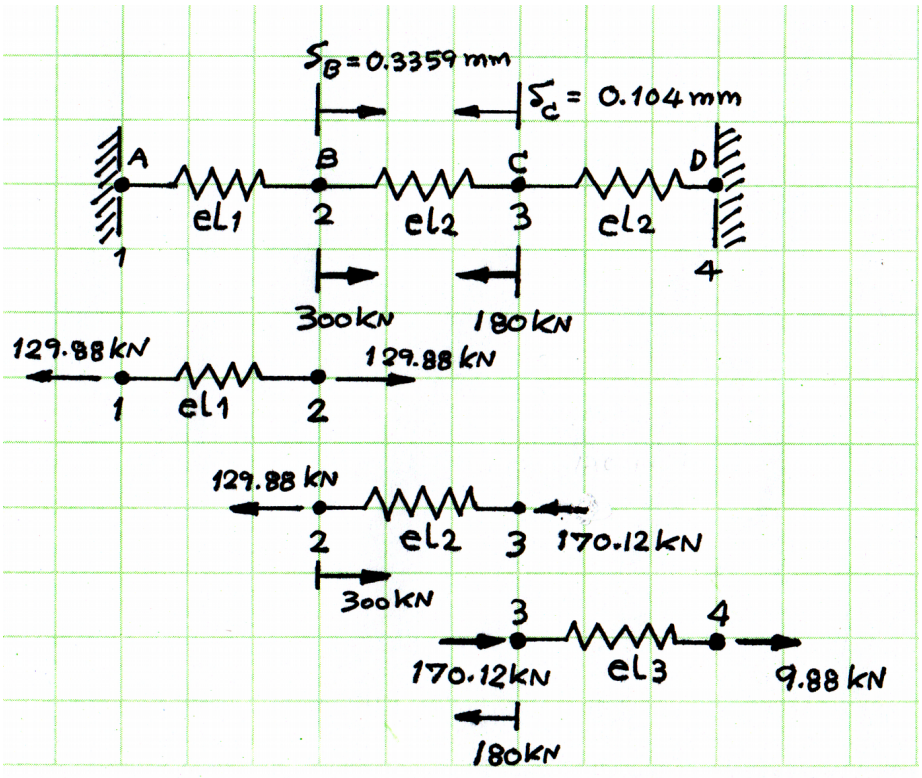
6. ใช้สมดุลหาแรงที่ส่งผ่านในแต่ละสปริงหรือในช่วง AB BC และ CD และหาระยะยืดหดของสปริงแต่ละตัวดังรูปที่ 2.9 พบว่า
แรงที่ส่งผ่านในสปริงตัวที่ 1 หรือในช่วง AB คือ 129.88 kN (แรงดึง)
แรงที่ส่งผ่านในสปริงตัวที่ 2 หรือในช่วง BC คือ -170.12 kN (แรงกด)
แรงที่ส่งผ่านในสปริงตัวที่ 2 หรือในช่วง CD คือ 9.88 kN (แรงดึง)
สปริงตัวที่ 1 หรือในช่วง AB มีระยะยืดออกเนื่องจากแรงดึงคือ 0.3359 mm

สปริงตัวที่ 2 หรือในช่วง AB มีระยะหดเข้าเนื่องจากแรงกดคือ 0.104+0.3359=-0.4399 mm
สปริงตัวที่ 3 หรือในช่วง AB มีระยะยืดออกเนื่องจากแรงดึงคือ 0.104 mm

7.ตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ที่ได้จากโปรแกรมเทียบกับวิธีการทางกลศาสตร์วัสดุ
สมมติให้แรงที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงเป็นแรงดึงคือ F_{DC} F_{CD} และ F_{BA} ตามลำดับ
สมมติให้ระยะยืดที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงคือ δ_{DC} δ_{CD} และ δ_{BA} ตามลำดับ
เมื่อ $\delta=\frac{FL}{AE}$ และ $\delta_{total}=\sum\frac{FL}{AE}=0$ เนื่องจากระยะยืดในแต่ละช่วงรวมกันทั้งหมดต้องเป็นศูนย์เพราะระยะรวมจาก A ถึง D ไม่เปลี่ยนแปลงเพราะถูกตรึงไว้แม้ช่วง AB, BC และ CD จะยืดหดไปอย่างไรก็ตาม เมื่อพื้นที่ (A) และช่วงยาว (L) ของ AB กับ BC เท่ากันรวมถึงทุกช่วงมีค่า E เท่ากันดังนั้น

$\delta_{DC}+\delta_{CB}+\delta_{BA}=0$ จะได้

$$F_{DC}\frac{(400\,mm)(580\,mm^2)}{(300\,mm)(190\,mm^2)}+F_{CB}+F_{BA}=0 \qquad \text{(a)}$$



รูปที่ 2.9 ผังแสดงแรงและระยะการเคลื่อนตัวที่โหนดต่างๆ

จากความสมดุลของแรงภายนอกและภายในระหว่างช่วงจะได้ว่า

$$F_{CB}+(300\ \ kN)=F_{BA} \qquad \text{(b)}$$

และ

$$F_{CB}+(180\ \ kN)=F_{DC} \qquad \text{(c)}$$

จากสมการ (a) (b) และ (c) แก้สมการหาแรงต่างๆ พร้อมกันจะได้

$F_{BA}=129.88\ \ kN$ เป็นแรงดึงในช่วง AB

$F_{CB}=-170.12\ \ kN$ เป็นแรงกดในช่วง BC

$F_{DC}=9.88\ \ kN$ เป็นแรงดึงในช่วง CD

และเมื่อนำไปหาระยะยืดหดของแต่ละช่วงจะได้

$$\delta_{DC}=\left(\frac{F\,L}{A\,E}\right)_{DC}=\frac{9.88\,kN\,(400\,mm)}{190\,mm^2\,(200\,GPa)}=\ 0.104\ \ mm$$

$$\delta_{CB}=\left(\frac{F\,L}{A\,E}\right)_{CB}=\frac{-170.12\,kN\,(300\,mm)}{580\,mm^2\,(200\,GPa)}=\ -0.44\ \ mm$$

$$\delta_{BA}=\left(\frac{F\,L}{A\,E}\right)_{BA}=\frac{129.88\,kN\,(300\,mm)}{580\,mm^2\,(200\,GPa)}=\ 0.336\ \ mm$$

ซึ่งสอดคล้องกับการคำนวณที่ได้จาก dat file แสดงให้เกิดความมั่นใจว่าการเขียน inp file ให้ผลมีความถูกต้องเชื่อถือได้

8.นำผลไปวิเคราะห์หาความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน

ในช่วง AB หรือที่สปริงเอลิเมนต์ตัวที่ 1 รับแรงดึงในแนวแกนเท่ากับ 129.88 kN บนพื้นที่หน้าตัด 580 mm^2 ดังนั้นความเค้นตั้งฉากในแนวแกนชิ้นงานในช่วง AB คือ

$$\sigma_{BA}=\frac{129.88\,kN}{580\,mm^2}=\ 223.93\ \ MPa$$ ซึ่งเป็นความเค้นดึง

และช่วง AB ซึ่งยาว 300 mm มีการยืดตัวออกเนื่องจากการดึงในแนวแกนเท่ากับ 0.336 mm ดังนั้นความเครียดตั้งฉากในแนวแกนของชิ้นงานในช่วง AB คือ

$$\epsilon_{BA} = \frac{0.336\,mm}{300\,mm} = 1.12\,x\,10^{-3}$$

ในช่วง BC หรือที่สปริงเอลิเมนต์ตัวที่ 2 รับแรงกดในแนวแกนเท่ากับ -170.12 kN บนพื้นที่หน้าตัด 580 mm^2 ดังนั้นความเค้นตั้งฉากในแนวแกนชิ้นงานในช่วง BC คือ

$$\sigma_{CB} = \frac{-170.12\,kN}{580\,mm^2} = -293.31\ \ MPa$$ ซึ่งเป็นความเค้นอัด

และช่วง BC ซึ่งยาว 300 mm มีการหดตัวเข้าในแนวแกนเนื่องจากการกดเท่ากับ -0.44 mm ดังนั้นความเครียดตั้งฉากในแนวแกนของชิ้นงานในช่วง BC คือ

$$\epsilon_{CB} = \frac{-0.44\,mm}{300\,mm} = -1.467\,x\,10^{-3}$$

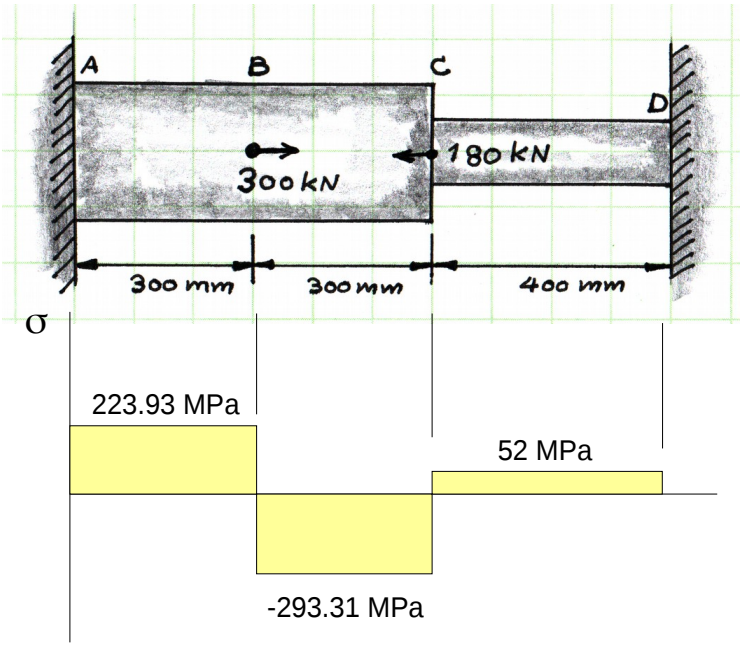
ในช่วง CD หรือที่สปริงเอลิเมนต์ตัวที่ 3 รับแรงดึงในแนวแกนเท่ากับ 9.88 kN บนพื้นที่หน้าตัด 190 mm^2 ดังนั้นความเค้นตั้งฉากในแนวแกนชิ้นงานในช่วง CD คือ

$$\sigma_{DC} = \frac{9.88\,kN}{190\,mm^2} = 52\ \ MPa$$ ซึ่งเป็นความเค้นดึง

และช่วง CD ซึ่งยาว 400 mm มีการยืดตัวออกในแนวแกนเนื่องจากการดึงเท่ากับ 0.104 mm ดังนั้นความเครียดตั้งฉากในแนวแกนของชิ้นงานในช่วง CD คือ

$$\epsilon_{DC} = \frac{0.104\,mm}{400\,mm} = 0.26\,x\,10^{-3}$$

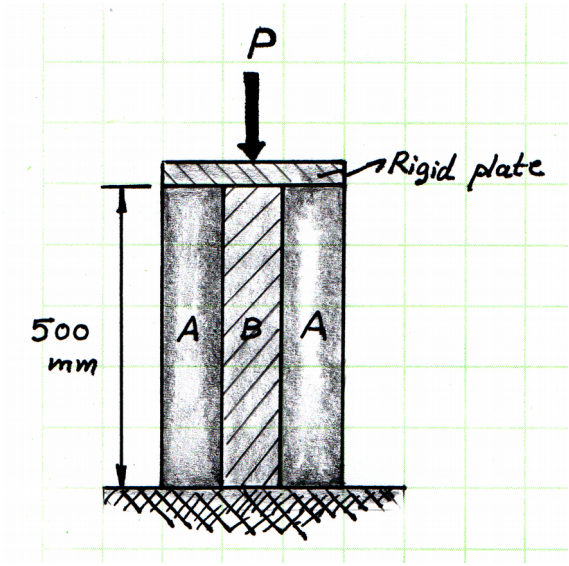
ซึ่งพบว่าชิ้นงานมีการดึงเกิดขึ้นในสองช่วงคือ AB และ CD ในขณะที่ช่วง BC เกิดการกดเหมือนกับตัวอย่างที่ 2.1 และพบว่าความเค้นและความเครียดตั้งฉากสูงสุดเกิดขึ้นในช่วง BC จากการอัดชิ้นงานในแนวมีค่าความเค้นอัดเท่ากับ 293.31 MPa ดังแสดงในรูปที่ 2.10 และมีความเครียดในช่วง BC เท่ากับ -0.001467



รูปที่ 2.10 ค่าความเค้นในแนวแกนที่เกิดขึ้น

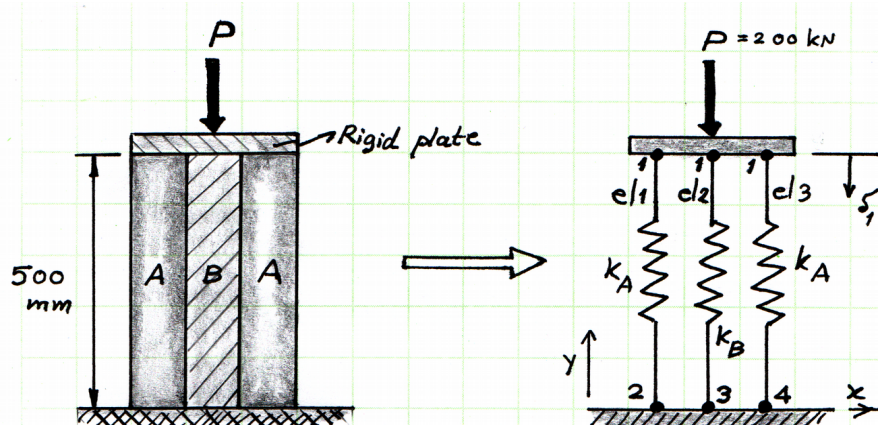
เมื่อเปรียบเทียบกันระหว่างสองตัวอย่างข้างต้นพบว่าค่าความเค้นที่เกิด CD จะเกิดการเปลี่ยนแปลงมากที่สุด ดังจะพบว่ามีการเปลี่ยนแปลงความเค้นเป็น 631.57/52= 12.1 เท่าตัว ในขณะที่ช่วงอื่น AB และ BC มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ประมาณ 2-3 เท่า

<u>ตัวอย่างที่</u> 2.3 [2] รูปที่ 2.11 ชิ้นงานประกอบจากวัสดุสองชนิด ชั้นในทำจากแท่งทองเหลือง (Brass, B) มีค่ามอดุลัสเท่ากับ 105 GPa พื้นที่หน้าตัดแท่งทองเหลืองเท่ากับ 500 mm^2 และชั้นนอกทำจากแท่งอลูมินัม (Aluminum, A) มีค่ามอดุลัสเท่ากับ 72 Pa พื้นที่หน้าตัดแท่งอลูมินัมเท่ากับ 500 mm^2 เมื่อชิ้นงานรับแรงกดในแนวแกน 200 kN ผ่านแผ่นวัสดุแข็งเกร็ง (rigid plate) จงเขียน inp file เพื่อหาระยะยืดในแนวแกนของชิ้นงานและนำผลไปวิเคราะห์หาความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน



รูปที่ 2.11 ตัวอย่างชิ้นงานทำจากวัสดุต่างกันรับแรงในแนวแกน

<u>การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา</u>



รูปที่ 2.12 แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์

1.จากโจทย์ปัญหา สามารถแยกส่วนชิ้นงานออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกคือส่วนนอกประกอบจากอลูมินัมซ้ายขวาประกบกับส่วนในที่ทำจากทองเหลือง ดังนั้นสามารถแยกส่วนสปริงออกเป็นสามเอลิเมนต์ตามส่วนของวัสดุ ดังแสดงการจำลองต้นแบบให้มีจำนวน 3 สปริงเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 2.12 ทำการเริ่มต้นเขียนไฟล์โดยการกำหนดหัวข้อและโหนด (heading and node definition) ให้ชื่อว่า composite bar และมี

หมายเลขโหนดและคู่ลำดับดังนี้
-กำหนดให้โหนดหมายเลข 1 มีอยู่จุดเดียวคือที่ (0.0,500.0,0.0) เป็นจุดร่วมของทุกสปริงที่ rigid plate ให้โหนดหมายเลข 2, 3 และ 4 อยู่ที่จุดเดียวกันคือที่ (0.0,0.0,0.0) และตั้งชื่อโหนดชุดนี้คือ NSET=nall
ส่วนนี้สามารถเขียน inp file ได้ดังนี้

```
*HEADING
Composite bar ex23.inp
*NODE,NSET=nall
1,0.0,500.0,0.0
2,0.0,0.0,0.0
3,0.0,0.0,0.0
4,0.0,0.0,0.0
```

2.กำหนดเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ (element connectivity and element type) และกำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ที่ใช้คือ SPRINGA โดยกำหนดให้
ช่วงอลูมินัมตัวนอกด้านซ้ายคือสปริงตัวที่ 1 มีชื่อว่า el1 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1 และ 2
ช่วงทองเหลืองกลางคือสปริงตัวที่ 2 มีชื่อว่า el2 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1 และ 3
และช่วงอลูมินัมด้านขวาคือสปริงตัวที่ 3 มีชื่อว่า el3 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1 และ 4
ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดเอลิเมนต์คือ

```
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,1,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,1,4
```

3. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section) โดยคำนวณหาค่าความแข็งของสปริงแต่ละเอลิเมนต์พร้อมกำหนดค่าลงใน inp file
กำหนดให้สปริงตัวที่ 1 และ 3 คือส่วนอลูมินัมหรือ el1 และ el3 มีค่าความแข็งสปริงเท่ากันคือ

$$k_A=\left(\frac{A\,E}{L}\right)_A=\frac{500\,mm^2\left(70\,x\,10^3\,N/mm^2\right)}{500\,mm}=70{,}000\quad N/mm$$

สำหรับสปริงตัวที่ 2 คือส่วนทองเหลืองหรือ el2 มีค่าความแข็งสปริงเท่ากับ

$$k_B=\left(\frac{A\,E}{L}\right)_{CD}=\frac{500\,mm^2\left(105\,x\,10^3\,N/mm^2\right)}{500\,mm}=105{,}000\quad N/mm$$

ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าความแข็งของสปริงแต่ละตัวคือ

```
*SPRING,ELSET=el1
70E+03
*SPRING,ELSET=el2
105E+03
*SPRING,ELSET=el3
70E+03
```

4. กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

5. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)
กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า
-โหนดหมายเลข 2, 3 และ 4 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x, y และ z เนื่องจากถูกจับยึดไว้ไม่ให้เคลื่อนที่อิสระ
-ส่วนโหนดหมายเลข 1 กำหนดให้เคลื่อนที่ได้อิสระเฉพาะในแนวแกน y
สามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขตได้ดังนี้

```
*BOUNDARY
1,1,1,0.0
1,3,3,0.0
2,1,3,0.0
3,1,3,0.0
4,1,3,0.0
```

6.กำหนดภาระแรงโดยพิจารณาจากแรงกริยา จากโจทย์ที่มีแรงกระทำเฉพาะที่โหนด 1 เท่ากับ 200 kN ในทิศลบ
สามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดแรงกระทำได้ดังนี้

```
*CLOAD
1,2,-200000
```

7. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)

จากโจทย์นี้กำหนดให้รายงานผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
```

ทำนองเดียวกันต้องการไฟล์เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
```

8. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง *END STEP

9.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-8 เป็น inp file คือ ex23.inp

```
*HEADING
ex23.inp Composite bar
*NODE,NSET=nall
1,0.0,500.0,0.0
2,0.0,0.0,0.0
3,0.0,0.0,0.0
4,0.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,1,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,1,4
*SPRING,ELSET=el1
70E+03
*SPRING,ELSET=el2
105E+03
*SPRING,ELSET=el3
70E+03
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,1,0.0
1,3,3,0.0
2,1,3,0.0
3,1,3,0.0
4,1,3,0.0
*CLOAD
1,2,-200000
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
*END STEP
```

10. ส่ง ex23.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้ ex23.dat ดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  0.000000E+00 -8.163265E-01  0.000000E+00
         2  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         3  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         4  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00

forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  0.000000E+00 -2.000000E+05  0.000000E+00
         2  0.000000E+00  5.714286E+04  0.000000E+00
         3  0.000000E+00  8.571429E+04  0.000000E+00
         4  0.000000E+00  5.714286E+04  0.000000E+00
```

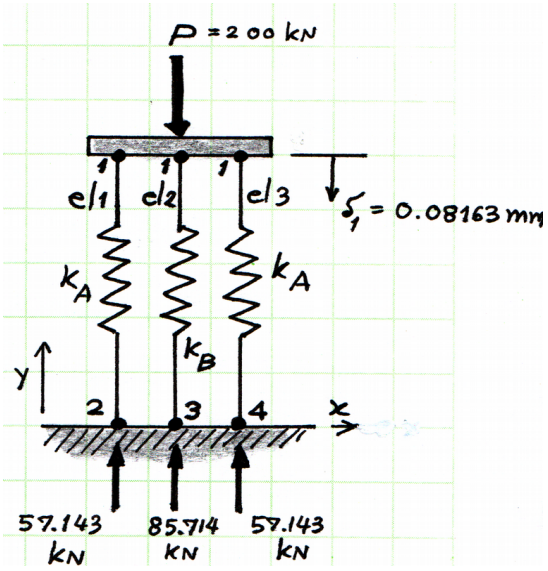
รูปที่ 2.13 dat file

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

11. อ่านผลลัพธ์จากใน dat file ทำให้ทราบค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดดังนี้
-โหนดหมายเลข 1 มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน y ในทิศทางลบคือ -0.8163 mm
-โหนดหมายเลข 2, 3 และ 4 มีค่าเท่ากับศูนย์

12. ศึกษาวิเคราะห์สมดุลแรงจากไฟล์ผลลัพธ์ของแต่ละโหนดดังนี้
-โหนดหมายเลข 1 รับแรงกริยาเท่ากับ 200 kN ในทิศทางลบของแกน y
-แรงปฏิกิริยาของแต่ละสปริงเกิดขึ้นที่โหนด 2, 3 และ 4
-แรงกดที่กระทำผ่านสปริงตัวที่ 1 หรือผ่านชิ้นอลูมินัมส่วนนอกด้านขวาคือ 57.143 kN
-แรงกดที่กระทำผ่านสปริงตัวที่ 2 หรือผ่านชิ้นทองเหลืองตรงกลางคือ 85.714 kN
-แรงกดที่กระทำผ่านสปริงตัวที่ 3 หรือผ่านชิ้นอลูมินัมส่วนนอกด้านซ้ายคือ 57.143 kN

จากรูปที่ 2.14 เมื่อรวมแรงตามหลักสมดุลพบว่าแรงกริยาเท่ากับผลรวมของแรงปฏิกิริยา คือ 200 kN = (57.143 + 85.714 + 57.143) kN และสปริงทั้งสามตัวถูกกดให้เคลื่อนตัวลงมาเท่ากับ 0.8163 mm ซึ่งเป็นผลจากแรงกริยา 200 kN



รูปที่ 2.14 ผังแสดงแรงและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้น

13.ศึกษาวิเคราะห์ความสอดคล้องของแรงกับการเคลื่อนตัวที่ได้จากหลักสมดุลสถิตยศาสตร์ นำมาเปรียบกับผลคำนวณจากโปรแกรมว่ามีความสอดคล้องกันหรือไม่

จากโจทย์ข้อนี้แรงกระทำภายในเนื้ออลูมินัมกับเนื้อทองเหลืองรวมกันต้องเท่ากับแรงกริยา 200 kN ไม่สามารถคำนวณหาแรงภายในแยกตามหน้าตัดของเนื้อวัสดุที่แตกต่างกันได้ จึงจัดให้ปัญหานี้เป็นแบบ statically indeterminate ในการตรวจสอบความถูกต้องของผลการคำนวณจากโปรแกรม สามารถทำได้โดยลองหาผลลัพธ์จากหลักการทางกลศาสตร์วัสดุมาเปรียบเทียบกัน โดยใช้เงื่อนไขที่ว่าภายใต้แรงกด 200 kN วัสดุทั้งสามส่วนจะต้องถูกกดลงมาเท่ากัน และแรงภายในหน้าตัดที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุทั้งสองชนิดเมื่อรวมกันต้องมีค่าเท่ากับ 200 kN

$$2(P_A)+P_B= \ 200 \ \ kN \qquad \text{(a)}$$

เมื่อ P_A และ P_B คือแรงกระทำบนหน้าตัดชิ้นอลูมินัมและทองเหลืองตามลำดับ

เมื่อระยะยุบของแต่ละชิ้นเท่ากัน จะได้ $\delta_A=\delta_B$ ดังนั้น

$$\frac{P_A l_A}{A_A E_A}=\frac{P_B l_B}{A_B E_B}$$

ทราบว่า พื้นที่หน้าตัดและความยาวของแท่งทองเหลืองเท่ากับของแท่งอลูมินัมดังนั้น

$$P_B = \frac{P_A E_B}{E_A} = 1.5\, P_A$$

นำไปแทนในสมการ (a) จะได้ $3.5 P_A = 200\ kN$ ได้

$P_A = 57.143\ kN$ และ $P_B = 85.714\ kN$

นำแรงที่ได้ไปคำนวณระยะยุบจะได้ $\delta_A = \frac{P_A l_A}{A_A E_A} = \frac{57.143\, kN (500\, mm)}{500\, mm^2 (70{,}000\, N/mm^2)} = 0.8163\ mm$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการลองคำนวณด้วยวิธีทางกลศาสตร์วัสดุนั้นมีความสอดคล้องกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งจาก dat file ก็คือ ระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน y ของโหนดที่ 1

14. นำผลที่ได้ไปวิเคราะห์หาความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน จากแรงและระยะยุบที่ได้จากข้อ 13 นำไปคำนวณหาความเค้นและความเครียดได้ดังนี้

ความเค้นอัดในชิ้นส่วนอลูมินัมคือ

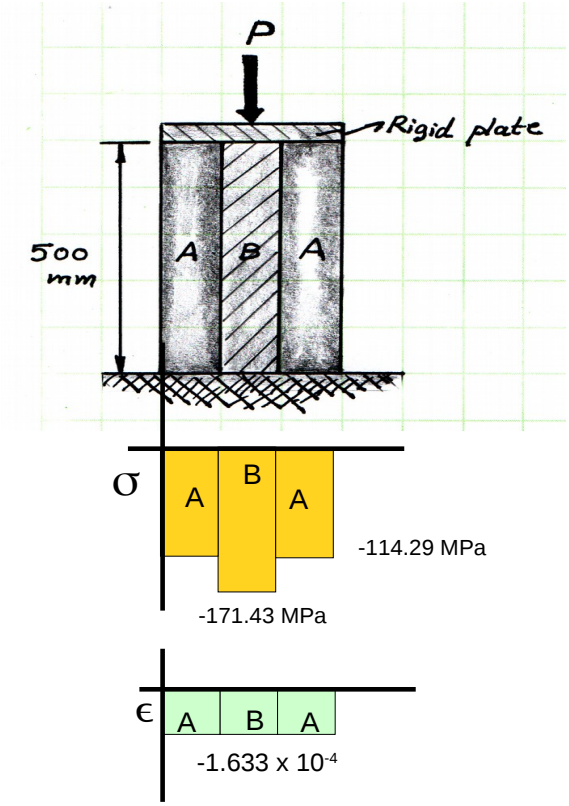
$$\sigma_A = \frac{P_A}{A_A} = \frac{-57.143\, kN}{500\, mm^2} = -114.29\ MPa$$

ความเค้นอัดในชิ้นส่วนทองเหลืองคือ

$$\sigma_B = \frac{P_B}{A_B} = \frac{-85.714\, kN}{500\, mm^2} = -171.43\ MPa$$

ความเครียดของชิ้นส่วนทองเหลืองและอลูมินัมเท่ากันคือ

$\epsilon_A = \epsilon_B = \frac{\delta_A}{l_A} = \frac{-0.8163\, mm}{500\, mm} = -0.0016326$ ดังแสดงแผนภาพความเค้นและความเครียดบนหน้าตัดในรูปที่ 2.15

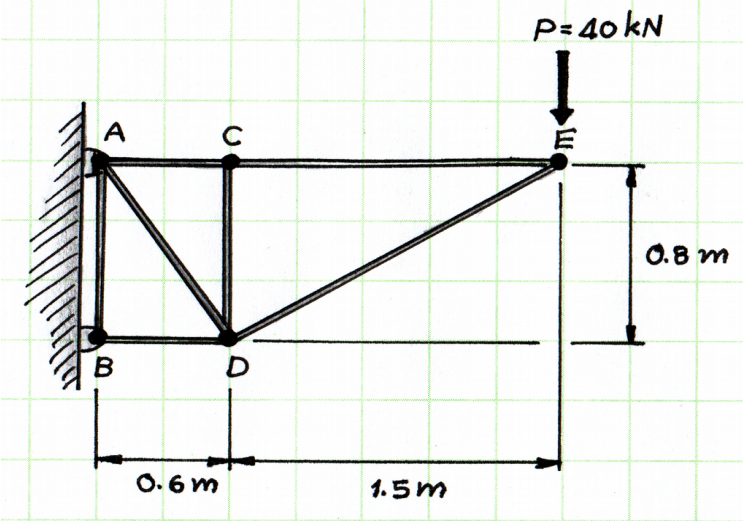


รูปที่ 2.15 ค่าความเค้น σ และความเครียด ϵ ในแนวแกนที่เกิดขึ้น

2.3 การใช้งานสปริงเอลิเมนต์แบบเชิงเส้นในแบบ 2-D

จากหัวข้อ 2.1 เป็นตัวอย่างการใช้ประยุกต์ใช้สปริงเอลิเมนต์กับปัญหาต้นแบบ 1-D และได้แสดงการเขียน inp file เพื่อหาผลลัพธ์ด้วยโปรแกรม CalculiX ในหัวข้อนี้นำเสนอตัวอย่างปัญหาต้นแบบ 2-D และการเขียน inp file และประมวลผลด้วยโปรแกรม CalculiX โดยสปริงเอลิเมนต์ที่นำมาใช้งานในแบบ 2-D นั้นสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับโครงสร้างข้อหมุนเหวี่ยงบนระนาบ (plane truss structure) ในหัวข้อนี้ จะนำเสนอการเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหาจากโจทย์ตัวอย่างรวมถึงการศึกษาความถูกต้องของผลลัพธ์และจะมีการนำข้อมูลผลลัพธ์ไปศึกษาความเค้นความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนโครงสร้างอีกด้วย

ตัวอย่างที่ 2.4 โครงสร้างข้อหมุนเหวี่ยงบนระนาบ (plane truss structure) ดังแสดงในรูปที่ 2.16 ทำจากแท่งอลูมินัม มีค่ามอดุลัสเท่ากับ 73 GPa กำหนดพื้นที่หน้าตัดของชิ้น AB AC AD CE เท่ากันคือ 500 mm^2 พื้นที่หน้าตัดของชิ้น CD BD และ DE เท่ากันคือ 1000 mm^2 จงเขียน inp file เพื่อหาค่าระยะการเคลื่อนตัวที่จุด E เมื่อมีแรงกระทำที่จุด E เท่ากับ 40 kN พื้นที่หน้าตัดของชิ้น



รูปที่ 2.16 โครงสร้างข้อหมุนเหวี่ยงในระนาบ

การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา

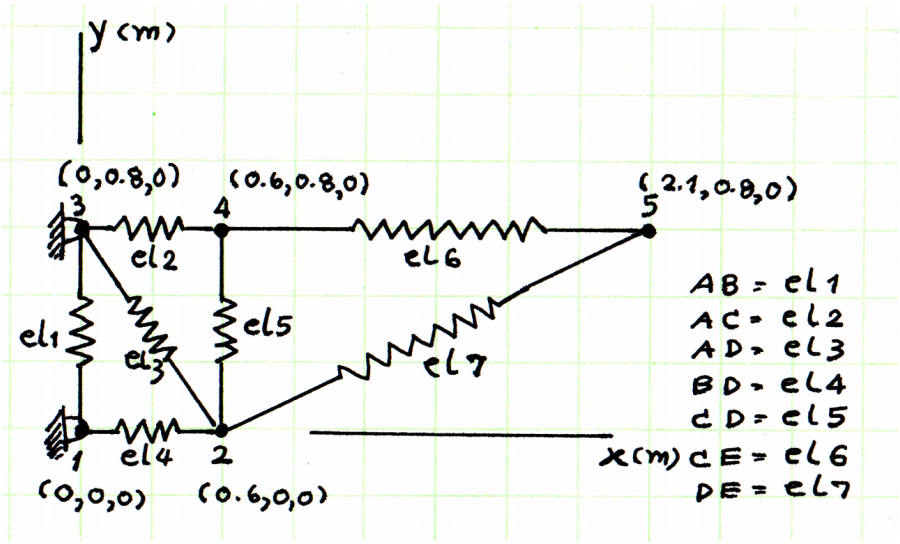
1.โครงสร้างนี้สามารถแยกส่วนชิ้นงานออกเป็น 7 ชิ้นส่วน แต่ละชิ้นส่วนจำลองได้ด้วยสปริงเอลิเมนต์ 7 เอลิเมนต์ ดังแสดงการจำลองต้นแบบในรูปที่ 2.12 ทำการเริ่มต้นเขียนไฟล์โดยการกำหนดหัวข้อและโหนด (heading and node definition) ให้ชื่อว่า plane truss structure และมีหมายเลขโหนดและคู่ลำดับตามตารางที่ 2.2 ดังนี้

ตารางที2.2 เงื่อนไขของแรงที่เปลี่ยนแปลง

โหนดหมายเลข	ตำแหน่ง	พิกัด xyz
1	B	(0,0,0)
2	D	(0.6,0,0)
3	A	(0,0.8,0)
4	C	(0.6,0.8,0)
5	E	(2.1,0.8,0)

ตั้งชื่อกลุ่มโหนดชุดนี้คือ NSET=nall
ส่วนนี้สามารถเขียน inp file ได้ดังนี้

```
*HEADING
ex24.inp plane truss
structure
*NODE,NSET=nall
1,0.0,0.0,0.0
2,0.6,0.0,0.0
3,0.0,0.8,0.0
4,0.6,0.8,0.0
5,2.1,0.8,0.0
```



รูปที่ 2.17 แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์ของโครงสร้างข้อหมุนเหวี่ยง

2.กำหนดเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ (element connectivity and element type) และกำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ที่ใช้คือ SPRINGA โดยกำหนดให้
สปริงตัวที่ 1 มีชื่อว่า el1 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1 และ 3 แทนชิ้นส่วน AB
สปริงตัวที่ 2 มีชื่อว่า el2 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 3 และ 4 แทนชิ้นส่วน AC
สปริงตัวที่ 3 มีชื่อว่า el3 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 3 และ 2 แทนชิ้นส่วน AD
สปริงตัวที่ 4 มีชื่อว่า el4 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1 และ 2 แทนชิ้นส่วน BD
สปริงตัวที่ 5 มีชื่อว่า el5 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 2 และ 4 แทนชิ้นส่วน CD
สปริงตัวที่ 6 มีชื่อว่า el6 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 4 และ 5 แทนชิ้นส่วน CE
สปริงตัวที่ 7 มีชื่อว่า el7 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 2 และ 5 แทนชิ้นส่วน DE
ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดเอลิเมนต์คือ

```
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,3,4
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,3,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el4
4,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el5
5,2,4
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el6
6,4,5
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el7
7,2,5
```

3. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section) โดยคำนวณหาค่าความแข็งของสปริงแต่ละเอลิเมนต์พร้อมกำหนดค่าลงใน inp file ดังแสดงในตารางที่ 2.3

ตารางที่2.3 ค่าความแข็งสปริงของแต่ละเอลิเมนต์หรือแต่ละชิ้นส่วน

ชิ้นงาน	L (m)	A (mm^2)	E (GPa)	Element No.	k=AE/L (kN/m)
AB	0.8	500	73	1	45625
AC	0.6	500	73	2	60833.33
AD	1.0	500	73	3	36500
BD	0.6	1000	73	4	121666.67
CD	0.8	1000	73	5	91250
CE	1.5	500	73	6	24333.33
DE	1.7	1000	73	7	42941.18

ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าความแข็งของสปริงแต่ละตัวคือ

```
*SPRING,ELSET=el1
45625
*SPRING,ELSET=el2
60833.33
*SPRING,ELSET=el3
36500
*SPRING,ELSET=el4
121666.67
*SPRING,ELSET=el5
91250
*SPRING,ELSET=el6
24333.33
*SPRING,ELSET=el7
42941.18
```

4. กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

5. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)
กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า
-โหนดหมายเลข 1 และ 3 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x, y และ z เนื่องจากถูกจับยึดไว้ไม่ให้เคลื่อนที่อิสระ
-ส่วนโหนดอื่นกำหนดให้เคลื่อนที่ได้อิสระเฉพาะในระนาบ xy
ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

```
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
3,1,3,0.0
2,3,3,0.0
4,3,3,0.0
5,3,3,0.0
```

6.กำหนดภาระแรงโดยพิจารณาจากแรงกริยา จากโจทย์ที่มีแรงกระทำเฉพาะที่โหนด 5 เท่ากับ 40 kN

ในทิศลบ
สามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดแรงกระทำได้ดังนี้

```
*CLOAD
5,2,-40
```

7. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)

จากโจทย์นี้กำหนดให้รายงานผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
```

ทำนองเดียวกันต้องการแสดงผลทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
```

8. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง `*END STEP`

9.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-8 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ex24.inp

```
*HEADING
ex24.inp plane truss structure
*NODE,NSET=nall
1,0.0,0.0,0.0
2,0.6,0.0,0.0
3,0.0,0.8,0.0
4,0.6,0.8,0.0
5,2.1,0.8,0.0
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,3,4
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,3,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el4
4,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el5
5,2,4
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el6
6,4,5
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el7
7,2,5
*SPRING,ELSET=el1
45625
*SPRING,ELSET=el2
60833.33
```

```
*SPRING,ELSET=el3
36500
*SPRING,ELSET=el4
121666.67
*SPRING,ELSET=el5
91250
*SPRING,ELSET=el6
24333.33
*SPRING,ELSET=el7
42941.18
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
3,1,3,0.0
2,3,3,0.0
4,3,3,0.0
5,3,3,0.0
*CLOAD
5,2,-40
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
*END STEP
```

10. ส่ง ex24.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้ ex24.dat ดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         2 -8.630137E-04 -2.359589E-03  0.000000E+00
         3  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         4  1.232877E-03 -2.359589E-03  0.000000E+00
         5  4.315069E-03 -1.627483E-02  0.000000E+00

forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  1.044339E+02 -4.112933E-01  0.000000E+00
         2 -1.553367E+00 -1.885850E+00  0.000000E+00
         3 -1.052453E+02  4.042323E+01  0.000000E+00
         4 -1.282305E+00  6.638911E-01  0.000000E+00
         5  3.647055E+00 -3.878998E+01  0.000000E+00
```

รูปที่ 2.18 dat file แสดงค่าการเคลื่อนตัวและแรงที่โหนด

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

11. อ่านผลลัพธ์จากใน dat file ทำให้ทราบค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนด 5 ซึ่งก็คือการเคลื่อนตัวที่จุด E มีค่าเท่ากับ -16.275 mm

12.ศึกษาวิเคราะห์ความสอดคล้องของแรงกับการเคลื่อนตัวที่ได้จากหลักทฤษฎีนำมาเปรียบกับผลคำนวณจากโปรแกรมว่ามีความสอดคล้องกันหรือไม่ดังนี้

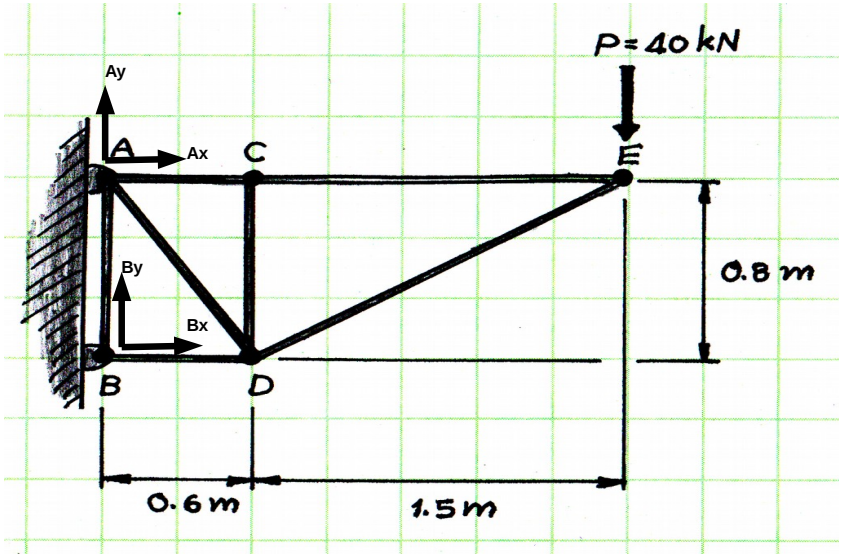
-เปรียบเทียบค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดยึดโดยเปรียบว่าผลจากการคำนวณด้วยหลักสมดุลสถิตยศาสตร์กับผลคำนวณที่ได้จากโปรแกรม

สมมติให้ Ax Ay Bx By คือแรงปฏิกิริยาที่จุดจับยึดโครงสร้าง จากหลักสมดุลแรงจะได้ว่า

$\sum M_B = 0$ จะได้ $A_x(0.8\,m) + 40\,kN(2.1\,m) = 0$

$A_x = -105\ kN$ และจาก $\sum F_x = 0$ จะได้ $A_x + B_x = 0\ kN$

ดังนั้น $B_x = 105\ kN$ จาก $\sum F_y = 0$ จะได้ $A_y + B_y = 40\ kN$ เนื่องจากมีเฉพาะแรงในแนวแกนนอนเท่านั้นที่ส่งผ่านชิ้นงาน BD ไปที่จุด B จากการรวมแรงที่จุด B เท่ากับศูนย์ ทำให้ By = 0 ดังนั้น Ay = 40 kN เปรียบเทียบผลการคำนวณแรงปฏิกิริยาจากหลักทฤษฎีกับโปรแกรม CalculiX ได้ดังตารางที่ 2.4

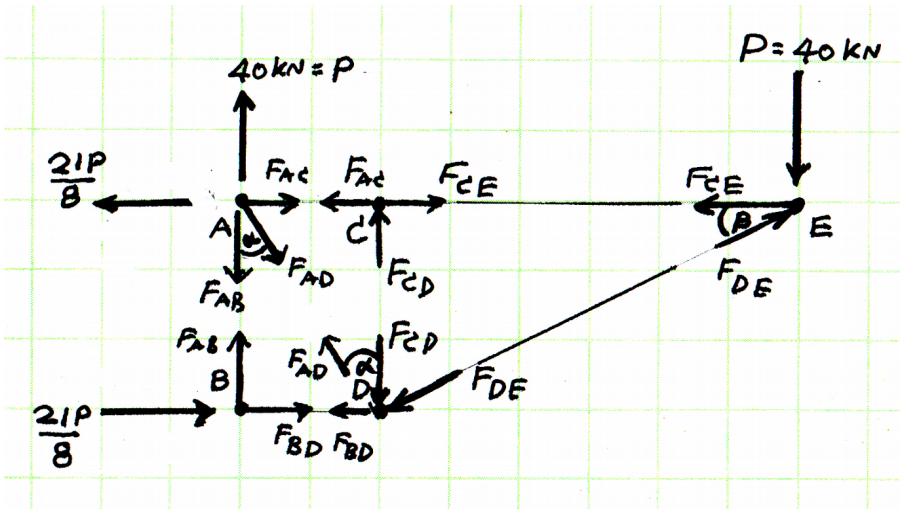


รูปที่ 2.19 แรงกริยาและปฏิกิริยาของโครงสร้าง

ตารางที่2.4 เปรียบเทียบแรงปฏิกิริยา

แรงปฏิกิริยา	ผลคำนวณจากทฤษฎี	ผลคำนวณจาก CalculiX
Ax	-105 kN	-105.245 kN
Ay	40 kN	40.423 kN
Bx	105 kN	104.434 kN
By	0 kN	-0.411kN

จากตารางข้างต้นเมื่อเปรียบเทียบค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดยึด พบว่าค่าแรงปฏิกิริยาที่คำนวณมีความใกล้เคียงกันมาก จุดที่น่าสังเกตคือค่าแรง By ที่ได้จากโปรแกรมยังมีความคลาดเคลื่อนอยู่บ้างเล็กน้อย



รูปที่ 2.20 ผังแรงของแต่ละชิ้นส่วนของโครงสร้าง

-เปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวของโครงสร้างที่จุด E เนื่องจากโครงสร้างยึดด้วยสลักไร้แรงเสียดทานดังนั้นแรงที่ส่งผ่านในแต่ละชิ้นส่วนคือแรงในแนวแกนชิ้นงานดังรูปที่ 2.20 ใช้ทฤษฎี Castigliano's หาค่าเคลื่อนตัวที่จุด E โดยสมมติให้แรง P กระทำที่จุด P ทำการหาพลังงานความเครียดของโครงสร้างจากแรงที่เกิดขึ้นในแต่ละชิ้นส่วน หาแรงในแต่ละชิ้นงานจากสมดุลแรงจะได้ แรงและพลังงานความเครียดในแต่ละชิ้นส่วนดังตารางที่ 2.5 ต่อไปนี้

ตารางที2.5 พลังงานความเครียดของแต่ละชิ้นส่วน

ชิ้นส่วน	ขนาดแรง (F_i)	ความยาว(L_i,m)	พื้นที่หน้าตัด (A_i,m^2)	พลังงาน($Ui=F^2L/2AE$)
AB	0	0.8	$500x10^{-6}$	0
AC	+15P/8	0.6	$500x10^{-6}$	$2109.4\ P^2/E$
AD	+5P/4	1.0	$500x10^{-6}$	$1562.5\ P^2/E$
BD	-21P/8	0.6	$1000x10^{-6}$	$2067.2\ P^2/E$
CD	0	0.8	$1000x10^{-6}$	0
CE	+15P/8	1.5	$500x10^{-6}$	$5273.4\ P^2/E$
DE	-17P/8	1.7	$1000x10^{-6}$	$3838.3\ P^2/E$
			รวมพลังงานเท่ากับ	$14850.8\ P^2/E$

พลังงานความเครียดรวมของทั้งโครงสร้างเท่ากับผลรวมของพลังงานความเครียด (U_i) ของแต่ละชิ้นส่วนดังนั้นจะได้พลังงานคามเครียดรวมทั้งหมดเท่ากับ

$$U=\sum U_i=14850.8\left(\frac{P^2}{E}\right)$$

หาระยะเคลื่อนตัวของจุด E ในทิศลงโดยใช้ทฤษฎี Castigliano's

$$\delta_E = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{(14850.8)2(40\,x\,10^3)}{73\,x\,10^9} = \ 0.016275 \ \ m$$

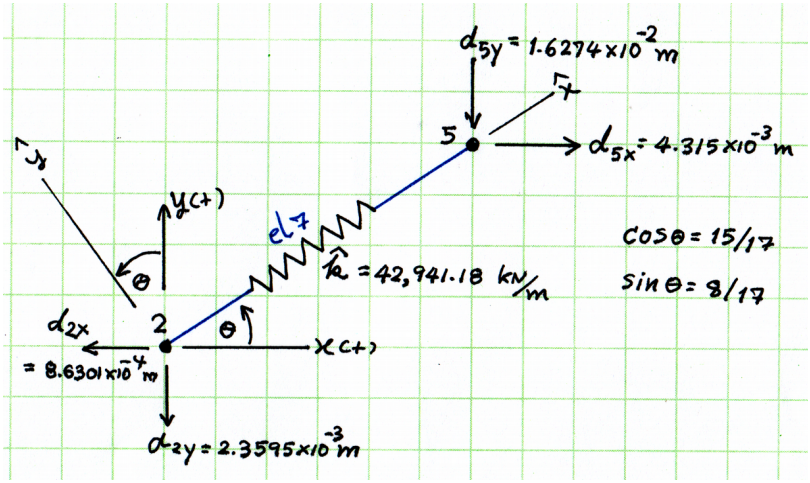
ซึ่งค่านี้มีความใกล้เคียงกับค่าระยะเคลื่อนตัวในทิศทาง y ของโหนดหมายเลข 5 ดังแสดงในรูปที่ 2.18

เมื่อทำการเปรียบเทียบแรงปฏิกิริยาและระยะเคลื่อนตัวที่คำนวณได้จากทฤษฎีและจากที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม CalculiX พบว่าค่าต่างๆ มีความใกล้เคียงกันมาก ดังนั้นสามารถกล่าวได้ว่า inp file ที่ได้สร้างขึ้นมาเพื่อจำลองการคำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นมีความถูกต้องเชื่อถือได้

13. นำผลที่ได้ไปวิเคราะห์หาความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน

เนื่องจากโปรแกรมไม่ได้รองรับการคำนวณผลลัพธ์ความเค้นในสปริงเอลิเมนต์โดยตรง ความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้นงานหรือแต่ละเอลิเมนต์สามารถหาได้จากระยะเคลื่อนตัวที่โหนดต่างๆ เมื่อรู้ค่าสปริงหรือค่าความแข็งตึงของชิ้นงานซึ่งค่าระยะเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดสามารถหาได้จาก dat file ดังแสดงในรูปที่ 2.18 และความเค้นในชิ้นงานสามารถคำนวณได้ดังนี้

-คำนวณความเค้นของชิ้นส่วน DE (เอลิเมนต์ที่ 7 หรือ el7) จากหลักการแปลงแรงในระบบพิกัดเฉพาะที่ (local coordinate) แรงในระบบพิกัดรวม (global coordinate) [1] พิจารณาเอลิเมนต์ที่ 7 ค่าระยะเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดบนเอลิเมนต์นี้จาก dat file ที่ได้ดังแสดงในรูปที่ 2.21



รูปที่ 2.21 ค่าการเคลื่อนตัวและแรงในสปริงเอลิเมนต์หมายเลข 7

จากที่ทราบว่า [1]

$$\{\hat{f}\}=[\hat{k}][T]\{d\}$$

เมื่อ

$\{\hat{f}\}$ คือ nodal force ของเอลิเมนต์ในระบบพิกัดเฉพาะที่ $(\hat{x}\,\hat{y})$

$\{d\}$ คือ displacement vector ของโหนดในระบบพิกัดรวม $(x\,y)$

$\{\hat{k}\}$ คือ stiffness matrix ของเอลิเมนต์ในระบบพิกัดเฉพาะที่ $(\hat{x}\,\hat{y})$

$[T]$ คือ transformation matrix

เมื่อประยุกต์ใช้กับเอลิเมนต์ el7 ตามรูปที่ 2.21 จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix}\hat{f}_{2x}\\ \hat{f}_{2y}\\ \hat{f}_{5x}\\ \hat{f}_{5y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{k} & 0 & -\hat{k} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\hat{k} & 0 & \hat{k} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_{2x}\\ d_{2y}\\ d_{5x}\\ d_{5y}\end{Bmatrix}$$

เมื่อ $\sin\theta=\frac{8}{17}$ $\cos\theta=\frac{15}{17}$ และ $\hat{k}=42941.18\ \ kN/m$

จากรูป 2.21 ทราบว่า

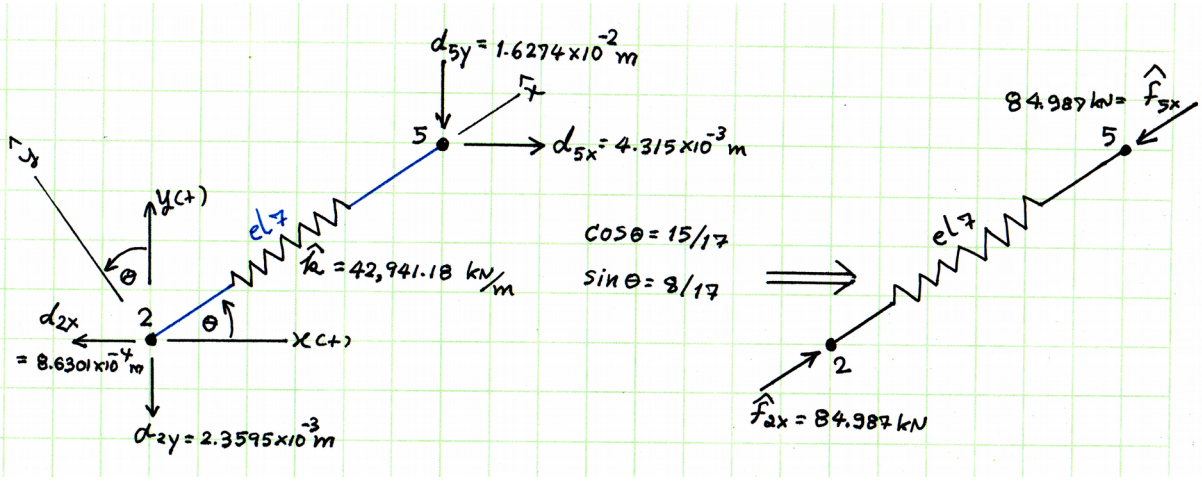
$$\begin{Bmatrix}d_{2x}\\ d_{2y}\\ d_{5x}\\ d_{5y}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0.00086301\\ -0.0023595\\ 0.004315\\ -0.016274\end{Bmatrix}\ \ m$$

สามารถหาค่าแรงในเอลิเมนต์คือ

$$\begin{Bmatrix}\hat{f}_{2x}\\ \hat{f}_{2y}\\ \hat{f}_{5x}\\ \hat{f}_{5y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}42941.18 & 0 & -42941.18 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -42941.18 & 0 & 42941.18 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15/17 & 8/17 & 0 & 0\\ -8/17 & 15/17 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 15/17 & 8/17\\ 0 & 0 & -8/17 & 15/17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0.00086301\\ -0.0023595\\ 0.004315\\ -0.016274\end{Bmatrix}\ \ kN$$

ผลลัพธ์ของแรงในเอลิเมนต์ el7 คือ

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{f}_{5x} \\ \hat{f}_{5y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 84.987 \\ 0 \\ -84.987 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad kN$$



รูปที่ 2.22 ค่าแรงในสปริงเอลิเมนต์หมายเลข 7 เพื่อการคำนวณความเค้น

จากรูปที่ 2.22 แสดงว่าแรงที่ส่งผ่าน el7 คือแรงอัดขนาด 84.987 kN ซึ่งมีค่าสอดคล้องและใกล้เคียงกับที่คำนวณได้จากทฤษฎีคือ -17P/8=-85 kN เมื่อ P=40 kN นำแรงนี้ไปหาความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้น DE คือ

$$\sigma_{DE} = \frac{-84.987\,x\,10^{3}\ \ N}{1000\,x\,10^{-6}\ \ m^{2}} = \ -84.987\ \ MPa$$

ซึ่งเป็นความเค้นอัดเกิดขึ้นใน el7 หรือชิ้นงาน DE นั้นเอง สำหรับหลักการตัวอย่างนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับชิ้นงานที่เหลือคือ AB, AC, AD, BD และ CD

-คำนวณความเค้นของชิ้นส่วน CE (เอลิเมนต์ที่ 6 หรือ el6) พิจารณาเอลิเมนต์ที่ 6 ค่าระยะเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดบนเอลิเมนต์นี้จาก dat file ที่ได้ ดังแสดงในรูปที่ 2.23 คือ

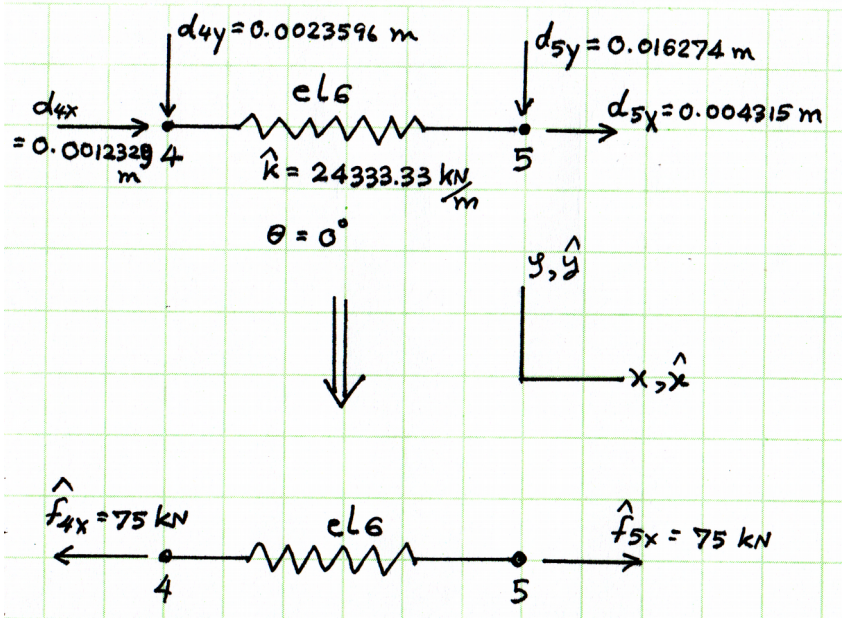
$$\begin{Bmatrix} d_{4x} \\ d_{4y} \\ d_{5x} \\ d_{5y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0012329 \\ -0.0023596 \\ 0.004315 \\ -0.016274 \end{Bmatrix} \quad m$$

เมื่อ $\sin\theta=0$ $\cos\theta=1$ และ $\hat{k}=24333.33\ \ kN/m$ สามารถหาค่าแรงในเอลิเมนต์คือ

$$\begin{Bmatrix}\hat{f}_{4x}\\ \hat{f}_{4y}\\ \hat{f}_{5x}\\ \hat{f}_{5y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}24333.33 & 0 & -24333.33 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -24333.33 & 0 & 24333.33 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.0012329\\ -0.0023596\\ 0.004315\\ -0.016274\end{Bmatrix}\ \ kN$$

ผลลัพธ์ของแรงในเอลิเมนต์ el6 คือ

$$\begin{Bmatrix}\hat{f}_{4x}\\ \hat{f}_{4y}\\ \hat{f}_{5x}\\ \hat{f}_{5y}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-75\\ 0\\ 75\\ 0\end{Bmatrix}\ \ kN$$



รูปที่ 2.23 แรงในสปริงเอลิเมนต์ที่ 6

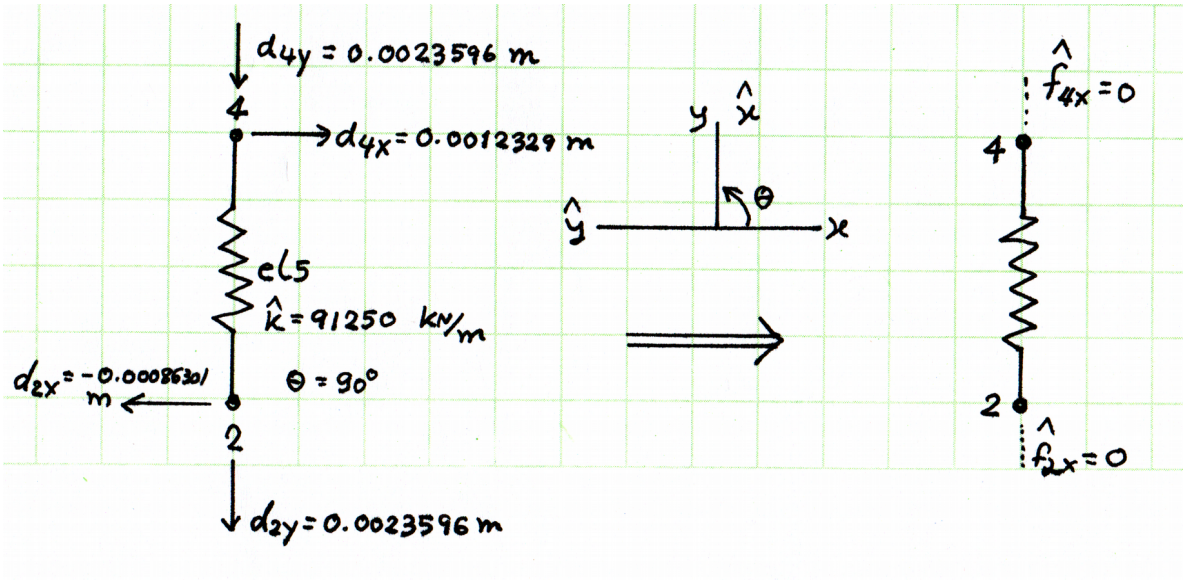
จากรูปที่ 2.23 แสดงว่าแรงที่ส่งผ่าน el6 คือแรงดึงขนาด 75 kN ซึ่งมีค่าสอดคล้องและใกล้เคียงกับที่คำนวณได้จากทฤษฎีคือ 15P/8=-75 kN เมื่อ P=40 kN นำแรงนี้ไปหาความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้น CE คือ

$$\sigma_{CE}=\frac{75\,x\,10^{3}\ \ N}{500\,x\,10^{-6}\ \ m^{2}}=\ +150\ \ MPa$$

ซึ่งเป็นความเค้นดึงเกิดขึ้นใน el6 หรือชิ้นงาน CE นั้นเอง

-คำนวณความเค้นของชิ้นส่วน CD (เอลิเมนต์ที่ 5 หรือ el5) พิจารณาเอลิเมนต์ที่ 5 ค่าระยะเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดบนเอลิเมนต์นี้จาก dat file ดังแสดงในรูปที่ 2.24

$$\begin{Bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00086301 \\ -0.0023596 \\ 0.0012329 \\ -0.0023596 \end{Bmatrix} \; m$$



รูปที่ 2.24 แรงในสปริงเอลิเมนต์ที่ 5

เมื่อ $\sin\theta = 1$ $\cos\theta = 0$ และ $\hat{k} = 91250 \;\; kN/m$

สามารถหาค่าแรงในเอลิเมนต์คือ

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{f}_{4x} \\ \hat{f}_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 91250 & 0 & -91250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -91250 & 0 & 91250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0086301 \\ -0.0023596 \\ 0.0012329 \\ -0.0023596 \end{Bmatrix} \; kN$$

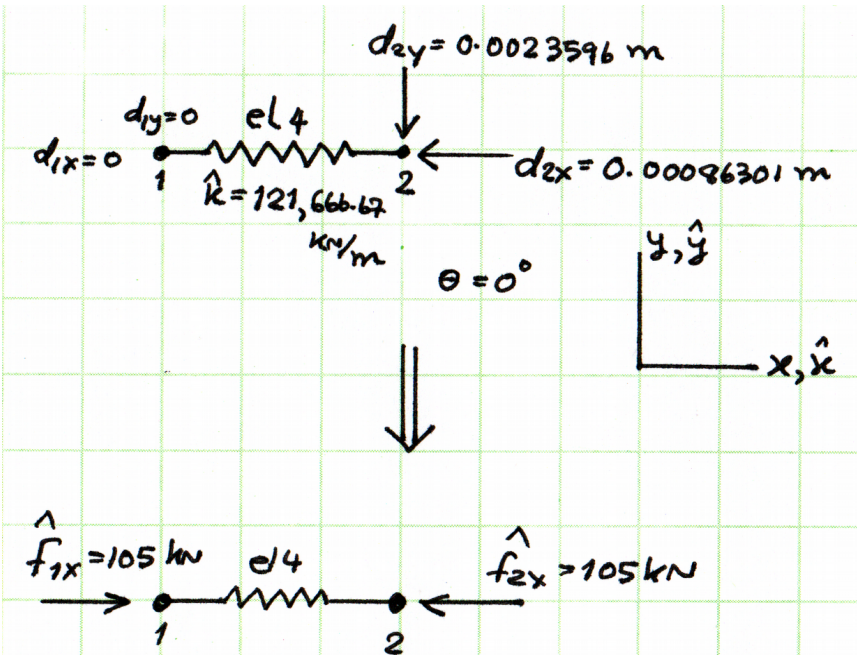
ผลลัพธ์ของแรงในเอลิเมนต์ el5 คือ

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{f}_{4x} \\ \hat{f}_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \; kN$$

จากรูปที่ 2.24 แสดงว่าไม่มีแรงส่งผ่านชิ้นงาน CD ซึ่งมีค่าสอดคล้องและใกล้เคียงกับที่คำนวณได้จากทฤษฎี

-คำนวณความเค้นของชิ้นส่วน BD (เอลิเมนต์ที่ 4 หรือ el4) พิจารณาเอลิเมนต์ที่ 4 ค่าระยะเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดบนเอลิเมนต์นี้จาก dat file ดังแสดงในรูปที่ 2.25 คือ

$$\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.00086301 \\ -0.0023596 \end{Bmatrix} \; m$$



รูปที่ 2.25 แรงในสปริงเอลิเมนต์ที่ 4

เมื่อ $\sin\theta = 0$ $\cos\theta = 1$ และ $\hat{k} = 121666.67 \;\; kN/m$

สามารถหาค่าแรงในเอลิเมนต์คือ

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 121666.67 & 0 & -121666.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -121666.67 & 0 & 121666.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.00086301 \\ -0.0023596 \end{Bmatrix} \; kN$$

ผลลัพธ์ของแรงในเอลิเมนต์ el4 คือ

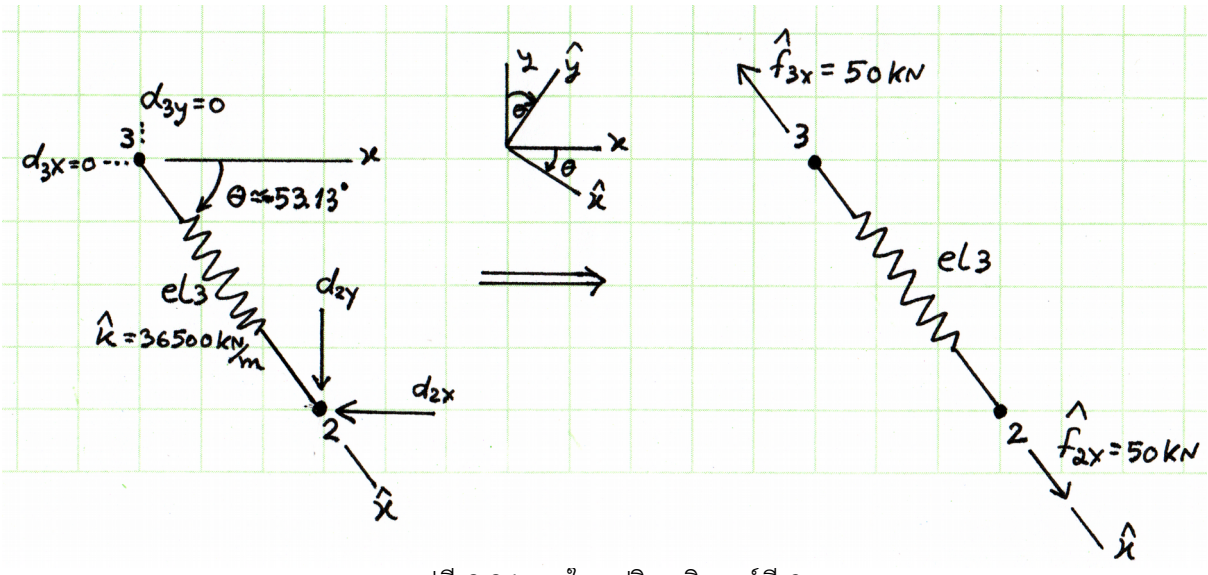
$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 105 \\ 0 \\ -105 \\ 0 \end{Bmatrix} \; kN$$

จากรูปที่ 2.25 แสดงว่าแรงที่ส่งผ่าน el4 คือแรงอัดขนาด 105 kN ซึ่งมีค่าสอดคล้องและใกล้เคียงกับที่คำนวณได้จากทฤษฎีคือ -21P/8=-105 kN เมื่อ P=40 kN นำแรงนี้ไปหาความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้น BD คือ

$$\sigma_{BD} = \frac{-105\,x\,10^{3}\;\; N}{1000\,x\,10^{-6}\;\; m^{2}} = \; -105 \;\; MPa$$ ซึ่งเป็นความเค้นดึงเกิดขึ้นใน el4 หรือชิ้นงาน BD นั้นเอง

13.5 คำนวณความเค้นของชิ้นส่วน AD (เอลิเมนต์ที่ 3 หรือ el3) พิจารณาเอลิเมนต์ที่ 3 ค่าระยะเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดบนเอลิเมนต์นี้จาก dat file ดังแสดงในรูปที่ 2.21 เนื่องจาก AD คือเอลิเมนต์ที่ 3 เกิดจากโหนด 3 กับ 2 ในที่นี้ถือว่าโหนดหมายเลข 3 คือโหนดอ้างอิงทำให้มุม $\theta = -53.13^{o}$ ตามที่กำหนดใน inp file ดังนั้น

$$\begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.00086301 \\ -0.0023596 \end{Bmatrix} \; m$$



รูปที่ 2.26 แรงในสปริงเอลิเมนต์ที่ 3

เมื่อ $\theta = -53.13^{o}$ ได้ $\sin\theta = -0.8$ $\cos\theta = 0.6$ และ $\hat{k} = 36500 \;\; kN/m$
สามารถหาค่าแรงในเอลิเมนต์คือ

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{3x} \\ \hat{f}_{3y} \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 36500 & 0 & -36500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36500 & 0 & 36500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.00086301 \\ -0.0023596 \end{Bmatrix} \; kN$$

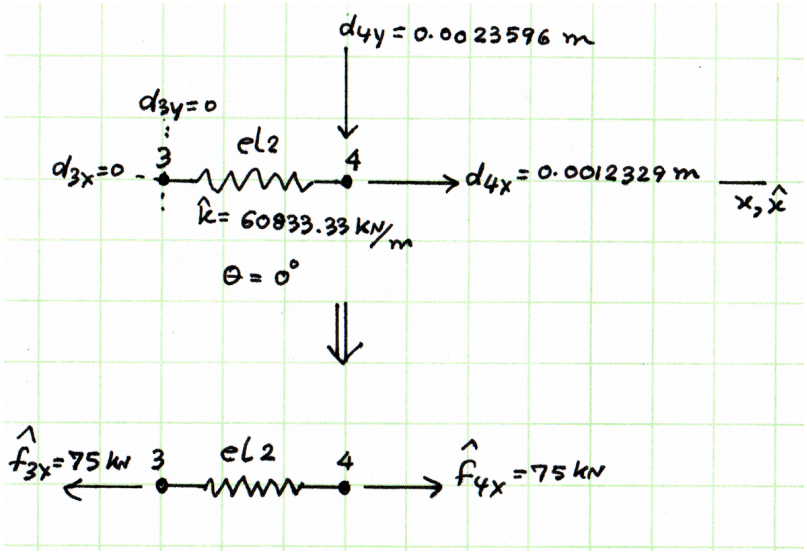
ผลลัพธ์ของแรงในเอลิเมนต์ el3 คือ $\begin{Bmatrix} \hat{f}_{3x} \\ \hat{f}_{3y} \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -50 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} \; kN$

จากรูปที่ 2.26 แสดงว่าแรงที่ส่งผ่าน el3 คือแรงดึงขนาด 50 kN ซึ่งมีค่าสอดคล้องและใกล้เคียงกับที่คำนวณได้จากทฤษฎีคือ 5P/4=50 kN เมื่อ P=40 kN นำแรงนี้ไปหาความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้น AD คือ

$$\sigma_{AD} = \frac{50\,x\,10^{3}\;\; N}{500\,x\,10^{-6}\;\; m^{2}} = \;\; 100 \;\; MPa$$ ซึ่งเป็นความเค้นดึงเกิดขึ้นใน el3 หรือชิ้นงาน AD นั้นเอง

-คำนวณความเค้นของชิ้นส่วน AC (เอลิเมนต์ที่ 2 หรือ el2) พิจารณาเอลิเมนต์ที่ 2 ค่าระยะเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดบนเอลิเมนต์นี้จาก dat file ดังแสดงในรูปที่ 2.27 คือ

$$\begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0012329 \\ -0.0023596 \end{Bmatrix} \; m$$



รูปที่ 2.27 แรงในสปริงเอลิเมนต์ที่ 2

เมื่อ $\theta=0^o$ ได้ $\sin\theta=0.0$ $\cos\theta=1.0$ และ $\hat{k}=60833.33\ \ kN/m$
สามารถหาค่าแรงในเอลิเมนต์คือ

$$\begin{Bmatrix}\hat{f}_{3x}\\ \hat{f}_{3y}\\ \hat{f}_{4x}\\ \hat{f}_{4y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}60833.33 & 0 & -60833.33 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -60833.33 & 0 & 60833.33 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0.0012329\\ -0.0023596\end{Bmatrix}\ \ kN$$

ผลลัพธ์ของแรงในเอลิเมนต์ el2 คือ

$$\begin{Bmatrix}\hat{f}_{3x}\\ \hat{f}_{3y}\\ \hat{f}_{4x}\\ \hat{f}_{4y}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-75\\ 0\\ 75\\ 0\end{Bmatrix}\ \ kN$$

แสดงว่าแรงที่ส่งผ่าน el2 คือแรงดึงขนาด 75 kN ซึ่งมีค่าสอดคล้องและใกล้เคียงกับที่คำนวณได้จากทฤษฎีคือ +15P/8=75 kN เมื่อ P=40 kN นำแรงนี้ไปหาความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้น AC คือ

$$\sigma_{AC}=\frac{+75\,x\,10^{3}\ \ N}{500\,x\,10^{-6}\ \ m^{2}}=\ +150\ \ MPa$$

ซึ่งเป็นความเค้นดึงเกิดขึ้นใน el2 หรือชิ้นงาน AC นั้นเอง

13.7 คำนวณความเค้นของชิ้นส่วน AB (เอลิเมนต์ที่ 1 หรือ el1) พิจารณาเอลิเมนต์ที่ 1 ค่าระยะเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดบนเอลิเมนต์นี้จาก dat file คือ

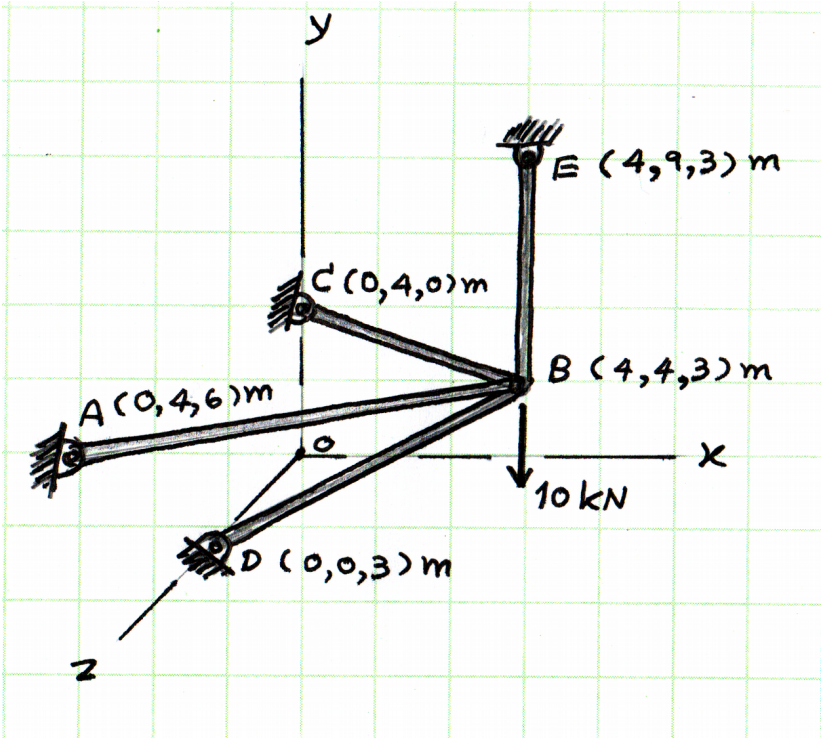
$$\begin{Bmatrix}d_{1x}\\ d_{1y}\\ d_{1x}\\ d_{1y}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\ \ m$$

ดังนั้นค่าของความเค้นเป็นศูนย์เนื่องจากไม่มีแรงส่งผ่านชิ้นงาน AB

2.4 การใช้งานสปริงเอลิเมนต์แบบเชิงเส้นในแบบ 3-D

จากหัวข้อ 2.2 มีตัวอย่างการใช้สปริงเอลิเมนต์กับปัญหาต้นแบบ 2-D และได้แสดงการเขียน inp file เพื่อหาผลลัพธ์ด้วยโปรแกรม CalculiX ในหัวข้อนี้นำเสนอตัวอย่างปัญหาต้นแบบ 3-D และการเขียน inp file และประมวลผลด้วยโปรแกรม CalculiX โดยสปริงเอลิเมนต์ที่นำมาใช้ในแบบ 3-D คือ SPRINGA เหมือนกับที่ใช้กับปัญหา 1-D และ 2-D แต่อาจแตกต่างกันในเงื่อนไขขอบเขต ในหัวข้อนี้จะนำเสนอการเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหาจากโจทย์ตัวอย่างรวมถึงการศึกษาความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมและจะมีการนำข้อมูลผลลัพธ์ไปศึกษาความเค้นความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนโครงสร้างอีกด้วย

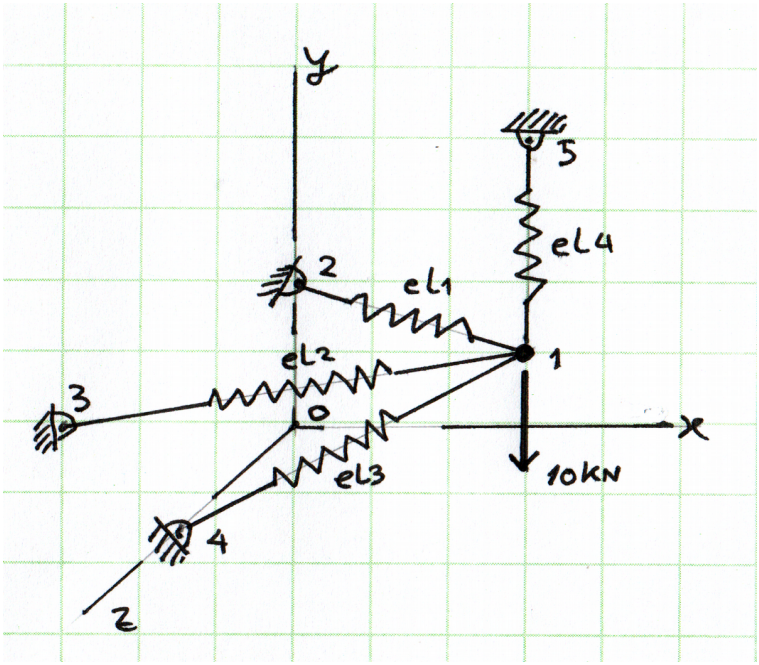
<u>ตัวอย่างที่</u> 2.5 [4] โครงสร้างข้อหมุนเหวี่ยง (truss structure) ดังแสดงในรูปที่ 2.28 ทำจากชิ้นเหล็ก AB BC BD BE มีค่ามอดุลัสเท่ากับ 210 GPa กำหนดพื้นที่หน้าตัดของทุกชิ้นเท่ากันคือ 1000 mm^2 เมื่อมีแรงกระทำที่จุด B ในแนวดิ่งเท่ากับ 10 kN จงเขียน inp file เพื่อหาค่าระยะการเคลื่อนตัวที่จุด B และแรงปฏิกิริยาที่จุด E



รูปที่ 2.28 โครงสร้างข้อหมุนเหวี่ยงใน 3-D

<u>การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา</u>

1.โครงสร้างนี้สามารถแยกส่วนชิ้นงานออกเป็น 4 ชิ้นส่วน แต่ละชิ้นส่วนจำลองได้ด้วยสปริงเอลิเมนต์ 4 เอลิเมนต์ จำลองต้นแบบดังในรูปที่ 2.29 เริ่มต้นเขียนไฟล์โดยการกำหนดหัวข้อและโหนด (heading and node definition) ให้ชื่อว่า 3-D truss structure และมีหมายเลขโหนดและคู่ลำดับดังนี้



รูปที่ 2.29 แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์ในแบบ 3-D

กำหนดให้โหนดและตำแหน่งพิกัดตามตารางที่ 2.6 ดังนี้

ตารางที่2.6 ข้อมูลโหนด

โหนดหมายเลข	ตำแหน่ง	พิกัด xyz
1	B	(4,4,3)
2	C	(0,4,0)
3	A	(0,4,6)
4	D	(0,0,3)
5	E	(4,9,3)

ตั้งชื่อ โหนดชุดนี้คือ NSET=nall ส่วนนี้สามารถเขียน inp file ได้ดังนี้

```
*HEADING
ex25.inp 3-D truss
structure
*NODE,NSET=NALL
1,4.,4.,3.
2,0.,4.,0.
3,0.,4.,6.
4,0.,0.,3.
5,4.,9.,3.
```

2.กำหนดเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ (element connectivity and element type) และกำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ที่ใช้คือ SPRINGA โดยกำหนดให้
สปริงตัวที่ 1 มีชื่อว่า el1 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1 และ 2
สปริงตัวที่ 2 มีชื่อว่า el2 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1 และ 3
สปริงตัวที่ 3 มีชื่อว่า el3 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1 และ 4
สปริงตัวที่ 4 มีชื่อว่า el4 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1 และ 5

ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดเอลิเมนต์คือ

```
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,1,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,1,4
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el4
4,1,5
```

3. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section) โดยคำนวณหาค่าความแข็งของสปริงแต่ละเอลิเมนต์พร้อมกำหนดค่าลงใน inp file ดังตารางที่ 2.7 ดังนี้

ตารางที่2.7 ค่าความแข็งสปริงของแต่ละเอลิเมนต์

ชิ้นงาน	Element No.	L (m)	E (GPa)	A (mm^2)	k=AE/L (N/m)
BC	1	5	210	1000	$42x10^6$
BA	2	5	210	1000	$42x10^6$
BD	3	5.657	210	1000	$37x10^6$
BE	4	5	210	1000	$42x10^6$

ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าความแข็งของสปริงแต่ละตัวคือ

```
*SPRING,ELSET=el1
42E+06
*SPRING,ELSET=el2
42E+06
*SPRING,ELSET=el3
37E+06
*SPRING,ELSET=el4
42E+06
```

4. กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

5. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)

กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดดังนี้

-โหนดหมายเลข 2 3 4 และ 5 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x y และ z เนื่องจากถูกจับยึดไว้ไม่ให้เคลื่อนที่อิสระ

-ส่วนโหนด 1 กำหนดให้เคลื่อนที่ได้อิสระ

ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดเงื่อนไขขอบเขตคือ

```
*BOUNDARY
2,1,3
3,1,3
4,1,3
5,1,3
```

6.กำหนดภาระแรงโดยพิจารณาจากแรงกริยา จากโจทย์ที่มีแรงกระทำเฉพาะที่โหนด 1 เท่ากับ 10 kN ในทิศลบสามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดแรงกระทำได้ดังนี้

```
*CLOAD
1,2,-10000.0
```

7. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)

จากโจทย์นี้กำหนดให้รายงานผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
```

ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
```

8. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง ***END STEP**

9.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-8 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ex25.inp

```
*HEADING
ex25.inp 3-D truss structure
**
*NODE,NSET=NALL
1,4.,4.,3.
2,0.,4.,0.
3,0.,4.,6.
4,0.,0.,3.
5,4.,9.,3.
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,2
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,1,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el3
3,1,4
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el4
4,1,5
*BOUNDARY
2,1,3
3,1,3
4,1,3
5,1,3
*SPRING,ELSET=el1
42E+06
*SPRING,ELSET=el2
42E+06
*SPRING,ELSET=el3
37E+06
*SPRING,ELSET=el4
42E+06
*STEP
*STATIC
*CLOAD
1,2,-10000.0
*NODE PRINT,NSET=NALL
U
RF
*NODE FILE,NSET=NALL
U
RF
*END STEP
```

10. ส่ง ex25.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file ex25.dat ดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  4.591163E-05 -1.793284E-04  0.000000E+00
         2  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         3  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         4  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         5  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00

forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  2.897289E-01 -9.999991E+03  0.000000E+00
         2 -1.234220E+03  5.533204E-02 -9.256546E+02
         3 -1.234220E+03  5.533204E-02  9.256546E+02
         4  2.468220E+03  2.468081E+03  0.000000E+00
         5 -6.915696E-02  7.531800E+03  0.000000E+00
```

รูปที่ 2.30 dat file แสดงค่าการเคลื่อนตัวและแรงของสปริงเอลิเมนต์แบบ 3-D

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

11. อ่านผลลัพธ์จากใน dat file ทำให้ทราบค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนด 1 ซึ่งก็คือ การเคลื่อนตัวที่จุด B มีค่าเท่ากับ 0.0459 mm ในทิศ +x และ 0.1793 mm ในทิศ -y และสำหรับแรงปฏิกิริยาที่จุด E คือ
7.531800E kN
-0.069 kN (ซึ่งถือว่าเป็นศูนย์)

12.ศึกษาวิเคราะห์ความสอดคล้องของแรงกับการเคลื่อนตัวที่ได้จากหลักทฤษฎีนำมาเปรียบกับผลคำนวณจากโปรแกรมว่ามีความสอดคล้องกันหรือไม่ดังนี้

-เปรียบเทียบค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดยึด โดยเปรียบว่าผลจากการคำนวณด้วยหลักสมดุลสถิตยศาสตร์กับผลคำนวณที่ได้จากโปรแกรม CalculiX ว่ามีความสอดคล้องกันหรือไม่แต่เนื่องจากโจทย์ข้อนี้เป็นปัญหาแบบ statically indeterminate จึงต้องนำเงื่อนไขการการเปลี่ยนรูปของชิ้นงานมาประยุกต์ร่วมกันในการหาแรงปฏิกิริยาที่จุด E เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ ในที่นี้สมมติมีแรงส่งผ่านแต่ละเอลิเมนต์ดังรูปที่ 2.31

$\vec{F}_1 = \frac{F_1}{5}(-4\hat{i} - 3\hat{k})$ คือแรงที่ส่งผ่านเอลิเมนต์ 1

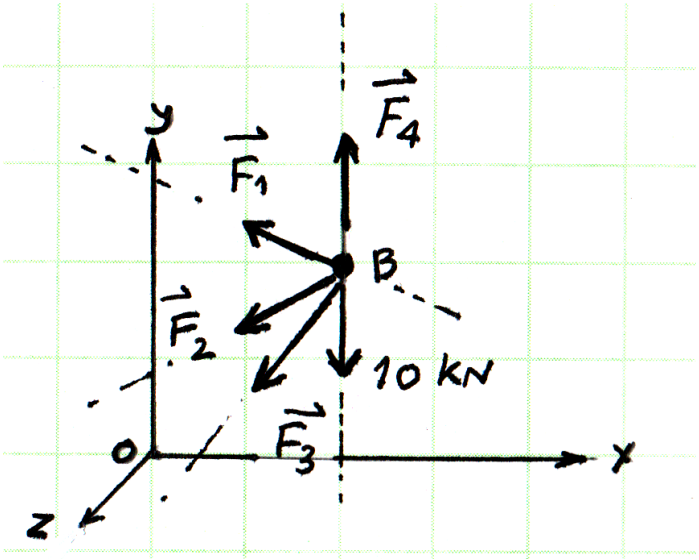
$\vec{F}_2 = \frac{F_2}{5}(-4\hat{i} + 3\hat{k})$ คือแรงที่ส่งผ่านเอลิเมนต์ 2

$\vec{F}_3=\frac{F_3}{\sqrt{32}}(-4\hat{i}-4\hat{k})$ คือแรงที่ส่งผ่านเอลิเมนต์ 3

และ

$\vec{F}_4=F_4(\hat{j})$ คือแรงที่ส่งผ่านเอลิเมนต์ 4

ดังนั้นที่จุด B ในสภาวะสมดุลแรง $\sum\vec{F}=0$



รูปที่ 2.31 ผังแรงที่โหนด B

จะได้

$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4-10\,\hat{j}=0$

เมื่อแยกคิดแรงในแต่ละแกนจะได้ว่า

$\hat{i}\Rightarrow-\frac{4}{5}F_1-\frac{4}{5}F_2-\frac{4}{\sqrt{32}}F_3=0$

$\hat{j}\Rightarrow-\frac{4}{\sqrt{32}}F_3+F_4-10=0$

$\hat{k}\Rightarrow-\frac{3}{5}F_1+\frac{3}{5}F_2=0$ จะได้ $F_1=F_2$

ดังนั้นหา F_1, F_2, F_3 ในรูป F_4 ได้ดังนี้

$$F_1 = F_2 = \frac{5}{8}(10 - F_4) \text{ kN} \quad \text{และ} \quad F_3 = -\sqrt{2}(10 - F_4) \text{ kN}$$

จากทฤษฎี Castigliano จะได้ว่าที่จุด E $\frac{\partial U}{\partial F_4} = 0$ เมื่อ U คือพลังงานความเครียดรวมของโครงสร้าง

$$U = \frac{F_1^2 l_1}{2AE} + \frac{F_2^2 l_2}{2AE} + \frac{F_3^2 l_3}{2AE} + \frac{F_4^2 l_4}{2AE}$$

จะได้ $F_4 = 7.527 \text{ kN}$ $F_3 = -3.497 \text{ kN}$ และ $F_1 = F_2 = 1.545 \text{ kN}$

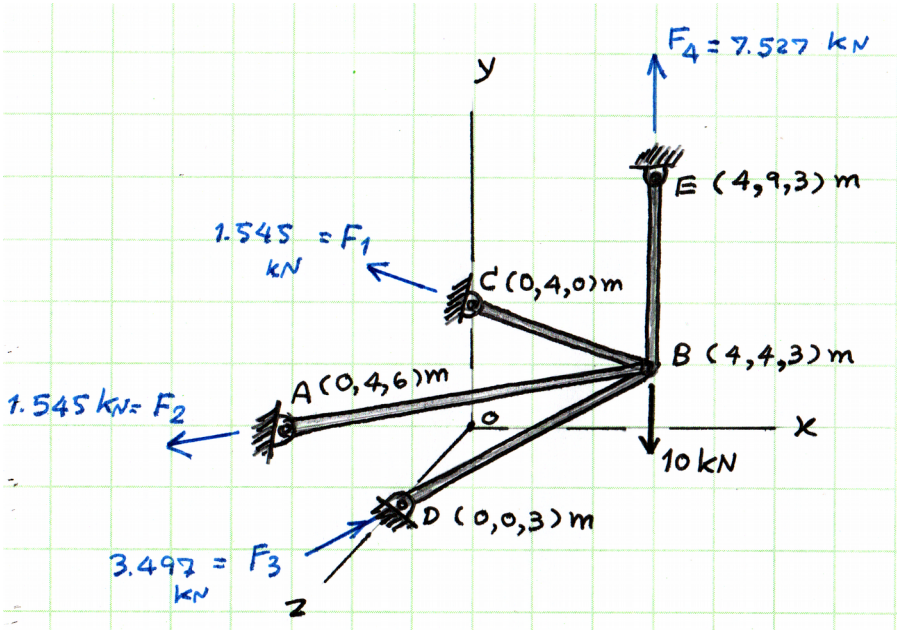
จากการคำนวณทางทฤษฎีพบว่า

1.เกิดแรงดึง F_1 = 1.545 kN และ F_2 = 1.545 kN เท่ากันในชิ้นส่วน BC และ BA

2.เกิดแรงอัด F_3 = - 3.497kN ในชิ้นส่วน BD

3.เกิดแรงดึง F_4 = 7.527 kN ในชิ้นส่วน BE

แรงเหล่านี้มีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยาลัพธ์ที่เกิดขึ้นที่จุดยึด ACD แสดงดังรูปที่ 2.32



รูปที่ 2.32 ผังแรงแสดงค่าแรงกริยาและแรงปฏิกิริยาของแบบจำลองโครงสร้างใน 3-D

เปรียบเทียบแรงปฏิกิริยาในรูปเวคเตอร์ระหว่างผลทางทฤษฎีและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (นำค่ามาจาก dat file) มีค่าสอดคล้องกันดังแสดงในตาราง จะสังเกตเห็นความแตกต่างกันบ้างเล็กน้อยในทิศ j ของ F_1 และ F_2 กับทิศ i ของ F_4 แต่ก็เป็นค่าที่น้อยเมื่อเทียบกับค่าในแกนอื่นๆ ดังแสดงในตารางที่ 2.8

ตารางที่2.8 เปรียบเทียบค่าแรงปฏิกิริยา

จุดยึด	โหนด	แรงปฏิกิริยาจากทฤษฎี (kN)	แรงปฏิกิริยาจากวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ (kN)
A	2	$\vec{F}_1=-1.236\,\hat{i}-0.927\,\hat{k}$	$\vec{F}_1=-1.234\,\hat{i}+0.0000553\,\hat{j}-0.927\,\hat{k}$
D	3	$\vec{F}_2=-1.236\,\hat{i}+0.927\,\hat{k}$	$\vec{F}_2=-1.234\,\hat{i}+0.0000553\,\hat{j}+0.927\,\hat{k}$
C	4	$\vec{F}_3=2.473\,\hat{i}+2.473\,\hat{k}$	$\vec{F}_3=2.468\,\hat{i}+2.468\,\hat{k}$
E	5	$\vec{F}_4=7.527\,\hat{j}$	$\vec{F}_4=-0.0000692\,\hat{i}+7.527\,\hat{j}$

-เปรียบเทียบผลคำนวณของระยะเคลื่อนตัวของจุด B ในแนวแกน y กับผลที่ได้จากโปรแกรม CalculiX ในการคำนวณทางทฤษฎีทำได้โดยการประยุกต์จากทฤษฎี Castigliano จะได้ว่าที่จุด B มีค่า

$$\delta_{By}=\frac{\partial U}{\partial P_y}$$

เมื่อ U คือพลังงานความเครียดรวมของโครงสร้าง และ P_y คือแรงกริยาลัพธ์ที่กระทำที่จุด B เกิดจากแรง 10 kN กับแรงที่เกิดขึ้นใน BE ซึ่งก็คือ F_4 นั้นเองดังนั้น

$$P_y=(10-F_4)=(10-7.527)\ \text{kN}=2.473\ \text{kN}$$

จึงทำให้ $F_1=F_2=\frac{5}{8}P_y$ kN และ $F_3=-\sqrt{2}\,P_y$ kN ดังนั้นค่าพลังงานความเครียดรวมมีค่าดังนี้

$U=\frac{F_1^2 l_1}{2AE}+\frac{F_2^2 l_2}{2AE}+\frac{F_3^2 l_3}{2AE}$ ดังนั้น

$$\delta_{By}=\frac{\partial U}{\partial p_y}=\frac{1}{EA}\left(2x\frac{5}{8}x\frac{5}{8}x5x2.473+2x2.473x5.657\right)=0.1792\ \text{mm}$$

ค่าระยะการเคลื่อนตัวของจุด B มีความใกล้เคียงกับค่าที่คำนวณได้จากโปรแกรม Calculix ซึ่งจาก dat file มีค่า -0.17933 mm

2.5 เอกสารอ้างอิงบทที่ 2

[1] Daryl L. Logan, “A First Course in the Finite Element Method”, 4th Edition, Thomson ,Ontario , 2007

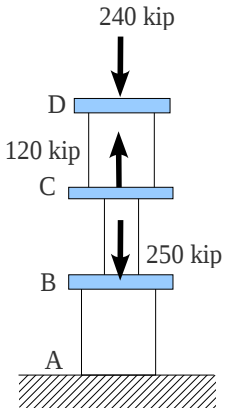
[2] Guido Dhondt, “CalculiX CrunchiX USER'S MANUAL”, version 2.8p2, March 19, 2015, www.calculix.de

[3] Ferdinand Beer, E. Russel Johnston, Jr. John Dewolf, David Mazurek, “Mechanics of Materials”, 7th Edition, McGrawHill, New York, 2015

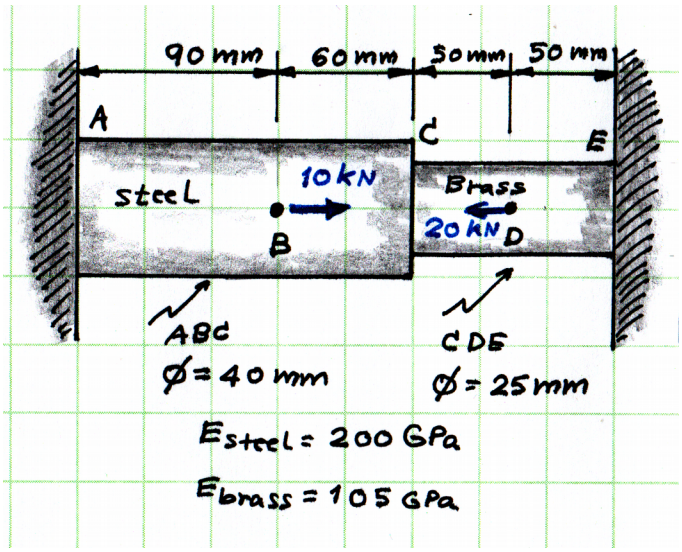
[4] ธงชัย ฟองสมุทร, “วิธีไฟไนต์ต์เอลิเมนต์เบื้องต้น", ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่, 2554

2.6 แบบฝึกหัดบทที่ 2

2-1) แท่งทรงกระบอก DC, CB และ BA มีเส้นผ่านศูนย์กลางต่างกันเชื่อมติดเข้าด้วยกัน มีจุดศูนย์กลางอยู่ในแนวแกนเดียวกันดังรูปที่ P2.2 ถ้าพื้นที่หน้าตัดของแต่ละช่วงมีขนาดที่ต่างกันคือหน้าตัดช่วง AB เท่ากับ 16 in^2 BC เท่ากับ 4 in^2 และ CD เท่ากับ 12 in^2 และค่ามอดุลัสของวัสดุในแต่ละช่วงมีค่าเท่ากับ 30,000 ksi จงเขียน inp file เพื่อหาระยะการยืดหดตัวของชิ้นงานในแต่ละช่วงและนำข้อมูลผลลัพธ์หาความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดแต่ละช่วงเมื่อมีแรงกระทำต่อชิ้นงานที่ตำแหน่งดังรูป P2.1
(ตอบ AB มีความเค้นตั้งฉาก = 23.1 ksi (compression) BC มี ความเค้นตั้งฉาก = 30.0 ksi (compression) CD มีความเค้นตั้งฉาก =20.0 ksi (compression))



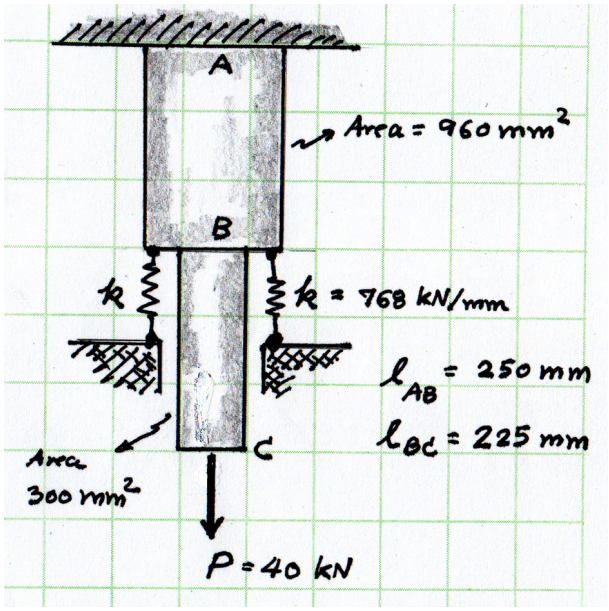
รูปที่ P2.1



รูปที่ P2.2

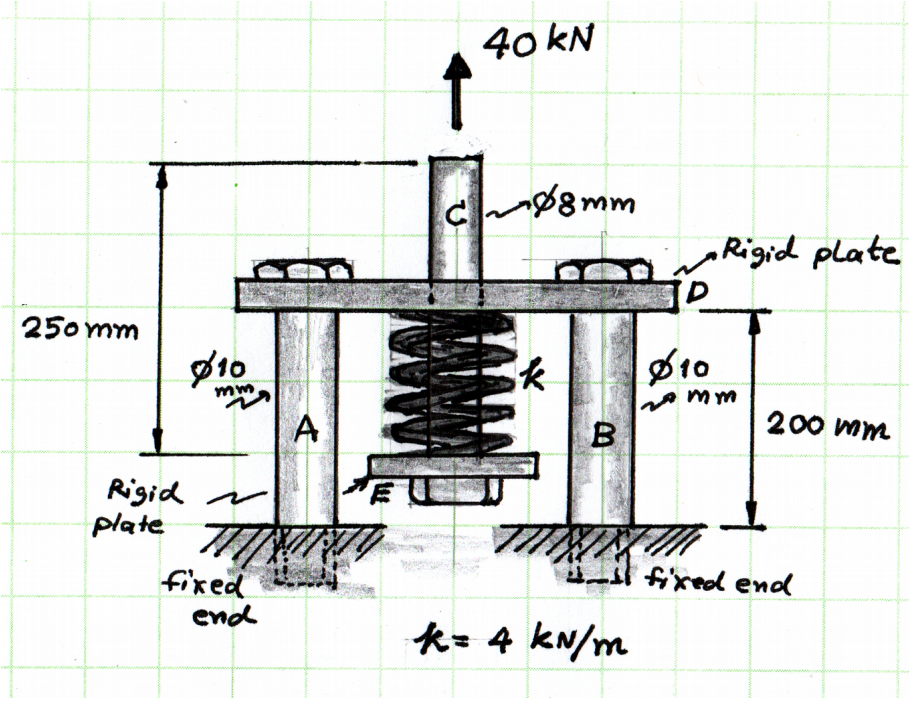
2-2) แท่งทรงกระบอกตันสองแท่งหน้าตัดไม่เท่ากันดังรูปที่ P2.2 แท่งแรก ABC ทำจากเหล็กและแท่งที่สอง CDE ทำจากทองเหลือง แท่งทั้งสองต่อติดกันที่จุด C ขณะที่ปลาย A และ E ยึดติดแนบสนิทกับผนัง มีแรงกระทำที่จุด B และ C จงเขียน inp file เพื่อคำนวณหาระยะยืดของจุด B และ C แรงปฏิกิริยาที่จุด A และ E และคำนวณหาความเค้นและความเครียดในทุกช่วงของแท่งทรงกระบอกทั้งสอง

2-3) แท่งเหล็กกล้าทรงกระบอก AB และ BC มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 200 GPa แท่งทรงกระบอก AB และ BC ติดเข้ากันที่ตำแหน่ง B ด้วยการเชื่อมเป็นชิ้นงานเดียวกัน นำไปรับแรงดึง P = 40 kN ถ้าที่ B รองรับด้วยสปริงสองตัวด้านซ้ายและขวาที่มีค่าความแข็งเท่ากับ 768 kN/mm ดังรูปที่ P2.3 จงหาระยะเคลื่อนตัวของจุดที่แรง P กระทำ (ตอบ 0.176 mm)



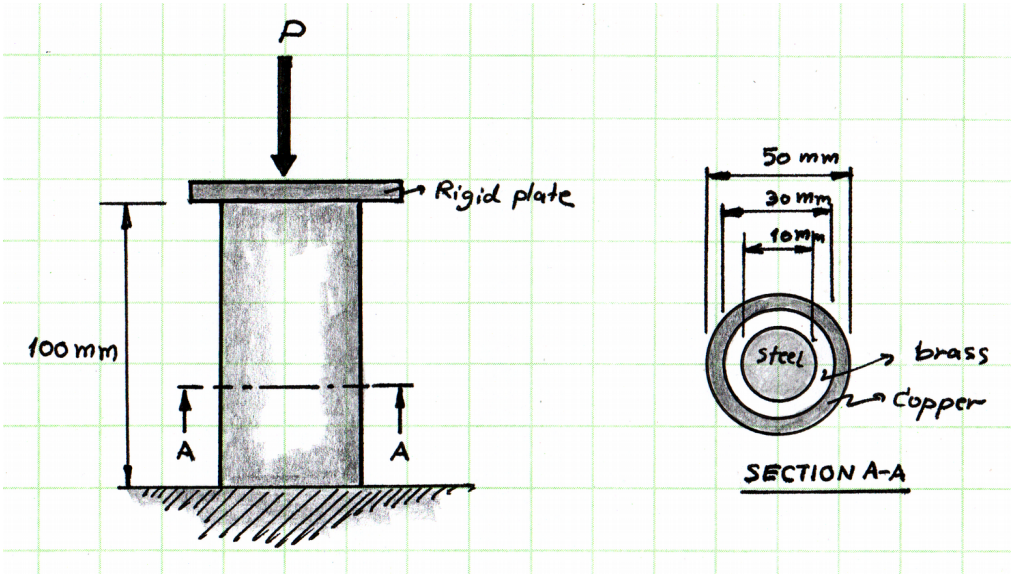
รูปที่ P2.3

2-4) สลักเกลียว A และ B มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 mm เท่ากัน และสลักเกลียว C มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 8 mm สลักเกลียวทุกตัวทำจากเหล็กกล้า (E=200 GPa) ประกอบเข้ากับสปริงเป็นชิ้นงานดังรูปที่ P2.4 กำหนดให้ D และ E เป็นแผ่นวัตถุเกร็ง เมื่อมีแรงดึงขึ้นกระทำที่ปลายสลัก C เท่ากับ 40 kN จงเขียน inp file เพื่อหาระยะยืดตัวของสลัก A และ B และหาระยะยุบตัวของสปริง



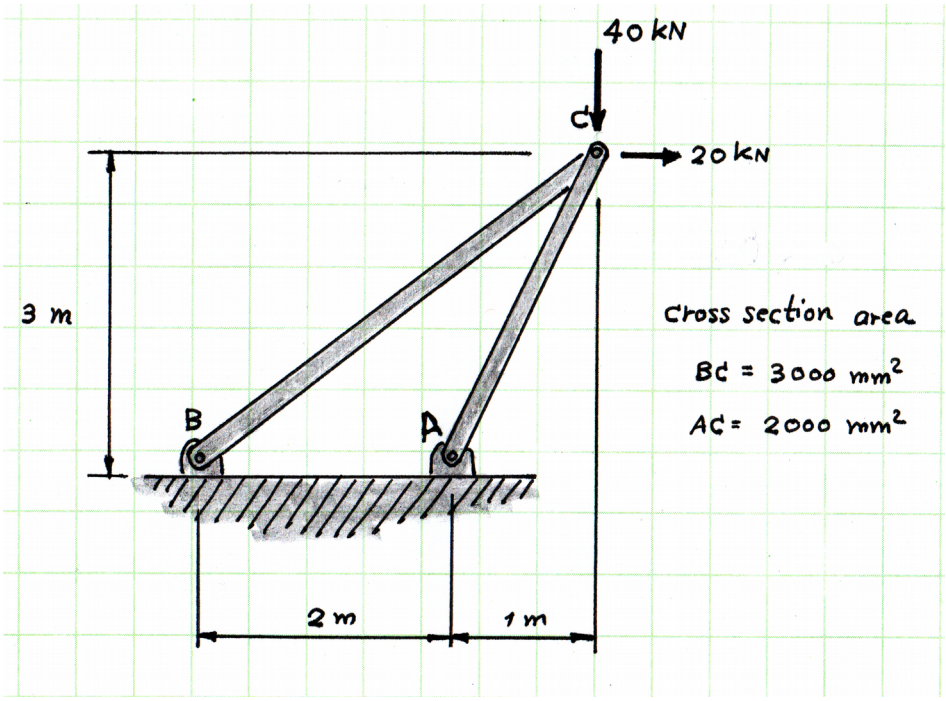
รูปที่ P2.4

2-5) ชิ้นงานประกอบด้วยแกนเหล็ก (steel core) ห่อหุ้มด้วยชั้นเปลือกทองเหลืองและทองแดง (brass and copper shells) ตามลำดับดังรูปที่ P2.5 จงคำนวณหาความเค้นที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กและชั้นเปลือกทองเหลืองและทองแดง



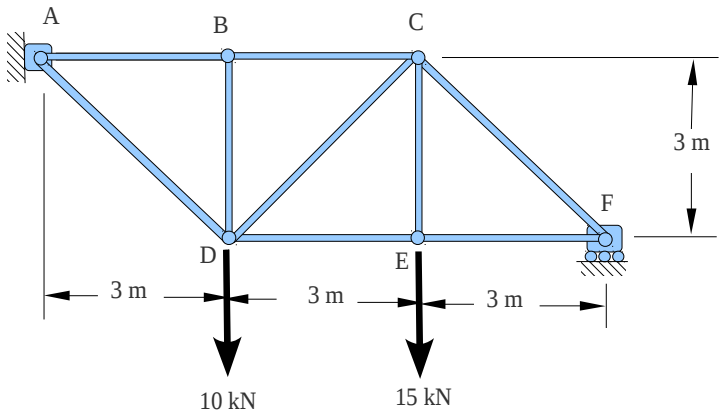
รูปที่ P2.5

2-6) โครงสร้างข้อหมุนเหวี่ยง (truss structure) ดังรูป P2.6 ชิ้นส่วน AC และ BC ทำจากอลูมินัม (E = 72 GPa) จงเขียน inp file เพื่อหาระยะการเคลื่อนตัวของจุด C



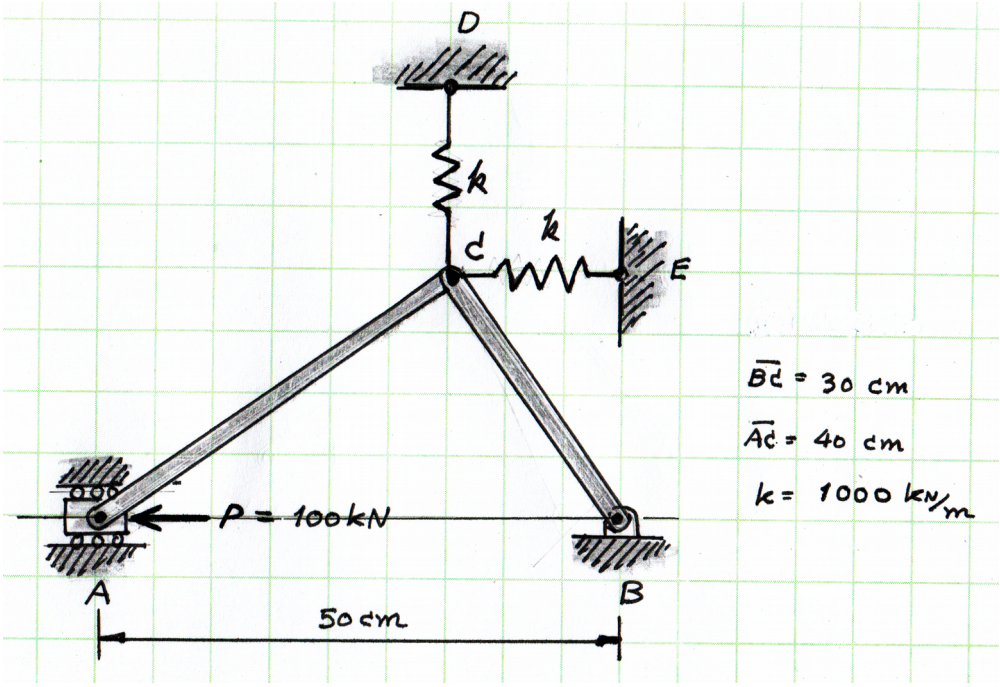
รูปที่ P2.6

2-7) จากรูปที่ P2.7 เมื่อชิ้นงานทุกชิ้นงานทำจากเหล็กกล้า E=210 GPa มีหน้าตัดเท่ากันคือ 3000 mm^2 จงเขียน inp file เพื่อหาระยะเคลื่อนตัวของทุกจุดต่อและหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ F

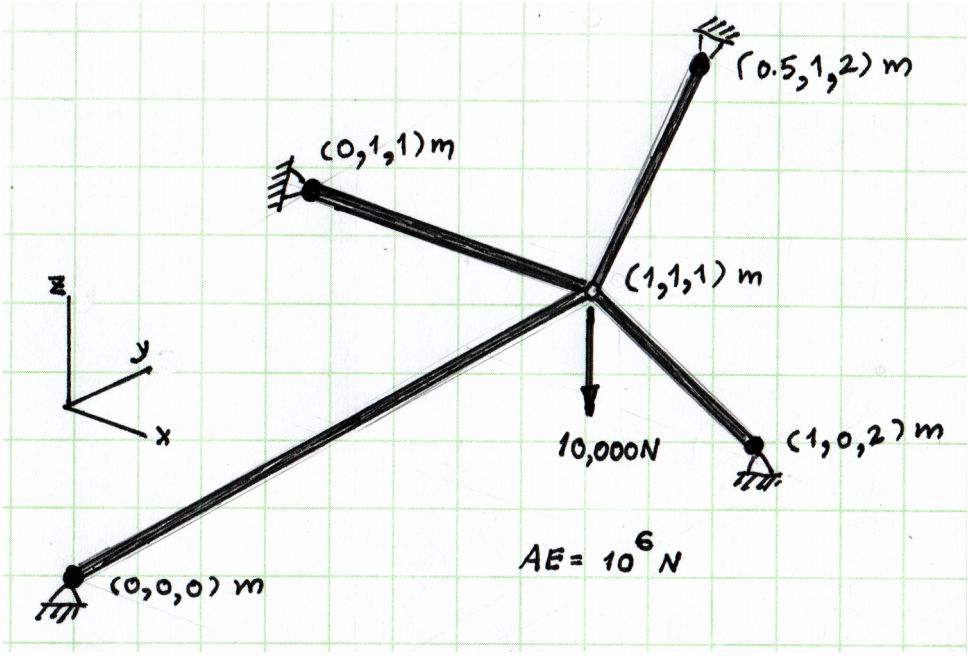


รูปที่ P2.7

2-8) โครงสร้าง ABC ปลาย A ต่อเข้ากับ sliding crank ที่จุด C ต่อเข้ากับสปริงดังรูปที่ P2.8 ถ้า ชิ้นส่วน AC และ BC มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากันคือ 2000 mm^2 จงเขียน inp file เพื่อหาระยะการเคลื่อนตัวของจุด C และหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B



รูปที่ P2.8



รูปที่ P2.9

2-9) โครงสร้างในสามมิติประกอบขึ้นจากชิ้นส่วน 4 ชิ้นที่มีค่า AE= 10^6 N จุดยึดมีลักษณะแบบบอล ดังรูปที่ P2.9 เมื่อมีแรงกระทำลงเท่ากับ 10000 N จงเขียน inp file เพื่อหาระยะการเคลื่อนตัวของจุดที่มีแรงกระทำและหาความเค้นที่เกิดขึ้นในแต่ละชิ้นส่วน

บทที่ 3 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน

3.1 รูปแบบของเอลิเมนต์แบบคานใน 1 มิติ

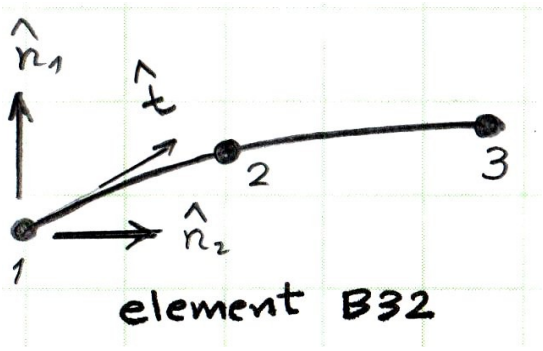
โปรแกรม CalculiX มีเอลิเมนต์คานในหนึ่งมิติให้เลือกใช้สองแบบ แบบแรกคือ two-node beam element (B31) และแบบที่สองคือ three-node beam element (B32) เอลิเมนต์แบบ B31 มีสองโหนดต่อหนึ่งเอลิเมนต์ ในขณะที่ B32 มีสามโหนดในหนึ่งเอลิเมนต์ ซึ่งแบบ B32 จะมีโหนดกึ่งกลางเอลิเมนต์อยู่ด้วย จุดได้เปรียบของ B32 คือสามารถกำหนดสามโหนดในหนึ่งเอลิเมนต์ตามแนวเส้นโค้งได้ ดังรูปที่ 3.1 และเอลิเมนต์แบบ B32 เป็นเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้แก้ปัญหาคานทั่วไป (general purpose beam element) พฤติกรรมของเอลิเมนต์ B32 คือ 3-node quadratic beam element โดยที่แต่ละโหนดมีการกำหนดแกนพิกัดฉากของโหนดตามแนว $t-n_1-n_2$ ดังแสดงในรูปที่ 3.1

โดย $\hat{t}$ คือเวคเตอร์หนึ่งในแนวสัมผัสส่วนโค้ง

$\hat{n}_1$ คือเวคเตอร์หนึ่งในแนวตั้งฉากกับส่วนโค้ง

$\hat{n}_2$ คือเวคเตอร์หนึ่งในแนวตั้งฉากกับส่วนโค้งโดย $\hat{n}_2 = \hat{t} \times \hat{n}_1$

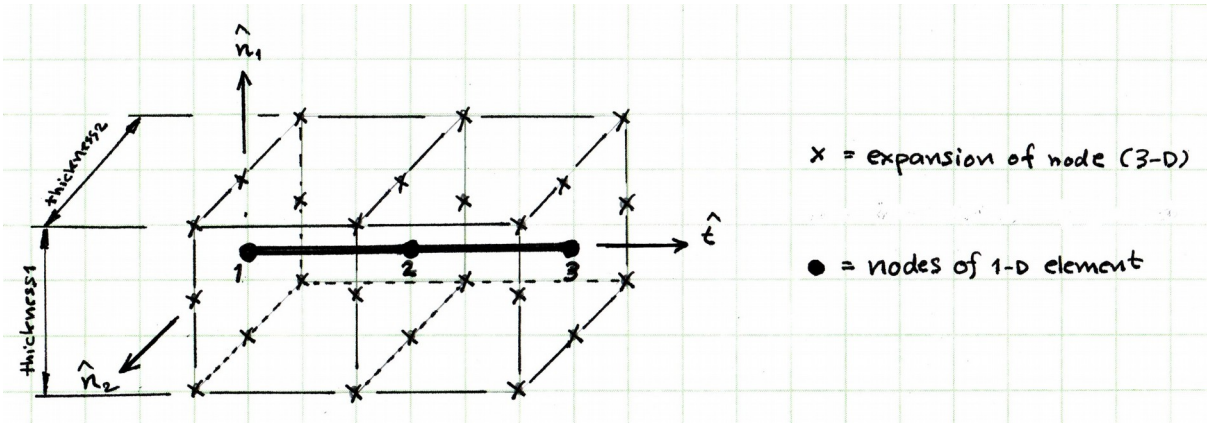
การกำหนดทิศทางของ $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ สามารถอ่านเพิ่มเติมได้จาก CalculiX Manual[1]



รูปที่ 3.1 เอลิเมนต์แบบคาน B32

เอลิเมนต์คานแบบ B32 ได้ถูกออกแบบให้มีการจำลองโหนดโดยมีการขยายโหนด (expansion) ที่ตำแหน่งโหนด 1, 2 และ 3 ออกในแนวความหนาหรือในทิศทางของ $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ เปรียบเหมือนการจำลองเอลิเมนต์แบบ 3-D ดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยทิศทางของหน้าตัดถูกกำหนดโดยเวคเตอร์ $\hat{t}-\hat{n}_1-\hat{n}_2$ สำหรับ $\hat{t}$ จะเป็นตัวกำหนดแนวของเอลิเมนต์ซึ่งจะเป็นบวกในทิศทางจากโหนดแรกไปยังโหนดถัดไป และทิศทางของ $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ เป็นตัวกำหนดระนาบของหน้าตัดคานและขนาดของหน้าตัด ยกตัวอย่างเช่น คานหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยม แนวความสูง (thickness1) ของหน้าตัดจะถูกกำหนดตามแนวเวคเตอร์ $\hat{n}_1$ และความหนา (thickness2) ของหน้าตัดจะถูกกำหนดตามแนวเวคเตอร์ $\hat{n}_2$ สำหรับการใช้งานในหนึ่งมิติเมื่อคานมีความยาวไปตามแกน x และคานมีการดัดตัวบนระนาบ xy ในกรณีนี้แนวของ $\hat{t}$ จะตามแกน x ขณะที่ $\hat{n}_1$ จะไปในแนว -z หรือในทิศ (0,0,-1) ซึ่งหมายถึงคานนี้เกิดการดัดตัวบนระนาบ xy สำหรับคานที่มีการดัดตัวใน

ระนาบอื่น การกำหนดทิศทางของ $\hat{n}_1$ ด้วยคำสั่ง *BEAM SECTION คือการจำลองโหนดตามแนว $\hat{t}$ โดยระนาบของ $\hat{n}_1 - \hat{n}_2$ ตั้งฉากกับแนวของ $\hat{t}$ ตลอดการดัดนั้นเอง



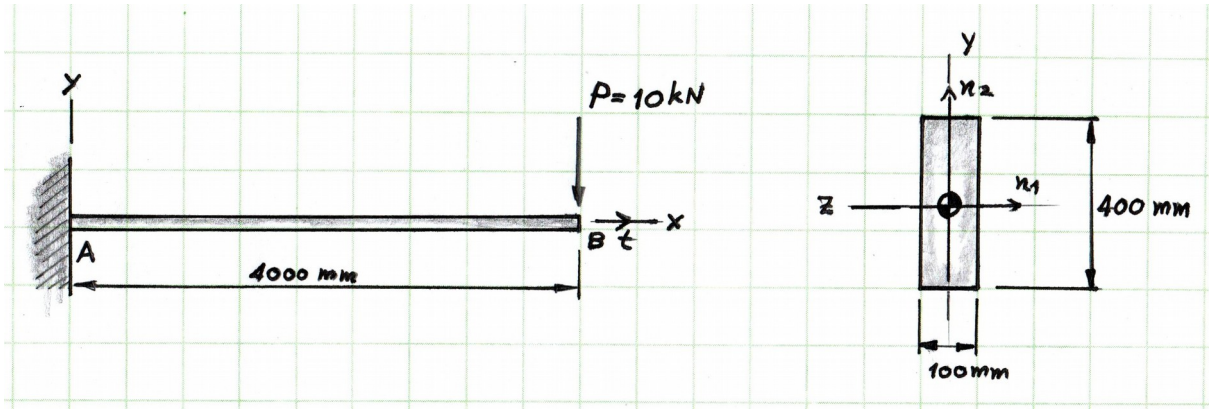
รูปที่ 3.2 แบบจำลอง B32 หนึ่งมิติที่จำลองการใช้งานในสามมิติ

*BEAM SECTION เป็นคำสั่งหนึ่งในโปรแกรม CalculiX ที่ใช้ในการกำหนดลักษณะของหน้าตัดคานโดยใช้ร่วมกับเอลิเมนต์คานแบบ B32 นอกจากนั้นยังใช้กำหนดทิศทางของเวคเตอร์ $\hat{n}1$ ที่ใช้ระบุทิศทางของระนาบที่มีการดัดเกิดขึ้น ซึ่งในโปรแกรม CalculiX ได้กำหนดหน้าตัดให้เลือกใช้งานคือ หน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า (SECTION=RECT) หน้าตัดวงรี (SECTION=CIRC) สำหรับหน้าตัดแบบท่อ (SECTION=PIPE) ต้องใช้กับคำสั่ง *BEAM GENERAL SECTION รายละเอียดการใช้งานของหน้าตัดรูปแบบต่างๆ จะนำเสนอในตัวอย่างต่อไป ในคำสั่งนี้ยังสามารถระบุ OFFSET ของหน้าตัดเพื่อใช้กับคานหน้าตัดรูปแบบอื่นๆ ที่ประกอบขึ้นจากหน้าตัดย่อยที่เป็นรูปสี่เหลี่ยม เช่น หน้าตัดแบบ I หน้าตัดแบบ T แบบ C แบบ L หรือตามแบบที่ต้องการได้

สำหรับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและองศาอิสระของโหนดยังคงใช้หลักการเดิมตามที่ปรากฏในรูปที่ 1.5 ส่วนแรงกระทำต่อโหนดยังคงใช้ *CLOAD เพื่อแทนแรงกระทำที่โหนดในแนวแกนรวมถึงโมเมนต์ดัดและแรงบิดต่างๆ สำหรับแรงกระจายที่กระทำต่อคานหรือชิ้นงานบนผิว เช่น ความดัน แรงต่อหน่วยความยาว สามารถเรียกใช้คำสั่ง*DLOAD ซึ่งต้องมีการระบุผิวที่แรงกระทำให้ตรงกับด้านของเอลิเมนต์ สำหรับรายละเอียดเกี่ยว *DLOAD สามารถอ่านเพิ่มเติมได้จากคู่มือการใช้งาน CCX [1]

3.2 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน B32 กับภาระแรงแบบต่างๆ

หัวข้อนี้เป็นการแสดงตัวอย่างแนวคิดการเขียน inp file และการวิเคราะห์ข้อมูลจาก dat file โดยใช้เอลิเมนต์แบบคาน B32 กับ ปัญหาทางโครงสร้าง ตัวอย่างเช่น คานปลายยื่นอิสระ ที่มีแรงกระทำแบบต่างๆ และมีหน้าตัดอย่างง่ายไม่ซับซ้อนโดยเน้นการหาผลลัพธ์คือ ระยะการโก่งตัวและความเค้นบนหน้าตัดคาน ดังรูปที่ 3.3 คานยื่นปลายอิสระ(AB) ทำจากเหล็กกล้า (E=200 GPa) มีแรงกระทำในแนวดิ่งลงเท่ากับ 10kN



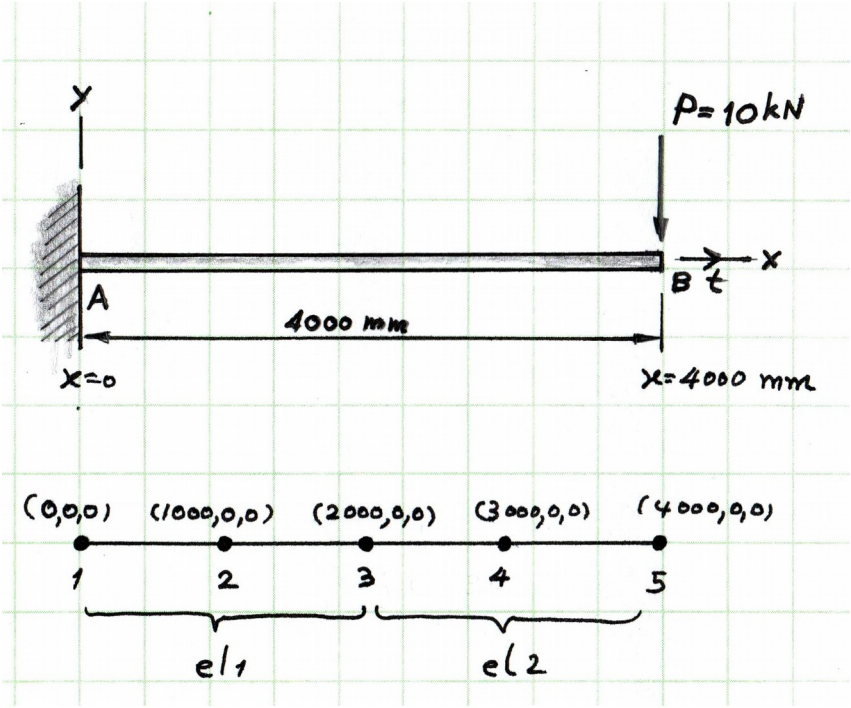
รูปที่ 3.3 คานยื่นปลายอิสระ

<u>การเขียน inp file เพื่อหาการโก่งตัวและความเค้นบนหน้าตัด</u>

1.กำหนดหัวข้อและโหนด (heading and node definition) สำหรับปัญหานี้ตั้งชื่อหัวข้อว่า Example 3.1 cantilever beam ในขั้นแรกทำการแบ่งคานออกเป็น 2 เอลิเมนต์ดังรูปที่ 3.4 กำหนดให้หมายเลขโหนดมีคู่ลำดับของตำแหน่งตามระบบพิกัดฉากดังนี้

โหนดหมายเลข 1 มีพิกัด xyz คือ (0.0,0.0,0.0)
โหนดหมายเลข 2 มีพิกัด xyz คือ (1000.0,0.0,0.0)
โหนดหมายเลข 3 มีพิกัด xyz คือ (2000.0,0.0,0.0)
โหนดหมายเลข 4 มีพิกัด xyz คือ (3000,0.0,0.0)
โหนดหมายเลข 5 มีพิกัด xyz คือ (4000,0.0,0.0)
และตั้งชื่อกลุ่มโหนดเหล่านี้ว่า NSET=Nall
ในส่วนนี้สามารถเริ่มเขียน inp file ได้ดังนี้

```
*HEADING
Example 3.1 cantilever beam
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,1000.0,0.0,0,0
3,2000.0,0.0,0.0
4,3000.0,0.0,0.0
5,4000.0,0.0,0.0
```



รูปที่ 3.4การจำลองโหนดและเอลิเมนต์ของคาน AB

2.กำหนดเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ (element connectivity and element type)
สำหรับปัญหานี้เลือกใช้เอลิเมนต์แบบคานใน 1 มิติคือ B32 ดังนั้นจากรูปที่ 3.4
-กำหนดให้เอลิเมนต์หมายเลข 1 ชื่อ el1 เป็นเอลิเมนต์แบบ B32 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 1,2 และ 3
-กำหนดให้เอลิเมนต์หมายเลข 2 ชื่อ el2 เป็นเอลิเมนต์แบบ B32 เชื่อมโยงโหนดหมายเลข 3,4 และ 5
-เรียกใช้ *ELSET เพื่อตั้งชื่อกลุ่มเอลิเมนต์โดยให้ el1 และ el2 รวมกันเป็นกลุ่มเอลิเมนต์มีชื่อว่า Eall
(ประโยชน์ในการใช้ *ELSET ตั้งชื่อกลุ่มเอลิเมนต์นี้ไว้ก่อนทั้งนี้เพื่อเรียกกำหนดหน้าตัด กำหนดค่าของสมบัติวัสดุ รวมถึงการเรียกดูค่าผลลัพธ์ของเอลิเมนต์ใน dat file ต่อไป)
-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดเอลิเมนต์คือ

```
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el1
1,1,2,3
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el2
2,3,4,5
*ELSET,ELSET=Eall
el1
el2
```

3. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section)

3.1 กำหนดสมบัติของวัสดุ

-เรียกใช้ *MATERIAL เพื่อกำหนดชื่อวัสดุว่า STEEL

-เรียกใช้ *ELASTIC เพื่อกำหนดสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นคือค่ามอดุลัสเท่ากับ 200 GPa และค่าอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 ในที่นี้จำเป็นต้องใส่ค่า E= 200E+03 MPa ลงไปทั้งนี้เนื่องจากได้กำหนดค่ามิติความยาวเป็นหน่วย mm ดังนั้นหน่วยของค่าต่างๆ ต้องสอดคล้องกันกับหน่วยของ mm ที่ใช้กำหนดพิกัดโหนด จึงต้องเปลี่ยน 200 GPa เป็น 200 x 10^3 MPa ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของวัสดุคือ

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
```

3.2 กำหนดสมบัติหน้าตัดคาน

-เรียกใช้ *BEAM SECTION เพื่อกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ที่ชื่อว่า Eall ซึ่งได้กำหนดชื่อกลุ่มและหมายเลขเอลิเมนต์ไว้แล้วจากหัวข้อที่ 2 ข้างบน และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุตาม STEEL ที่ได้ตั้งไว้ในหัวข้อ 3.1 ข้างต้น และมีการกำหนดหน้าตัดเป็นแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (SECTION=RECT) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ เท่ากับ 100 mm และ 400 mm ตามลำดับ (ดูรูปที่ 3.3 ประกอบ) เนื่องจากทิศของ $\hat{n}_1$ อยู่ในทิศ (x,y,z)=(0,0,-1) ซึ่งเป็นทิศที่โปรแกรมกำหนดแต่ต้น (default) จึงไม่มีการกำหนดทิศของ $\hat{n}_1$ ต่อท้ายในคำสั่งนี้ ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของหน้าตัดคือ

```
*BEAM SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
100.0,400.0
```

4. กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

5. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตพิจารณาจากการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า

-โหนดหมายเลข 1 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x,y และ z และไม่มีการหมุนรอบแกนทั้งสามเนื่องจากถูกจับยึดไว้ในผนัง

-โหนดหมายเลข 2,3,4 และ 5 สามารถเคลื่อนและหมุนตัวได้อิสระในทุกแนวแกนยกเว้นการเคลื่อนตัวออกมาจากระนาบหรือเคลื่อนตัวออกมาในแนวแกน z

ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าขอบเขตและการเคลื่อนที่คือ

```
*BOUNDARY
1,1,6,0.0
2,3,3,0.0
3,3,3,0.0
4,3,3,0.0
5,3,3,0.0
```

6.กำหนดภาระแรงโดยพิจารณาจากแรงกริยา จากโจทย์มีแรงกระทำที่โหนดคือ
-โหนดหมายเลข 5 มีแรงกระทำในแนวแกน y ตามทิศลบเท่ากับ 10 kN เนื่องจากหน่วยของมอดุลัสเป็น N/mm^2 ตามที่ได้กำหนดไปในข้อ 3.1 ดังนั้นจำเป็นต้องใส่ค่าแรงเป็น -10000 N
สามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดแรงกระทำได้ดังนี้

```
*CLOAD
5,2,-10000
```

7. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าความเค้นที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า Eall และให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*EL PRINT,ELSET=Eall
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
```

ทำนองเดียวกันต้องการแสดงผลลัพธ์ทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้แสดงค่าความเค้นในเอลิเมนต์ทั้งหมดที่มีชื่อว่า Eall และค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*EL FILE,ELSET=Eall
S
*NODE FILE,NSET=Nall
U,RF
```

8. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง `*END STEP`

9.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-8 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ch31.inp

```
*HEADING
Example 3.1 cantilever beam
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,1000.0,0.0,0,0
3,2000.0,0.0,0.0
4,3000.0,0.0,0.0
5,4000.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el1
1,1,2,3
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el2
2,3,4,5
*ELSET,ELSET=Eall
el1
el2
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
*BEAM SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
100.0,400.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,6,0.0
2,3,3,0.0
3,3,3,0.0
4,3,3,0.0
5,3,3,0.0
*CLOAD
5,2,-10000
*EL PRINT,ELSET=Eall
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*EL FILE,ELSET=Eall
S
*NODE FILE,NSET=Nall
U,RF
*END STEP
```

10. ส่ง ch31.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file ch31.dat ดังนี้

```
stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set EALL and time  0.1000000E+01

         1   1  9.445331E+00 -1.089712E-01  3.773145E-02 -6.381677E-01 -6.643128E-01  3.900391E-02
         1   2  8.620789E+00  1.197479E-01 -1.318330E-01  1.924899E-01 -2.775828E-01 -2.014607E-02
         1   3  8.184900E+00  7.371193E-01  6.054581E-01 -5.966371E-01  1.091472E-01 -1.452066E-02
         1   4  1.318637E-12 -2.965915E-12  2.238527E-13 -6.584350E-01 -1.233279E-13  3.900391E-02
         1   5  2.113450E-12  3.213148E-13 -1.249317E-13  1.722226E-01  4.527275E-14 -2.014607E-02
         1   6  2.640829E-12  1.078111E-12  1.161911E-12 -6.169045E-01  3.160837E-13 -1.452066E-02
         1   7 -9.445331E+00  1.089712E-01 -3.773145E-02 -6.381677E-01  6.643128E-01  3.900391E-02
         1   8 -8.620789E+00 -1.197479E-01  1.318330E-01  1.924899E-01  2.775828E-01 -2.014607E-02
         1   9 -8.184900E+00 -7.371193E-01 -6.054581E-01 -5.966371E-01 -1.091472E-01 -1.452066E-02
         1  10  9.412626E+00 -1.229878E-01  2.371489E-02 -5.544154E-01  3.968183E-12 -2.870502E-13
         1  11  8.588084E+00  1.057313E-01 -1.458495E-01  2.295203E-01  3.604088E-12  7.834861E-14
         1  12  8.152195E+00  7.231027E-01  5.914416E-01 -6.063285E-01  6.050734E-12  2.746430E-13
         1  13  1.721362E-12 -1.503115E-12  1.160919E-13 -5.746827E-01  2.003681E-14 -9.869158E-13
         1  14  2.155228E-12  5.065676E-13 -1.063095E-13  2.092530E-01  9.283421E-14  4.470462E-14
         1  15  1.827213E-12 -1.164109E-12  8.143253E-13 -6.265959E-01  2.823895E-13 -5.428179E-13
         1  16 -9.412626E+00  1.229878E-01 -2.371489E-02 -5.544154E-01 -4.017757E-12 -1.357167E-12
         1  17 -8.588084E+00 -1.057313E-01  1.458495E-01  2.295203E-01 -3.776018E-12  7.357007E-13
         1  18 -8.152195E+00 -7.231027E-01 -5.914416E-01 -6.063285E-01 -6.121900E-12 -2.540965E-13
         1  19  9.445331E+00 -1.089712E-01  3.773145E-02 -6.381677E-01  6.643128E-01 -3.900391E-02
         1  20  8.620789E+00  1.197479E-01 -1.318330E-01  1.924899E-01  2.775828E-01  2.014607E-02
         1  21  8.184900E+00  7.371193E-01  6.054581E-01 -5.966371E-01 -1.091472E-01  1.452066E-02
```

```
        1  22  2.097743E-12 -1.114328E-13 -2.111936E-14 -6.584350E-01  1.521931E-13 -3.900391E-02
        1  23  2.336001E-12  1.003609E-12  4.754841E-14  1.722226E-01  1.378475E-13  2.014607E-02
        1  24  1.283680E-12 -2.797984E-12  7.298867E-13 -6.169045E-01  2.090013E-13  1.452066E-02
        1  25 -9.445331E+00  1.089712E-01 -3.773145E-02 -6.381677E-01 -6.643128E-01 -3.900391E-02
        1  26 -8.620789E+00 -1.197479E-01  1.318330E-01  1.924899E-01 -2.775828E-01  2.014607E-02
        1  27 -8.184900E+00 -7.371193E-01 -6.054581E-01 -5.966371E-01  1.091472E-01  1.452066E-02
        2   1  3.441329E+00 -7.388183E-01 -5.987476E-01 -5.916276E-01  1.849696E-01  1.435103E-02
        2   2  3.015744E+00 -1.079084E-01  1.537144E-01  2.102332E-01  5.581605E-02  2.140131E-02
        2   3  2.174394E+00  1.072359E-01 -6.394350E-02 -6.044381E-01 -7.333748E-02 -4.084268E-02
        2   4 -1.015963E-12  5.623848E-13 -7.290660E-14 -6.121217E-01 -1.327663E-13  1.435103E-02
        2   5  1.838272E-13  2.540924E-12  1.182644E-13  1.897391E-01 -9.942612E-14  2.140131E-02
        2   6 -4.569279E-13 -1.774129E-12  4.701355E-13 -6.249322E-01 -8.276696E-14 -4.084268E-02
        2   7 -3.441329E+00  7.388183E-01  5.987476E-01 -5.916276E-01 -1.849696E-01  1.435103E-02
        2   8 -3.015744E+00  1.079084E-01 -1.537144E-01  2.102332E-01 -5.581605E-02  2.140131E-02
        2   9 -2.174394E+00 -1.072359E-01  6.394350E-02 -6.044381E-01  7.333748E-02 -4.084268E-02
        2  10  3.451418E+00 -7.344948E-01 -5.944240E-01 -6.107374E-01  1.302657E-12  4.734510E-14
        2  11  3.025833E+00 -1.035848E-01  1.580380E-01  2.055352E-01  2.312815E-12 -1.756703E-13
        2  12  2.184482E+00  1.115595E-01 -5.961995E-02 -5.947243E-01  2.703843E-13  3.984836E-13
        2  13 -2.007225E-12 -2.306945E-12 -4.784201E-13 -6.312315E-01 -9.413913E-14 -9.336293E-13
        2  14 -4.863891E-13  3.851426E-13  3.547439E-14  1.850411E-01 -3.503792E-14 -1.550057E-14
        2  15 -1.289931E-12 -4.347069E-12  2.257392E-13 -6.152184E-01 -5.933142E-14  2.666532E-13
        2  16 -3.451418E+00  7.344948E-01  5.944240E-01 -6.107374E-01 -1.543054E-12 -4.626731E-13
        2  17 -3.025833E+00  1.035848E-01 -1.580380E-01  2.055352E-01 -2.214562E-12 -3.349526E-13
        2  18 -2.184482E+00 -1.115595E-01  5.961995E-02 -5.947243E-01  1.013858E-14 -2.257822E-12
        2  19  3.441329E+00 -7.388183E-01 -5.987476E-01 -5.916276E-01 -1.849696E-01 -1.435103E-02
        2  20  3.015744E+00 -1.079084E-01  1.537144E-01  2.102332E-01 -5.581605E-02 -2.140131E-02
        2  21  2.174394E+00  1.072359E-01 -6.394350E-02 -6.044381E-01  7.333748E-02  4.084268E-02
        2  22 -2.634620E-12 -4.305490E-12 -5.135909E-13 -6.121217E-01 -5.389796E-14 -1.435103E-02
        2  23 -8.914678E-13 -1.132807E-12  2.234906E-13  1.897391E-01 -3.839393E-15 -2.140131E-02
        2  24 -2.258666E-12 -7.219412E-12 -1.491023E-13 -6.249322E-01 -4.134925E-14  4.084268E-02
        2  25 -3.441329E+00  7.388183E-01  5.987476E-01 -5.916276E-01  1.849696E-01 -1.435103E-02
        2  26 -3.015744E+00  1.079084E-01 -1.537144E-01  2.102332E-01  5.581605E-02 -2.140131E-02
        2  27 -2.174394E+00 -1.072359E-01  6.394350E-02 -6.044381E-01 -7.333748E-02  4.084268E-02
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  1.160877E-14 -1.550635E-01  0.000000E+00
         3  2.256181E-14 -5.881302E-01  0.000000E+00
         4  1.743050E-14 -1.208670E+00  0.000000E+00
         5  1.591088E-14 -1.926206E+00  0.000000E+00
forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1 -5.000000E+04  1.000000E+04  1.042253E-09
         2 -5.247657E-09  2.221231E-08 -3.296009E-09
         3  1.398830E-07  9.769177E-08  5.926918E-09
         4 -1.420600E-08  2.144353E-07 -5.480572E-09
         5 -4.256918E-08 -1.000000E+04  1.793225E-09
```

รูปที่ 3.5 dat file แสดงค่าความเค้น ระยะการเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยา

จาก dat file ในรูปที่ 3.5 แสดงผลลัพธ์ตามที่ได้สั่งไปคือ รายงานค่าความเค้นของทุกเอลิเมนต์ ในที่นี้โปรแกรมได้รายงานค่าความเค้นบนหน้าตัดของแต่ละเอลิเมนต์ เนื่องจากตอนเขียน inp file แต่ละเอลิเมนต์ประกอบด้วย 3 โหนดใน 1 มิติ แต่เมื่อรายงานผลโปรแกรมจะให้ค่าความเค้นที่จุดอินทิเกรชั่นมาด้วย ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าที่แต่ละเอลิเมนต์จะมีค่าความเค้นออกมา 27 จุดซึ่งแต่ละจุดเหล่านั้นก็คือจุดที่ได้ขยายหน้าตัดออกไปใน 3 มิติตามแนวความหนาคือ $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ และสุดท้ายกำหนดให้รายงานค่าระยะการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดในทิศ xyz และแรงปฏิกิริยาของแต่ละโหนดในทิศ xyz

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

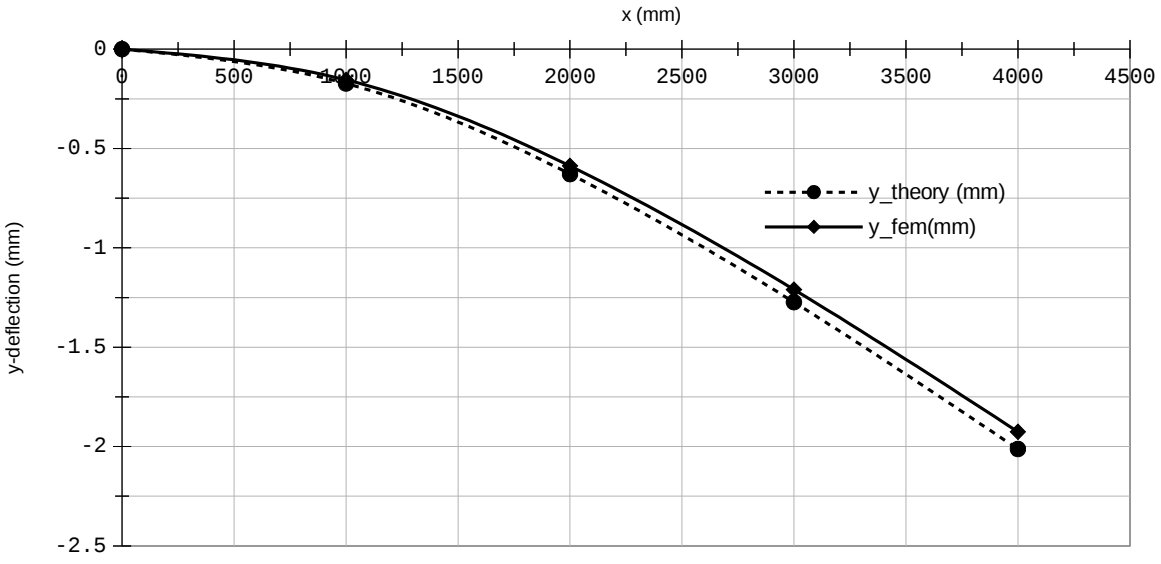
11. อ่านผลลัพธ์จากใน dat file ทำให้ทราบค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดดังนี้
-โหนดหมายเลข 1 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x,y และ z จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ในทุกแกน
-โหนดหมายเลข 2,3,4 และ 5 มีการเคลื่อนตัวลงในแกน y หรือโก่งตัวลงมามีค่าเท่ากับ -1.926206 mm

12. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์จากข้อ 11 ดังนี้

- การวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์สามารถทำได้โดยการศึกษาเปรียบเทียบระยะโก่งของระบบคานกับทางทฤษฎีมีสมการ[2]ดังแสดงในสมการ (3.1) คือ

$$y=\frac{P}{6\,EI}\left(x^3-3\,Lx^2\right) \tag{3.1}$$

เมื่อ y=ระยะโก่ง E = มอดุลัสยืดหยุ่น I=โมเมนต์เฉื่อยของพื้นที่หน้าตัด L= ความยาว x = ระยะที่จุดใดๆ ตามความยาว นำระยะโก่งตามสมการนี้มาเปรียบเทียบกับระยะโก่งที่ได้จาก dat file โดยนำค่า Vy ที่โหนดทั้ง 4 จุดมาพล็อตเปรียบเทียบกันดังแสดงในรูปที่3.6 เมื่อเส้นโค้ง y_theory คือระยะโก่งที่ได้จากทฤษฎีและ y_fem คือระยะโก่งที่ได้จากการคำนวณจากโปรแกรม CalculiX พบว่าเส้นทั้งสองมีแนวโน้มเดียวกันและมีความแตกต่างกันไม่มาก จึงสามารถสรุปได้ว่าผลการคำนวณหาระยะโก่งจากโปรแกรมมีความน่าเชื่อถือ จากผลการคำนวณระยะโก่งพบว่าที่จุดยึดไม่มีการโก่งตัว ระยะโก่งเพิ่มขึ้นตามระยะ x และมีค่าสูงสุดเกิดขึ้นที่ตำแหน่งปลายอิสระหรือตำแหน่ง x เท่ากับ 4 เมตร



รูปที่ 3.6 เปรียบเทียบผลลัพธ์จาก CalculiX กับทฤษฎี

13.ความถูกต้องของผลลัพธ์นอกจากศึกษาเปรียบเทียบจากระยะโก่งแล้วสามารถศึกษาเปรียบเทียบได้จากความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดคานได้อีกทางหนึ่ง ซึ่งทางทฤษฎีสามารถหาค่าความเค้นที่เกิดบนหน้าตัดที่ตำแหน่ง A หรือที่ตำแหน่งยึดได้ทั้งนี้เนื่องจากจุดนี้มีโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นสูงสุด ความเค้นบนหน้าตัดคือ

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \tag{3.2}$$

จากสมการ (3.2) เมื่อ

M คือโมเมนต์ดัดที่กระทำบนหน้าตัด

y คือระยะจากแกนสะเทินถึงตำแหน่งใดๆ ในแนวดิ่งของหน้าตัด

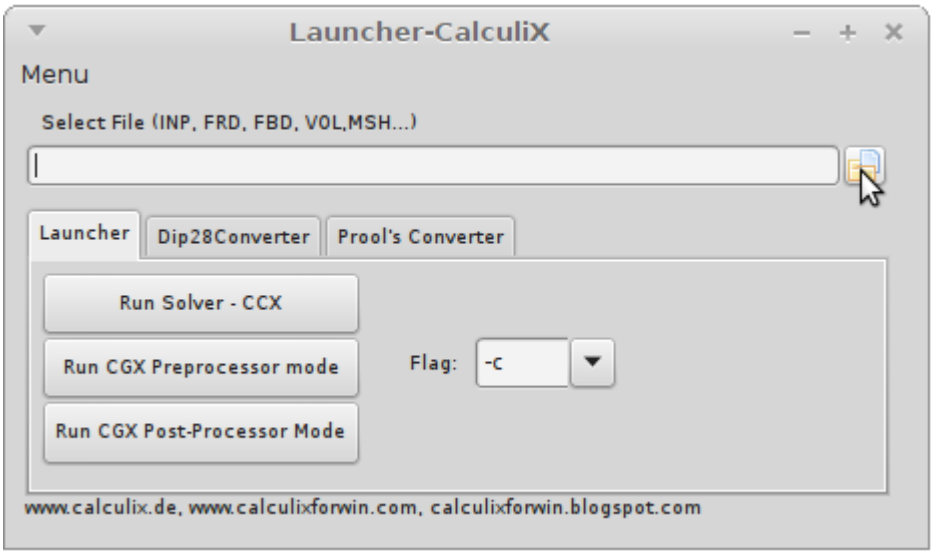
I คือค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดรอบแกน z ผ่านตำแหน่งศูนย์ถ่วงพื้นที่

ซึ่งในทางทฤษฎีสามารถหาค่าความเค้นสูงสุดบนหน้าตัดจากสมการ (3.2) คือ

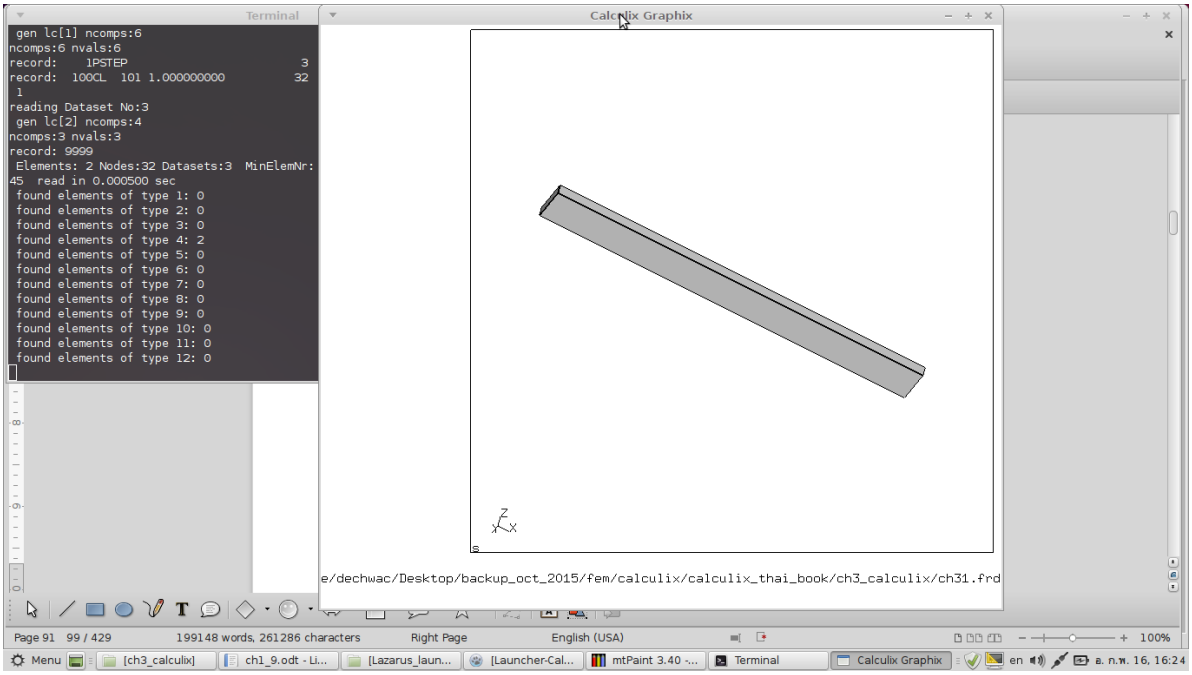
$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{(40\,x\,10^3(0.2))}{(5.3\,x\,10^{-4})} = \pm 15.09\ \text{MPa}$$

ซึ่งเป็นค่าทางทฤษฎี สำหรับค่าที่ได้การคำนวณด้วยโปรแกรม CalculiX นั้นสามารถหาได้จากไฟล์ frd ไฟล์นี้เป็นไฟล์เอาท์พุตท์ ที่สามารถเรียกดูผลในรูปแบบคอมพิวเตอร์กราฟิกได้ ในข้อนี้ได้บันทึกไฟล์ไว้ในชื่อ ch3.frd ดังนั้นการเรียกไฟล์นี้ดูผลลัพธ์ทำได้ดังนี้

13.1 ใช้ Launcher ซึ่งเป็นเครื่องมือหนึ่งที่ต้องมีการติดตั้งพร้อมโปรแกรม CalculiX เมื่อ Launcher ขึ้นมาจะปรากฏดังแสดงในรูปที่ 3.7 จากนั้นเลื่อนเมาส์กดเพื่อระบุตำแหน่งของ ch3.frd แล้วกด Run CGX Post-Processor Mode จากนั้นจะปรากฏ terminal พร้อมหน้าจอ Calculix Graphix ออกมาดังแสดงในรูปที่ 3.8 รายละเอียดการใช้งานสามารถอ่านเพิ่มเติมได้จาก CalculiX GraphiX user manual [3]



รูปที่ 3.7 หน้าต่างของ Launcher สำหรับรับการแสดงผลและประมวลผล



รูปที่ 3.8 การแสดงภาพด้วย CGX

จากนั้นเลื่อนเมาส์เข้าสู่หน้าจอ CalculiX GraphiX (CGX) ทำการสั่งให้โปรแกรมรายงานค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x หรือค่าความเค้นดัดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของคานดังนี้

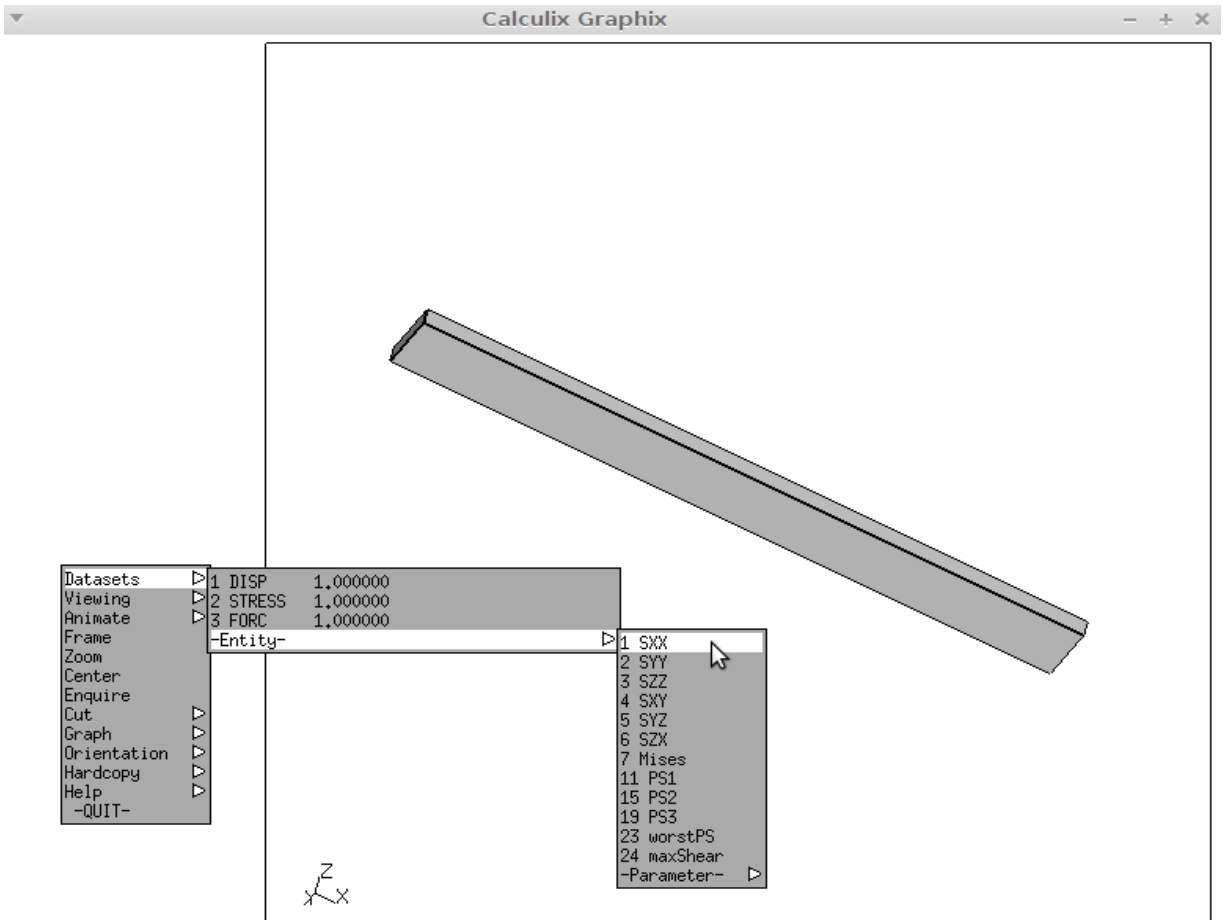
-คลิกเมาส์ปุ่มซ้ายให้มีเมนูปรากฏขึ้นมา

-คลิกที่ Datasets -> STRESS

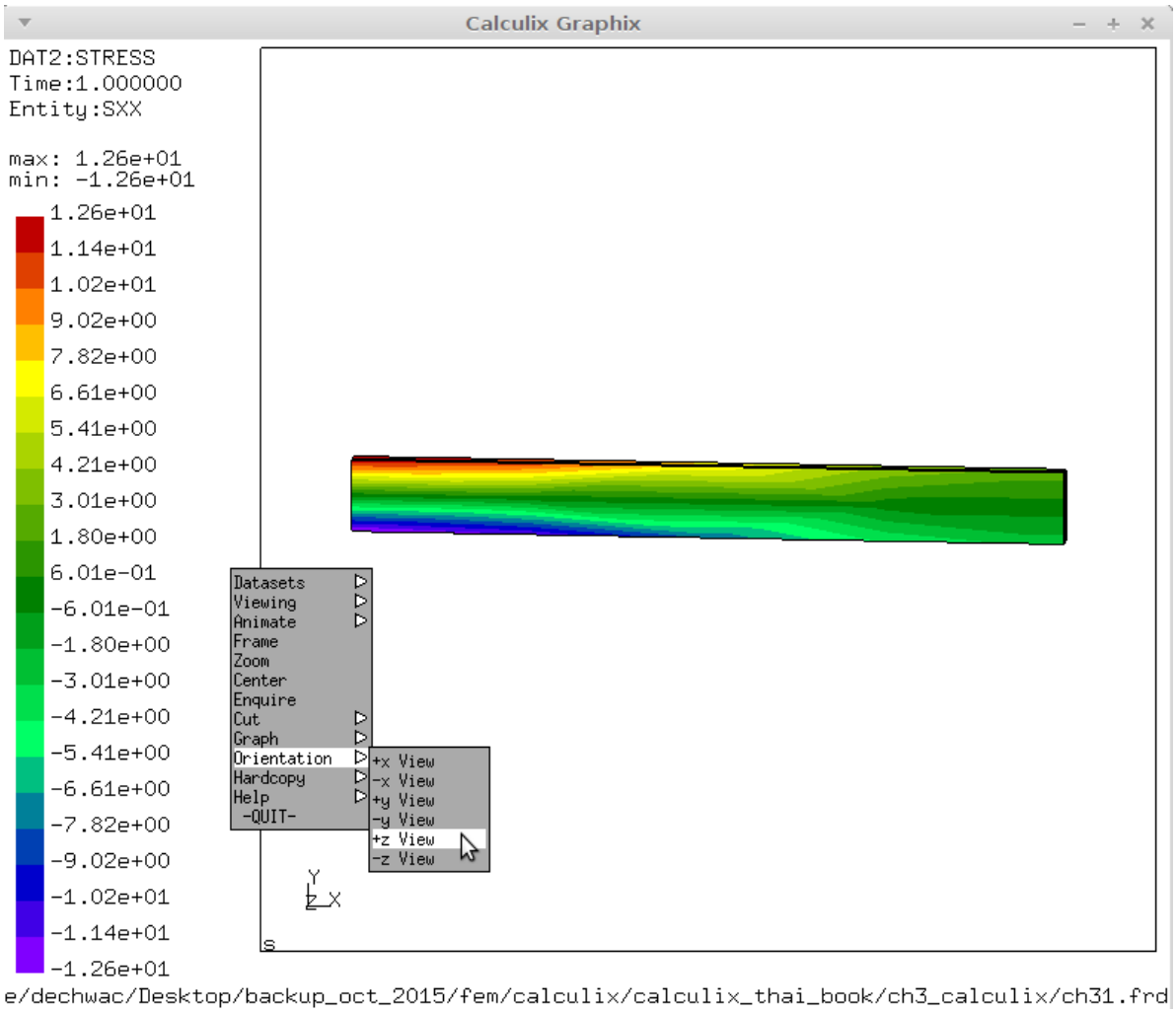
-เลือก Datasets ->Entity->SXX ดังแสดงในรูปที่ 3.9

-โปรแกรมจะแสดงผลของค่าความเค้นในรูปแบบคอมพิวเตอร์ดังแสดงในรูปที่ 3.10

-โปรแกรมจะแสดงความเค้นในแนวแกน x ออกมาด้วยสีต่างๆ ตามที่ค่าต่างกันไป สามารถปรับมุมมองของชิ้นงานโดยการกดที่ Orientation แล้วเลือกแกนที่แสดงจากมุมมองต่างๆ กันได้



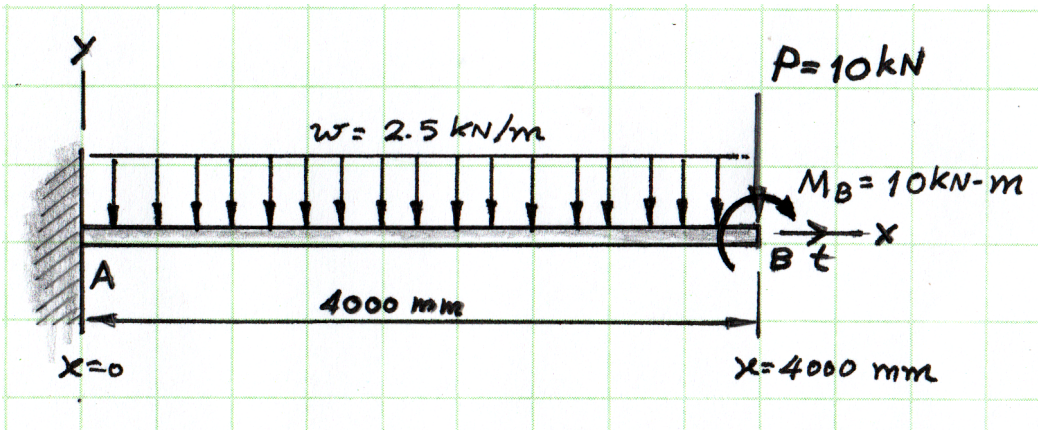
รูปที่ 3.9 การแสดงการใช้คำสั่งให้แสดงผลความเค้นด้วย CGX



รูปที่ 3.10 ภาพผลลัพธ์ของความเค้น

จากค่าความเค้นในแนวแกน x โดยแสดงจากค่าคอมพิวเตอร์กราฟิกพบว่าค่าความเค้นดัดที่เกิดขึ้นสูงสุดเท่ากับ $\pm 12.6\,\mathrm{MPa}$ ซึ่งเป็นความเค้นดึงที่ผิวบนและความเค้นอัดที่ผิวล่าง เมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการคำนวณมีความแตกต่างกันอยู่ประมาณ 16.5%

14 .จากตัวอย่างนี้ ถ้าต้องการเพิ่มเติมแรง เช่น แรงกระจาย และโมเมนต์ดัด ดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 คานรับแรงกระจายและโมเมนต์ดัด

ตัวอย่างเดิมแต่ลองเพิ่มเติมแรงกระจาย $w=$ 2.5 kN/m กับโมเมนต์ดัดที่ปลาย B $M_B=10$ kN-m สามารถดัดแปลง inp file เดิมได้ดังนี้

14.1 สำหรับ $M_B=10$ kN-m $= 10^7$ N-mm เพิ่มเติมข้อมูลลงในคำสั่ง*CLOAD โดยการใส่โมเมนต์ที่โหนดหมายเลข 5 ในหมายเลของศาอิสระหมายเลข 6 โดยกำหนดให้เป็นทิศลบได้ดังนี้

```
*CLOAD
5,2,-10000
5,6,-10000000
```

14.2 สำหรับแรงกระจาย $w=$ 2.5 kN/m $=$ 2.5 N/mm ต้องใช้คำสั่ง*DLOAD กำหนดความดันและความเค้นกระทำบนผิวของเอลิเมนต์ โดยให้ระบุชื่อเอลิเมนต์หรือกลุ่มเอลิเมนต์หรือหมายเลขเอลิเมนต์ที่มีความดันหรือความเค้นกระทำ ตามด้วยหมายเลขของผิวบนเอลิเมนต์นั้นซึ่งหมายเลขผิวของเอลิเมนต์อ้างอิงตาม [1] และตามด้วยค่าของความดันหรือความเค้น จากตัวอย่างนี้คือ

```
*DLOAD
**Apply as pressure=N/mm^2=w/wide=2.5/100 N/mm^2=0.025 N/mm^2
Eall,P2,-0.025
```

อธิบายได้คือ กำหนดความดันเท่ากับ 0.025 MPa กระทำบนผิวของคาน ซึ่งกลุ่มเอลิเมนต์ที่มีความดันกระทำมีชื่อว่า Eall ได้แก่ เอลิเมนต์หมายเลข 1-2 สำหรับเอลิเมนต์แบบคานมีการกำหนดหมายเลขผิวตามทิศของ $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ โดยกำหนดให้หมายเลข P1 คือผิวในทิศ $\hat{n}_1$ และ P2 คือผิวในทิศ $\hat{n}_2$ จากตัวอย่างนี้เลือกใช้ P2 เนื่องจากผิวอยู่ในทิศ $\hat{n}_2$ และเลือกใช้ความดันเท่ากับ -0.025 MPa ทั้งนี้เนื่องจากความดันมีทิศตรงข้ามกับผิว สำหรับค่าความดันที่ใส่ใน*DLOAD ในกรณีข้อนี้ต้องแปลงแรงกระจายให้เป็นความดันโดยนำไปหารกับความกว้างของหน้าตัดจึงมีค่าเท่ากับ -2.5/100=-0.025 N/mm^2

สำหรับส่วนเพิ่มเติมใน inp file คือ

```
*CLOAD
5,2,-10000
5,6,-10000000
*DLOAD
**Apply as pressure=N/mm^2=w/wide=2.5/100 N/mm^2=0.025 N/mm^2
Eall,P2,-0.025
```

14.3 inp file ใหม่ที่มีแรงเพิ่มเติมเข้าไปคือ

```
*HEADING
Example3.1_add.inp (cantilever beam with point load, distributed load and moment)
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,1000.0,0.0,0,0
3,2000.0,0.0,0.0
4,3000.0,0.0,0.0
5,4000.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=Eall
1,1,2,3
2,3,4,5
*BOUNDARY
1,1,6,0.0
2,3,3,0.0
3,3,3,0.0
4,3,3,0.0
5,3,3,0.0
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
*BEAM SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
100.0,400.0
*STEP
*STATIC
*CLOAD
5,2,-10000
5,6,-10000000
*DLOAD
**Apply as pressure=N/mm^2=w/wide=2.5/100 N/mm^2=0.025 N/mm^2
Eall,P2,-0.025
*EL PRINT,ELSET=Eall
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U,RF
*EL FILE
S
*END STEP
```

15. ส่ง inp file วิเคราะห์ด้วย CCX

15.1 ทำการศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม โดยศึกษาผลลัพธ์จากใน dat file พบว่าค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         2 -1.875000E-05 -2.680051E-01  0.000000E+00
         3 -3.750000E-05 -1.014708E+00  0.000000E+00
         4 -5.625000E-05 -2.099048E+00  0.000000E+00
         5 -7.500000E-05 -3.390575E+00  0.000000E+00
```

รูปที่ 3.12 ผลลัพธ์จาก dat file

จากข้อมูลที่ได้จาก output file พบว่า

-โหนดหมายเลข 1 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x, y และ z จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ในทุกแกน

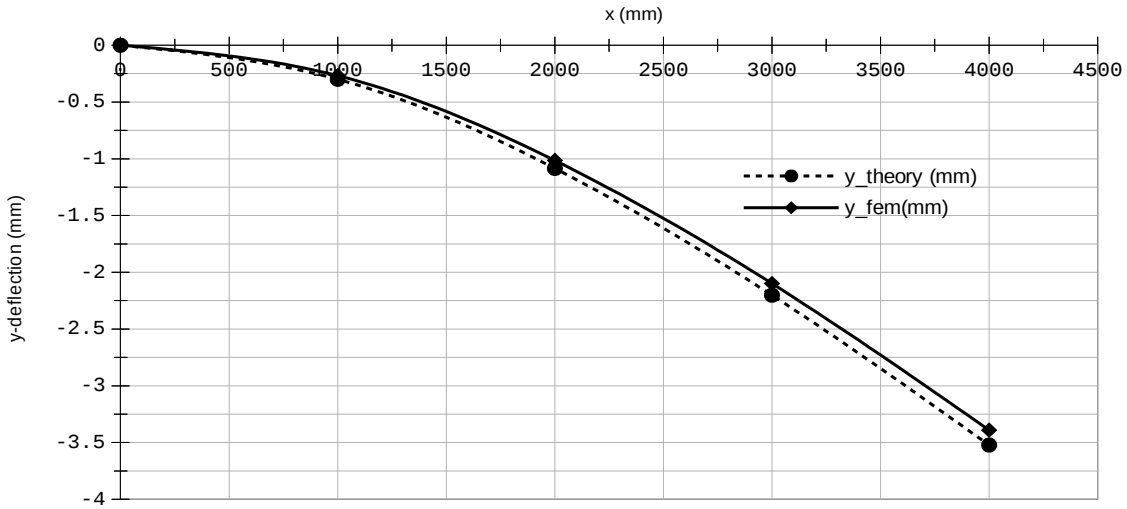
-โหนดหมายเลข 2,3,4 และ 5 มีการเคลื่อนตัวลงในแกน y หรือโก่งตัวลงมา ระยะการโก่งสูงสุดเกิดขึ้นที่โหนดหมายเลข 5 มีค่าเท่ากับ -3.390575 mm

15.2. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์จากข้อ 15.1 ดังนี้

-การวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์สามารถทำได้โดยการศึกษาเปรียบเทียบระยะโก่งของระบบคานที่มีแรงกระจายและแรงกระทำที่จุด ในทางทฤษฎี [2] มีคำตอบตามสมการที่ (3.3) คือ

$$y=\frac{P}{6EI}\left(x^3-3Lx^2\right)-\frac{w}{24EI}\left(x^4-4Lx^3+6L^2x^2\right)-\frac{Mx^2}{2EI} \tag{3.3}$$

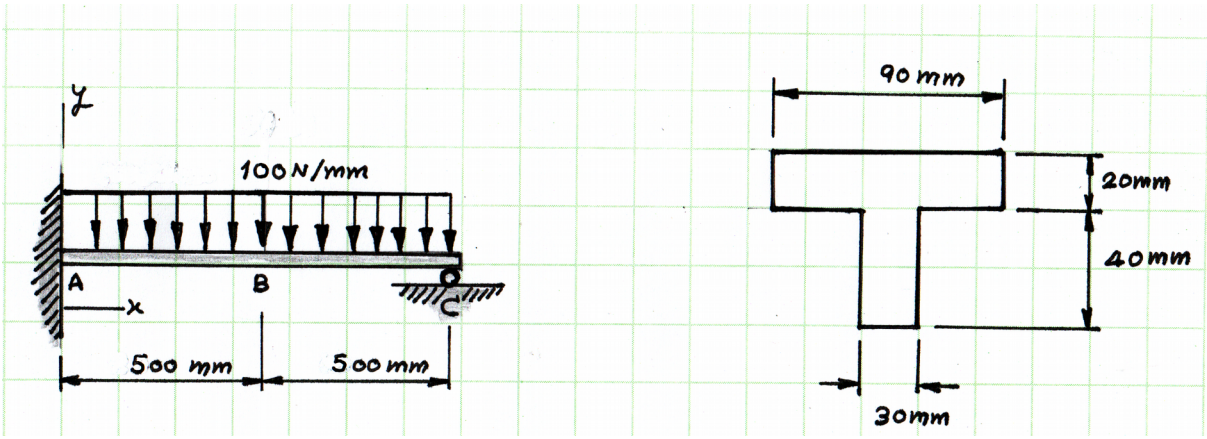
เมื่อ y=ระยะโก่ง E = มอดุลัสยืดหยุ่น I=โมเมนต์เฉื่อยของพื้นที่หน้าตัด L= ความยาว x = ระยะที่จุดใดๆ ตามความยาว นำระยะโก่งตามสมการนี้มาเปรียบเทียบกับระยะโก่งที่ได้จาก dat file โดยนำค่า Vy ที่โหนดทั้ง 4 จุดมาพล็อตเปรียบเทียบกันดังแสดงในรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 เปรียบเทียบผลลัพธ์จาก CalculiX กับทฤษฎี

3.3 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน B32 กับหน้าตัดคานแบบต่างๆ

หน้าตัดของคานอาจมีรูปร่างไม่ได้เป็นสี่เหลี่ยมหรือวงกลม หน้าตัดคานอาจมีรูปร่างต่างๆ ได้เช่น หน้าตัดรูปตัว T I และ H ในหัวข้อนี้เป็นการเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหาคานหน้าตัดแบบต่างๆ โดยการนำเอลิเมนต์แบบ B32 มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาการดัดของคาน หัวข้อนี้ขอยกตัวอย่างการแก้ปัญหาคาน ABC มีหน้าตัดรูปตัว T ปลาย A ผังผนัง (fixed end) ปลาย C รองรับด้วยลูกกลิ้ง (roller) ดังรูปที่ 3.14 มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคานเท่ากับ 100 N/mm เมื่อคานทำจากเหล็กกล้า (steel) มีค่า E=200 GPa จงเขียน inp file เพื่อหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้น



รูปที่ 3.14 คานหน้าตัดรูปตัว T

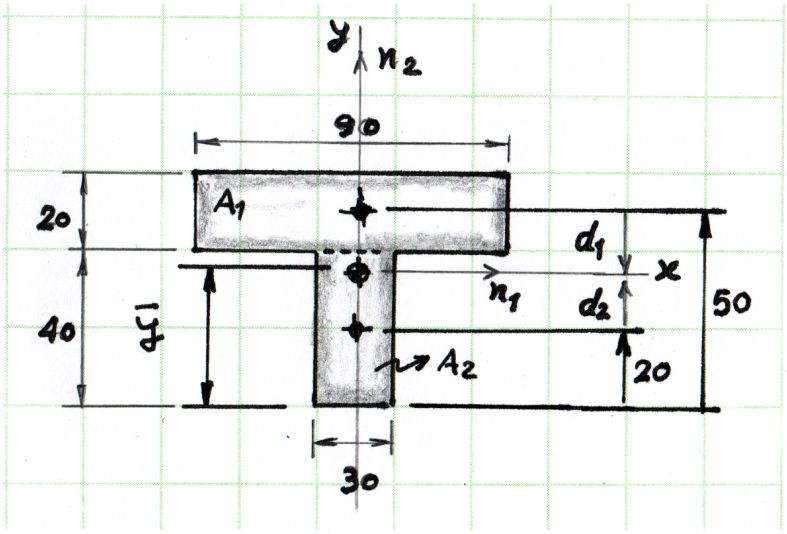
<u>การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา</u>

1.กำหนดหัวข้อและโหนด (heading and node definition) สำหรับปัญหากำหนดหัวข้อคือ Example 3.2 statically indeterminate beam with T cross section แบ่งคานตามความยาว 1000 mm กำหนดหมายเลขโหนดขึ้นมา 17 โหนดห่างเท่าๆ กัน มีคู่ลำดับและตั้งชื่อกลุ่มโหนดเหล่านี้ว่า NSET=Nall เขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*HEADING
Example 3.2 statically indeterminate beam with T cross section
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,62.5,0.0,0,0
3,125.0,0.0,0.0
4,187.5,0.0,0.0
5,250.0,0.0,0.0
6,312.5,0.0,0.0
7,375.0,0.0,0.0
8,437.5,0.0,0.0
9,500.0,0.0,0.0
10,562.5,0.0,0.0
11,625.0,0.0,0.0
12,687.5,0.0,0.0
13,750.0,0.0,0.0
14,812.5,0.0,0.0
15,875.0,0.0,0.0
```

```
16,937.5,0.0,0.0
17,1000.0,0.0,0.0
```

2.กำหนดเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ (element connectivity and element type)
เลือกใช้เอลิเมนต์ B32 และแบ่งหน้าตัดคานออกเป็นสองส่วนคือ
ส่วน A1 มีพื้นที่เท่ากับ 90x20 mm^2 และส่วน A2 มีพื้นที่เท่ากับ 30x40 mm^2 ดังแสดงในรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 หน้าตัดของคานประกอบ

-กำหนดให้กลุ่มเอลิเมนต์หมายเลข 1-8 ชื่อ A1 เป็นเอลิเมนต์แบบ B32 แทนคานในส่วน A1
-กำหนดให้กลุ่มเอลิเมนต์หมายเลข 9-16 ชื่อ A2 แป็นเอลิเมนต์แบบ B32 แทนคานในส่วน A2
-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดเอลิเมนต์คือ

```
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=A1
1,1,2,3
2,3,4,5
3,5,6,7
4,7,8,9
5,9,10,11
6,11,12,13
7,13,14,15
8,15,16,17
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=A2
9,1,2,3
10,3,4,5
11,5,6,7
12,7,8,9
13,9,10,11
14,11,12,13
15,13,14,15
16,15,16,17
```

-สังเกตเห็นได้ว่ากลุ่มเอลิเมนต์ทั้งสองส่วนมีโหนดร่วมกันตามความยาวคานแต่มีหมายเลขเอลิเมนต์กำกับแตกต่างกันไป ซึ่งจะมีประโยชน์ในการนำไปกำกับหน้าตัดของแต่ละส่วนที่แตกต่างกันออกไปในข้อถัดไป

3. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section)

กำหนดสมบัติของวัสดุ

-เรียกใช้ *MATERIAL เพื่อกำหนดชื่อวัสดุคือ STEEL

-เรียกใช้ *ELASTIC เพื่อกำหนดสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นคือค่ามอดุลัสเท่ากับ 200 GPa และค่าอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 ในที่นี้จำเป็นต้องใส่ค่า E= 200E+03 MPa ลงไปทั้งนี้เนื่องจากได้กำหนดค่ามิติความยาวเป็นหน่วย mm ตั้งแต่ตอนกำหนดค่าของโหนดดังนั้นหน่วยตรงนี้ต้องสอดคล้องกันกับหน่วย mm จึงต้องเปลี่ยน 200 GPa เป็น 200×10^3 MPa

-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของวัสดุคือ

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
```

กำหนดสมบัติหน้าตัดคาน เนื่องจากมีการกำหนดคานออกเป็นสองหน้าตัดคือ A1 และ A2

-ใช้*BEAM SECTION กำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์A1 และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุคือ STEEL ทำการกำหนดหน้าตัดเป็นแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (SECTION=RECT) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ เท่ากับ 90mm และ 20mm ตามลำดับ (ดูรูปที่ 3.15 ประกอบ) พร้อมกำหนด OFFSET2 เพื่อระบุสัดส่วนของระยะเยื้องจากแกนหมุนของรูปหน้าตัดย่อย A1 ในทิศ $\hat{n}_2$ เทียบกับความหนาของคานในทิศ $\hat{n}_2$ ไปยังแกนหมุนของรูปหน้าตัดรวม เนื่องจากจุดศูนย์กลางของพื้นที่รวม (ของ T cross section) นี้อยู่ที่ตำแหน่ง $\bar{y}=38 \text{ mm}$ สูงจากฐาน ดังนั้น OFFSET2=-0.6 คิดจากสัดส่วนของ d1= -(50-38) = -12 mm และ ความหนาคือ 20mm ในทิศ $\hat{n}_2$

-ใช้ *BEAM SECTION และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุคือ STEEL จากนั้นทำการกำหนดหน้าตัดเป็นแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (SECTION=RECT) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ เท่ากับ 30mm และ 40mm ตามลำดับ (ดูรูปที่ 3.15 ประกอบ) พร้อมกำหนด OFFSET2=0.45 คิดจากสัดส่วนของ d2= -(20-38) = 18 mm และ ความหนาคือ 40 mm

-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของหน้าตัด A1 และ A2 คือ

```
*BEAM SECTION,ELSET=A1,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT,OFFSET2=-0.6
90.0,20.0
*BEAM SECTION,ELSET=A2,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT,OFFSET2=0.45
30.0,40.0
```

4. กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

5. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)
กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า
-โหนดทั้งหมด ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน z
-โหนดหมายเลข 1 ไม่สามารถเคลื่อนและไม่สามารถหมุนตัวได้อิสระในทุกแนวแกน
-โหนดหมายเลข 17 ไม่สามารถเคลื่อนตัวในแนว y และ z แต่สามารถหมุนตัวได้อิสระในทุกแนวแกน
ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าขอบเขตและการเคลื่อนที่คือ

```
*BOUNDARY
Nall,3,3,0
1,1,6,0.0
17,2,3,0.0
```

6.กำหนดภาระแรงกระจาย $w = -100\ \text{N/mm}$ กระทำตลอดความยาวคานโดยกระทำบนผิวหน้า P2 ของกลุ่มเอลิเมนต์A1 ซึ่งผิวหน้าอยู่ตามทิศ $\hat{n}_2$ โดยการเปลี่ยนแปลงแรงต่อหน่วยความยาวเป็นแรงต่อหน่วยพื้นที่ ดังนั้นแรงกระจายบนพื้นที่มีค่าเท่ากับ-100/90=-1.111 N/mm^2 ดังนั้นคำสั่งสำหรับระบุแรงกระทำบนผิวคานคือ

```
*DLOAD
**Apply as pressure=N/mm^2=w/wide=-100/90 N/mm^2=-1.11 N/mm^2
A1,P2,-1.111
```

7. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า A1 และ A2 และให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall ดังนั้นคำสั่งชุดนี้คือ

```
*EL PRINT,ELSET=A1
S
*EL PRINT,ELSET=A2
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
```

ทำนองเดียวกันต้องการแสดงผลลัพธ์ทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้แสดงค่าความเค้นในเอลิเมนต์ทั้งหมดและค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE FILE
U,RF
*EL FILE
S
```

8. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง `*END STEP`

9.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-8 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ch32.inp

```
*HEADING
Example 3.2 statically indeterminate beam with T cross section
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,62.5,0.0,0,0
3,125.0,0.0,0.0
4,187.5,0.0,0.0
5,250.0,0.0,0.0
6,312.5,0.0,0.0
7,375.0,0.0,0.0
8,437.5,0.0,0.0
9,500.0,0.0,0.0
10,562.5,0.0,0.0
11,625.0,0.0,0.0
12,687.5,0.0,0.0
13,750.0,0.0,0.0
14,812.5,0.0,0.0
15,875.0,0.0,0.0
16,937.5,0.0,0.0
17,1000.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=A1
1,1,2,3
2,3,4,5
3,5,6,7
4,7,8,9
5,9,10,11
6,11,12,13
7,13,14,15
8,15,16,17
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=A2
9,1,2,3
10,3,4,5
11,5,6,7
12,7,8,9
13,9,10,11
14,11,12,13
15,13,14,15
16,15,16,17
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
*BEAM SECTION,ELSET=A1,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT,OFFSET2=-0.6
90.0,20.0
*BEAM SECTION,ELSET=A2,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT,OFFSET2=0.45
30.0,40.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
Nall,3,3,0
1,1,6,0.0
17,2,3,0.0
*DLOAD
**Apply as pressure=N/mm^2=w/wide=100/90 N/mm^2=1.11 N/mm^2
A1,P2,-1.111
*EL PRINT,ELSET=A1
S
*EL PRINT,ELSET=A2
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
```

```
U,RF
*EL FILE
S
*END STEP
```

10. ส่ง ch32.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file ch31.dat แสดงข้อมูลเฉพาะค่าระยะการโก่งตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1  0.000000E+00  9.999000E-07  0.000000E+00
         2 -8.197256E-03 -1.054168E-01  2.461944E-14
         3 -1.415213E-02 -3.566902E-01  4.935945E-14
         4 -1.708880E-02 -6.981560E-01  7.273016E-14
         5 -1.828165E-02 -1.081075E+00  9.659555E-14
         6 -1.721126E-02 -1.462842E+00  1.144653E-13
         7 -1.489561E-02 -1.807776E+00  1.332388E-13
         8 -1.107169E-02 -2.086327E+00  1.434146E-13
         9 -6.501063E-03 -2.275874E+00  1.565814E-13
        10 -1.177147E-03 -2.359924E+00  1.668090E-13
        11  4.394932E-03 -2.328912E+00  1.757714E-13
        12  9.965325E-03 -2.179404E+00  1.767505E-13
        13  1.528533E-02 -1.914893E+00  1.784604E-13
        14  1.984867E-02 -1.545002E+00  1.785033E-13
        15  2.366307E-02 -1.086280E+00  1.793015E-13
        16  2.596584E-02 -5.614106E-01  1.809990E-13
        17  2.702110E-02  9.999000E-07  1.823141E-13
forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1 -4.620233E-09  6.038270E+04  8.304823E-11
         2  9.458745E-11 -8.332500E+03 -1.295120E-09
         3  1.571607E-09 -4.166250E+03 -2.993374E-10
         4 -2.353772E-09 -8.332500E+03 -1.487933E-09
         5  6.541086E-09 -4.166250E+03 -1.016673E-09
         6 -4.944013E-09 -8.332500E+03  2.328306E-09
         7  1.208537E-08 -4.166250E+03  1.078206E-09
         8 -1.744411E-09 -8.332500E+03 -3.448804E-09
         9 -6.984919E-09 -4.166250E+03 -4.097842E-10
        10 -8.171810E-10 -8.332500E+03  1.593435E-09
        11 -3.963514E-09 -4.166250E+03  8.805046E-11
        12  7.983544E-09 -8.332500E+03  2.801244E-09
        13  9.204086E-10 -4.166250E+03 -8.379857E-10
        14  3.143214E-09 -8.332500E+03 -1.025910E-09
        15 -6.148184E-09 -4.166250E+03 -1.435374E-09
        16 -1.236913E-09 -8.332500E+03  2.964953E-09
        17  3.019522E-10  3.544105E+04  9.316636E-11
```

รูปที่ 3.16 แสดงผล dat file

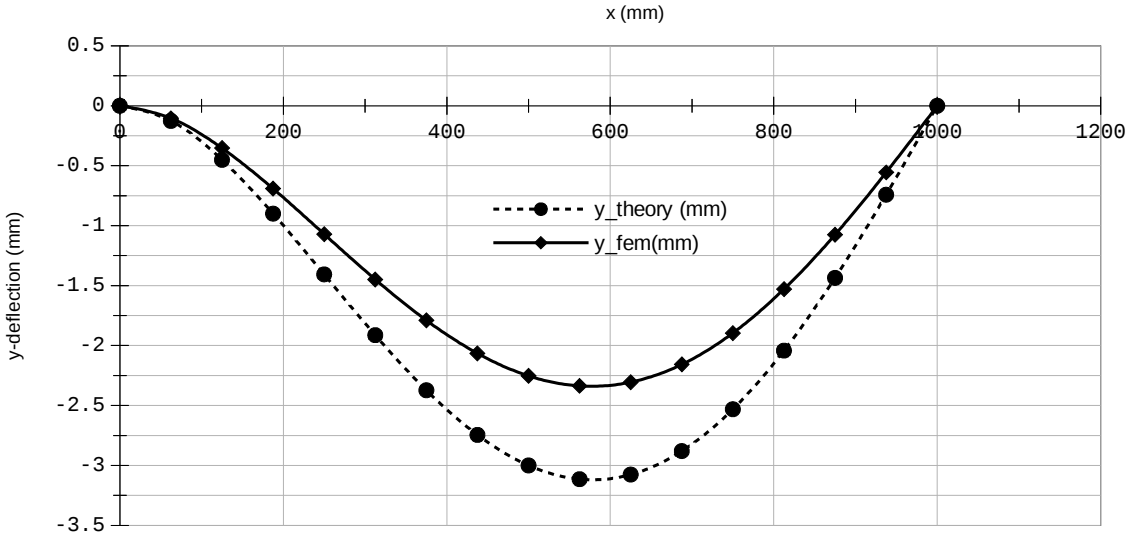
<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

11. อ่านผลลัพธ์จาก dat file ในรูปที่ 3.16 ทำให้ทราบค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดดังนี้

-โหนดหมายเลข 1 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x,y และ z จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ในทุกแกน

-โหนดที่เหลือมีการเคลื่อนตัวลงในแกน y หรือโก่งตัวลง ระยะการโก่งสูงสุดมีค่าเท่ากับ **-2.359924 mm** ที่บริเวณโหนดหมายเลข 10

-ทำการเปรียบเทียบ elastic curve จาก DAT file ที่โหนดต่างๆ เทียบกับผลการคำนวณ [4] แสดงผลดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 เปรียบเทียบผลลัพธ์จาก CalculiX กับทฤษฎี

จากข้อมูลส่วนนี้พบว่าค่าของระยะโก่งตัวสูงสุดที่ได้จากการคำนวณโดยโปรแกรมกับผลที่ได้จากทฤษฎีนั้นมีความแตกต่างกันประมาณ (3.11-2.3599)/3.11 x 100% = 24% ซึ่งถือว่าสูง สำหรับตำแหน่งที่เกิดค่าระยะโก่งตัวสูงสุดนั้นก็อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน อาจทำการศึกษาเปรียบเทียบผลความถูกต้องจากแรงปฏิกิริยาและค่าความเค้นสูงสุดที่ได้อีกแนวทางหนึ่งเพิ่มเติมในข้อถัดไป

12. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์ในแง่แรงปฏิกิริยาและความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นดังนี้

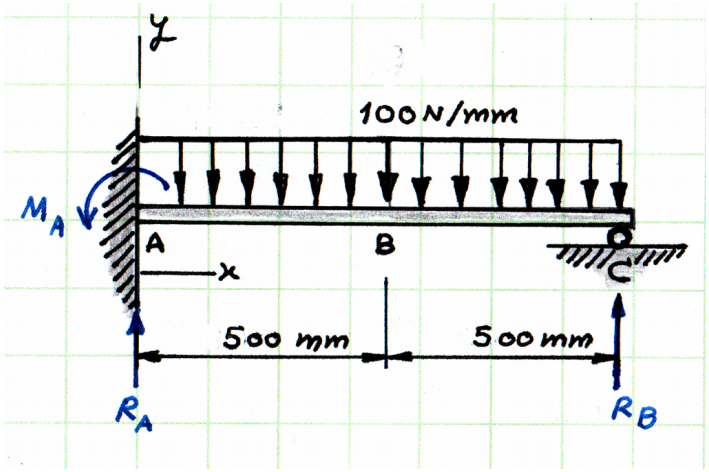
-การวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์สามารถทำได้โดยการศึกษาเปรียบเทียบแรงปฏิกิริยาดังรูปที่ 3.18 พบว่าจาก dat file ไม่มีการรายงานค่าโมเมนต์ปฏิกิริยาที่จุด A มีเพียงแต่ค่าแรงปฏิกิริยาเท่านั้นที่สามารถเปรียบเทียบได้

จากทฤษฎีแรงปฏิกิริยาตามสมการที่ (3.4) – (3.5) คือ

$$R_A = \frac{5}{8}(wl) \tag{3.4}$$

$$R_B = \frac{3}{8}(wl) \quad \text{และ} \quad M_A = \frac{1}{8}(wl^2) \tag{3.5}$$

เมื่อ w คือค่าของแรงกระจาย l คือระยะทั้งหมด



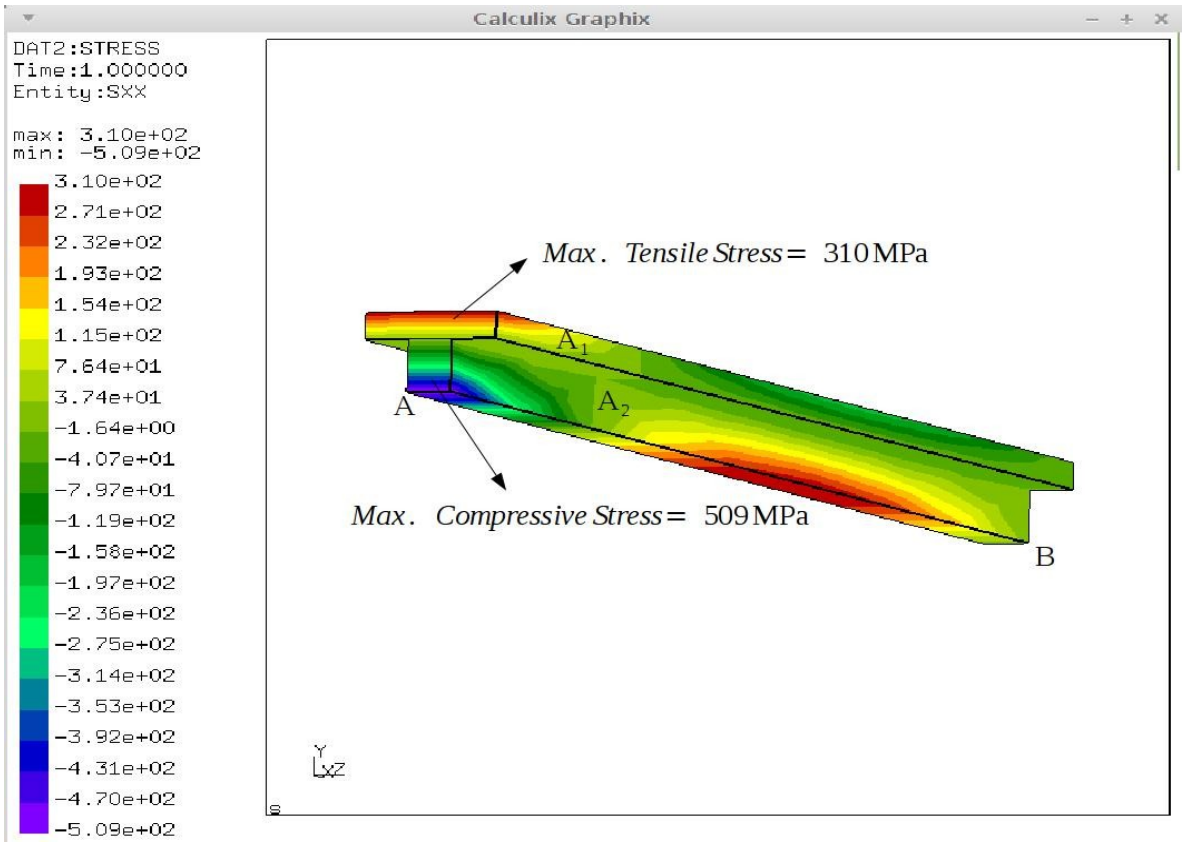
รูปที่ 3.18 ผังแรงของคาน

จากสมการ (3.4)-(3.5)ลองเปรียบเทียบค่าของแรงปฏิกิริยาที่ได้จากการคำนวณและจากทฤษฎีดังตารางที่ 3.1 พบว่าแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B พบว่ามีค่าความแตกต่างอยู่ในช่วงไม่เกิน 5.5%

ตารางที่3.1 เปรียบเทียบแรงปฏิกิริยา

แรงปฏิกิริยา	จากทฤษฎี	จาก DAT file	%แตกต่าง
R_A	62500 N	60382 N	3.4%
R_B	37500 N	35441 N	5.5%
M_A	12.5×10^6 N-mm	-	-

-ดูผล frd file จากโปรแกรม CGX สามารถหาค่าความเค้นดัดตั้งฉากกับหน้าตัดโดยการพล็อตค่า SXX จากโปรแกรมพบว่าค่าความเค้นสูงสุดต่ำสุดที่เกิดขึ้นบนคานเกิดขึ้นที่จุด A ตามที่แสดงในรูปที่ 3.19



รูปที่ 3.19 ผลของความเค้นแสดงด้วย CGX

จากทฤษฎีเมื่อศึกษาค่าความเค้นที่เกิดบนหน้าตัดที่ตำแหน่ง A หรือที่ตำแหน่งยึดได้ทั้งนี้เนื่องจากจุดนี้มีโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นสูงสุด ความเค้นบนหน้าตัดตามสมการที่ (3.2) คือ

$\sigma_x = \frac{My}{I}$ เมื่อ $M = M_A = 12.5\,x\,10^6$ N-mm

$y = -38$ mm คือระยะจากแกนสะเทินถึงตำแหน่งผิวล่างของหน้าตัด A ที่ตำแหน่งนี้เกิดความเค้นอัดสูงสุด

$y = 22$ mm คือระยะจากแกนสะเทินถึงตำแหน่งผิวบนของหน้าตัด A ที่ตำแหน่งนี้เกิดความเค้นดึงสูงสุด

$I = 868\,x\,10^3$ mm^4 คือค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดรอบแกน z ผ่านตำแหน่งศูนย์ถ่วงพื้นที่ ซึ่งในทางทฤษฎีสามารถหาค่าความเค้นตั้งฉากสูงสุดบนหน้าตัด A ได้ดังนี้

ความเค้นอัดสูงสุดคือ

$$\sigma_X^{max} = \frac{My}{I} = \frac{(125\,x\,10^5(-38))}{(868\,x\,10^3)} = -547 \text{ MPa}$$

ความเค้นดึงสูงสุดคือ

$$\sigma_X^{max} = \frac{My}{I} = \frac{(125\,x\,10^5(22))}{(868\,x\,10^3)} = \ 317 \ \ \text{MPa}$$

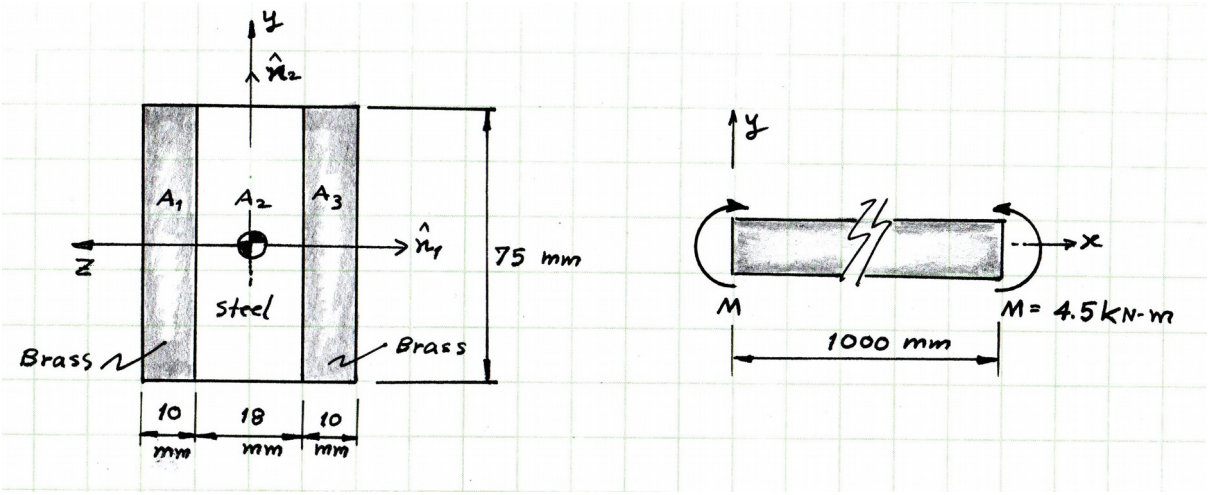
เปรียบเทียบผลลัพธ์คือความเค้นตั้งฉากบนหน้าตัดที่จุด A ระหว่างการคำนวณจากโปรแกรมและจากทฤษฎี พบว่ามีค่าความแตกต่างอยู่ในช่วงไม่เกิน 7% ดังแสดงในตารางที่ 3.2

ตารางที่3.2 เปรียบเทียบผลของความเค้นดัดสูงสุด

ความเค้นสูงสุด	จากทฤษฎี	จาก frd file	%แตกต่าง
ดึง	317 MPa	310 MPa	2.2%
อัด	-547 MPa	509 MPa	6.9%

3.4 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน B32 กับหน้าตัดคานประกอบจากวัสดุหลายชนิด

ในหัวข้อนี้เป็นการนำเอลิเมนต์แบบคาน B32 ใน 1 มิติ ใช้แก้ปัญหาหน้าตัดของคานที่ทำจากวัสดุหลายชนิด การเขียน inp file จะมุ่งเน้นไปที่ *BEAM SECTION ซึ่งต้องกำหนดให้หน้าตัดคานมีวัสดุต่างกันตามส่วนต่างๆ นั้นเอง สมมติคานหน้าตัดดังรูปที่ 3.20 ประกอบจากวัสดุต่างชนิดกัน ส่วนนอกหรือส่วน A1 และ A3 ทำจากทองเหลือง (brass , E=100 GPa) และส่วนตรงกลาง A2 ทำจากเหล็กกล้า (steel, E=200 GPa) วัสดุแต่ละส่วนยึดติดกันอย่างสมบูรณ์ (perfect bonding) เมื่อคานรับโมเมนต์ดัดเพียงอย่างเดียวตามขนาดและทิศทางที่ระบุและคานถูกดัดบนระนาบ xy โดยหน้าตัดคานมีความสมมาตรทั้งตามแกนนอนและแกนตั้งเมื่อพิจารณาจากจุดศูนย์ถ่วงพื้นที่



รูปที่ 3.20 หน้าตัดคานมีวัสดุหลายชนิด

<u>การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา</u>

1.กำหนดหัวข้อและโหนด (heading and node definition) กำหนดชื่อหัวข้อคือ Example 3.3 composite materials beam แบ่งคานตามความยาว 1000 mm กำหนดหมายเลขโหนดขึ้นมา 9 โหนดห่างเท่าๆ กัน มีคู่ลำดับและตั้งชื่อกลุ่มโหนดเหล่านี้ว่า NSET=Nall เขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*HEADING
Example 3.3  composite materials beam
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,125.0,0.0,0,0
3,250.0,0.0,0.0
4,375.0,0.0,0.0
5,500.0,0.0,0.0
6,625.0,0.0,0.0
7,750.0,0.0,0.0
8,875.0,0.0,0.0
9,1000.0,0.0,0.0
```

2.กำหนดเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ (element connectivity and element type)
เลือกใช้เอลิเมนต์คานคือ B32 แบ่งหน้าตัดคานออกเป็นสามส่วนดังแสดงในรูปที่ 3.20 คือ
ส่วน A1 ทำจากทองเหลืองหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่เท่ากับ 75x10 mm^2
ส่วน A2 ทำจากเหล็กกล้าหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่เท่ากับ 75x18 mm^2
ส่วน A3 ทำจากทองเหลืองหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่เท่ากับ 75x10 mm^2
-กำหนดให้กลุ่มเอลิเมนต์หมายเลข 1-4 ชื่อ A1 เป็นเอลิเมนต์แบบ B32 แทนคานในส่วน A1
-กำหนดให้กลุ่มเอลิเมนต์หมายเลข 5-8 ชื่อ A2 แเป็นเอลิเมนต์แบบ B32 แทนคานในส่วน A2
-กำหนดให้กลุ่มเอลิเมนต์หมายเลข 9-12 ชื่อ A3 แเป็นเอลิเมนต์แบบ B32 แทนคานในส่วน A2
-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดเอลิเมนต์คือ

```
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=A1
1,1,2,3
2,3,4,5
3,5,6,7
4,7,8,9
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=A2
5,1,2,3
6,3,4,5
7,5,6,7
8,7,8,9
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=A3
9,1,2,3
10,3,4,5
11,5,6,7
12,7,8,9
```

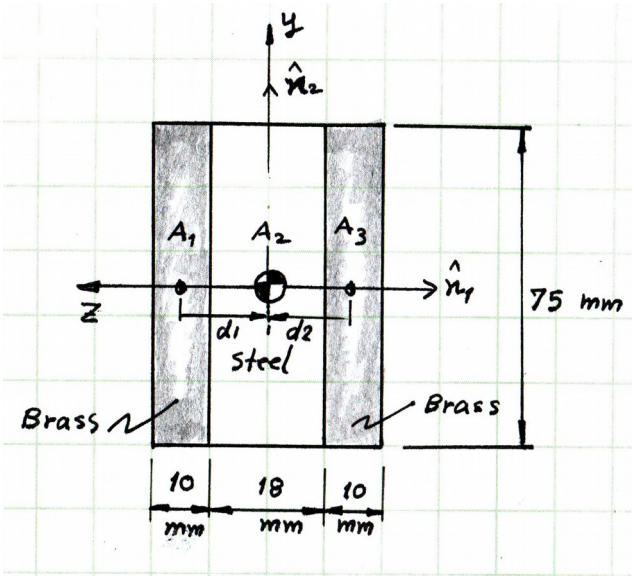
-สังเกตได้ว่ากลุ่มเอลิเมนต์ทั้งสามส่วนมีโหนดร่วมกันตามความยาวคานแต่มีหมายเลขเอลิเมนต์กำกับแตกต่างกันไป ซึ่งจะมีประโยชน์ในการนำไปกำกับหน้าตัดของแต่ละส่วนที่แตกต่างกันออกไปในข้อถัดไป

3. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section)
3.1 กำหนดสมบัติของวัสดุ
-เรียกใช้ *MATERIAL เพื่อกำหนดชื่อวัสดุคือ STEEL สำหรับเหล็กกล้าและชื่อ BRASS สำหรับทองเหลือง
-เรียกใช้ *ELASTIC เพื่อกำหนดสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นคือค่ามอดุลัสของเหล็กกล้าเท่ากับ 200 GPa และค่ามอดุลัสของทองเหลืองเท่ากับ 100 GPa อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 ในที่นี้จำเป็นต้องใช้ E เป็นหน่วย MPa เนื่องจากระยะกำหนดเป็น mm ตั้งแต่ต้น
-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของวัสดุคือ

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
*MATERIAL,NAME=BRASS
*ELASTIC
100E+03,0.3
```

3.2 กำหนดสมบัติหน้าตัดคาน เนื่องจากมีการกำหนดคานออกเป็นสามส่วนคือ A1, A2 และ A3

-เรียกใช้ *BEAM SECTION เพื่อกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ A1 และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุตาม BRASS กำหนดหน้าตัดเป็นแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (SECTION=RECT) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ เท่ากับ 10mm และ 75mm ตามลำดับ (ดูรูปที่ 3.20 ประกอบ) พร้อมกำหนด OFFSET1 สำหรับค่านี้คือสัดส่วนระหว่างระยะเยื้องของจุดศูนย์ถ่วงพื้นที่ของรูปหน้าตัดย่อย A1 ในทิศ $\hat{n}_1$ ไปยังจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่รวม (d1) กับความหนาของ A1 ในทิศ $\hat{n}_1$ ซึ่งจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่รวมอยู่ที่ตำแหน่ง $\bar{x}=0$ mm ดังนั้น OFFSET1=1.4 คิดจาก (10/2+18/2)/10=1.4 นั้นเอง ดังแสดงในรูป 3.21 สำหรับกลุ่มเอลิเมนต์ A3 เหมือนกับ A1 เพียงแต่ใช้ค่า d2 แทน



รูปที่ 3.21แสดงการกำหนดระยะออฟเซตของหน้าตัดคานประกอบ

-เรียกใช้ *BEAM SECTION และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุตาม STEEL กำหนดหน้าตัดเป็นแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (SECTION=RECT) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ เท่ากับ 18 mm และ 75 mm ตามลำดับ (ดูรูปที่ 3.21 ประกอบ) แต่ไม่มีการกำหนด OFFSET เนื่องจากจุดศูนย์ถ่วงพื้นที่ A2 อยู่ตรงจุดเดียวกับพื้นที่รวม

-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของหน้าตัด A1, A2 และ A3 คือ

```
*BEAM SECTION,ELSET=A1,MATERIAL=BRASS,SECTION=RECT,OFFSET1=1.4
10.0,75.0
*BEAM SECTION,ELSET=A2,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
18.0,75.0
*BEAM SECTION,ELSET=A3,MATERIAL=BRASS,SECTION=RECT,OFFSET1=-1.4
10.0,75.0
```

4. กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

5. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)
กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า
-โหนดทั้งหมด ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน z

```
*BOUNDARY
Nall,3,3,0.0
```

6.กำหนดภาระโมเมนต์ดัด $M = 4.5$ kN-m $= 4.5 x 10^6$ N-mm กระทำที่ปลายคานทั้งสองโดยกระทำที่โหนดหมายเลข 1 และ 9 ทิศตรงข้ามในองศาอิสระหมายเลข 6 คือการหมุนรอบแกน z

```
*CLOAD
1,6,-4.5E+06
9,6,4.5E+06
```

7. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า A1, A2 และ A3 และให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*EL PRINT,ELSET=A1
S
*EL PRINT,ELSET=A2
S
*EL PRINT,ELSET=A3
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
```

ทำนองเดียวกันต้องการแสดงผลลัพธ์ทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้แสดงค่าความเค้นในเอลิเมนต์ทั้งหมดและค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE FILE
U,RF
*EL FILE
S
```

8. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง `*END STEP`

9.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-8 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ch33.inp

```
*HEADING
Example 3.3 composite materials beam
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,125.0,0.0,0,0
3,250.0,0.0,0.0
4,375.0,0.0,0.0
5,500.0,0.0,0.0
6,625.0,0.0,0.0
7,750.0,0.0,0.0
8,875.0,0.0,0.0
9,1000.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=A1
1,1,2,3
2,3,4,5
3,5,6,7
4,7,8,9
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=A2
5,1,2,3
6,3,4,5
7,5,6,7
8,7,8,9
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=A3
9,1,2,3
10,3,4,5
11,5,6,7
12,7,8,9
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
*MATERIAL,NAME=BRASS
*ELASTIC
100E+03,0.3
*BEAM SECTION,ELSET=A1,MATERIAL=BRASS,SECTION=RECT,OFFSET1=1.4
10.0,75.0
*BEAM SECTION,ELSET=A2,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
18.0,75.0
*BEAM SECTION,ELSET=A3,MATERIAL=BRASS,SECTION=RECT,OFFSET1=-1.4
10.0,75.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
Nall,3,3,0.0
*CLOAD
1,6,-4.5E+06
9,6,4.5E+06
*EL PRINT,ELSET=A1
S
*EL PRINT,ELSET=A2
S
*EL PRINT,ELSET=A3
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U,RF
*EL FILE
S
*END STEP
```

10. ส่ง ch33.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file ch33.dat แสดงข้อมูลเฉพาะค่าระยะการโก่งตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  1.184656E-01  7.568755E-01  0.000000E+00
         2  1.184656E-01 -3.416386E-02  0.000000E+00
         3  1.184656E-01 -5.598971E-01  0.000000E+00
         4  1.184656E-01 -8.203241E-01  0.000000E+00
         5  1.184656E-01 -8.154451E-01  0.000000E+00
         6  1.184656E-01 -5.452599E-01  0.000000E+00
         7  1.184656E-01 -9.768633E-03  0.000000E+00
         8  1.184656E-01  7.910288E-01  0.000000E+00
         9  1.184656E-01  1.857132E+00  0.000000E+00

 forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1 -1.823446E-08 -9.882647E-08 -1.830699E-09
         2 -5.052499E-09 -1.588100E-08  2.721208E-09
         3 -1.228355E-08  4.801825E-08 -1.226113E-10
         4 -5.018521E-09  1.675620E-08 -1.004082E-09
         5  3.132079E-09  1.179205E-07  4.075673E-11
         6 -8.975789E-10  2.493380E-09  9.022187E-10
         7  1.785361E-08  5.372987E-08  5.140350E-10
         8  4.226045E-09 -3.034862E-08 -2.342858E-09
         9  1.626086E-08 -9.375303E-08  1.121407E-09
```

รูปที่ 3.22

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

11. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์จากความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดดังนี้

-สำหรับปัญหานี้การวิเคราะห์ความเค้นสูงสุดบนหน้าตัดที่เกิดจากการดัดในทางทฤษฎีสามารถหาค่าได้จากวิธี transformed section โดยการหาค่าความเค้นสูงสุดในหน้าตัดเหล็กทำโดยการแปลงค่าหน้าตัดจากทองเหลืองมาเป็นเหล็ก และเมื่อหาค่าความเค้นสูงสุดในหน้าตัดทองเหลืองทำโดยการแปลงหน้าตัดจากเหล็กมาเป็นทองเหลือง ในการแปลงนี้ยังคงรักษาตำแหน่งศูนย์ถ่วงพื้นที่รวมและระยะจากแกนสะเทินไปยังผิวอิสระไว้ที่เดิม ส่วนที่แปลงคือขนาดของหน้าตัดซึ่งขยายออกในแนว $\hat{n}_1$ โดยขยายออกตามสัดส่วนของมอดุลัสระหว่างเหล็กและทองเหลือง [5] ดังสมการที่ (3.6)

$$n=\frac{E_s}{E_b}=\frac{200\,\text{GPa}}{100\,\text{GPa}}=2 \tag{3.6}$$

ดังนั้นโดยวิธี transformed section หน้าตัดของเหล็กกล้าจากขนาด 75 mm x 18 mm จะถูกเปลี่ยนเป็นหน้าตัดของทองเหลืองขนาด 75 mm x (2x18) mm = 75 mm x 36 mm ซึ่งขณะนี้เสมือนหน้าตัดทั้งหมดของคานคือทองเหลืองเดิมบวกกับหน้าที่แปลงมาจากเหล็ก ดังนั้นขนาดหน้าตัดคานที่เป็นทองเหลืองทั้งหมดคือ 75 mm x (36+20) mm ในทำนองเดียวกันสามารถใช้วิธีนี้แปลงหน้าตัดจากทองเหลืองเป็นเหล็กกล้าซึ่ง

ถ้าแปลงเป็นเหล็กกล้านั้นหน้าตัดของคานที่เป็นเหล็กกล้าทั้งหมดคือ 75 mm x (20/2+18) mm เมื่อนำไปคำนวณความเค้นสูงสุดได้ดังนี้

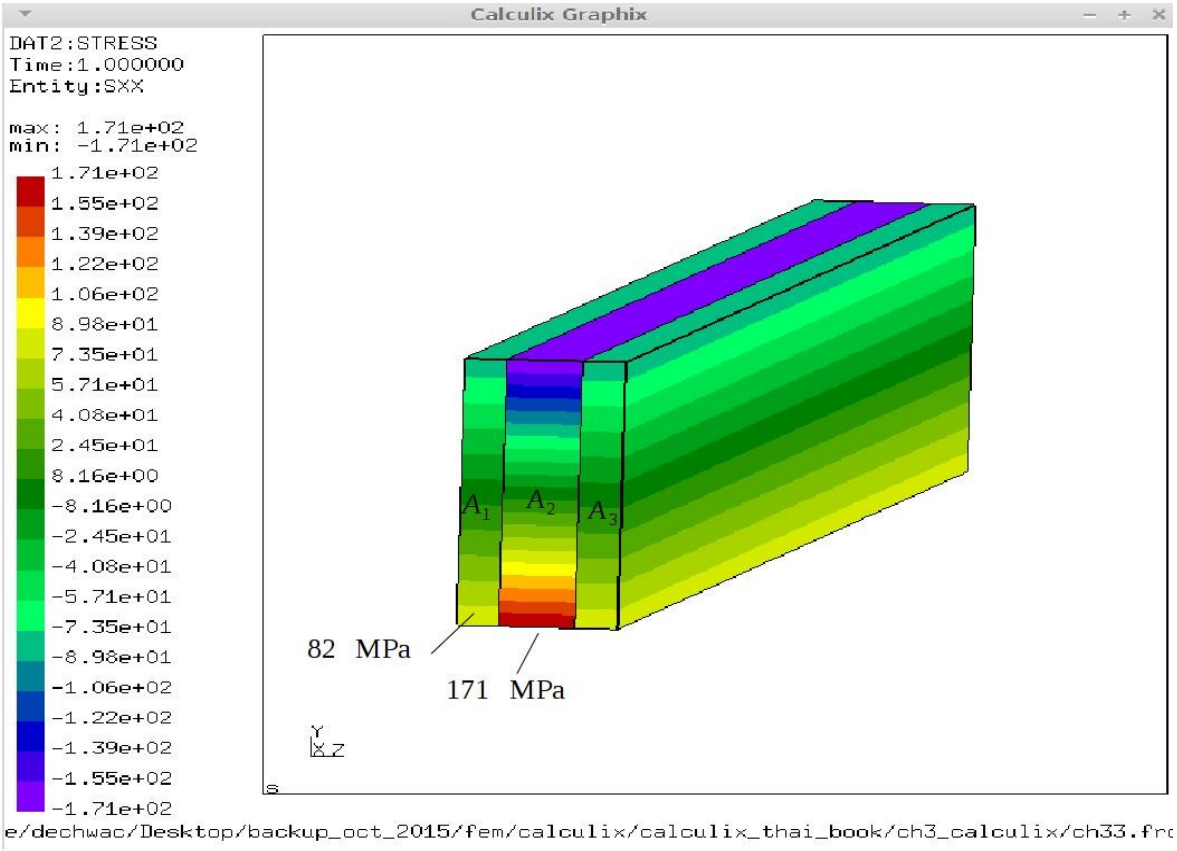
$\sigma_{max}^{steel}=\frac{Mc}{I_s}$ และ $\sigma_{max}^{brass}=\frac{Mc}{I_b}$ เมื่อ $I_s=\frac{1}{12}(28\,\text{mm})(75\,\text{mm})^3=984{,}375\ \text{mm}^4$ และ

$I_b=\frac{1}{12}(56\,\text{mm})(75\,\text{mm})^3=1{,}968{,}750\ \text{mm}^4$ ดังนั้น

$$\sigma_{max}^{steel}=\frac{(4{,}500{,}000\,\text{N-mm})(37.5\,\text{mm})}{984{,}375\,\text{mm}^4}=\ 171.42\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{max}^{brass}=\frac{(4{,}500{,}000\,\text{N-mm})(37.5\,\text{mm})}{1{,}968{,}750\,\text{mm}^4}=\ 85.71\ \text{MPa}$$

จากโปรแกรม CGX สามารถหาดูผลจากคอมพิวเตอร์กราฟิกโดยใช้ frd file ความเค้นดัดตั้งฉากกับหน้าตัดโดยการพล็อตค่า SXX จากโปรแกรมพบว่าค่าความเค้นสูงสุดต่ำสุดที่เกิดขึ้นบนคานเกิดขึ้นที่จุด A ตามที่แสดงในรูปที่ 3.23



รูปที่ 3.23 ผลัพธ์ชองความเค้นแสดงด้วย CGX

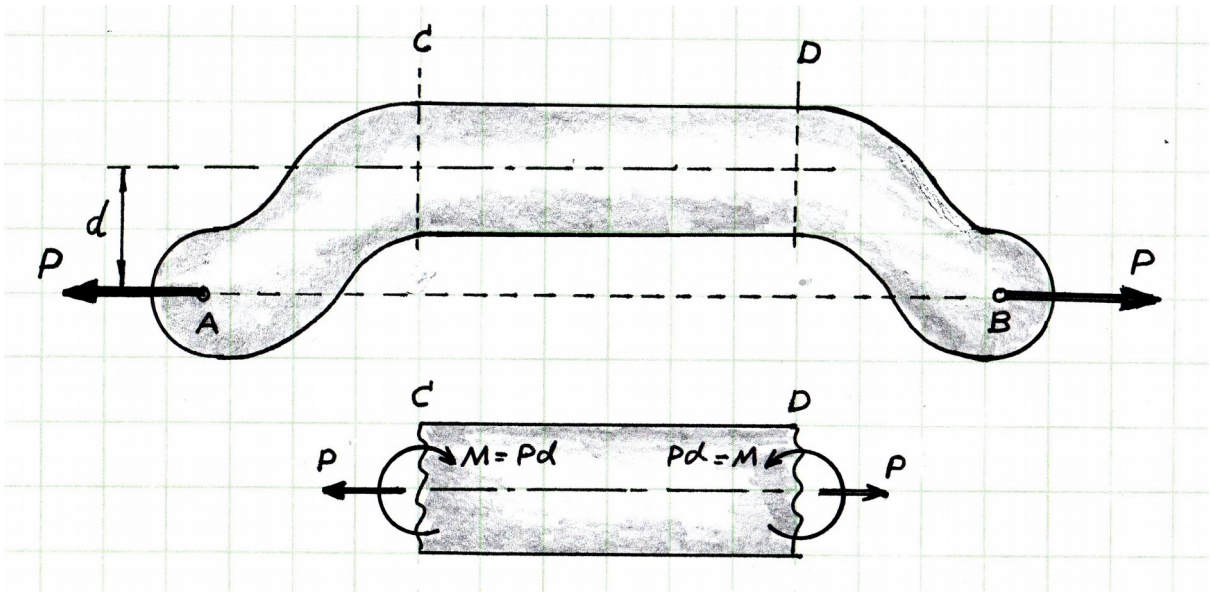
เปรียบเทียบผลลัพธ์คือความเค้นตั้งฉากบนหน้าตัดของคานระหว่างการคำนวณจากโปรแกรมและจากทฤษฎี พบว่ามีค่าความแตกต่างอยู่ในช่วงไม่เกิน 4.3% ดังแสดงในตารางที่ 3.3

ตารางที่3.3 เปรียบเทียบผลของความเค้นดึงสูงสุด

ความเค้นดึงสูงสุด	จากทฤษฎี	จาก frd file	%แตกต่าง
หน้าตัดทองเหลือง	171.42 MPa	171 MPa	0.25%
หน้าตัดเหล็กกล้า	85.71 MPa	82 MPa	4.3%

3.5 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน B32 กับชิ้นงานที่มีความเค้นผสมจากแรงดึงและดัด

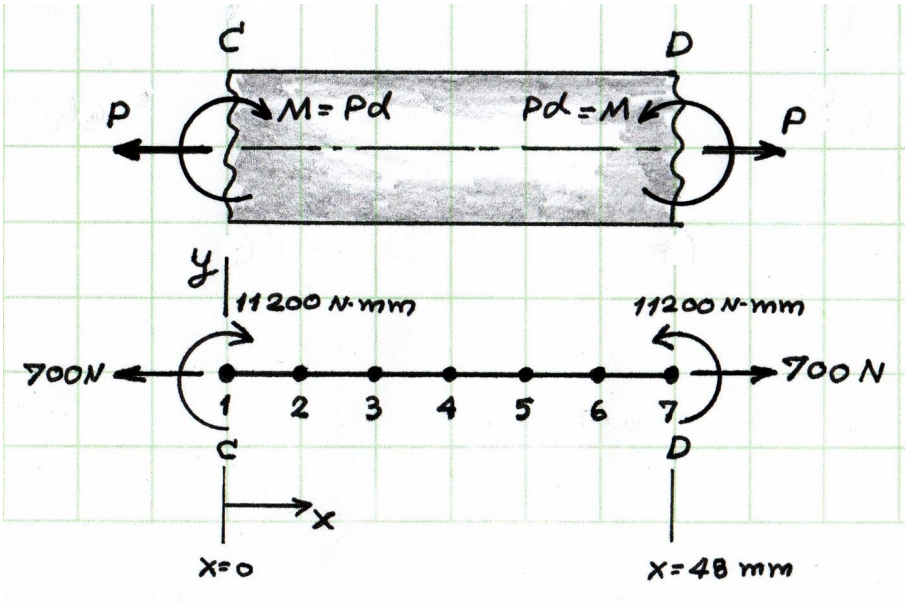
ในหัวข้อนี้เป็นการนำเอลิเมนต์แบบคาน B32 แก้ปัญหาคานเมื่อรับแรงดึงในแนวแกนตามยาวของคาน พร้อมกับรับโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นพร้อมกัน สำหรับใน Calculix สามารถนำเอลิเมนต์แบบคานมาประยุกต์ใช้ได้พร้อมกันทั้งการรับแรงในแนวแกนและการดัดบนระนาบ สมมติชิ้นงานดังรูปที่ 3.24 มีแรงดึง P ในแนว AB กระทำซึ่งเยื้องจากแกนของ CD เท่ากับ d ความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นในช่วง CD หาได้จากแรงลัพธ์ภายในที่เกิดขึ้นบนหน้าตัด ในที่นี้มีแรงดึง P พร้อมกับโมเมนต์ดัด M=Pd กระทำ กรณีนี้สามารถเลือกใช้เอลิเมนต์B32 กับชิ้นงานในช่วง CD



รูปที่ 3.24 คานรับแรงดึงและดัด

สมมติกำหนดให้ มีแรงดึง P = 700 N กระทำต่อชิ้นงานที่จุด A และ B เมื่อระยะ d=16 mm และ CD มีหน้าตัดตันกลมเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 12 mm ยาวเท่ากับ 48 mm เมื่อวัสดุทำจากเหล็กกล้ามีค่ามอดุลัส

ยืดหยุ่นเท่ากับ 210 GPa อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 สามารถเขียน inp file เพื่อหาความเค้นตั้งฉากที่กระจายอยู่บนหน้าตัดในช่วงความยาว CD ได้ดังนี้



รูปที่ 3.25 การจำลองเอลิเมนต์และโหนด

<u>การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา</u>

1.กำหนดหัวข้อและโหนด (heading and node definition) กำหนดหัวข้อชื่อ Example 3.4 eccentric axial loading พิจารณาช่วง CD เป็นคานมีความยาว 48 mm จากรูปที่ 3.25 กำหนดหมายเลขโหนดขึ้นมา 7 โหนดห่างเท่าๆ กัน มีคู่ลำดับและตั้งชื่อกลุ่มโหนดเหล่านี้ว่า NSET=Nall เขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*HEADING
Example 3.4 eccentric axial loading
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,8.0,0.0,0,0
3,16.0,0.0,0.0
4,24.0,0.0,0.0
5,32.0,0.0,0.0
6,40.0,0.0,0.0
7,48.0,0.0,0.0
```

2.กำหนดเอลิเมนต์และรูปแบบเอลิเมนต์ (element connectivity and element type)
เลือกใช้เอลิเมนต์คาน B32 จำนวน 3 เอลิเมนต์สำหรับช่วง CD ตั้งชื่อกลุ่มเอลิเมนต์นี้ว่า cd

```
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=cd
1,1,2,3
2,3,4,5
```

```
3,5,6,7
```

3. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section)

3.1 กำหนดสมบัติของวัสดุ

-เรียกใช้ *MATERIAL เพื่อกำหนดชื่อวัสดุคือ STEEL

-เรียกใช้ *ELASTIC เพื่อกำหนดสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นคือค่ามอดุลัสของเหล็กกล้าเท่ากับ 210 GPa อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 ในที่นี้จำเป็นต้องใช้ E เป็นหน่วย MPa เนื่องจากระยะกำหนดเป็น mm ตั้งแต่ต้น

-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของวัสดุคือ

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
```

3.2 กำหนดสมบัติหน้าตัดคาน

-เรียกใช้ *BEAM SECTION เพื่อกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ cd และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุคือ STEEL และกำหนดหน้าตัดเป็นแบบวงกลม (SECTION=CIRC) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ เท่ากันคือ 12 mm ซึ่งเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของหน้าตัด โดยไม่มีการกำหนด OFFSET

-ดังนั้นในส่วนของ inp file คือ

```
*BEAM SECTION,ELSET=cd,MATERIAL=STEEL,SECTION=CIRC
12.0,12.0
```

4. กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

5. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)

-โหนดทั้งหมด ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน z

```
*BOUNDARY
Nall,3,3,0.0
```

-กำหนดแรงกระทำในแนวแกน P และโมเมนต์ดัด $M = 11{,}200$ N-mm $= 700\,x\,16$ N-mm ที่ปลายคานทั้งสองโดยกระทำที่โหนดหมายเลข 1 และ 7 ทิศตรงข้ามกันในองศาอิสระหมายเลข 6 คือหมุนรอบแกน z

```
*CLOAD
1,1,-700
7,1,700
1,6,-11200
7,6,11200
```

6. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)

-จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า cd และให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*EL PRINT,ELSET=cd
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
```

-ทำนองเดียวกันต้องการแสดงผลลัพธ์ทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้แสดงค่าความเค้นในเอลิเมนต์ทั้งหมดและค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE FILE
U,RF
*EL FILE
S
```

7. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง *END STEP

8.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-8 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ch34.inp

```
*HEADING
Example 3.4 eccentric axial loading
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,8.0,0.0,0,0
3,16.0,0.0,0.0
4,24.0,0.0,0.0
5,32.0,0.0,0.0
6,40.0,0.0,0.0
7,48.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=cd
1,1,2,3
2,3,4,5
3,5,6,7
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
*BEAM SECTION,ELSET=cd,MATERIAL=STEEL,SECTION=CIRC
12.0,12.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
Nall,3,3,0.0
*CLOAD
1,1,-700
7,1,700
1,6,-11200
7,6,11200
*EL PRINT,ELSET=cd
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U,RF
```

```
*EL FILE
S
*END STEP
```

9. ส่ง ch34.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file ch34.dat แสดงข้อมูลเฉพาะค่าระยะการโก่งตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1 -5.831252E-03  1.754755E-02 -2.710505E-20
         2 -5.416443E-03  1.024441E-02  0.000000E+00
         3 -5.036445E-03  6.840261E-03  5.421011E-20
         4 -4.847898E-03  6.872592E-03  0.000000E+00
         5 -4.659352E-03  1.029844E-02  0.000000E+00
         6 -4.279353E-03  1.716077E-02  0.000000E+00
         7 -3.864545E-03  2.792208E-02  0.000000E+00

forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1 -7.000000E+02 -3.644722E-11  2.424120E-13
         2 -7.925882E-12 -2.120151E-11  1.876412E-12
         3 -6.234346E-12  2.738743E-11 -1.789680E-12
         4  8.550050E-12 -1.404049E-11 -3.329781E-12
         5 -9.219292E-12  1.414435E-10 -7.580603E-12
         6  2.688250E-11 -3.979883E-11  8.544276E-12
         7  7.000000E+02 -5.735501E-11  1.666223E-12
```

รูปที่ 3.26 แสดงผลใน dat file

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

10. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์

10.1 ตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์จาก dat file โดยการลองเปรียบเทียบค่าการยืดตัวออกในแนวแกนของช่วง CD เนื่องจากแรงดึง 700 N ที่มากระทำ จากคำนวณค่าการยืดตัวในแนวแกนตามกฎของฮุคคือ

$\delta_{CD}=\frac{P\,l}{A\,E}$ เมื่อ P = 700 N l=48 mm A= พื้นที่หน้าตัดวงกลม E = 210x10^3 MPa

เมื่อ d = 12 mm ได้ $A=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{3.146}{4}(12)^2 = 113.26\ \text{mm}^2$

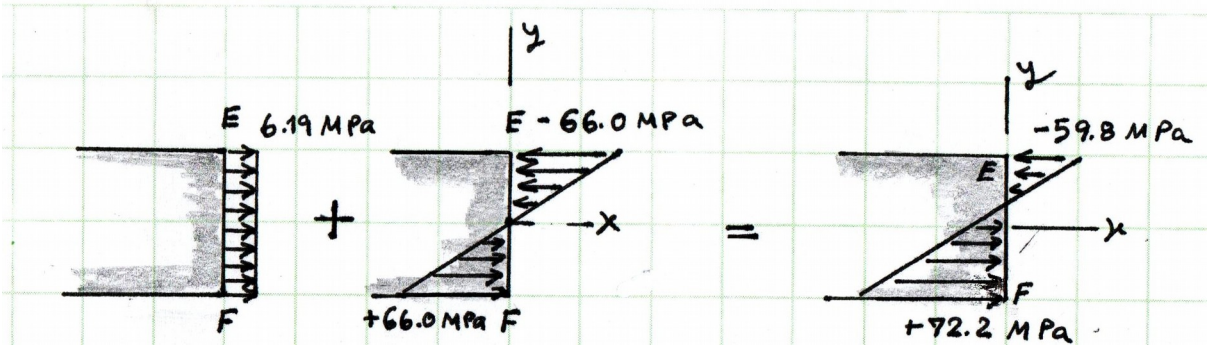
$$\delta_{CD}=\frac{(700\,\text{N})(48\,\text{mm})}{(113.26\,\text{mm}^2)(210\,x\,10^3\,\text{N/mm}^2)} = 1.413\,x\,10^{-3}\,\text{mm}$$

สำหรับผลลัพธ์จากโปรแกรมให้พิจารณาจาก dat file โดยการนำค่า Vx ที่โหนดหมายเลข 1 และ 7 มาเทียบกันคือ

$\delta_{CD}=-3.864545\text{E-}03+5.831252\text{E-}03\ \text{mm} = 1.967\,x\,10^{-3}\ \text{mm}$

ความแตกต่างระหว่างผลคำนวณกับผลจากโปรแกรมคือ 40 % ซึ่งถือว่ามาก ความแตกต่างนี้อาจเกิดขึ้นจากการที่เอลิเมนต์ B32 มีการเลือกใช้ shape function ที่อาจมีดีกรีมากกว่า 3 ในการเคลื่อนตัวในแนวแกน

10.2 ตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์จาก frd file โดยเปรียบเทียบค่าความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดชิ้นงาน ในปัญหานี้ทางทฤษฎีความเค้นตั้งฉากบนหน้าตัดชิ้นงานเกิดจากการรวมตัวกันของความเค้นที่เกิดจากแรงดึง P และความเค้นที่เกิดจากการดัดด้วย M ถ้านำความเค้นทั้งสองมารวมกันคือความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดใดๆ ในช่วง CD สมมติพิจารณาที่หน้าตัด EF ดังรูปที่ 3.27



รูปที่ 3.27 ความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดใดๆ เนื่องจากแรงผสม

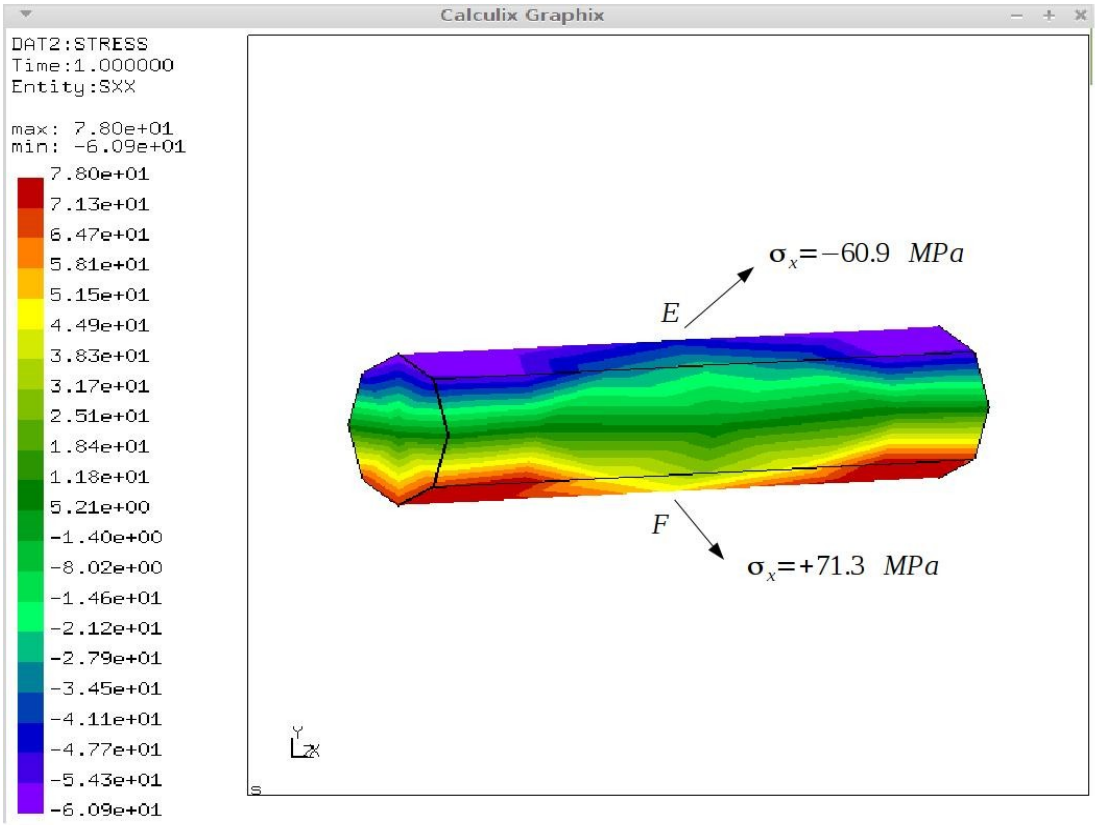
ความเค้นตั้งฉากบนหน้าตัดที่เกิดขึ้นจากแรง P คือ

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{700\,N}{113.1\,mm^2} = 6.19 \ \text{MPa}$$

ความเค้นตั้งฉากสูงสุดบนหน้าตัด EF ที่เกิดขึ้นจาก M คือ

$$\sigma_x = \frac{M\,h}{I} = \frac{(11200\,N-mm)(6\ mm)}{\frac{\pi}{4}(6\ mm)^4} = \pm 66.0 \ \text{MPa}$$

ค่าผลรวมความเค้นตั้งฉากสูงสุดบนหน้าตัด EF คือ ที่จุด F คือ 72.2 MPa และที่จุดคือ E -59.8 MPa ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับผลค่า Sx หรือความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x จากการแสดงผลของ frd file ใน CGX ได้ผลดังรูปที่ 3.28 เห็นได้ว่าระหว่างค่าความเค้นที่ได้จากการคำนวณและผลลัพธ์จากโปรแกรมมีค่าที่ใกล้เคียงกัน



รูปที่ 3.28 ผลลัพธ์ของความเค้นแสดงด้วย CGX

3.6 เอกสารอ้างอิงบทที่ 3

[1] Guido Dhondt, “CalculiX CrunchiX USER'S MANUAL”, version 2.8p2, March 19, 2015, www.calculix.de

[2] เจริญยุทธ เดชวายุกุล,“ความเค้นในชิ้นงานรับแรง",พิมพ์ครั้งที่1, เทคโนโลยีการศึกษา, คณะวิศวกรรมศาสตร์,มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์, สงขลา, 2554

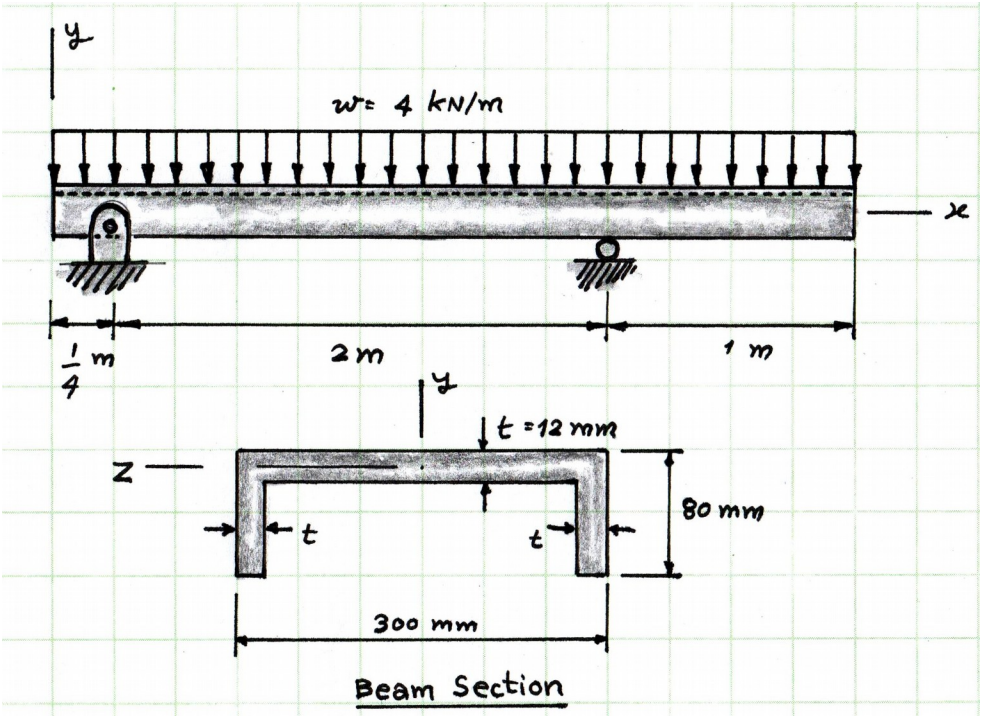
[3] Guido Dhondt, “CalculiX GraphiX USER'S MANUAL”, version 2.8p2, March 19, 2015, www.calculix.de

[4] Warren C. Young,Richard G. Budynas, “Roark's Formulas for Stress and Strain”, 7th Edition, McGrawHill, New York, 2002

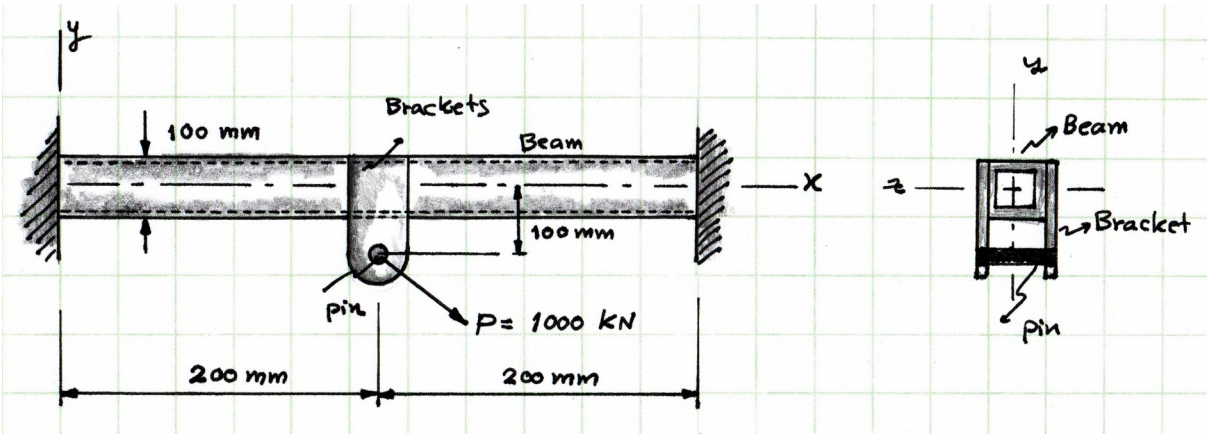
[5] Ferdinand Beer, E. Russel Johnston, Jr. John Dewolf, David Mazurek, “Mechanics of Materials”, 7th Edition, McGrawHill, New York, 2015

3.7 แบบฝึกหัดบทที่ 3

3.1 คานดังรูปที่ P 3.1 หน้าตัดรูป C คว่ำ รับแรงกระจาย โดยมีจุดรองรับแบบบานพับและลูกกลิ้ง เมื่อคานทำจากวัสดุกลุ่มเหล็กที่มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 200 GPa และสมมติอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 จงเขียน inp file โดยใช้เอลิเมนต์แบบคานใน 1 มิติเพื่อหาค่าความเค้นสูงสุด และระยะโก่งตัวสูงสุดที่เกิดขึ้น พร้อมระบุตำแหน่งที่เกิดขึ้นบนแกน x



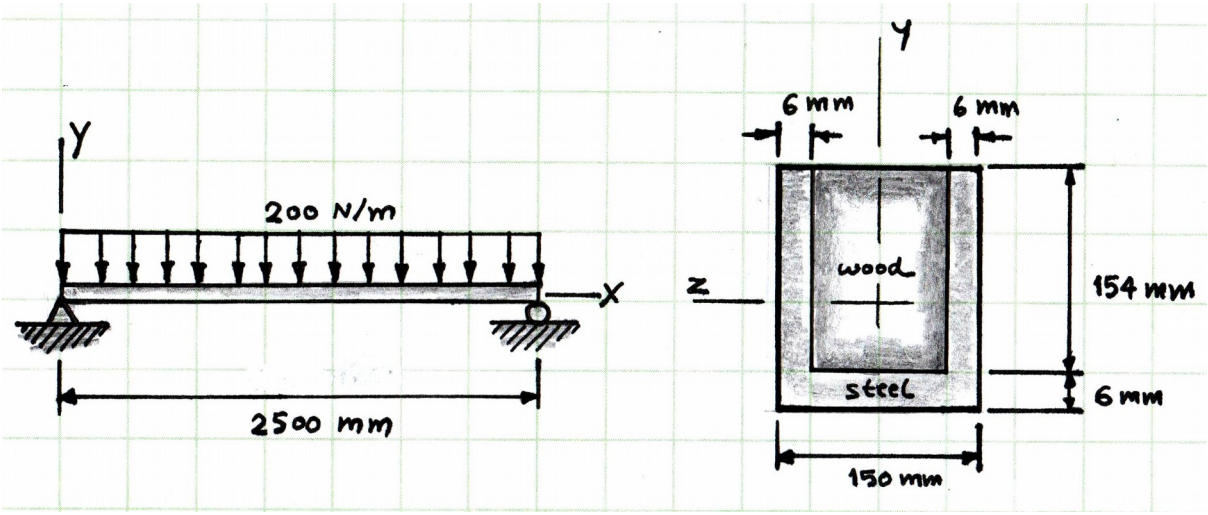
รูปที่ P 3.1



รูปที่ P 3.2

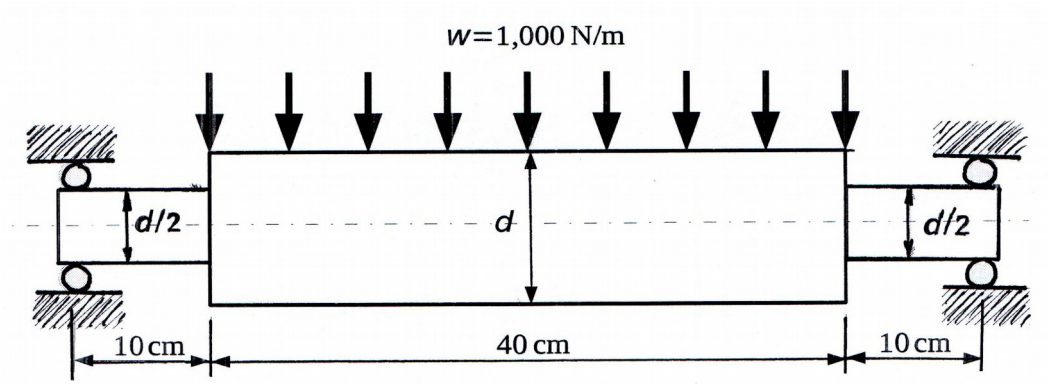
3.2 จงเขียน inp file โดยใช้เอลิเมนต์แบบคานใน 1 มิติเพื่อประมาณหาค่า ความเค้นสูงสุด ที่เกิดขึ้นกับระบบคานดังรูปที่ P3.2 สมมติคานเป็นท่อเหลี่ยมหน้าตัดจตุรัสกลวงมีความหนาเท่ากับ 4 mm ทำจากเหล็กกล้า (E=210 Gpa) ที่แผ่นค้ำ (brackets) เชื่อมติดกับคานตรงกลาง ที่แผ่นค้ำมีการเจาะรูทะลุติดสลัก (pin) และมีแรงกระทำต่อสลักเท่ากับ 1000 kN

3.3 คานแบบง่ายหน้าตัดประกอบจากวัสดุสองชนิดคือ ไม้ (wood , E_w =10 GPa) และเหล็ก (steel, E_s= 200 GPa) ดังรูปที่ P3.3 รับแรงกระจายคงตัว เท่ากับ 200 N/m ตลอดความยาวคาน จงใช้เอลิเมนต์แบบคาน ความเค้นตั้งฉากสูงสุดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดเนื้อไม้และเนื้อเหล็กสมมติให้ผิวสัมผัสของวัสดุทั้งสองติดแน่น



รูปที่ P 3.3

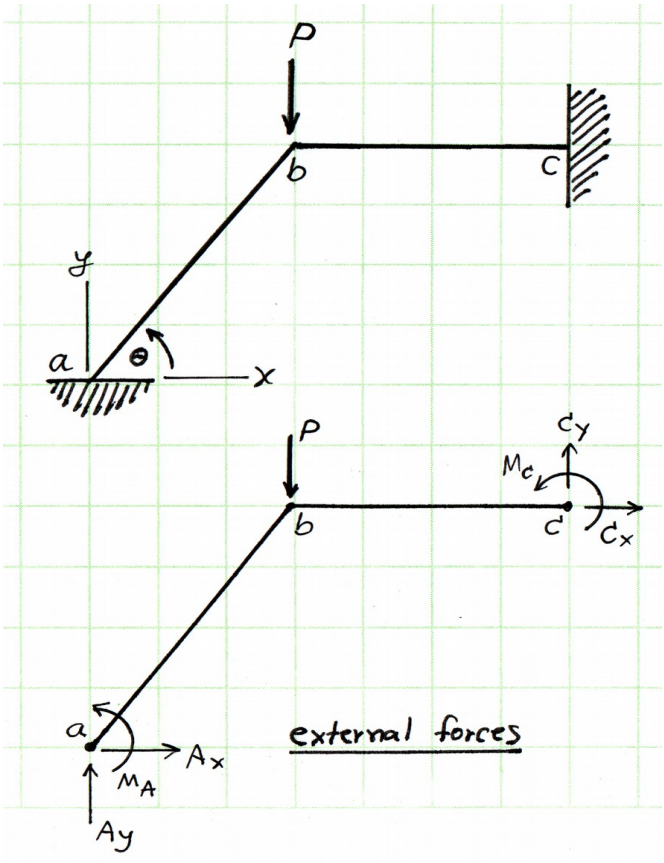
3.4 ลูกกลิ้งหน้าตัดกลมไม่เท่ากันทำจากเหล็กกล้า (E = 210 GPa) รองรับด้วยแบริ่ง และมีแรงกระทำดังรูปที่ P 3.3 จงเขียน inp file และวิเคราะห์หาตำแหน่งและระยะโก่งสูงสุดของเพลาโดยใช้เอลิเมนต์แบบคานใน 1 มิติเมื่อ d = 8 cm



รูปที่ P 3.3

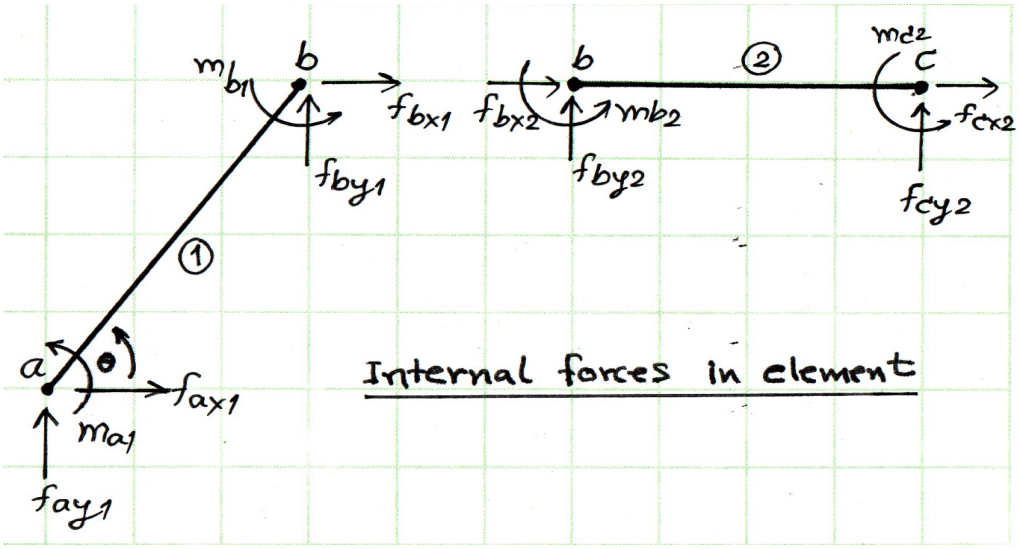
บทที่ 4 ปัญหาโครงสร้างในระนาบ

4.1 การเลือกใช้เอลิเมนต์แบบคานกับปัญหาโครงสร้างในระนาบ



รูปที่ 4.1 ตัวอย่างโครงสร้างในระนาบ

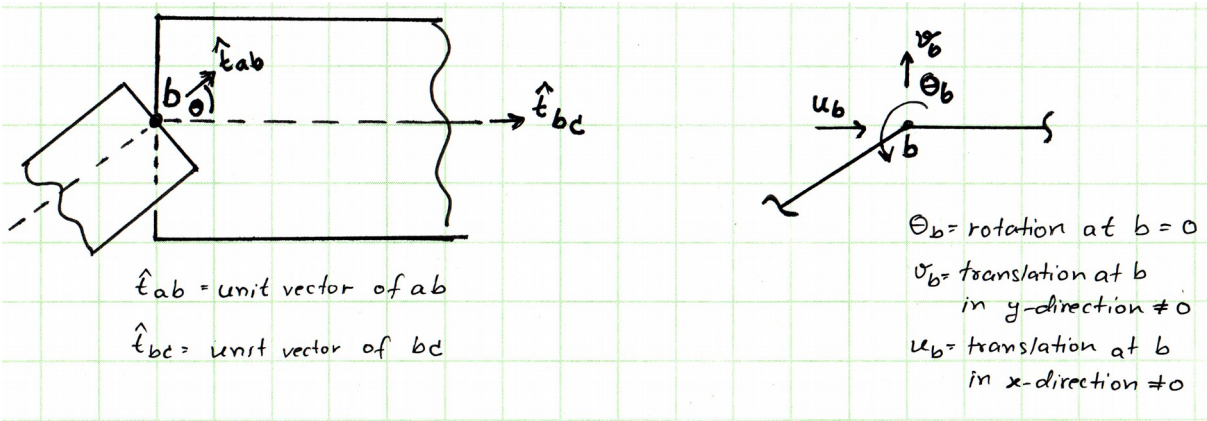
ตัวอย่างโครงสร้าง abc ในระนาบ xy ดังรูปที่ 4.1 ตามหลักสมดุลแรง เมื่อโครงสร้างดังกล่าวถูกยึดแบบฝังกับพื้นที่จุด a และผังผนังที่จุด c มีแรงจากภายนอกคือ P กระทำที่จุด b ซึ่งเชื่อมต่อระหว่างชิ้นโครงสร้าง ab และ bc จากแผนผังแรงอิสระ พบว่าที่จุด a และ c มีทั้งแรงและโมเมนต์ปฏิกิริยา เมื่อพิจารณาแรงภายในของแต่ละชิ้นส่วนโดย สมมติให้ชิ้น ab เป็นเอลิเมนต์ที่ 1 และ ชิ้น bc เป็นเอลิเมนต์ที่ 2 ดังแสดงในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แรงภายในของแต่ละชิ้นงานที่ประกอบเป็นโครงสร้าง

พบว่าจะเลือกใช้ สปริงเอลิเมนต์ (SPRINGA) กับโครงสร้างแทนชิ้นงาน ab และ bc ไม่เหมือนกับในบทที่ 2 เนื่องจากสปริงเอลิเมนต์ (SPRINGA) ในโปรแกรม CalculiX ไม่ได้ออกแบบให้มีองศาอิสระในการหมุนตัวที่โหนดได้ การเลือกใช้เอลิเมนต์ในปัญหาโครงสร้างในระนาบที่ถูกต้องจำเป็นต้องเลือกใช้เอลิเมนต์แบบคาน B32 แทน ซึ่งเอลิเมนต์แบบคานมีองศาอิสระในการเคลื่อนตัวในแนวแกนและการหมุนตัวที่โหนดได้นั้นเอง

รูปที่ 4.3 แสดงจุดต่อระหว่างเอลิเมนต์แบบคานที่มีการเปลี่ยนทิศของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยดังนั้นที่โหนดต่อ b ระหว่างชิ้น ab และ bc มีการเปลี่ยนแปลงของ $\hat{t}_{ab}$ และ $\hat{t}_{bc}$ โดยที่จุดนี้ถูกบังคับไม่ให้มีการหมุนตัวอิสระหรือ $\theta_b=0$ แต่ยังคงมีการเคลื่อนตัว (u_b, v_b) ในระนาบ

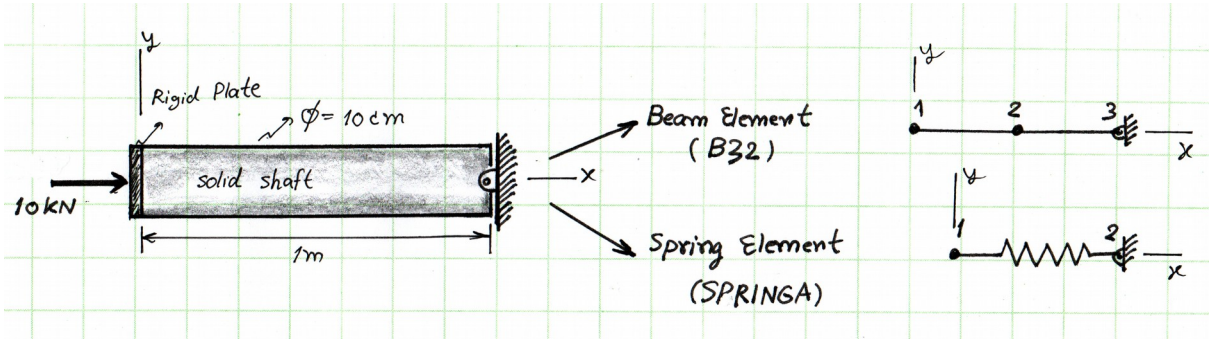


รูปที่ 4.3 จุดต่อของเอลิเมนต์แบบคาน B32 เมื่อเอลิเมนต์อยู่ในทิศต่างกัน

4.2 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน B32 แทนเอลิเมนต์สปริง SPRINGA

ปัญหาชิ้นงานรับแรงและมีการยืดหดตัวในแนวแกน สามารถเลือกใช้เอลิเมนต์ B32 แทน SPRINGA ทั้งนี้การใช้ B32 จะมีข้อได้เปรียบกว่า SPRINGA คือไม่จำเป็นต้องระบุค่าความแข็งของสปริงแต่ระบุคุณสมบัติของวัสดุด้วยคำสั่ง *MATERIAL และกำหนดหน้าตัดด้วยคำสั่ง *BEAM SECTION สามารถแสดงผลลัพธ์ของความเค้นและความเครียดโดยใช้คำสั่ง *EL PRINT ซึ่งจะสะดวกกว่าการใช้ *SPRINGA ดังเช่นในบทที่2

หัวข้อนี้มีกรณีตัวอย่างเปรียบเทียบการใช้งานเอลิเมนต์ B32 แทนเอลิเมนต์ SPRINGA โดยสมมติให้เพลาตันทำจากเหล็กกล้ามอดุลัสยืดหยุ่น (E=200GPa) อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 หน้าตัดกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 cm ยาว 1 m รับแรงอัดในแนวแกนเท่ากับ 10kN ดังรูปที่ 4.4 หัวข้อนี้นำเสนอการใช้ Calculix หาผลลัพธ์ของระยะยุบตัว ความเค้นและความเครียดของเพลาที่เกิดขึ้น โดยใช้เอลิเมนต์ SPRINGA เปรียบเทียบกับการใช้เอลิเมนต์แบบคาน B32



รูปที่ 4.4 ภาพจำลองเอลิเมนต์แบบสปริงและแบบคาน

<u>การเขียน inp file ของเอลิเมนต์ SPRINGA</u>

1.เขียน inp file เพื่อใช้งานกับสปริงเอลิเมนต์ (SPRINGA) โดยทำการคำนวณค่าความแข็งของสปริงได้ดังนี้ $k=\frac{AE}{L}=\pi/4(100)^2\frac{(200(10^3))}{1000} = 1.573\,x\,10^6$ N/mm ดังนั้นสามารถเขียน inp file ได้ดังนี้

```
*HEADING
ch41.inp demonstration of SPRINGA
*NODE,NSET=nall
1,0.0,0.0,0.0
2,1000.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,2
*SPRING,ELSET=el1
1.573E+06
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,2,3,0.0
2,1,3,0.0
*CLOAD
1,1,10000
*NODE PRINT,NSET=nall
```

```
U,RF
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
*END STEP
```

2.ส่งไฟล์ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file แสดงข้อมูลเฉพาะค่าระยะการยืดหดตัวในแนวแกน (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ดังนี้

```
 displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1  6.357279E-03  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01
         1  1.000000E+04  0.000000E+00  0.000000E+00
         2 -1.000000E+04  0.000000E+00  0.000000E+00
```

รูปที่ 4.5 dat file

3. จาก dat file ในรูปที่ 4.5 เมื่อใช้สปริงเอลิเมนต์ (SPRINGA) ผลลัพธ์ของระยะยุบตัวของชิ้นงานคือ-0.006357 mm แรงส่งผ่านเอลิเมนต์คือ 10000 N ดังนั้นคำนวณความเค้นอัดที่เกิดขึ้นในแกนชิ้นงานได้คือ ความเค้นอัดคือ -1.27 MPa และความเครียดคือ – 6.357E-06

การเขียน inp file ของเอลิเมนต์ B32

4.เขียน inp file เพื่อใช้งานกับเอลิเมนต์แบบคาน (B32) ได้ดังนี้

```
*HEADING
ch42.inp demonstration of B32
*NODE,NSET=nall
1,0.0,0.0,0.0
2,500.0,0.0,0.0
3,1000.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el1
1,1,2,3
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
*BEAM SECTION,ELSET=el1,MATERIAL=STEEL,SECTION=CIRC
100.0,100.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,2,3,0.0
2,2,3,0.0
3,1,3,0.0
*CLOAD
1,1,10000
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
*EL PRINT,ELSET=el1
S,E
*EL FILE,ELSET=el1
S,E
*END STEP
```

5.ส่งไฟล์ประมวลผลด้วย CCX จะได้ dat file แสดงข้อมูลเฉพาะค่าระยะการยืดหดตัวในแนวแกน (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) รวมถึง ความเค้นและความเครียด

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  6.611303E-03 -1.694066E-21  0.000000E+00
         2  3.305651E-03 -5.082198E-21  3.388132E-21
         3  0.000000E+00  0.000000E+00  3.388132E-21

forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  1.000000E+04  1.305989E-11  4.465739E-11
         2 -1.039631E-10 -8.721912E-13 -4.167111E-11
         3 -1.000000E+04 -1.203571E-11 -2.842171E-12


stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set EL1 and time  0.1000000E+01

        1   1 -1.295736E+00  1.243666E-02  1.243666E-02  2.315951E-01  2.315951E-01  6.242785E-03
        1   2 -1.318218E+00 -2.503348E-02 -2.503348E-02  8.758634E-15  1.287217E-14 -1.482260E-04
        1   3 -1.295736E+00  1.243666E-02  1.243666E-02 -2.315951E-01 -2.315951E-01  6.242785E-03
        1   4 -1.282063E+00  1.245103E-02  1.034598E-02 -1.863320E-15  1.089635E-01 -3.420710E-16
        1   5 -1.298841E+00 -1.658991E-02 -1.653993E-02 -1.406716E-15  4.174971E-15  5.701183E-16
        1   6 -1.282063E+00  1.245103E-02  1.034598E-02 -1.763040E-15 -1.089635E-01 -3.257819E-17
        1   7 -1.295736E+00  1.243666E-02  1.243666E-02 -2.315951E-01  2.315951E-01 -6.242785E-03
        1   8 -1.318218E+00 -2.503348E-02 -2.503348E-02 -1.049170E-14  1.021683E-14  1.482260E-04
  - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - เว้น ตำแหน่ง 9- 17 - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
        1  18 -1.282063E+00  1.034598E-02  1.245103E-02  1.089635E-01 -8.177561E-15  1.189104E-15
        1  19 -1.295736E+00  1.243666E-02  1.243666E-02  2.315951E-01 -2.315951E-01 -6.242785E-03
        1  20 -1.318218E+00 -2.503348E-02 -2.503348E-02  2.450363E-16  3.327779E-15  1.482260E-04
        1  21 -1.295736E+00  1.243666E-02  1.243666E-02 -2.315951E-01  2.315951E-01 -6.242785E-03
        1  22 -1.282063E+00  1.245103E-02  1.034598E-02 -5.410270E-15 -1.089635E-01 -1.009924E-15
        1  23 -1.298841E+00 -1.658991E-02 -1.653993E-02  2.214299E-15  1.845249E-16  0.000000E+00
        1  24 -1.282063E+00  1.245103E-02  1.034598E-02 -5.700929E-15  1.089635E-01  9.773457E-17
        1  25 -1.295736E+00  1.243666E-02  1.243666E-02 -2.315951E-01 -2.315951E-01  6.242785E-03
        1  26 -1.318218E+00 -2.503348E-02 -2.503348E-02  4.421471E-15  6.262139E-15 -1.482260E-04
        1  27 -1.295736E+00  1.243666E-02  1.243666E-02  2.315951E-01  2.315951E-01  6.242785E-03

strains (elem, integ.pnt.,exx,eyy,ezz,exy,exz,eyz) forset EL1 and time  0.1000000E+01

        1   1 -6.515992E-06  1.987133E-06  1.987133E-06  1.505368E-06  1.505368E-06  4.057810E-08
        1   2 -6.515992E-06  1.889710E-06  1.889710E-06  5.693112E-20  8.366911E-20 -9.634689E-10
        1   3 -6.515992E-06  1.987133E-06  1.987133E-06 -1.505368E-06 -1.505368E-06  4.057810E-08
        1   4 -6.444508E-06  1.969830E-06  1.956147E-06 -1.211158E-20  7.082626E-07 -2.223461E-21
        1   5 -6.444508E-06  1.890121E-06  1.890446E-06 -9.143654E-21  2.713731E-20  3.705769E-21
        1   6 -6.444508E-06  1.969830E-06  1.956147E-06 -1.145976E-20 -7.082626E-07 -2.117582E-22
        1   7 -6.515992E-06  1.987133E-06  1.987133E-06 -1.505368E-06  1.505368E-06 -4.057810E-08
        1   8 -6.515992E-06  1.889710E-06  1.889710E-06 -6.819608E-20  6.640937E-20  9.634689E-10
  - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - เว้น ตำแหน่ง 9- 17 - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
        1  18 -6.444508E-06  1.956147E-06  1.969830E-06  7.082626E-07 -5.315415E-20  7.729176E-21
        1  19 -6.515992E-06  1.987133E-06  1.987133E-06  1.505368E-06 -1.505368E-06 -4.057810E-08
        1  20 -6.515992E-06  1.889710E-06  1.889710E-06  1.592736E-21  2.163057E-20  9.634689E-10
        1  21 -6.515992E-06  1.987133E-06  1.987133E-06 -1.505368E-06  1.505368E-06 -4.057810E-08
        1  22 -6.444508E-06  1.969830E-06  1.956147E-06 -3.516676E-20 -7.082626E-07 -6.564505E-21
        1  23 -6.444508E-06  1.890121E-06  1.890446E-06  1.439294E-20  1.199412E-21  0.000000E+00
        1  24 -6.444508E-06  1.969830E-06  1.956147E-06 -3.705604E-20  7.082626E-07  6.352747E-22
        1  25 -6.515992E-06  1.987133E-06  1.987133E-06 -1.505368E-06 -1.505368E-06  4.057810E-08
        1  26 -6.515992E-06  1.889710E-06  1.889710E-06  2.873956E-20  4.070390E-20 -9.634689E-10
        1  27 -6.515992E-06  1.987133E-06  1.987133E-06  1.505368E-06  1.505368E-06  4.057810E-08
```

รูปที่ 4.6 dat file

6.จาก dat file ในรูปที่ 4.6 พบว่าค่าระยะการหดตัวของชิ้นงานคือ -0.006611 mm ค่าความเค้นและความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x ที่เกิดขึ้นที่จุดอินทิเกรชั่นทั้ง 27 จุดหรือบนหน้าตัดคานคือ
ความเค้นตั้งฉาก อยู่ในช่วง -1.26 MPa ถึง -1.318 MPa
ความเค้นตั้งฉากอยู่ในช่วง -6.373E-06 ถึง -6.51599E-06

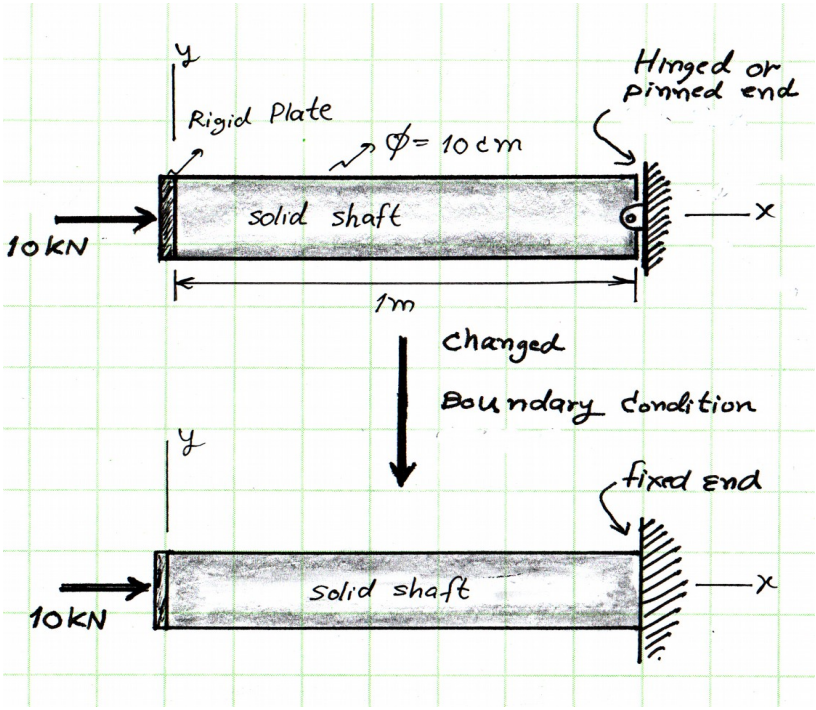
7. เปรียบเทียบผลลัพธ์ระหว่างค่าที่ได้จากการใช้สปริงเอลิเมนต์ (SPRINGA) กับเอลิเมนต์แบบคาน (B32) พบว่าค่าระยะยุบตัว ค่าความเค้น ค่าความเครียด รวมถึงค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดจับยึด ให้ผลลัพธ์ที่มีค่าใกล้เคียงกัน

8. สรุปได้ว่าสำหรับโครงสร้างในระนาบที่ไม่มีการดัด สามารถนำเอลิเมนต์แบบคาน B32 มาใช้งานแทนสปริงเอลิเมนต์ SPRINGA ได้

9. กรณีถ้ามีการกำหนดเงื่อนไขของศาอิสระที่เปลี่ยนไป เช่น มีการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขจุดจับยึดของชิ้นงานจากแบบเดิมยึดด้วยสลักมายึดด้วยการฝังปลายเข้ากับผนังดังรูปที่ 4.5 ซึ่งสามารถรับโมเมนต์และไม่มีอิสระในการหมุนตัวที่จุดนี้ ตรงส่วนของ *BOUNDARY ควรมีการเปลี่ยนเงื่อนไขใน inp file ให้สอดคล้องกับปัญหาดังนี้

```
*BOUNDARY
1,2,3,0.0
2,2,3,0.0
3,1,3,0.0
3,6,6,0.0
```

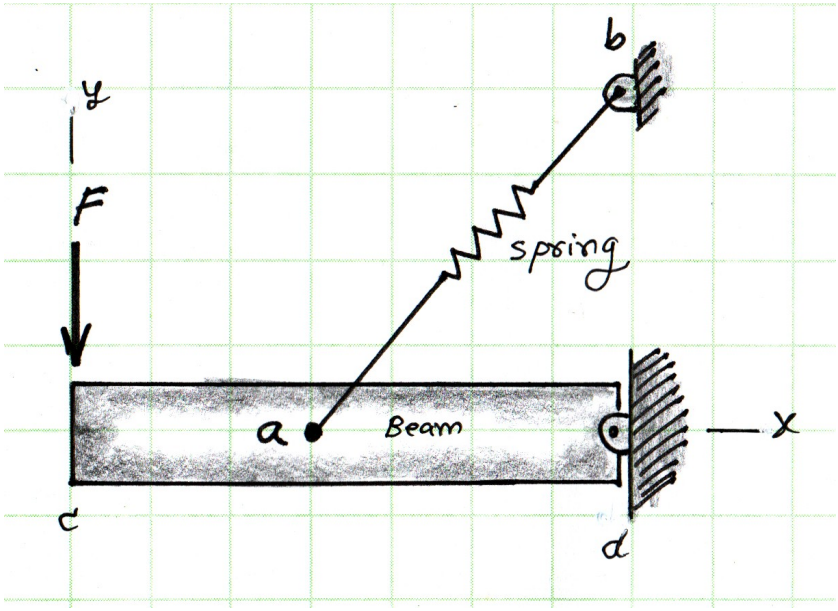
คือเพิ่ม 3,6,6,0.0 เข้าไปเพื่อกำหนดให้ไม่มีการหมุนตัวที่โหนดหมายเลข 3 ในแกน z ซึ่งคือองศาอิสระหมายเลข 6 นั้นเอง ดังแสดงในรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 เปลี่ยนเงื่อนไขจับยึด

4.3 การใช้งานเอลิเมนต์แบบคาน(B32)ร่วมกับสปริงเอลิเมนต์(SPRINGA)

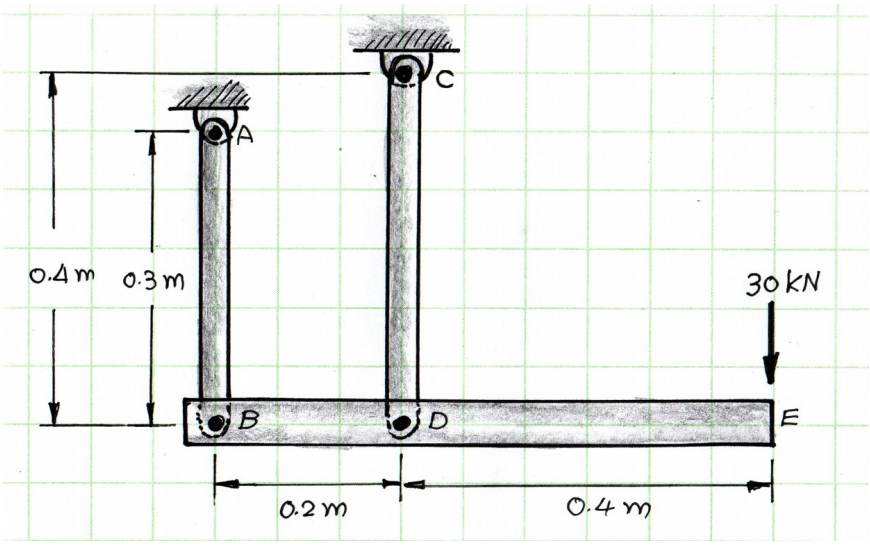
ปัญหาทางด้านโครงสร้างจำเป็นต้องมีการใช้งานร่วมกันทั้งเอลิเมนต์แบบคาน (B32) และสปริงเอลิเมนต์ (SPRINGA) โดยเงื่อนไขที่จุดต่อระหว่างสองเอลิเมนต์นั้นยังแสดงพฤติกรรมตามเงื่อนไขการจับยึดคือ ที่จุดต่อของสปริงเอลิเมนต์จะแสดงพฤติกรรมเหมือนบานพับหรือสลักที่สามารถหมุนอิสระได้ ในขณะที่เอลิเมนต์แบบคานยังคงสามารถดัดตัวได้เช่นเดิม เช่นกรณีตัวอย่างดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 สปริงเอลิเมนต์และคานใช้งานร่วมกัน

จากตัวอย่างโครงสร้างรูปที่ 4.8 เป็นโครงสร้างในระนาบที่ประกอบด้วย ชิ้นงาน cd ซึ่งปลายหนึ่งของคานยึดติดกับสลักหรือบานพับ และที่จุดหนึ่งของคานยึดด้วยสลิง ab (เปรียบได้กับสปริง) เมื่อมีแรงกระทำที่ปลายคานคานจะเกิดการหมุนตัวรอบจุด d แต่จะไม่สามารถหมุนตัวอิสระได้เนื่องจากมีสปริงเอลิเมนต์ (สลิง) มารั้งไว้ที่จุด a การรั้งของสปริงที่จุดนี้ส่งผลให้มีแรงจากสปริงมากระทำต่อคานในแนวแกนของสปริง แรงที่คานกระทำกับสปริงและแรงที่สปริงกระทำกับคานที่จุด a นั้นมีค่าเท่ากันแต่มีทิศตรงกันข้าม แรงที่คานกระทำกับสปริงจะทำให้สปริงเกิดการยืดตัวในแนวแกน และแรงที่สปริงกระทำต่อคานนี้ก็จะส่งผลให้คานมีการดัดตัวในแนวขวาง ในกรณีที่คานมีค่า EI (flexural rigidity) สูงมากกล่าวคือสูงมากกว่าความแข็งตึง (stiffness) ของสปริงมาก คานก็แสดงตัวเป็นวัตถุแข็งเกร็ง (rigid body) คือจะมีแต่การเคลื่อนตัวแต่ไม่มีการเปลี่ยนรูป ซึ่งในกรณีนี้จะไม่มีการดัดตัวของชิ้นงาน cd เกิดขึ้น

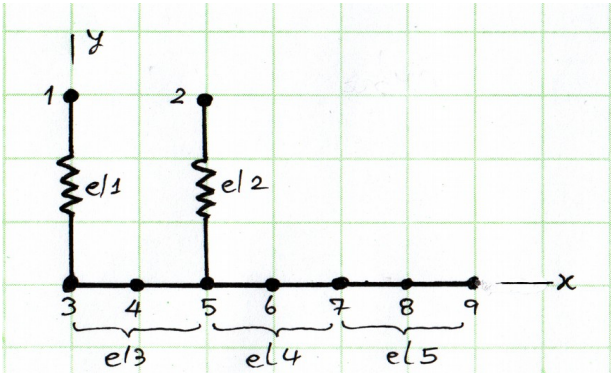
ต่อไปยกตัวอย่างการวิเคราะห์โครงสร้างที่ใช้สปริงเอลิเมนต์และเอลิเมนต์แบบคาน โดยการนำโจทย์ตัวอย่าง [1] ดังโครงสร้างในรูปที่ 4.9 เมื่อ BDE คือคานทำจากเหล็กกล้า มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 200 GPa และมีค่าอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 หน้าตัดรูปสี่เหลี่ยนจตุรัสขนาด 20x100 mm แขวนต่อเข้ากับชิ้นส่วน AB ที่ทำจากอลูมินัมมีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 70 GPa มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 500 mm^2 และชิ้นส่วน CD ที่ทำจากเหล็กกล้ามีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 600 mm^2 ที่ปลายคาน BDE มีแรงในแนวดิ่งมากระทำเท่ากับ 30kN จงเขียน inp file พร้อมตรวจสอบผลลัพธ์และวิจารณ์ผลที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม CalculiX



รูปที่ 4.9 โครงสร้างที่ใช้สปริงเอลิเมนต์และเอลิเมนต์แบบคาน

<u>การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา</u>

1. รูปที่ 4.10 กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ตามเงื่อนไขของปัญหา จากโจทย์นี้กำหนด AB และ CD เป็นสปริงเอลิเมนต์เนื่องจากมีการรับแรงในแนวแกนและมีการยืดหดตัวเฉพาะในแนวแกน กำหนดส่วน BDE เป็นเอลิเมนต์แบบคาน ทั้งนี้เนื่องจากรับแรงในแนวขวางชิ้นงานและเกิดการหมุนและแอ่นตัวในระนาบ



รูปที่ 4.10 การจำลองโหนดและเอลิเมนต์

2.กำหนดหัวข้อเรื่องคือ

```
*HEADING
ch43.inp demonstration of B32 with SPRINGA
```

3. กำหนดโหนดโดยให้
จุด A คือโหนดหมายเลข 1
จุด C คือโหนดหมายเลข 2
จุด B คือโหนดหมายเลข 3
จุด D คือโหนดหมายเลข 5
จุด E คือโหนดหมายเลข 9
ตั้งชื่อโหนดทั้งหมดว่า nall
กำหนดให้ตำแหน่งอยู่ในหน่วย mm สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE,NSET=nall
1,0.0,300,0.0
2,200,400,0.0
3,0.0,0.0,0.0
4,100,0.0,0.0
5,200,0.0,0.0
6,300,0.0,0.0
7,400,0.0,0.0
8,500,0.0,0.0
9,600,0.0,0.0
```

3.กำหนดเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ตามตารางที่ 4.1

ตารางที่4.1 กำหนดชื่อเอลิเมนต์ หมายเลขและชนิด

elset	Element no.	Element type	Connectivity node no.
el1	1	SPRINGA	1,2
el2	2	SPRINGA	2,5
el3	3	B32	3,4,5
el4	4	B32	5,6,7
el5	5	B32	7,8,9

จากตารางสามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดหมายเลขเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

```
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,2,5
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el3
3,3,4,5
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el4
4,5,6,7
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el5
5,7,8,9
```

กำหนดกลุ่มเอลิเมนต์ชื่อ beam ขึ้นมาเพื่อใช้สำหรับกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์แบบคานที่เหมือนกันคือ

```
*ELSET,ELSET=beam
el3,el4,el5
```

4. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section)

4.1 กำหนดความแข็งของสปริง el1 และ el2 จากเงื่อนไขโจทย์

ชิ้นงาน AB หรือสปริง el1 มีค่าความแข็งเท่ากับ

$$k_{AB}=\left(\frac{AE}{L}\right)_{AB}=\frac{(500\,\text{mm}^2)(70\,x\,10^3\,\text{MPa})}{(300\,\text{mm})}=\ 116{,}666.67\ \ \text{N/mm}$$

ชิ้นงาน CD หรือสปริง el2 มีค่าความแข็งเท่ากับ

$$k_{CD}=\left(\frac{AE}{L}\right)_{CD}=\frac{(600\,\text{mm}^2)(200\,x\,10^3\,\text{MPa})}{(400\,\text{mm})}=\ 300{,}000\ \ \text{N/mm}$$

ดังนั้นคำสั่งเพื่อกำหนดค่าความแข็งของสปริงสำหรับเอลิเมนต์ el1 และ el2 คือ

```
*SPRING,ELSET=el1
116666.67
*SPRING,ELSET=el2
300000
```

4.2 กำหนดสมบัติวัสดุของคาน BDE

-เรียกใช้ *MATERIAL เพื่อกำหนดชื่อวัสดุให้เป็นชื่อ STEEL

-เรียกใช้ *ELASTIC เพื่อกำหนดสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นคือค่ามอดุลัสของเหล็กกล้าเท่ากับ 200 GPa=200x10^3 MPa อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 ในที่นี้จำเป็นต้องใช้ E เป็นหน่วย MPa เนื่องจากระยะกำหนดเป็น mm ตั้งแต่ต้น

-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของวัสดุคือ

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
```

4.3 กำหนดสมบัติหน้าตัดคาน

-เรียกใช้ *BEAM SECTION เพื่อกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ที่ชื่อว่า beam ซึ่งประกอบด้วย el3 el4 และ el5 และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุตาม STEEL และมีการเลือกหน้าตัดเป็นแบบสี่เหลี่ยม (SECTION=RECT) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ เท่ากับ 20 mm และ 100 mm ตามลำดับโดยไม่มีการกำหนด OFFSET
-ดังนั้นในส่วนของ inp file คือ

```
*BEAM SECTION,ELSET=beam,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
20,100
```

5 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

6. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)
กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า
-โหนดทั้งหมด ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน z
-โหนด 1 และ 2 เป็นจุดยึดแบบสลัก ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนว x y z

```
*BOUNDARY
nall,3,3,0.0
1,1,3,0.0
2,1,3,0.0
```

7.กำหนดให้ที่โหนดหมายเลข 9 มีแรง 30 kN กระทำที่ปลายคานในองศาอิสระหมายเลข 2 หรือในแนวแกน y

```
*CLOAD
9,2,-30000
```

8. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall รวมถึงความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า beam ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้รายงานค่าความเค้นในเอลิเมนต์ทั้งหมดและค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียน

คำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
*EL PRINT,ELSET=beam
S
*EL FILE,ELSET=beam
S
```

9. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง *END STEP

10.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-9 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ch43.inp

```
*HEADING
ch43.inp demonstration of B32 with SPRINGA
*NODE,NSET=nall
1,0.0,300,0.0
2,200,400,0.0
3,0.0,0.0,0.0
4,100,0.0,0.0
5,200,0.0,0.0
6,300,0.0,0.0
7,400,0.0,0.0
8,500,0.0,0.0
9,600,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el1
1,1,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA,ELSET=el2
2,2,5
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el3
3,3,4,5
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el4
4,5,6,7
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el5
5,7,8,9
*ELSET,ELSET=beam
el3,el4,el5
*SPRING,ELSET=el1
116666.67
*SPRING,ELSET=el2
300000
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
*BEAM SECTION,ELSET=beam,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
20,100
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
nall,3,3,0.0
1,1,3,0.0
2,1,3,0.0
*CLOAD
9,2,-30000
*NODE PRINT,NSET=nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=nall
U,RF
*EL PRINT,ELSET=beam
```

```
S
*EL FILE,ELSET=beam
S
*END STEP
```

11. ส่ง ch43.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file ch43.dat แสดงข้อมูลค่าระยะการโก่งตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ดังนี้

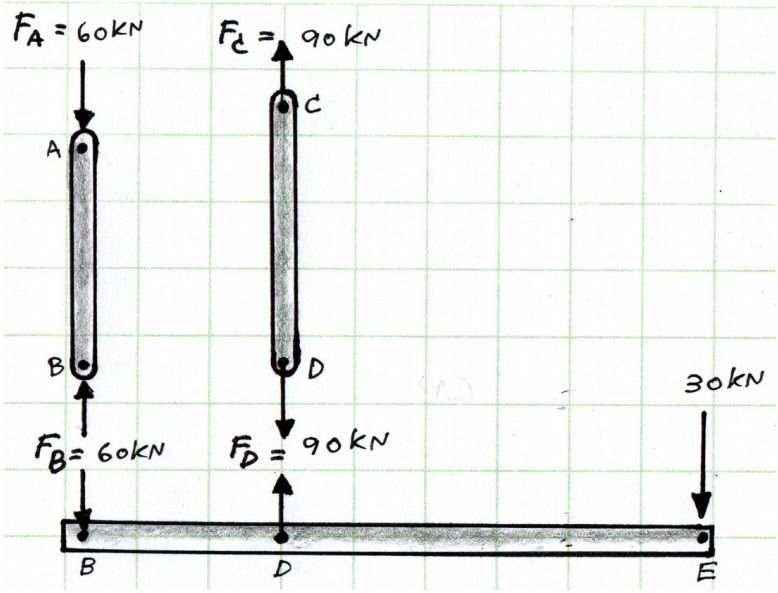
```
 displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         3  3.482762E-01  5.142857E-01  0.000000E+00
         4  3.482762E-01  1.980621E-01  0.000000E+00
         5  3.482762E-01 -3.000000E-01  0.000000E+00
         6  3.482762E-01 -1.145163E+00  0.000000E+00
         7  3.482762E-01 -2.255531E+00  0.000000E+00
         8  3.482762E-01 -3.544852E+00  0.000000E+00
         9  3.482762E-01 -4.927129E+00 -1.084202E-19

 forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  6.974733E+01 -5.997633E+04  0.000000E+00
         2 -7.834293E+01  9.004542E+04  0.000000E+00
         3  4.972935E-09 -6.000000E+04  1.090559E-09
         4  1.754888E-09 -8.916899E-09 -3.210999E-09
         5 -2.320435E-08  9.000000E+04  4.720892E-09
         6 -1.923521E-08  2.183766E-08 -4.336982E-09
         7 -7.489874E-09  6.810549E-08 -2.205017E-09
         8 -2.161076E-10  7.334671E-08  6.811835E-09
         9  4.336135E-08 -3.000000E+04 -2.873297E-09
```

รูปที่ 4.11 dat file

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

12. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์

12.1 ตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์จาก dat file ในรูปที่ 4.11 โดยการลองเปรียบเทียบค่าแรงกระทำในสปริงแต่ละตัวจาก dat file บ่งบอกว่าค่าแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ C หรือแรงกระทำที่โหนดหมายเลข 1 และ 2 มีค่าเท่ากับ -5.997633E+04 N และ 9.000000E+04 N ตามลำดับ ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่ามีแรงอัดส่งผ่านชิ้นงาน AB และมีแรงดึงส่งผ่านชิ้นงาน CD คือ -60 kN และ 90 kN ตามลำดับ ซึ่งสามารถเปรียบเทียบผลลัพธ์จากหลักสมดุลแรงในรูปที่ 4.12 ดังนี้



รูปที่ 4.12 ผังแรงของแต่ละชิ้นงาน

เมื่อ BD=0.2 m และ DE=0.4 m สมมติแรงที่กระทำที่จุด B และ D คือ F_B และ F_D ตามลำดับจะได้ว่าเมื่อพิจารณาสมดุลรอบจุด B พบว่า

$F_D(0.2\,\mathrm{m})=30\,\mathrm{kN}\,\mathrm{x}\,0.6\,\mathrm{m}$ และ $F_D+F_B=30\,\mathrm{kN}$ ดังนั้นได้

$F_D=90\,\mathrm{kN}$ และ $F_B=-60\,\mathrm{kN}$ ซึ่งสอดคล้องและใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม

ทำการเปรียบเทียบผลการยืดหดตัวของชิ้นงาน AB และ CD เมื่อ δ_{AB} และ δ_{CD} คือระยะยืดหดของชิ้นงาน AB และ CD ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\delta_{AB}=\frac{FL}{AE}=\frac{(-60(10^3)\mathrm{N})(300\,\mathrm{mm})}{(500\,\mathrm{mm}^2)(70(10^3)\mathrm{MPa})}=-0.514\ \ \mathrm{mm}$$

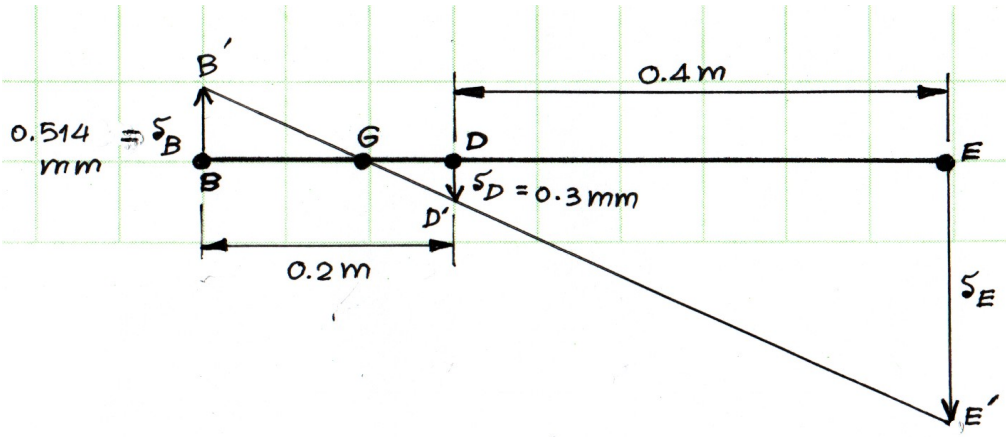
$$\delta_{CD}=\frac{FL}{CD}=\frac{(90(10^3)\text{N})(400\,\text{mm})}{(600\,\text{mm}^2)(200(10^3)\text{MPa})}=\ 0.3\ \ \text{mm}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีความสอดคล้องและใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณจากโปรแกรม

อีกแนวทางหนึ่งจากโจทย์นี้เมื่อถ้าทดสอบโดยปรับให้ค่า EI มีค่าที่สูงเช่นในโปรแกรมตรงคำสั่งทดลองปรับค่า E ให้สูงขึ้น 1000 เท่าคือเปลี่ยนคำสั่งจากค่าเดิม คือ `200E+03` เป็น `200E+06` ดังนี้

```
*ELASTIC
200E+06,0.3
```

แล้วทดลองประมวลผลใหม่พบว่าการยืดหดตัวของชิ้นงาน AB และ CD ยังคงเท่าเดิมและมีค่าตามการคำนวณ การแอ่นตัวของคาน BDE เมื่อเทียบกับการยืดหดตัวของชิ้นงาน AB และ CD ถือว่าน้อย อาจกล่าวได้ว่าคาน BDE มีการเลื่อนตัวและมีการหมุนตัว (translation and rotation) แต่ไม่มีการเปลี่ยนรูป (deformation) เนื่องจากค่า EI สูงขึ้นนั้นเอง ถ้าลองนำค่าระยะยืดหดตัวของจุด B และ D ที่คำนวณได้ไปหาระยะเคลื่อนตัวของจุด E ดังแสดงหลักคิดในรูปที่ 4.13 โดยสมมติไม่มีการแอ่นตัวของคาน BDE จะได้ว่าจุด B มีการเคลื่อนตัวในแนว y เท่ากับ 0.514 mm ขณะเดียวกันจุด D มีการเคลื่อนตัวลงในแนว y เท่ากับ 0.3 mm ส่งผลให้ คาน BDE เกิดการหมุนรอบจุด G และเมื่อพิจารณาที่จุด E จะพบว่าจุด E มีการเคลื่อนลงในแนว y ลักษณะนี้เหมือนกับ BDE เคลื่อนตัวแบบ rigid body motion



รูปที่ 4.13 การเคลื่อนตัวในแนวขวาง

จากรูปแบบการเคลื่อนตัวแบบนี้ สามารถคำนวณหาระยะการเคลื่อนตัวที่จุด E ได้จากความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตคือ

$\frac{\delta_E-\delta_D}{0.4}=\frac{\delta_D+\delta_B}{0.2}$ เมื่อ $\delta_D=0.3\,\text{mm}$ และ $\delta_B=0.514\,\text{mm}$

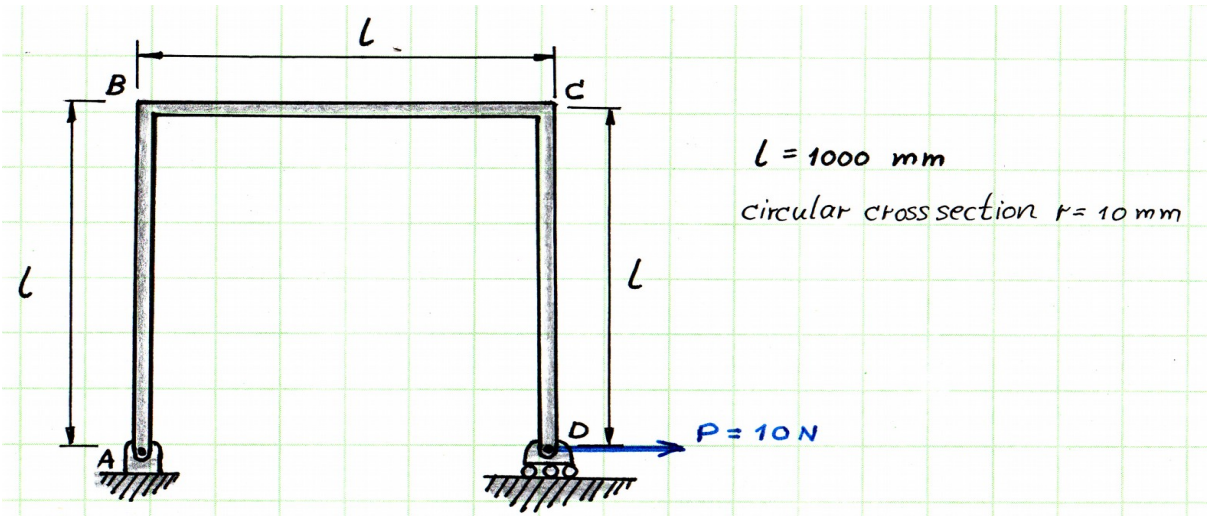
คำนวณหา δ_E ได้ $\delta_E=1.928\ \text{mm}$ เคลื่อนที่ลง หรือคือค่าระยะการเคลื่อนตัวของโหนดหมายเลข 9 ในทิศทาง y ซึ่งผลคำนวณนี้สอดคล้องกับผลลัพธ์ที่ได้จากการประมวลผลโปรแกรมใหม่ จากการเขียนชุดคำสั่งและประมวลผลพร้อมกับวิเคราะห์พบว่าชุดคำสั่งที่เขียนมีความถูกต้องสอดคล้องกับผลลัพธ์ทางทฤษฎีจึงเป็นชุดโปรแกรมที่น่าเชื่อถือในความถูกต้อง

ในโจทย์ปัญหานี้สามารถใช้เอลิเมนต์แบบคาน B32 แทนเอลิเมนต์สปริง SPRINGA ที่ใช้กับชิ้นงาน AB และ CD ซึ่งถ้าจะใช้งานสามารถปรับแต่ง inp file โดยการเพิ่มโหนดตรงกลางขึ้นอีกที่สองจุด จุดแรกที่กึ่งกลางชิ้นงาน AB จุดสองที่กึ่งกลางชิ้นงาน DC รวมถึงต้องมีการเปลี่ยนแปลง *BEAM SECTION เพื่อกำหนดขนาดหน้าตัดให้กับชิ้นงานทั้งสอง รวมถึงต้องมีการเพิ่มเติม *MATERIAL เพื่อกำหนดมอดุลัสยืดหยุ่นของอลูมินัมให้กับชิ้นงาน

4.4 การใช้งานเอลิเมนต์ B32 กับโครงสร้างแบบ 2 มิติในระนาบ

ในหัวข้อนี้แสดงรายละเอียดการใช้เอลิเมนต์แบบคาน B32 กับโครงสร้างในระนาบที่มีการยืดหดตัวและดัดตัวในระนาบเท่านั้น ในปัญหาแบบนี้หลีกเลี่ยงไม่ได้ที่ต้องมีการใช้เอลิเมนต์แบบคาน B32 หลายเอลิเมนต์มาต่อเข้ากันเป็นโครงสร้าง ที่รอยต่อระหว่างเอลิเมนต์แบบคานเรียกว่าจุด knot เหมือนดังที่ได้อธิบายในรูปที่ 4.3 เป็นจุดต่อที่ไม่มีการหมุนแบบอิสระ ซึ่งในความเป็นจริงเปรียบเหมือนรอยต่อเชื่อม

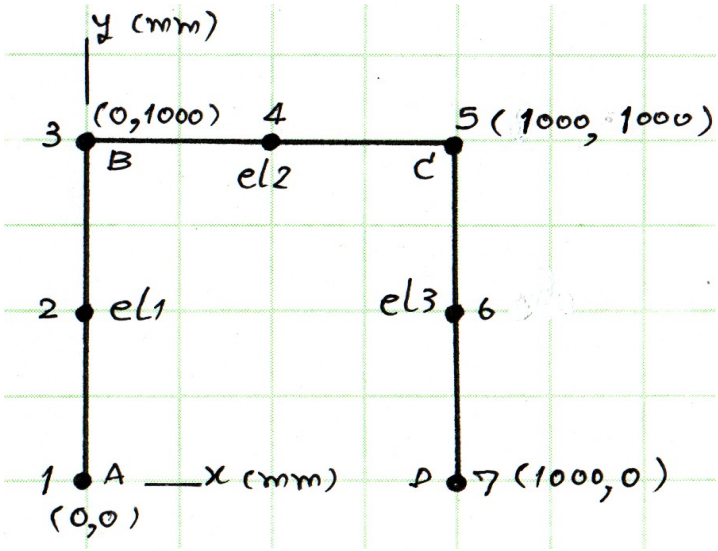
ในหัวข้อนี้จะทดลองศึกษาโจทย์ปัญหาง่ายๆ โครงสร้างแบบ 2 มิติในระนาบ ดังแสดงในรูปที่ 4.14 เมื่อ ABCD คือโครงสร้างที่ประกอบจากแท่งเหล็กหน้าตัดกลม 3 ชิ้นคือ AB,BC และ CD ซึ่งแต่ละชิ้นที่มีรัศมีเท่ากับ 10 mm ยาว 1000 mm เท่ากัน โครงสร้างเกิดจากการเชื่อมที่จุดต่อ B และ C สำหรับที่จุด A เป็นจุดรองรับมีสลักยึดเข้ากับฐานสามารถหมุนในระนาบรอบจุด A ได้แต่เคลื่อนที่ออกจากจุด A ไม่ได้ ที่จุด D มีล้อรับซึ่งเคลื่อนที่อิสระได้เฉพาะในแนวนอนและล้อหมุนอิสระรอบจุด D ได้ สมมติให้เหล็กมีค่ามอดุลัสเชิงเส้นคงที่เท่า 200 GPa และอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 เมื่อมีแรงในแนวนอน P = 10 N มากระทำที่จุด D จงหาค่าการเคลื่อนตัวของจุด D ว่ามีการเคลื่อนตัวเท่าไร



รูปที่ 4.14 ตัวอย่างโครงสร้างในระนาบ

<u>การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา</u>

1.กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ตามเงื่อนไขของปัญหา จากโจทย์นี้กำหนดให้ AB,BC และ CD คือเอลิเมนต์แบบคานซึ่งประกอบกันเป็นโครงสร้าง ABCD โดยออกแบบโครงสร้างให้มี 3 เอลิเมนต์คือ el1, el2 และ el3 และกำหนดให้อยู่ในระนาบ xy โดย ABCD อยู่ตามพิกัดและมีหมายเลขโหนดที่กำหนดไว้ในรูปที่ 4.15



รูปที่ 4.15 การจำลองโหนดและเอลิเมนต์

2.กำหนดหัวข้อเรื่องคือ

```
*HEADING
Using B32 for Frame 2D in plane (ch44.inp)
```

3. กำหนดตำแหน่งต่างอยู่ในหน่วย mm ตั้งชื่อโหนดทั้งหมดว่า nall เขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,0.0,500.0,0.0
3,0.0,1000.0,0.0
4,500.0,1000.,0.0
5,1000.,1000.,0.
6,1000.,500.,0.
7,1000.,0.,0.
```

3.กำหนดเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ตามตารางที่ 4.2 ต่อไปนี้

ตารางที่4.2 กำหนดชื่อเอลิเมนต์ หมายเลขและชนิด

elset	Element no.	Element type	Connectivity node no.
el1	1	B32	1,2,3
el2	2	B32	3,4,5
el3	3	B32	5,6,7

จากตารางสามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดหมายเลขเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

```
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el1
1,1,2,3
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el2
2,3,4,5
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el3
3,5,6,7
```

กำหนดกลุ่มเอลิเมนต์ชื่อ frame ขึ้นมาประกอบจาก el1, el2 และ el3

```
*ELSET,ELSET=frame
el1,el2,el3
```

4. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section)

4.1 กำหนดสมบัติวัสดุของคาน

-เรียกใช้ *MATERIAL เพื่อกำหนดชื่อวัสดุให้เป็นชื่อ STEEL

-เรียกใช้ *ELASTIC เพื่อกำหนดสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นคือค่ามอดุลัสของเหล็กกล้าเท่ากับ 200 GPa=200x10^3 MPa อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 ในที่นี้จำเป็นต้องใช้ E เป็นหน่วย MPa เนื่องจากระยะกำหนดเป็น mm ตั้งแต่ต้น

-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของวัสดุคือ

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
```

4.2 กำหนดสมบัติหน้าตัดคาน

-เรียกใช้ *BEAM SECTION เพื่อกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ที่ชื่อว่า frame ซึ่งประกอบด้วย el1, el2 และ el3 และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุตาม STEEL และมีการเลือกหน้าตัดเป็นแบบกลม (SECTION=CIRC) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ ซึ่งก็คือค่าเส้นผ่านศูนย์กลางมีค่าเท่ากับ 20 mm โดยไม่มีการกำหนด OFFSET

-ดังนั้นในส่วนของ inp file คือ

```
*BEAM SECTION,ELSET=frame,MATERIAL=STEEL,SECTION=CIRC
20.0,20.0
```

5 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

6. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)

กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า

-โหนดทั้งหมด ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน z

-โหนด 1 เป็นจุดยึดแบบสลัก ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนว x y z

-โหนด 7 เป็นจุดยึดแบบลูกกลิ้งที่ ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนว y

ดังนั้นเขียนคำสั่งได้คือ

```
*BOUNDARY
Nall,3,3,0.0
1,1,2,0.0
7,2,2,0.0
```

7.กำหนดให้ที่โหนดหมายเลข 7 มีแรง 10 N กระทำที่ปลายคานในองศาอิสระหมายเลข 1 หรือในแนวแกน x ดังนั้นเขียนคำสั่งได้คือ

```
*CLOAD
7,1,100
```

8. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall รวมถึงความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า frame ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้รายงานค่าความเค้นในเอลิเมนต์ทั้งหมดและค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*EL PRINT,ELSET=frame
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U
*EL FILE
S,E
```

9. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง *END STEP
10.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-9 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ch44.inp

```
*HEADING
Using B32 for Frame 2D in plane (ch44.inp)
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,0.0,500.0,0.0
3,0.0,1000.0,0.0
4,500.0,1000.,0.0
5,1000.,1000.,0.
6,1000.,500.,0.
7,1000.,0.,0.
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el1
1,1,2,3
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el2
2,3,4,5
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=el3
3,5,6,7
*ELSET,ELSET=frame
el1,el2,el3
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+3,0.3
*BEAM SECTION,ELSET=frame,MATERIAL=STEEL,SECTION=CIRC
20.0,20.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
Nall,3,3,0.0
1,1,2,0.0
7,2,2,0.0
```

```
*CLOAD
7,1,10
*EL PRINT,ELSET=frame
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U
*EL FILE
S,E
*END STEP
```

11. ส่ง ch44.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file ch44.dat แสดงข้อมูลค่าระยะการโก่งตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ดังนี้

```
 displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1 -1.654361E-24  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  2.481625E+00 -6.890506E-07  0.000000E+00
         3  4.208710E+00  2.756882E-06  0.000000E+00
         4  4.208788E+00 -6.744564E-01  0.000000E+00
         5  4.208866E+00  2.756944E-06  0.000000E+00
         6  5.935951E+00 -6.890189E-07  0.000000E+00
         7  8.417576E+00 -1.734723E-18  0.000000E+00

 forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1 -9.999998E+00  1.928999E-06 -3.491962E-11
         2 -4.653123E-07 -1.797710E-09 -1.889404E-10
         3 -1.413223E-07 -7.160907E-09 -4.683542E-08
         4 -2.573887E-08  4.559953E-08  8.752588E-08
         5 -1.594688E-06 -2.855245E-10 -4.000747E-08
         6  1.124084E-07 -5.623817E-09 -4.910667E-10
         7  1.000000E+01 -1.959712E-06  3.21165309
```

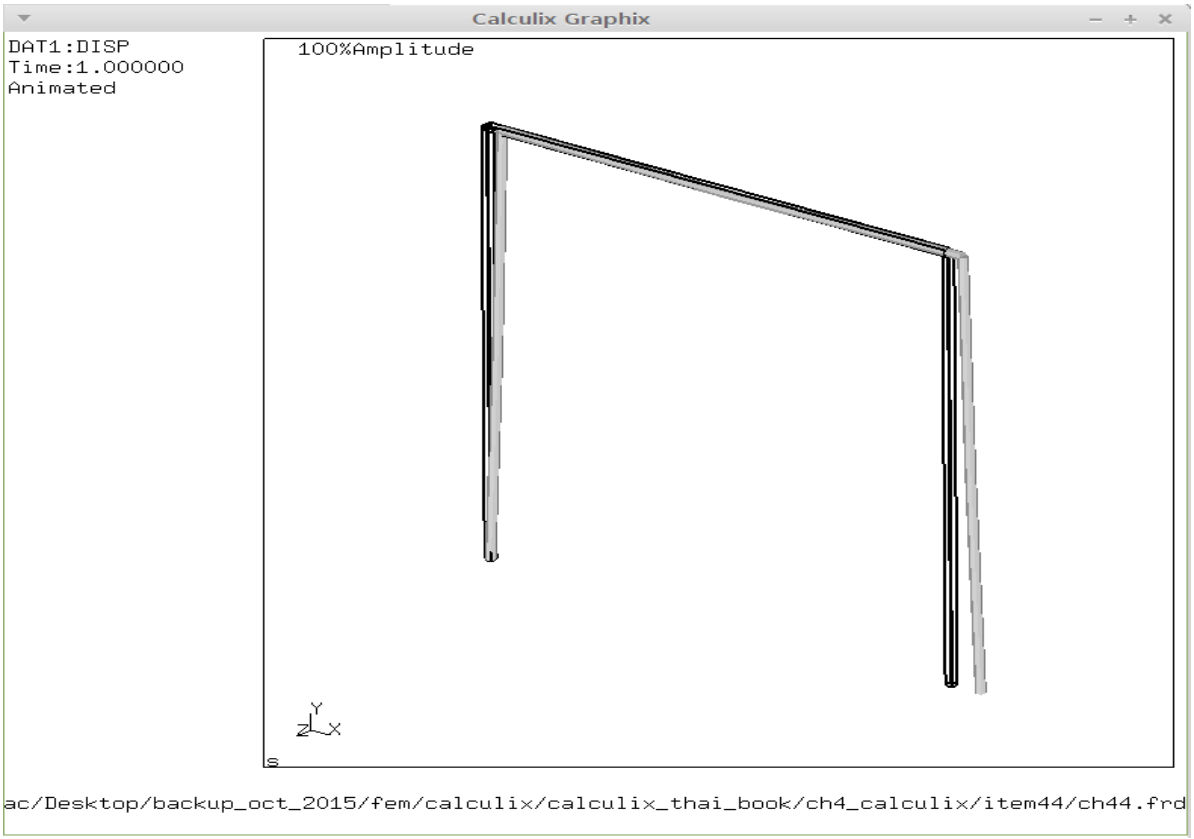
รูปที่ 4.16 ผลลัพธ์ที่แสดงใน dat file

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

12. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์

12.1 ตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์จาก dat file ในรูปที่ 4.16 โดยการลองเปรียบเทียบค่าแรงกริยาและแรงปฏิกิริยาที่โหนด 1 และ 7 พบว่ามีความสมดุลกันในทุกแนวแกน

12.2 อีกแนวทางคือการตรวจสอบพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปจากโปรแกรม โดยการเรียกไฟล์ ch44.frd ดูภาพของการเปลี่ยนรูปของแบบจำลองด้วยโปรแกรม CGX สามารถเรียกผ่าน launcher เมื่อต้องการดูภาพการเปลี่ยนรูปเข้าไปที่ Animate->start ดังแสดงผลการเปลี่ยนรูปของโครงสร้างในรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 ภาพจำลองการเปลี่ยนรูปด้วย CGX

12.3 อีกวิธีคือการลองคำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวของโครงสร้าง โดยวิธีการที่ง่ายที่สุดในการหาระยะการเคลื่อนตัวคือการทดลองใช้ทฤษฎีคลาสติเกียโน (Castigliano's Theorem) โดยการหาพลังงานความเครียดของชิ้น AB, BC และ CD ดังรูปที่ 4.18 เมื่อ EI และ EA มีค่าคงที่ทั้งโครงสร้าง

พลังงานความเครียดของโครงสร้างหาจากพลังงานความเครียดแต่ละชิ้นโดยไม่คิดพลังงานความเครียดจากความเค้นเฉือน ดังนี้

$$U_{structure} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD}$$

เมื่อ $U_{AB} = \int_0^l \left(\frac{M^2}{2EI}\right)_{AB} dx$ $U_{BC} = \int_0^l \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{P^2}{2EA}\right)_{BC} dx$ $U_{CD} = \int_0^l \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{P^2}{2EA}\right)_{CD} dx$

ระยะเคลื่อนตัวของจุด D คือ

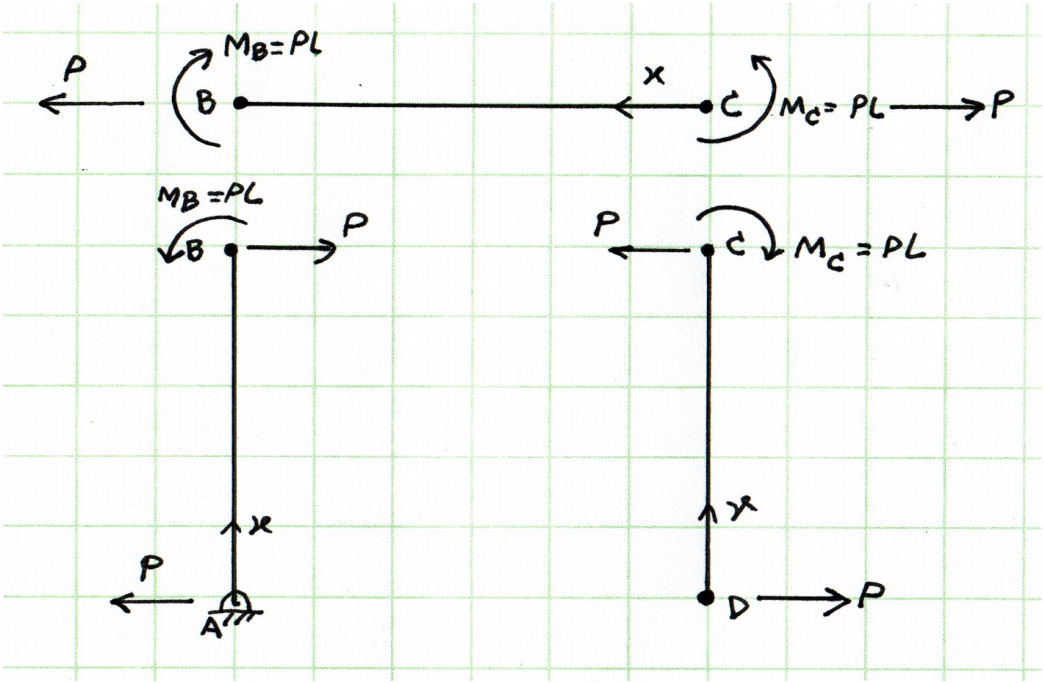
$$\delta_D^x = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{7}{6}\frac{Pl^3}{EI} + \frac{Pl}{EA}$$

เมื่อ $I=\frac{\pi}{4}r^4$ และ $A=\pi r^2$

จะได้

$\delta_D^x = 7.4 \text{ mm}$

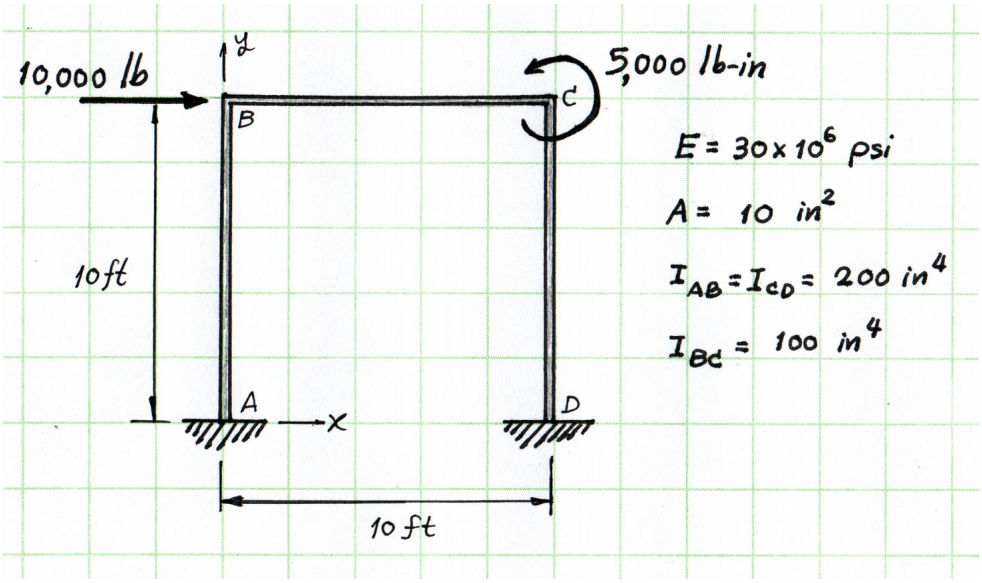
ในขณะที่ผลลัพธ์จากโปรแกรมใน dat file คือ 8.42 mm ซึ่งผลต่างที่เกิดประมาณ 10 กว่าเปอร์เซนต์



รูปที่ 4.18 แรงที่กระทำในแต่ละส่วนของโครงสร้าง

4.5 ทดสอบเอลิเมนต์ B32 กับตัวอย่างโครงสร้างแบบ 2 มิติในระนาบ

ในหัวข้อนี้ขอแสดงรายละเอียดการใช้เอลิเมนต์แบบคาน B32 กับโจทย์ปัญหาโครงสร้างในระนาบที่มีการคิดผลลัพธ์ด้วยวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์มาแล้ว ตัวอย่างทางด้านโครงสร้างจากหนังสือทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์ [2] ถูกนำมายืนยันคำตอบด้วยโปรแกรม CalculiX เช่น โครงสร้างดังรูปที่ 4.19 [2]



รูปที่ 4.19 ตัวอย่างโครงสร้างในระนาบ

จากเงื่อนไขข้างต้นทราบว่า ABCD นั้นเป็นโครงสร้างที่ทำจากวัสดุชนิดเดียวกันมีขนาดหน้าตัด A เท่ากันแต่มีค่า I หรือค่าโมเมนต์พื้นที่รอบแกนหมุนไม่เท่ากันระหว่างช่วง AB และ BC ถ้าสมมติให้ AB, BC และ CD คือคานโดย AB และ CD คือคานในแนวนอน BC คือคานในแนวตั้งที่เชื่อมต่อกัน โดยมี B และ C เป็นจุดต่อ ขณะที่ A และ D คือจุดยึดที่รับแรงและโมเมนต์ในทุกแนวแกน จากข้อมูลความสัมพันธ์พื้นที่หน้าตัดและค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่

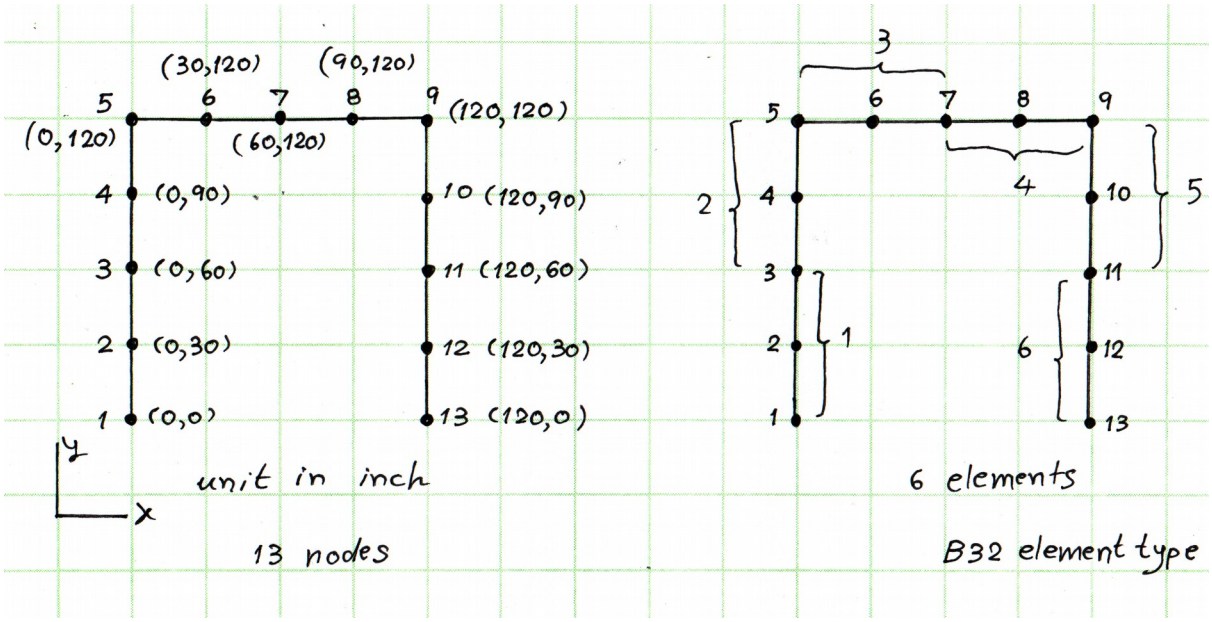
ถ้าสมมติให้หน้าตัดมีรูปร่างแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าสามารถกำหนดขนาดความหนาตามทิศ $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ ได้ดังนั้น

-หน้าตัดของ AB และ CD คือ $bh=10\ \text{in}^2$ และ $bh^3/12=200\ \text{in}^4$ เมื่อ b คือความหนาในทิศ $\hat{n}_1$ และ h คือความหนาในทิศ $\hat{n}_2$ จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะได้ $b=0.645\ \text{in}$ และ $h=15.5\ \text{in}$

-หน้าตัดของ BC คือ $bh=10\ \text{in}^2$ และ $\frac{bh^3}{12}=100\ \text{in}^4$ เมื่อ b คือความหนาในทิศ $\hat{n}_1$ และ h คือความหนาในทิศ $\hat{n}_2$ จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะได้ $b=0.912\ \text{in}$ และ $h=10.95\ \text{in}$

การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา

1.กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ตามเงื่อนไขของปัญหา จากโจทย์นี้กำหนดให้ AB, BC และ CD คือเอลิเมนต์แบบคานซึ่งประกอบกันเป็นโครงสร้าง ABCD โดยออกแบบโครงสร้างให้มี 6 เอลิเมนต์ 13 โหนด และกำหนดให้อยู่ในระนาบ xy โดยมีพิกัดและมีหมายเลขโหนดที่กำหนดไว้ในรูปที่ 4.20



รูปที่ 4.20 การจำลองโหนดและเอลิเมนต์

2.กำหนดหัวข้อเรื่องคือ

```
*HEADING
ch45.inp Structure: beam element
```

3. กำหนดตำแหน่งต่างๆ ในหน่วย นิ้ว (in) ตั้งชื่อโหนดทั้งหมดว่า nall เขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,0.0,30.0,0,0
3,0.0,60.0,0.0
4,0.,90.0,0.0
5,0.0,120.0,0.0
6,30.0,120.0,0.0
7,60.0,120.0,0.0
8,90.,120.,0.
9,120.,120.,0.
10,120.,90,0.
11,120.,60.,0.
12,120.,30.,0.
13,120.,0.,0.
```

3.กำหนดเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ตามตารางที่ 4.3

ตารางที่4.3 ชนิดเอลิเมนต์และโหนดเชื่อมต่อ

Element no.	Elset	Element type	Connectivity node no.
1	VER	B32	1,2,3
2	VER	B32	3,4,5
3	HOR	B32	5,6,7
4	HOR	B32	7,8,9
5	VER	B32	9,10,11
6	VER	B32	11,12,13

จากตารางสามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดหมายเลขเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

```
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=VER
1,1,2,3
2,3,4,5
5,9,10,11
6,11,12,13
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=HOR
3,5,6,7
4,7,8,9
```

กำหนดกลุ่มเอลิเมนต์ชื่อ VER หมายถึงกลุ่มเอลิเมนต์ที่อยู่ในแนวตั้งและกลุ่มเอลิเมนต์ชื่อ HOR หมายถึงกลุ่มเอลิเมนต์ที่ตั้งอยู่ในแนวนอนทั้งนี้เพื่อสะดวกต่อการกำหนดค่า *BEAM SECTION ที่ต่างกันออกไป

4. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section)

4.1 กำหนดสมบัติวัสดุของคานแต่ละชิ้น

-เรียกใช้ *MATERIAL เพื่อกำหนดชื่อวัสดุคือ STEEL

-เรียกใช้*ELASTIC เพื่อกำหนดสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นคือค่ามอดุลัสของเหล็กกล้าเท่ากับ 30E+06psi อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 ในที่นี้จำเป็นต้องใช้ E เป็นหน่วย lb/in^2

-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของวัสดุคือ

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
30E+6,0.3
```

4.2 กำหนดสมบัติหน้าตัดคาน

-ใช้ *BEAM SECTION กำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ที่ชื่อว่า VER และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุตาม STEEL และมีการเลือกหน้าตัดเป็นแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (SECTION=RECT) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ ก็คือค่า $b=0.645$ in และ $h=15.5$ in

-ดังนั้นในส่วนของ inp file คือ

```
*BEAM SECTION,ELSET=VER,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
**Area=10 in^2 I=200 in^4, b*h=10, 1/12bh^3=200, b=0.645 in,h=15.5 in
0.645,15.5
```

-ใช้*BEAM SECTION เพื่อกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ที่ชื่อว่า HOR และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุตามที่กำหนดไว้ใน*MATERIAL,NAME=STEEL และมีการเลือกหน้าตัดเป็นแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า(SECTION=RECT)โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ ก็คือค่า $b=0.912$ in และ $h=10.95$ in ดังนั้นในส่วนของ inp file คือ

```
*BEAM SECTION,ELSET=HOR,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
**Area=10 in^2 I=100 in^4, b*h=10, 1/12bh^3=200, b=0.915 in,h=10.92 in
0.912,10.95
```

5 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

6. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)
กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า
-โหนด 1 และ 13 เป็นจุดยึดแบบฝังกับพื้น ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนว x, y, z และไม่มีการหมุนตัวรอบแกน z ดังนั้นเขียนคำสั่งได้คือ

```
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
1,6,6,0.0
13,1,3,0.0
13,6,6,0.0
```

7.กำหนดให้ที่จุด B หรือที่โหนดหมายเลข 5 มีแรง +10,000 lb กระทำในองศาอิสระหมายเลข 1 หรือในแนวแกน x และที่จุด C หรือที่โหนดหมายเลข 9 มีโมเมนต์ในระนาบกระทำรอบแกน z=+5,000 lb-in ดังนั้นเขียนคำสั่งได้คือ

```
*CLOAD
5,1,10000
9,6,5000
```

8. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด ทำนองเดียวกันต้องกาแสดงผลลัพธ์ทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้แสดงค่าความเค้นในเอลิเมนต์ทั้งหมดและค่าระยะ

เคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*EL PRINT,ELSET=VER
S
*EL PRINT,ELSET=HOR
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U
*EL FILE
S
```

9. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง *END STEP

10.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-9 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ch45.inp

```
*HEADING
ch45.inp Structure: beam element
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,0.0,30.0,0,0
3,0.0,60.0,0.0
4,0.,90.0,0.0
5,0.0,120.0,0.0
6,30.0,120.0,0.0
7,60.0,120.0,0.0
8,90.,120.,0.
9,120.,120.,0.
10,120.,90,0.
11,120.,60.,0.
12,120.,30.,0.
13,120.,0.,0.
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=VER
1,1,2,3
2,3,4,5
5,9,10,11
6,11,12,13
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=HOR
3,5,6,7
4,7,8,9
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
30E+6,0.3
*BEAM SECTION,ELSET=VER,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
**Area=10 in^2 I=200 in^4, b*h=10, 1/12bh^3=200, b=0.645 in,h=15.5 in
0.645,15.5
*BEAM SECTION,ELSET=HOR,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
**Area=10 in^2 I=100 in^4, b*h=10, 1/12bh^3=200, b=0.915 in,h=10.92 in
0.912,10.95
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
1,6,6,0.0
13,1,3,0.0
13,6,6,0.0
*CLOAD
5,1,10000
9,6,5000
*EL PRINT,ELSET=VER
```

```
S
*EL PRINT,ELSET=HOR
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U
*EL FILE
S
*END STEP
```

11. ส่ง ch45.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file ch45.dat แสดงข้อมูลค่าระยะการโก่งตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ดังนี้

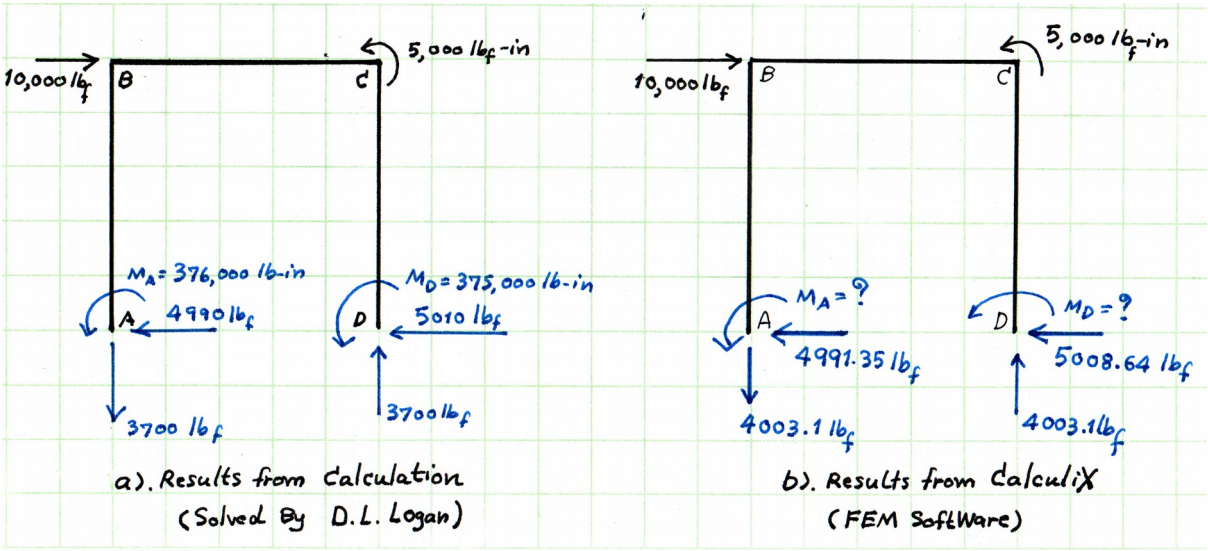
```
 displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  1.694066E-21  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  2.012033E-02  4.294649E-04  0.000000E+00
         3  7.066527E-02  8.470636E-04  0.000000E+00
         4  1.301421E-01  1.254906E-03  0.000000E+00
         5  1.778782E-01  1.611355E-03  0.000000E+00
         6  1.774163E-01 -1.546302E-02  0.000000E+00
         7  1.769032E-01 -5.946618E-04  0.000000E+00
         8  1.764048E-01  1.456599E-02  0.000000E+00
         9  1.759063E-01 -1.645831E-03  0.000000E+00
        10  1.291266E-01 -1.246002E-03  0.000000E+00
        11  7.025685E-02 -8.512151E-04  0.000000E+00
        12  2.002665E-02 -4.288209E-04  0.000000E+00
        13  0.000000E+00  0.000000E+00 -1.694066E-21

 forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1 -4.991356E+03 -4.003102E+03  3.350522E-09
         2  3.296861E-08  8.967133E-09 -1.403470E-08
         3  6.286898E-07 -1.118761E-07  2.188176E-08
         4  1.809517E-07  1.594066E-08 -1.496392E-08
         5  1.000000E+04  3.569949E-08 -1.232308E-08
         6 -3.845831E-07 -8.111105E-09  1.746662E-08
         7  5.931645E-07  1.715355E-08 -4.004107E-09
         8 -7.955976E-07  2.196398E-09  7.396466E-10
         9 -5.815828E-07  2.861088E-08 -3.959030E-09
        10  1.317899E-07  2.645901E-08  2.774198E-08
        11 -7.618094E-07 -1.426970E-07 -4.392832E-08
        12  1.677195E-07  5.716792E-08  2.888513E-08
        13 -5.008644E+03  4.003102E+03 -6.882459E-09
```

รูปที่ 4.21 ผลลัพธ์ที่แสดงใน dat file

การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม

12. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์

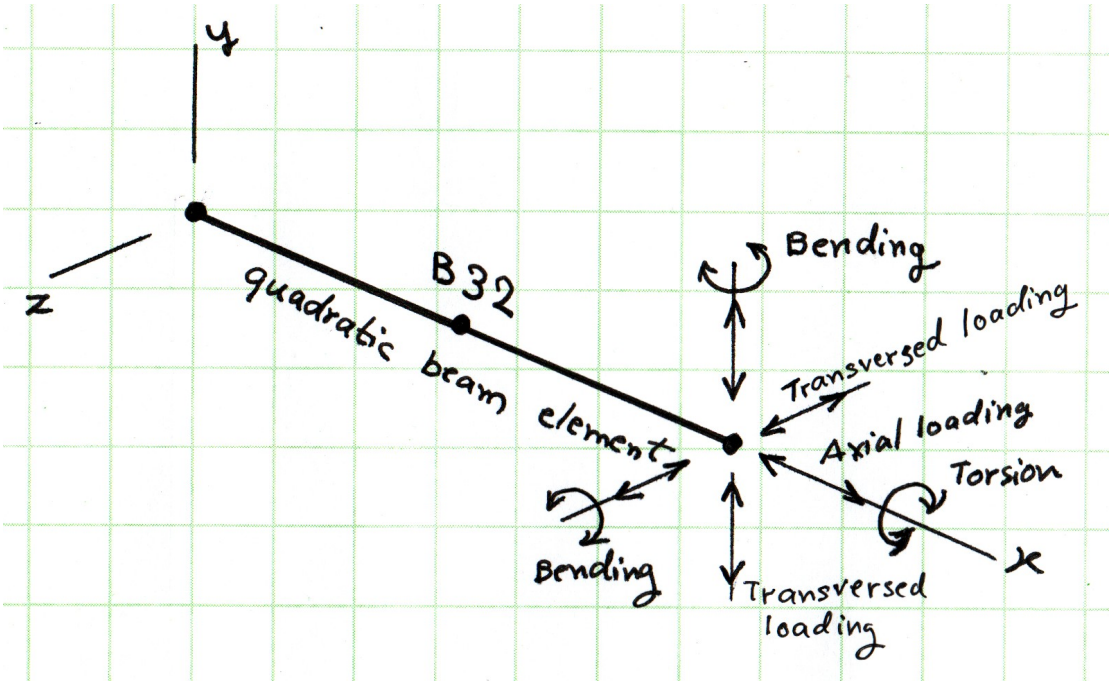
12.1 จากรูปที่ 4.21 เปรียบเทียบผลลัพธ์ของค่าแรงปฏิกิริยาที่ได้จากหลักทฤษฎี [2] ดังรูปที่ 4.22 คือ ผลการจำลองด้วยเอลิเมนต์แบบคาน B32 โดยนำผลลัพธ์จาก dat file มาลองเปรียบเทียบค่าแรงกริยาและแรงปฏิกิริยาที่โหนด 1 และ 13 พบว่ามีความสมดุลกันในทุกแนวแกน เพียงแต่ใน dat file ไม่สามารถรายงานค่าของโมเมนต์ปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่โหนด 1 และ 13 ได้ อย่างไรก็ตามเมื่อตรวจสอบเฉพาะผลลัพธ์ที่ได้หรือเท่าที่มีพบว่าค่าที่ได้นั้นมีความสอดคล้องกันหรือมีความแตกต่างกันไม่มากนั้นเอง



รูปที่ 4.22 เปรียบเทียบผลลัพธ์ของแรงปฏิกิริยา

4.6 การใช้เอลิเมนต์ B32 กับชิ้นงานรับแรงบิดในระนาบ

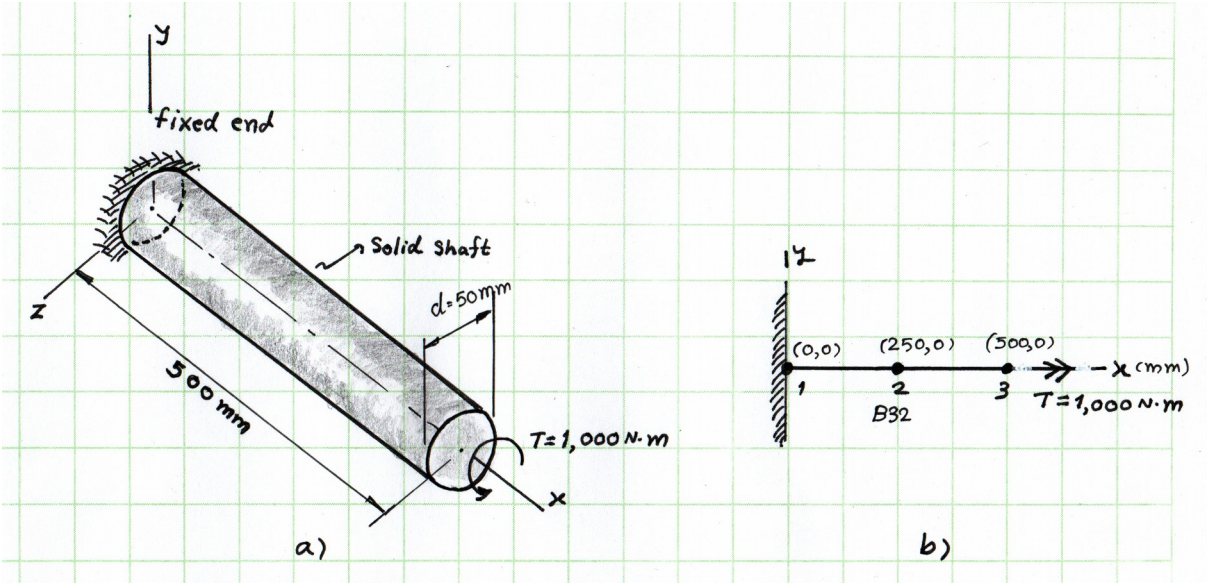
เนื่องจากเอลิเมนต์ B32 คือเอลิเมนต์ 1-D ที่จำลองจุดขยายออกตามความหนาในแนวหน้าตัดโดยการจำลองจุดอินทิเกรชั่นออกมาดังที่ได้อธิบายไปแล้วในบทที่ 3 การเปลี่ยนรูปบนแนวแกนกึ่งกลางของเอลิเมนต์ส่งผลต่อการจำลองการเคลื่อนตัวบนหน้าตัด ดังนั้นเอลิเมนต์B32 นอกจากจะนำไปใช้ในการวิเคราะห์การดึงอัด ยังสามารถนำไปใช้ในเรื่องของการบิดในแนวแกนได้ดังรูปที่ 4.23 ทั้งนี้เนื่องจากหน้าตัดของเอลิเมนต์ถูกจำลองออกมาเป็น 3-D แม้ตัวเอลิเมนต์จะมีรูปแบบที่เห็นคือ 1-D



รูปที่ 4.23 แรงในแนวต่างๆ ที่กระทำต่อเอลิเมนต์ B32

หัวข้อนี้จะนำเสนอการใช้งานเอลิเมนต์ B32 กับชิ้นงานที่รับแรงบิดในแนวแกนชิ้นงาน โดยจะศึกษาผลลัพธ์คือความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของชิ้นงาน โดยจะศึกษาผลจาก frd file และจาก dat file สำหรับการศึกษาจาก frd file นั้นแสดงค่าของความเค้นจากการพล็อตค่าของความเค้นเฉือนซึ่งอาจเป็น SXY SXZ หรือ SYZ ขึ้นกับหน้าตัดที่เกิดแรงบิดนั้นส่วนการศึกษาจาก dat file ก็เช่นกันสามารถดูค่าความเค้นเฉือนที่จุดอินทิเกรชั่นได้โดยตรง

ต่อไปนี้คือตัวอย่างเพลาตันหน้าตัดกลมทำจากเหล็กกล้า (steel, E=200GPa, Poisson's ratio $\nu=0.3$) มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในเท่ากับ 50 mm ยาว 500 mm รับแรงบิดเท่ากับ 1,000 N-m ดังแสดงในรูป 4.22 a) จงเขียน inp file พร้อมวิเคราะห์หาค่าความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นบนตัดเพลา



รูปที่ 4.24 เพลาตันหน้าตัดกลมและการจำลองโหนดและเอลิเมนต์

การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา

1.กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ตามเงื่อนไขของปัญหา จากโจทย์นี้กำหนดให้ชิ้นงานเป็นเพลาตันหน้าตัดกลม เลือกใช้เอลิเมนต์แบบคาน B32 จำนวน 1 เอลิเมนต์ 3 โหนด และกำหนดให้อยู่ในระนาบ xy โดยมีพิกัดและมีหมายเลขโหนดที่กำหนดไว้ในรูปที่ 4.24

2.กำหนดหัวข้อเรื่องคือ

```
**HEADING
ch46.inp solid shaft in torsion
```

3. กำหนดตำแหน่งต่างๆ อยู่ในหน่วย มิลลิเมตร (mm) ตั้งชื่อโหนดทั้งหมดว่า nall เขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,250.0,0.0,0,0
3,500.0,0.0,0.0
```

กำหนดเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ตามตารางที่ 4.4

ตารางที่4.4 กำหนดชื่อเอลิเมนต์ หมายเลขและชนิด

Element no.	Elset	Element type	Connectivity node no.
1	shaft	B32	1,2,3

จากตารางสามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดหมายเลขเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

```
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=shaft
1,1,2,3
```

กำหนดกลุ่มเอลิเมนต์ชื่อ shaft หมายถึงกลุ่มเอลิเมนต์แทนเพลา

4. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section)

4.1 กำหนดสมบัติวัสดุของคานแต่ละชิ้น

-เรียกใช้ *MATERIAL เพื่อกำหนดชื่อวัสดุคือ STEEL

-เรียกใช้*ELASTIC เพื่อกำหนดสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นคือค่ามอดุลัสของเหล็กกล้าเท่ากับ 200×10^3MPa อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3

-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของวัสดุคือ

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+3,0.3
```

4.2 กำหนดสมบัติหน้าตัดคาน

-ใช้ *BEAM SECTION เพื่อกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ที่ชื่อว่า shaft และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุตาม STEEL และมีการเลือกหน้าตัดเป็นแบบวงกลม (SECTION=CIRC) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ ก็คือค่า 50 mm เท่ากัน

ดังนั้นในส่วนของ inp file คือ

```
*BEAM SECTION,ELSET=shaft,MATERIAL=STEEL,SECTION=CIRC
50.0,50.0
```

5 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

6. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)
กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า
-ทุกโหนด 1, 2, 3 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน xyz
-โหนด 1 เป็นจุดยึดแบบฝังกับพื้น ไม่มีการเคลื่อนตัวและไม่มีการหมุนตัวรอบแกน x
ดังนั้นเขียนคำสั่งได้คือ

```
*BOUNDARY
Nall,1,3,0.0
1,4,4,0.0
```

7.กำหนดให้ที่โหนดหมายเลข 3 มีแรงบิด +1,000,000N-mm กระทำในองศาอิสระหมายเลข 4 หรือหมุนรอบแกน x เขียนคำสั่งได้คือ

```
*CLOAD
3,4,10E+05
```

8. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความเค้น (S) ความเครียด (E) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้รายงานค่าความเค้น ความเครียดในเอลิเมนต์ทั้งหมดและค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*EL PRINT,ELSET=shaft
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U ,RF
*EL FILE
S,E
```

9. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง *END STEP
10.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-9 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ch46.inp

```
*HEADING
ch46.inp solid shaft in torsion
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,250.0,0.0,0,0
3,500.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=shaft
1,1,2,3
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+3,0.3
*BEAM SECTION,ELSET=shaft,MATERIAL=STEEL,SECTION=CIRC
50.0,50.0
*STEP
```

```
*STATIC
*BOUNDARY
Nall,1,3,0.0
1,4,4,0.0
*CLOAD
3,4,10E+05
*EL PRINT,ELSET=shaft
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U,RF
*EL FILE
S,E
*END STEP
```

11. ส่ง ch46.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file ch46.dat แสดงข้อมูลเฉพาะความเค้นที่เกิดขึ้นที่จุดอินทิเกรชั่นดังนี้

```
 stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set SHAFT and time  0.1000000E+01

    1   1  3.911727E-12  1.419990E+00 -1.419990E+00 -2.174218E+01  2.174218E+01 -1.334403E-13
    1   2  6.377157E-12 -1.419990E+00  1.419990E+00 -2.174218E+01  2.174218E+01 -2.668805E-13
    1   3  1.425761E-12 -1.419990E+00  1.419990E+00 -2.174218E+01 -2.174218E+01 -4.003208E-13
    1   4  1.957459E-13  1.419990E+00 -1.419990E+00 -2.174218E+01 -2.174218E+01 -1.334403E-13
    1   5  9.040316E-13 -1.419990E+00  1.419990E+00  2.174218E+01  2.174218E+01  2.335205E-13
    1   6  9.331435E-13  1.419990E+00 -1.419990E+00  2.174218E+01  2.174218E+01  2.668805E-13
    1   7  2.940835E-12  1.419990E+00 -1.419990E+00  2.174218E+01 -2.174218E+01  1.334403E-13
    1   8  4.270770E-12 -1.419990E+00  1.419990E+00  2.174218E+01 -2.174218E+01  1.334403E-13
    1   9  1.971335E-12  9.176982E+00 -9.176982E+00 -2.901426E+01  2.901426E+01 -1.334403E-13
    1  10  2.789179E-11  3.058768E+00 -3.058768E+00 -3.486505E+01  1.809357E+01 -7.493661E-01
    1  11  4.463062E-11  1.335605E-11  1.379306E-11 -3.858828E+01 -1.691903E-11 -9.459955E-01
    1  12  2.473347E-11 -3.058768E+00  3.058768E+00 -3.486505E+01 -1.809357E+01 -7.493661E-01
    1  13 -3.688777E-12 -9.176982E+00  9.176982E+00 -2.901426E+01 -2.901426E+01 -1.100882E-12
    1  14 -2.187699E-11  3.058768E+00 -3.058768E+00 -1.809357E+01  3.486505E+01  7.493661E-01
    1  15  2.024066E-11  7.083978E-12  4.600212E-12 -2.406402E+01 -1.121275E-11 -3.053392E-01
    1  16 -2.623209E-11 -3.058768E+00  3.058768E+00 -1.809357E+01 -3.486505E+01  7.493661E-01
    1  17 -3.917930E-11 -1.278430E-11 -1.193124E-11  1.437099E-12  3.858828E+01  9.459955E-01
    1  18 -1.303110E-11 -3.565063E-12 -5.894018E-12  8.113303E-13  2.406402E+01  3.053392E-01
    1  19  3.968299E-12  2.112044E-12 -1.455738E-12 -2.207128E-13 -1.767253E-12  3.336007E-14
    1  20 -1.344338E-11 -5.698359E-12 -7.707040E-12 -1.274677E-12 -2.406402E+01  3.053392E-01
    1  21 -4.015031E-11 -1.652106E-11 -1.555565E-11 -1.915060E-12 -3.858828E+01  9.459955E-01
    1  22 -2.480477E-11 -3.058768E+00  3.058768E+00  1.809357E+01  3.486505E+01  7.493661E-01
    1  23  1.871556E-11  6.388470E-12  4.493071E-12  2.406402E+01  7.696379E-12 -3.053392E-01
    1  24 -2.195450E-11  3.058768E+00 -3.058768E+00  1.809357E+01 -3.486505E+01  7.493661E-01
    1  25 -1.243844E-12 -9.176982E+00  9.176982E+00  2.901426E+01  2.901426E+01 -1.000802E-12
    1  26  2.323948E-11 -3.058768E+00  3.058768E+00  3.486505E+01  1.809357E+01 -7.493661E-01
    1  27  4.206310E-11  1.217467E-11  1.328097E-11  3.858828E+01  1.341127E-11 -9.459955E-01
    1  28  2.710671E-11  3.058768E+00 -3.058768E+00  3.486505E+01 -1.809357E+01 -7.493661E-01
    1  29  1.992079E-12  9.176982E+00 -9.176982E+00  2.901426E+01 -2.901426E+01 -7.005614E-13
    1  30  7.296337E-12 -9.176982E+00  9.176982E+00 -2.901426E+01  2.901426E+01  1.734723E-12
    1  31  3.256727E-11 -3.058768E+00  3.058768E+00 -3.486505E+01  1.809357E+01  7.493661E-01
    1  32  4.556048E-11  1.662948E-11  1.556955E-11 -3.858828E+01  1.695659E-11  9.459955E-01
    1  33  2.340459E-11  3.058768E+00 -3.058768E+00 -3.486505E+01 -1.809357E+01  7.493661E-01
    1  34 -5.142537E-12  9.176982E+00 -9.176982E+00 -2.901426E+01 -2.901426E+01 -9.340819E-13
    1  35 -1.956829E-11 -3.058768E+00  3.058768E+00 -1.809357E+01  3.486505E+01 -7.493661E-01
    1  36  2.080153E-11  9.299537E-12  5.470495E-12 -2.406402E+01  1.123690E-11  3.053392E-01
    1  37 -2.855990E-11  3.058768E+00 -3.058768E+00 -1.809357E+01 -3.486505E+01 -7.493661E-01
    1  38 -3.819690E-11 -1.262183E-11 -1.358110E-11 -1.440324E-12  3.858828E+01 -9.459955E-01
    1  39 -1.212106E-11 -2.929313E-12 -6.465945E-12 -8.100797E-13  2.406402E+01 -3.053392E-01
    1  40  4.647881E-12  3.979432E-12 -1.057851E-12  2.297472E-13  1.768968E-12 -1.334403E-13
    1  41 -1.339728E-11 -3.269102E-12 -7.012970E-12  1.259051E-12 -2.406402E+01 -3.053392E-01
    1  42 -4.035543E-11 -1.338143E-11 -1.461696E-11  1.864584E-12 -3.858828E+01 -9.459955E-01
    1  43 -2.552215E-11  3.058768E+00 -3.058768E+00  1.809357E+01  3.486505E+01 -7.493661E-01
    1  44  1.958398E-11  8.141627E-12  4.418365E-12  2.406402E+01 -7.684942E-12  3.053392E-01
    1  45 -2.109604E-11 -3.058768E+00  3.058768E+00  1.809357E+01 -3.486505E+01 -7.493661E-01
    1  46 -6.408349E-12  9.176982E+00 -9.176982E+00  2.901426E+01  2.901426E+01  1.467843E-12
    1  47  2.281327E-11  3.058768E+00 -3.058768E+00  3.486505E+01  1.809357E+01  7.493661E-01
```

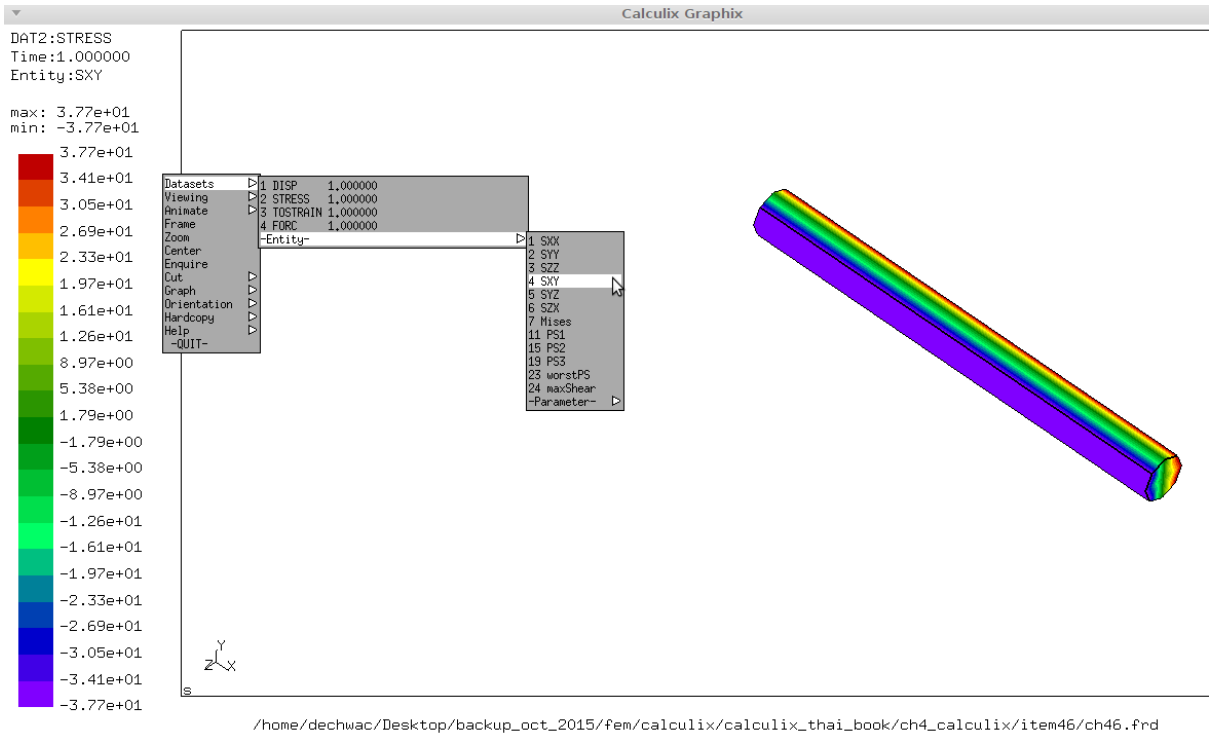
```
1  48  4.294677E-11  1.366578E-11  1.278502E-11  3.858828E+01 -1.339192E-11  9.459955E-01
1  49  2.975915E-11 -3.058768E+00  3.058768E+00  3.486505E+01 -1.809357E+01  7.493661E-01
1  50  6.060222E-12 -9.176982E+00  9.176982E+00  2.901426E+01 -2.901426E+01  9.340819E-13
```

รูปที่ 4.25 dat file

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

12. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์

12.1 จากรูปที่ 4.25 พบว่าค่าความเค้นเฉือน SXY และ SXZ มีค่าสูงสุดอยู่ในช่วง ± 38.5 MPa ซึ่งค่านี้คือความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดเพลาจากการสำรวจข้อมูลจาก dat file สามารถแสดงจาก frd file ได้ดังรูปที่ 4.26



รูปที่ 4.26 ผลลัพธ์ของความเค้นแสดงด้วย CGX

ซึ่งเมื่อลองคำนวณหาค่าความเค้นเฉือนตามสูงสุดของเพลาตันหน้าตัดกลมตามหลักทางกลศาสตร์ของแข็งคือ

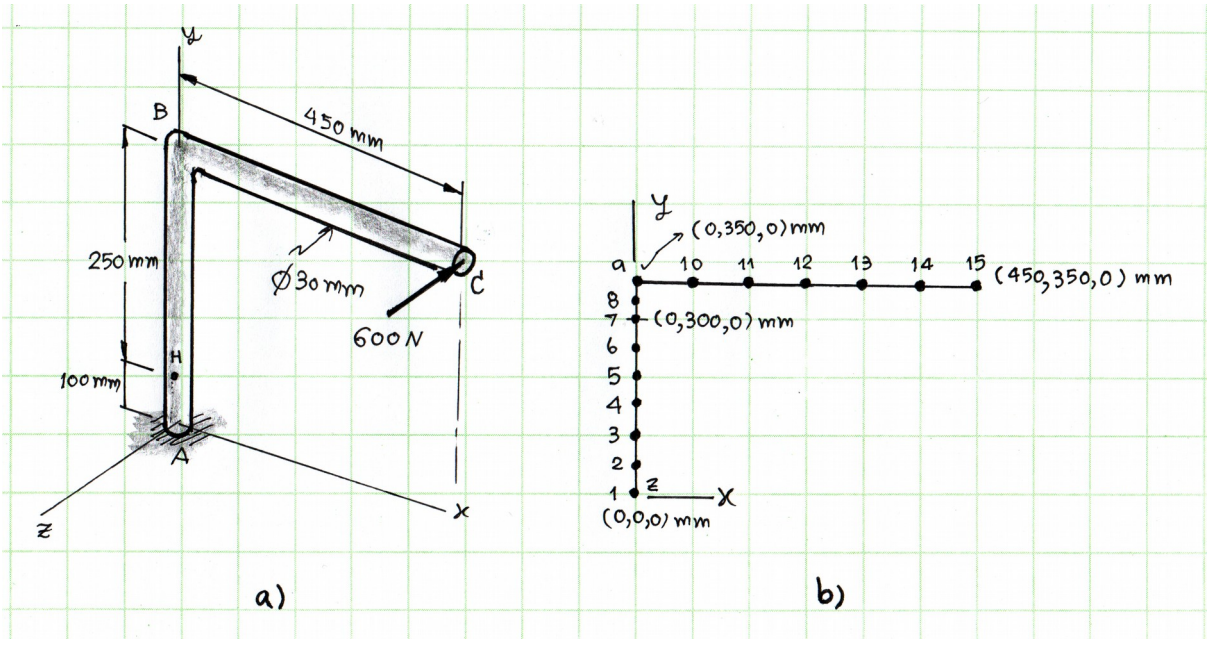
$\tau_{max} = \pm \frac{16\,T}{\pi\, d^3}$ เมื่อ T คือค่าแรงบิดที่ส่งผ่านเพลา และ d คือค่าเส้นผ่านศูนย์กลางจะได้ว่า

$$\tau_{max} = \pm \frac{16\, x\, 1{,}000{,}000\ \text{N-mm}}{\pi (50\ \text{mm})^3} = \pm\ 40.69\ \ \text{MPa}$$ ซึ่งเกิดขึ้นที่ผิวเพลา

จากผลการคำนวณทางทฤษฎี จากผลลัพธ์จากโปรแกรมพบว่าค่าความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดเพลานั้นได้ผลที่ใกล้เคียงกัน

4.7 การใช้เอลิเมนต์ B32 กับชิ้นงานโครงสร้างที่รับแรงใน 3-D

ในหัวข้อนี้เป็นการแสดงตัวอย่างการใช้งาน B32 เอลิเมนต์แบบคานใน 3-D มีแรงที่กระทำในหลายรูปแบบตามแนวแกนต่างๆ เรียกว่าภาระแรงผสมหรือ combined loading ดังตัวอย่างโครงสร้าง [1] ชิ้นงาน ABC ทำจากเหล็กกล้าในรูปที่ 4.27 เป็นชิ้นงานคล้ายเพลาหน้าตัดกลมเส้นผ่านศูนย์กลางคงที่เท่ากับ 30 mm ฐานของโครงสร้างยึดแบบฝังที่ปลาย A ส่วน AB วางตามแนวตั้ง (แกน y) เป็นระยะ 350 mm จากนั้นถูกดัดไปให้วางตัวในแนวแกน x เป็นระยะ 450 mm ที่ปลาย C มีแรงกระทำ 600 N ในแนวขวางแกนตามยาวของชิ้นงานไปทางแกน -z ให้หาความเค้นตามระบบพิกัด xyz ที่จุด H โดยตำแหน่ง H อยู่สูงจากตำแหน่ง A ขึ้นมา 100 mm และอยู่ในทิศของ +z



รูปที่ 4.27 ตัวอย่างโครงสร้างและการจำลองโหนดและเอลิเมนต์

<u>การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา</u>

1.กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ตามเงื่อนไขของปัญหา จากโจทย์นี้กำหนดให้ชิ้นงานเป็นเพลาตันหน้าตัดกลม เลือกใช้เอลิเมนต์แบบคาน B32 จำนวน 7 เอลิเมนต์ 15 โหนด และกำหนดให้อยู่ในระนาบ xy โดยมีพิกัดและมีหมายเลขโหนดที่กำหนดไว้ในรูปที่ 4.27

2.กำหนดหัวข้อเรื่องคือ

```
*HEADING
ch47.inp combined loading
```

3. กำหนดตำแหน่งต่างๆ อยู่ในหน่วย มิลลิเมตร (mm) ตั้งชื่อโหนดทั้งหมดว่า nall เขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,0.0,50.0,0,0
3,0.0,100.0,0.0
4,0.0,150.0,0.0
5,0.0,200.0,0.0
6,0.0,250.0,0.0
7,0.0,300.0,0.0
8,0.0,325.0,0.0
9,0.0,350.0,0.0
10,75.0,350.0,0.0
11,150.0,350.0,0.0
12,225.0,350.0,0.0
13,300.0,350.0,0.0
14,375.0,350.0,0.0
15,450.0,350.0,0.0
```

3.กำหนดเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ตามตารางที่ 4.5

ตารางที่4.5 กำหนดชื่อเอลิเมนต์ หมายเลข ชนิดและโหนดเชื่อมต่อ

Element no.	Elset	Element type	Connectivity node no.
1	shaft	B32	1,2,3
2	shaft	B32	3,4,5
3	shaft	B32	5,6,7
4	shaft	B32	7,8,9
5	shaft	B32	9,10,11
6	shaft	B32	11,12,13
7	shaft	B32	13,14,15

จากตารางสามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดหมายเลขเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

```
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=shaft
1,1,2,3
2,3,4,5
3,5,6,7
4,7,8,9
5,9,10,11
6,11,12,13
7,13,14,15
```

กำหนดกลุ่มเอลิเมนต์ชื่อ shaft หมายถึงกลุ่มเอลิเมนต์แทนโครงสร้าง ABC

4. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section)

4.1 กำหนดสมบัติวัสดุของคานแต่ละชิ้น

-เรียกใช้ *MATERIAL เพื่อกำหนดชื่อวัสดุคือ STEEL

-เรียกใช้ *ELASTIC เพื่อกำหนดสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นคือค่ามอดุลัสของเหล็กกล้าเท่ากับ $200x10^3$ MPa อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3

-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของวัสดุคือ

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+3,0.3
```

4.2 กำหนดสมบัติหน้าตัดคาน

-ใช้ *BEAM SECTION เพื่อกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ที่ชื่อว่า shaft และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุตาม STEEL และมีการเลือกหน้าตัดเป็นแบบวงกลม (SECTION=CIRC) โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ ก็คือค่า $30\ \text{mm}$ เท่ากัน

-ดังนั้นในส่วนของ inp file คือ

```
*BEAM SECTION,ELSET=shaft,MATERIAL=STEEL,SECTION=CIRC
30.0,30.
```

5 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

6. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตและภาระแรงกระทำ (boundary and load conditions)

กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการพิจารณาการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่า

-โหนดหมายเลข 1 หรือที่จุด A ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน xyz หรือในองศาอิสระ 1 2 3

-โหนดหมายเลข 1 เป็นจุดยึดแบบฝังกับพื้น ไม่มีการเคลื่อนตัวในและไม่มีการหมุนตัวรอบแกน x, y และ z

ดังนั้นเขียนคำสั่งได้คือ

```
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
1,4,4,0.0
1,5,5,0.0
1,6,6,0.0
```

7.กำหนดให้ที่โหนดหมายเลข 15 มีแรงกระทำในแนว z เท่ากับ -600 N กระทำในองศาอิสระหมายเลข 3 เขียนคำสั่งได้คือ

```
*CLOAD
15,3,-600
```

8. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความเค้น (S) ความเครียด (E) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้รายงานค่าความเค้น ความเครียดในเอลิเมนต์ทั้งหมดและค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*EL PRINT,ELSET=shaft
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U ,RF
*EL FILE
S,E
```

9. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง *END STEP
10.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-9 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ch46.inp

```
*HEADING
ch47.inp combined loading
*NODE,NSET=Nall
1,0.0, 0.0, 0.0
2,0.0,50.0,0,0
3,0.0,100.0,0.0
4,0.0,150.0,0.0
5,0.0,200.0,0.0
6,0.0,250.0,0.0
7,0.0,300.0,0.0
8,0.0,325.0,0.0
9,0.0,350.0,0.0
10,75.0,350.0,0.0
11,150.0,350.0,0.0
12,225.0,350.0,0.0
13,300.0,350.0,0.0
14,375.0,350.0,0.0
15,450.0,350.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=B32,ELSET=shaft
1,1,2,3
2,3,4,5
3,5,6,7
4,7,8,9
5,9,10,11
6,11,12,13
7,13,14,15
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+3,0.3
```

```
*BEAM SECTION,ELSET=shaft,MATERIAL=STEEL,SECTION=CIRC
30.0,30.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
1,4,4,0.0
1,5,5,0.0
1,6,6,0.0
*CLOAD
15,3,-600
*EL PRINT,ELSET=shaft
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U,RF
*EL FILE
S,E
*END STEP
```

11. ส่ง ch47.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file คือ ch47.dat แสดงข้อมูลเฉพาะความเค้นที่เกิดขึ้นที่จุดอินทิเกรตชั่นดังนี้

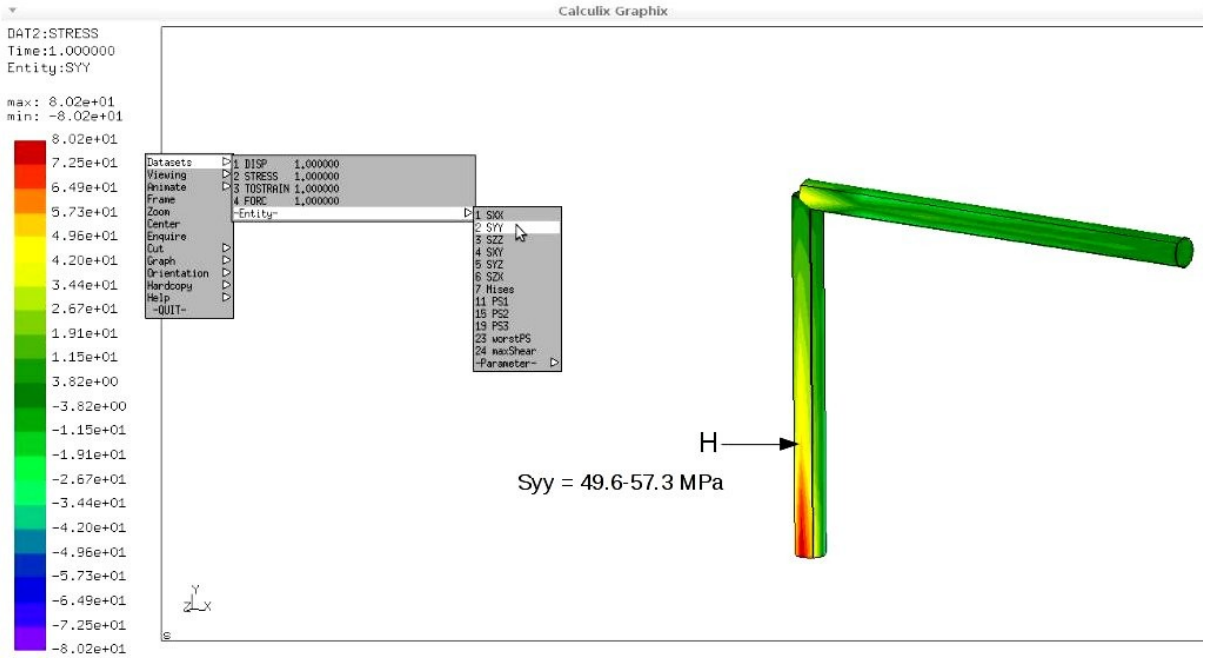
```
stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set SHAFT and time  0.1000000E+01

   1   1  9.254690E+00  4.791983E+01 -1.941590E+01  5.284717E+01  1.839659E+00  2.528762E+01
   1   2 -3.299982E+00  4.312684E+01 -1.722967E+00  3.787619E+01  8.300535E-01  3.294141E+01
   1   3 -5.591611E+00  3.708629E+01  1.548385E+00  2.804005E+01  6.521560E-01  2.855312E+01
   1   4  6.571632E+00  6.075009E+01  2.552205E+00  4.327807E+01  2.899226E+00  1.427700E+00
   1   5  7.877942E+00  5.504985E+01  3.359987E+00  4.015271E+01  1.418726E-01  3.071405E+00
   1   6  7.514534E+00  4.863402E+01  3.452176E+00  3.702736E+01 -3.943603E-01 -3.406003E+00
   1   7 -2.513738E+01  4.791983E+01  1.497617E+01  2.041085E+01 -1.839659E+00 -4.797040E+01
   1   8 -4.982946E+00  4.312684E+01 -4.000350E-02  2.913112E+01 -8.300535E-01 -3.406590E+01
   1   9 -9.135115E-01  3.708629E+01 -3.129715E+00  3.271656E+01 -6.521560E-01 -3.220348E+01
   1  10  1.204334E-09  2.220854E-08  2.641964E-09 -1.068508E-09 -5.391698E+00  3.886721E+01
   1  11  1.198163E-09  2.111168E-08  3.107687E-09 -1.012683E-09 -2.779053E+00  4.141965E+01
   1  12  7.848882E-10  1.959304E-08  2.574663E-09  6.359895E-10 -1.910467E+00  3.411952E+01
   1  13  2.532900E-11 -3.798444E-10  2.553622E-11 -9.935636E-10 -2.085004E-13  1.305048E+00
   1  14 -4.870484E-12 -3.903268E-10 -4.817559E-12 -9.734505E-10 -2.001604E-13  2.948754E+00
   1  15  2.914922E-12 -3.775501E-10  4.398698E-12  6.395100E-10  1.801444E-12 -3.528655E+00
   1  16 -1.167469E-09 -2.300477E-08 -2.600287E-09 -9.418086E-10 -4.067539E-01 -4.768892E+01
   1  17 -1.225649E-09 -2.193290E-08 -3.136204E-09 -9.574133E-10  2.495308E+00 -3.888577E+01
   1  18 -7.957939E-10 -2.038766E-08 -2.582327E-09  6.198471E-10  2.699188E+00 -3.993519E+01
   1  19 -9.254690E+00 -4.791983E+01  1.941590E+01 -5.284717E+01  1.839659E+00  2.528762E+01
   1  20  3.299982E+00 -4.312684E+01  1.722967E+00 -3.787619E+01  8.300535E-01  3.294141E+01
   1  21  5.591611E+00 -3.708629E+01 -1.548385E+00 -2.804005E+01  6.521560E-01  2.855312E+01
   1  22 -6.571632E+00 -6.075009E+01 -2.552205E+00 -4.327807E+01  2.899226E+00  1.427700E+00
   1  23 -7.877942E+00 -5.504985E+01 -3.359987E+00 -4.015271E+01  1.418726E-01  3.071405E+00
   1  24 -7.514534E+00 -4.863402E+01 -3.452176E+00 -3.702736E+01 -3.943603E-01 -3.406003E+00
   1  25  2.513738E+01 -4.791983E+01 -1.497617E+01 -2.041085E+01 -1.839659E+00 -4.797040E+01
   1  26  4.982946E+00 -4.312684E+01  4.000350E-02 -2.913112E+01 -8.300535E-01 -3.406590E+01
   1  27  9.135115E-01 -3.708629E+01  3.129715E+00 -3.271656E+01 -6.521560E-01 -3.220348E+01
   2   1 -6.530893E+00  2.811387E+01 -2.808642E+00  2.976583E+01  7.995501E-01  3.319491E+01
   2   2 -4.304230E+00  2.687346E+01 -1.625784E+00  3.094927E+01  8.372952E-01  3.442242E+01
-------------------------------------------------------------------------------------------
   7  24 -1.195527E+01 -1.808119E+00 -1.163839E+00 -4.802939E-11 -1.969123E+00 -4.783834E-11
   7  25 -1.137389E+01  4.719710E+00  2.527501E+00 -3.724551E-01 -2.349119E+00  7.569879E-01
   7  26 -1.072309E+01  7.712265E-01  6.125303E-01  1.190976E+00  1.200564E+00  6.572435E-03
   7  27 -8.067989E+00  1.499436E+00  7.018573E-01 -1.757785E-01 -2.121562E+00  5.923551E-01
```

รูปที่ 4.28 ผลลัพธ์ที่แสดงใน dat file

<u>การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม</u>

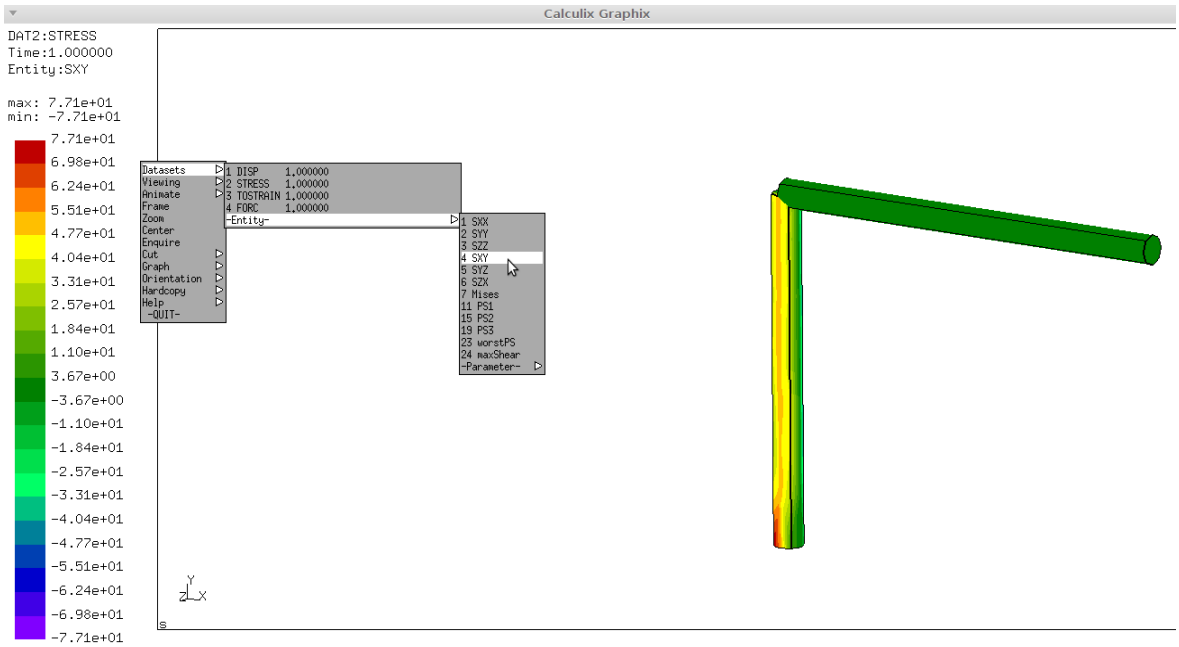
12. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์

12.1 จากรูปที่ 4.28 แสดงตัวอย่างค่าความเค้นในแนวแกนต่างๆ ที่เอลิเมนต์หมายเลข 1 ถึง เอลิเมนต์ 7 แบบย่อๆ โดยตัดทอนค่าเอลิเมนต์ในช่วง หมายเลข 2-6 และ 7 บางส่วนออกไป ทั้งนี้ค่าความเค้นต่างๆ แสดงค่าที่จุดอินทิเกรชั่นทั้ง 27 ของแต่ละเอลิเมนต์ จากตัวอย่าง dat file พบว่า จุด H อยู่ในช่วงเอลิเมนต์หมายเลข 1 แต่ไม่ทราบแน่ชัดว่าอยู่ที่อินทิเกรชั่นหมายเลขใดเพราะถ้าสังเกตดูพบว่าหมายเลขจุดอินทิเกรชั่นจะมี 27 จุดใน 1 เอลิเมนต์ จากการสังเกตจากภาพ SYX หรือ SXY คือค่าของความเค้นเฉือนที่จุด H และ ค่า SYY คือความเค้นตั้งฉากนั้นเองซึ่งจะสับสนมากในการจะหาค่าเพื่อยืนยันจาก dat file ดังนั้น frd file จึงถูกนำมาใช้เพื่อประมาณค่าคร่าวๆ โดยเรียก CGX ขึ้นมาใช้ หรือเข้าผ่าน launcher เรียก ch47.frd มาใช้งาน เข้าไปที่ Datasets->Stress->Entity->SYY ดังแสดงผลของ ความเค้นตั้งฉาก (SYY) ในรูปที่ 4.29



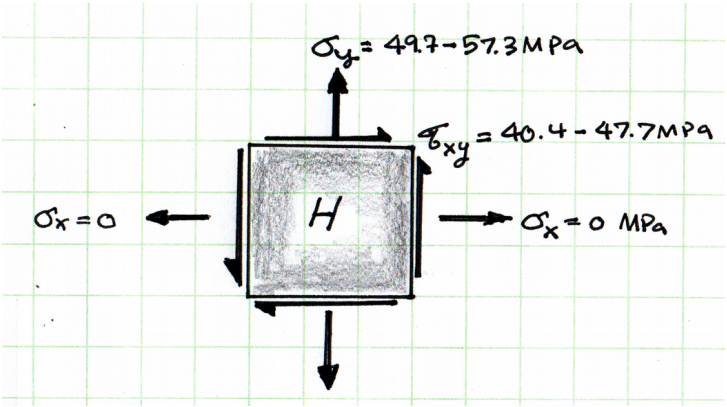
รูปที่ 4.29 ความเค้นตั้งฉากที่แสดงด้วย CGX

ทำนองเดียวกันสำหรับหาค่าของ SXY สามารถเข้าไปที่ Datasets->Stress->Entity->SXY ดังแสดงผลของความเค้นตั้งฉาก (SXY) ในรูปที่ 4.30 ซึ่งมีค่าในช่วง 40.4-47.7 MPa



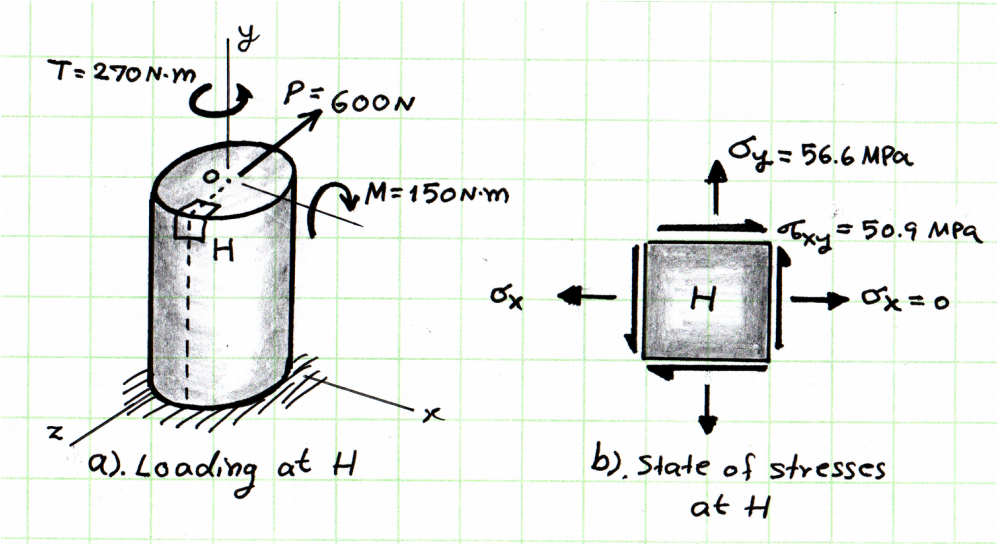
รูปที่ 4.30 ความเค้นเฉือนที่แสดงด้วย CGX

จากผลของ frd file น่าจะสรุปได้ว่าจุด H มีสภาวะความเค้นในพิกัดฉากดังรูปที่ 4.31



รูปที่ 4.31 สภาวะความเค้นที่จุด H

12.2 เมื่อลองคำนวณหาค่าความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนของเพลาที่จุด H ตามหลักทางกลศาสตร์ของแข็งดังนี้ เมื่อใช้หลักสมดุลแรงหาแรงภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดชิ้นงานที่ตำแหน่ง H ตามระบบพิกัดฉากพบว่ามีแรงภายในหน้าตัดที่ทำให้เกิดความเค้นที่จุด H ดังแสดงในรูปที่ 4.32



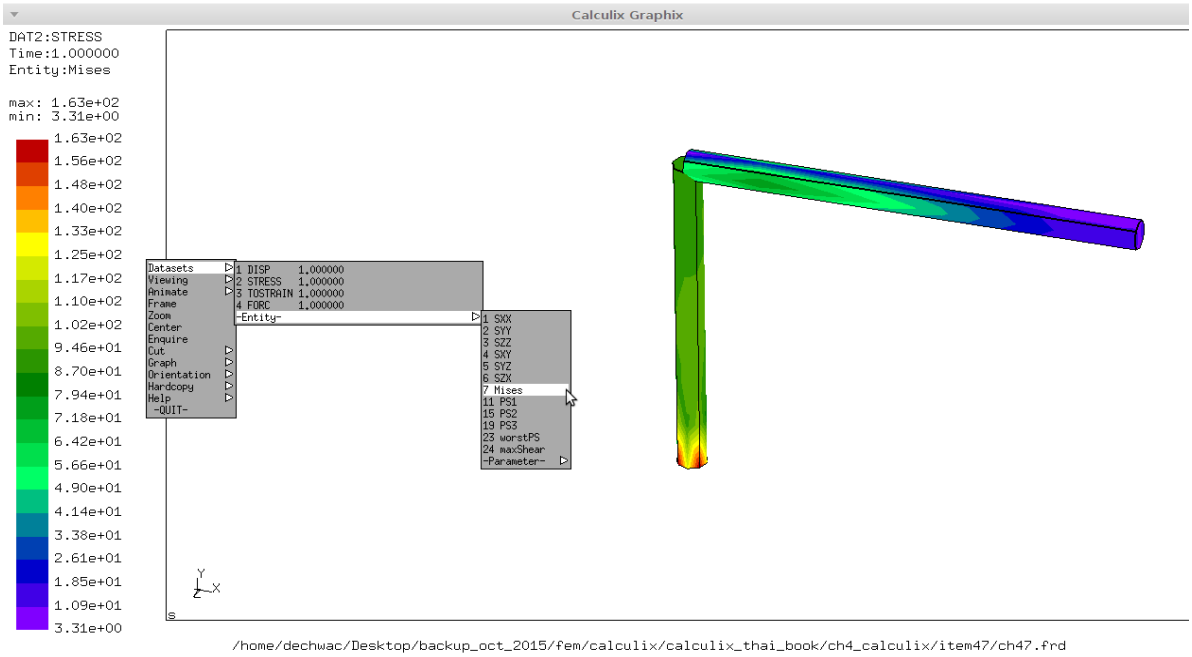
รูปที่ 4.32 แรงภายในหน้าตัดที่ทำให้เกิดความเค้นที่จุด H

แรง P ที่จุด D ส่งผ่านมาที่จุด H ทำให้เกิด
- แรงเฉือน P = 600 N บนหน้าตัด
-แรงบิด T = 600N(450 mm)=270000 N-mm หรือ 270 N-m
-โมเมนต์ดัด M=600(250 mm)= 150000 N-mm หรือ 150 N-m
ซึ่งแรงดังกล่าวส่งผลให้เกิดความเค้นตามพิกัดฉาก xyz ที่จุด H ดังนี้
-แรงเฉือน P ไม่ได้มีผลให้การเกิดความเค้นเฉือนที่จุด H
-แรงบิด T มีผลให้เกิดความเค้นเฉือนที่จุด H คือ

$$\tau_{yx}=\tau_{xy}=\pm\frac{16\,T}{\pi d^3}=\pm\frac{16\,(270\,\text{N-m})}{\pi\,(0.030\,\text{m})^3}=\ 50.9\ \ \text{MPa}$$

-โมเมนต์ดัด M มีผลให้เกิดความเค้นตั้งฉากที่จุด H คือ

$$\sigma_y=\pm\frac{32\,M}{\pi d^3}=\pm\frac{32\,(150\,\text{N-m})}{\pi\,(0.030\,\text{m})^3}=\ 56.6\ \ \text{MPa}$$



รูปที่ 4.33 von Mises stress

สภาวะความเค้นที่เกิดขึ้นที่จุด H ดังแสดงในรูปที่ 4.32 มีเฉพาะความเค้นในแกน y และความเค้นเฉือนบนระนาบ xy เท่านั้น เมื่อเปรียบเทียบค่าสภาวะความเค้นจากรูปที่ 4.31 ซึ่งได้จากโปรแกรมกับสภาวะความเค้นที่ได้จากการคำนวณตามหลักกลศาสตร์ของแข็งพบว่ามีค่าที่สอดคล้อง ดังนั้นผลการคำนวณจากโปรแกรมจึงมีความน่าเชื่อถือได้ เมื่อโปรแกรมมีความเชื่อถือได้จึงสามารถนำโปรแกรมไปทำนายหรือศึกษาค่าต่างๆ ที่น่าสนใจต่อไปจากตัวอย่างนี้ ในแง่ของการศึกษาการวิบัติเสียหายของวัสดุจึงสามารถนำโปรแกรมไปศึกษาค่าความเค้นเฉือนสูงสุด ค่าความเค้นหลักและความเค้นวองมิส (Von Mises stress) ได้จากโปรแกรมเพื่อทำนายการวิบัติอันเนื่องจากภาระแรงสถิตย์ โดยเข้าไปใช้คำสั่ง Datasets->STRESS->Entity->MaxShear หรือ ->Mises ดังแสดงในรูปที่ 4.33

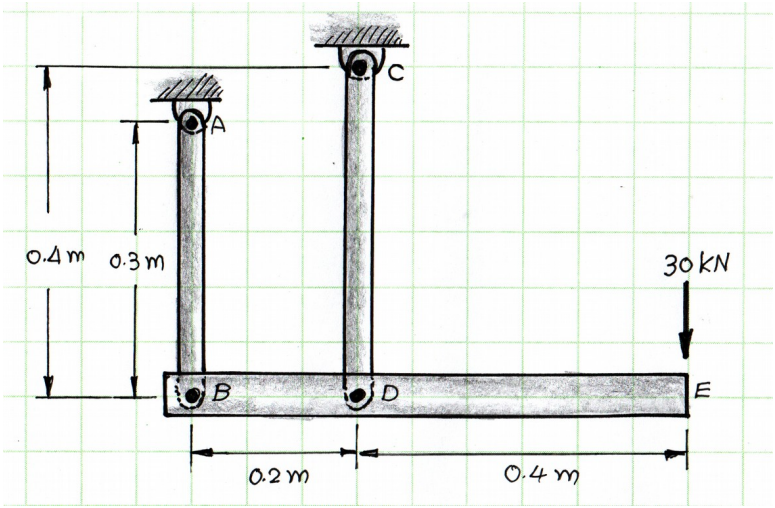
4.8 เอกสารอ้างอิงบทที่ 4

[1] Ferdinand Beer, E. Russel Johnston, Jr. John Dewolf, David Mazurek, “Mechanics of Materials”, 7th Edition, McGrawHill, New York, 2015

[2] Daryl L. Logan, “A First Course in the Finite Element Method”, 4th Edition, Thomson , Ontario, 2007

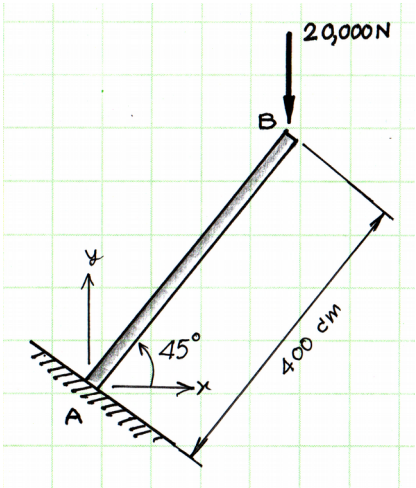
4.9 แบบฝึกหัดบทที่ 4

4.1 จงเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหาหาระยะยืดหดตัวของชิ้นงาน AB และ CD เมื่อ BDE คือคานทำจากเหล็กกล้า มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 200 GPa และมีค่าอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 หน้าตัดรูปจตุรัสขนาด 20x100 mm แขวนต่อเข้ากับชิ้นส่วน AB ที่ทำจากอลูมินัมมีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 70 GPa มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 500 mm^2 และชิ้นส่วน CD ที่ทำจากเหล็กกล้ามีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 600 mm^2 ที่ปลายคาน BDE ที่ถูกแขวนอยู่มีแรงในแนวดิ่งมากระทำเท่ากับ 30 kN



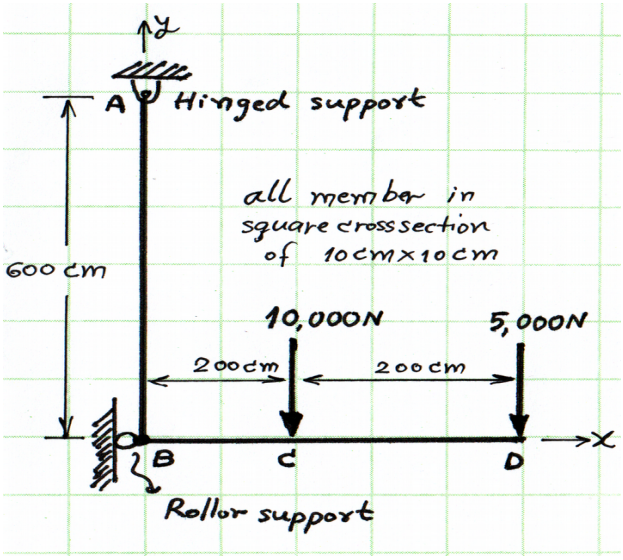
รูปที่ P 4.1

4.2 ชิ้นงาน AB หน้าตัดกลมตันเส้นผ่านศูนย์กลาง 6 cm ทำจากเหล็กกล้า ($E=200\,\text{MPa}, \nu=0.3$) วางเอียงกับในระนาบ xy ดังรูปที่ P 4.2 จงเขียน inp file เพื่อหาค่าระยะการเคลื่อนตัวในระนาบของจุด B



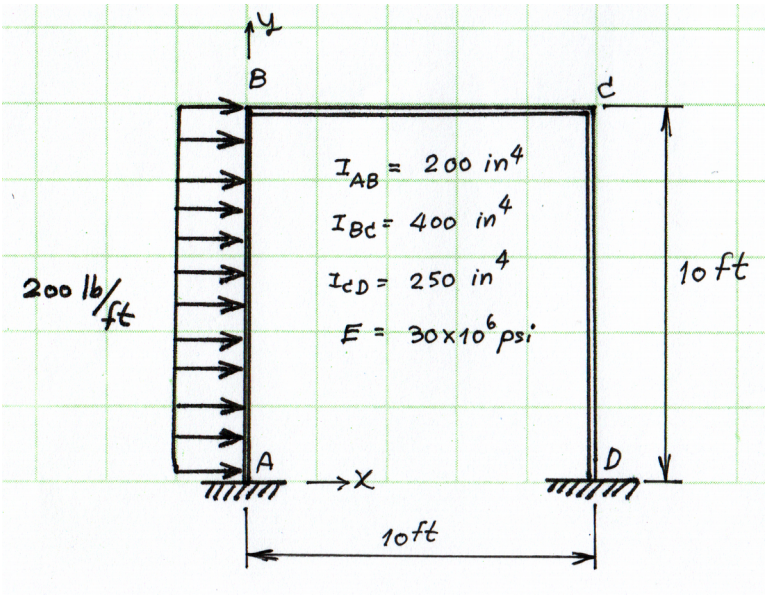
รูปที่ P 4.2

4.3 โครงสร้าง ABCD ประกอบจากชิ้นงาน AB และ BD โดยมีการเชื่อมต่อที่จุด B โครงสร้างวางตัวในระนาบ xy มีการจับยึดด้วยสลักคล้ายบานพับที่จุด A และที่จุด B มีจุดรองรับแบบลูกกลิ้ง ที่ปลายจุด D ปล่อยอิสระ แสดงดังรูปที่ P 4.3 เมื่อหน้าตัดของชิ้นงานเป็นสี่เหลี่ยมจตุรัส 10 cm x 10 cm เท่ากันหมด เป็นวัสดุเหล็กกล้า $(E=200\,\text{MPa}, \nu=0.3)$ เมื่อมีแรงมากระทำในแนวดิ่งที่จุด C และ D จงเขียน inp file เพื่อหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และหาระยะการเคลื่อนตัวในระนาบของจุด D



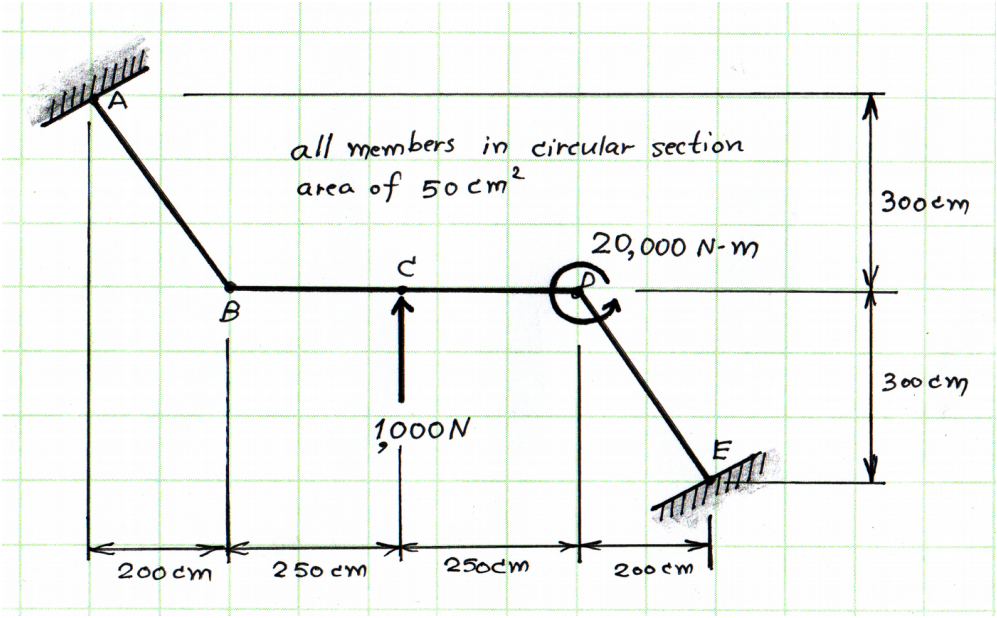
รูปที่ P 4.3

4.4 โครงสร้าง ABCD ทำจากเหล็กกล้าวางตัวในระนาบ xy ดังรูปที่ P 4.4 เมื่อหน้าตัดของชิ้นงานเป็นสี่เหลี่ยมจตุรัสขนาดหน้าตัดไม่เท่ากันในช่วง AB BC และ CD จงเขียนอินพุตท์ไฟล์เพื่อหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ D รวมถึงระยะการเคลื่อนตัวของจุด D ในระนาบเมื่อมีแรงกระจายกระทำที่ AB



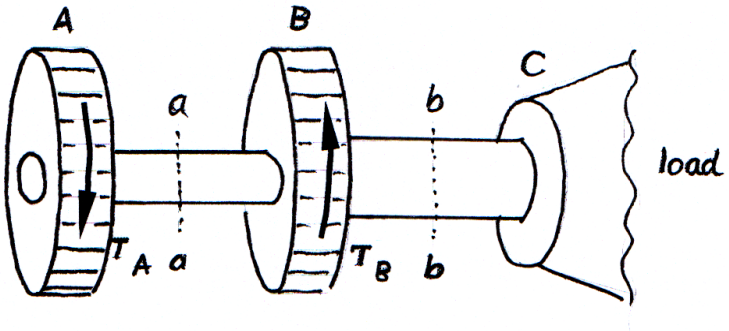
รูปที่ P 4.4

4.5 รูป P 4.5 คือโครงสร้าง ABCDE อลูมินัมหน้าตัดกลมยาวชิ้นเดียวที่ดัดขึ้นรูปเป็นโครงสร้างมีพื้นที่หน้าตัด 50 cm^2 เท่ากันหมด ที่ปลาย A และ E ยึดฝังเข้ากับพื้นที่จุด C และ D มีแรงและโมเมนต์ดัดกระทำ จงเขียน inp file เพื่อหาระยะการเคลื่อนตัวในระนาบของจุด B รวมถึงหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ E รวมถึงความเค้นที่เกิดขึ้นที่จุด D



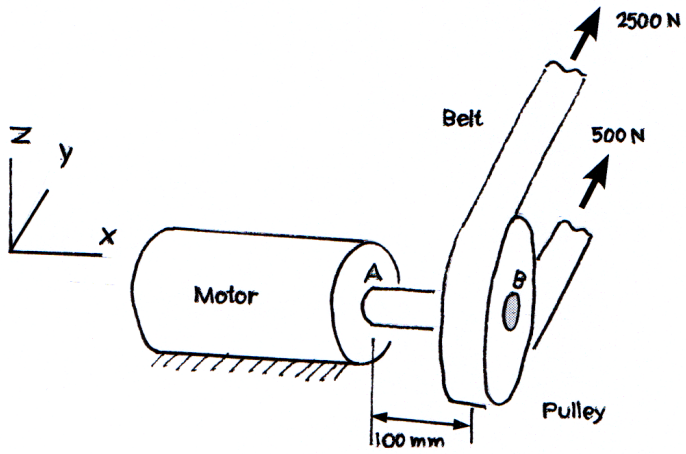
รูปที่ P 4.5

4.6 จากรูปที่ P 4.6 คือชุดเพลาตันและเฟือง A, B ส่งแรงบิดไปขับอุปกรณ์ C ที่สภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ ทราบค่าแรงบิดภายนอกที่กระทำกับเฟือง A คือ $T_A = 130\ \text{N-m}$ และกระทำกับเฟือง B คือ $T_B = 300\ \text{N-m}$ ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลาระหว่าง A และ B (หน้าตัด a-a) คงที่เท่ากับ 50 mm และเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลาระหว่าง B และ C (หน้าตัด b-b) คงที่เท่ากับ 75 mm ระยะ AB เท่ากับ 300 mm ระยะระหว่าง BC เท่ากับ 300 mm โดยการเขียน inp file จงหาความเค้นเฉือนสูงสุดของเพลาแต่ละช่วง



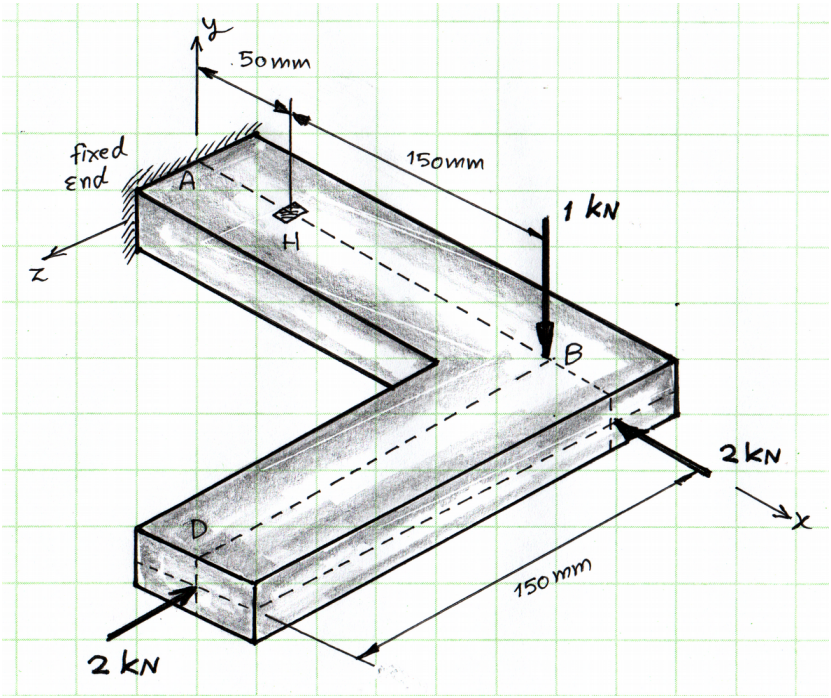
รูปที่ P 4.6

4.7 เพลาตันทำจากเหล็กกล้าหน้าตัดกลม AB เส้นผ่านศูนย์กลาง 50 mm ต่อจากมอเตอร์ใช้ขับสายพานในรูปที่ P 4.7 จงหาความเค้นหลักและความเค้นเฉือนสูงสุดที่ตำแหน่ง A เมื่อไม่พิจารณาผลจากรัศมีบ่าเพลา



รูปที่ P 4.7

4.8 ชิ้นส่วนเครื่องจักร ABD ดังรูปที่ P4.8 มีแรงในแนวแกนกระทำที่จุด B และ D ถ้าชิ้นส่วนนี้ทำจากเหล็กกล้า E = 200 GPa อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 จงเขียน inp file เพื่อแสดงค่าความเค้นหลักและความเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นที่จุด H เมื่อหน้าตัดของชิ้นงานคงที่ตลอดความยาวเท่ากับ 20x40 mm

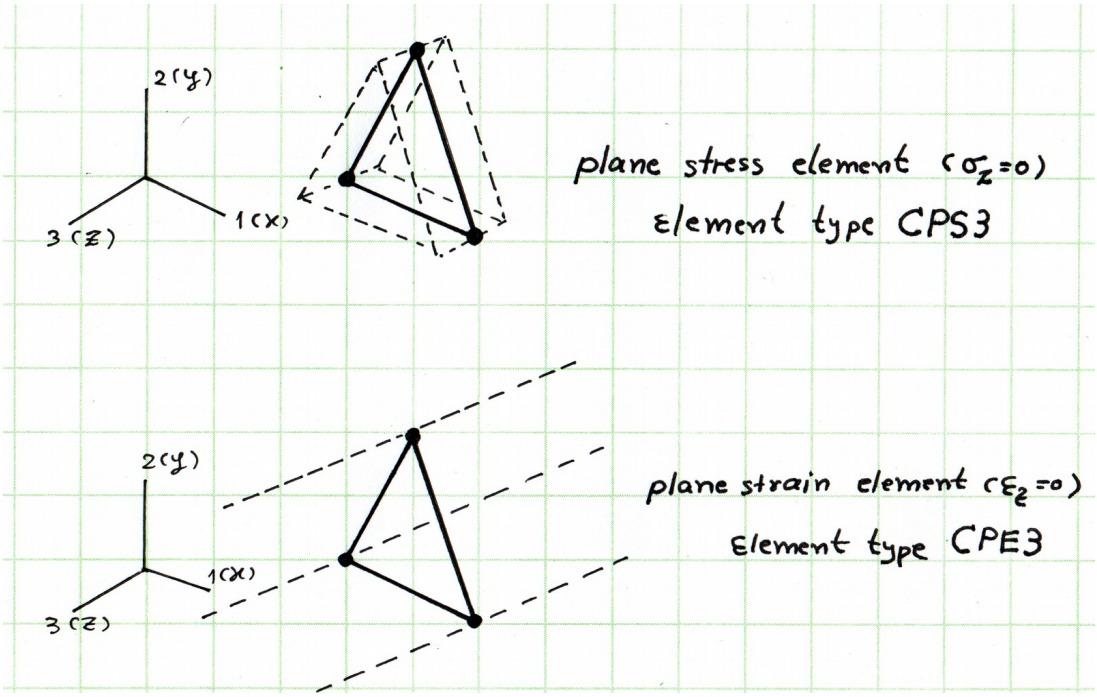


รูปที่ P 4.8

บทที่ 5 เอลิเมนต์ของแข็งในระนาบวิเคราะห์ความเค้นในสองมิติ

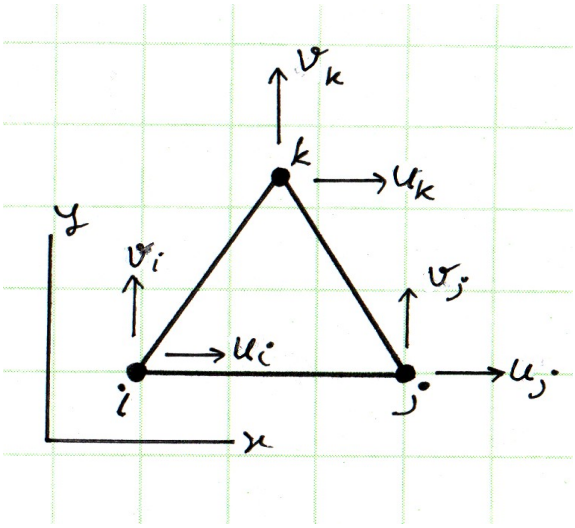
บทนี้นำเสนอการใช้เอลิเมนต์ของแข็งในระนาบวิเคราะห์ความเค้นของปัญหาการยืดหยุ่นเชิงเส้นในสองมิติเช่น ความเค้นและความเครียดในระนาบ (2-D elasticity: plane stress plane strain problem) และปัญหายืดหยุ่นสมมาตรรอบแกนหมุน (axisymmetric elasticity problem) เนื่องจากปัญหาความเค้นในระนาบไม่มีแรงกระทำในแนวความหนา ปัญหาความเครียดในระนาบไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากกับระนาบ และปัญหายืดหยุ่นสมมาตรรอบแกนหมุนไม่มีการเคลื่อนตัวรอบแกนหมุน จากเงื่อนไขที่ลดลงทำให้สามารถลดทอนปัญหาจากสามมิติเหลือเพียงแค่สองมิติได้

5.1 เอลิเมนต์ในระนาบรูปสามเหลี่ยมอันดับที่หนึ่ง (Triangular First Order Plane Element)



รูปที่ 5.1 รูปลักษณะเอลิเมนต์อันดับที่หนึ่งใช้ในปัญหาความเค้นในระนาบและความเครียดในระนาบ

รูปที่ 5.1 แสดงเอลิเมนต์ของแข็งในระนาบมีรูปร่างทางเรขาคณิตแบบสามเหลี่ยมในระนาบ มีโหนด *i*, *j* และ *k* ที่เหลี่ยมทั้งสามของเอลิเมนต์ CPS3 คือแบบของเอลิเมนต์ที่ใช้สำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ และ CPE3 คือแบบของเอลิเมนต์ที่ใช้สำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเครียดในระนาบ ค่าการเคลื่อนตัวของที่โหนดของเอลิเมนต์ทั้งสองมีรูปแบบเหมือนกันดังแสดงในรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 ลักษณะการเคลื่อนตัวของโหนดของเอลิเมนต์แบบ CPS3 และ CPE3

จากรูปที่ 5.2 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามโหนดแบบ CPS3 และ CPE3 มีฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวของโหนดแบบฟังก์ชันพหุนามสองตัวแปรอันดับที่หนึ่งโดยฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในแนวแกน x คือ

$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y \tag{5.1}$$

และฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในแนวแกน y คือ

$$v(x,y)=a_4+a_5x+a_6y \tag{5.2}$$

จากสมการ (5.1) และ (5.2) เมื่อ $a_1,a_2,....,a_5,a_6$ คือค่าคงที่สามารถจัดรูปฟังก์ชันประมาณการในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x&y&0&0&0\\0&0&0&1&x&y\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

หรือ

$$\{\omega\}=[X_{xy}]\cdot\{A\} \tag{5.4}$$

และกลุ่มตัวแปร x และ y เขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[X_{xy}]=\begin{bmatrix}1 & x & y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y\end{bmatrix} \tag{5.5}$$

และ $\{A\}=\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{Bmatrix}$ คือกลุ่มค่าคงที่ในฟังก์ชันประมาณการ

จากนั้นนำค่าคู่ลำดับของแต่ละโหนดบนเอลิเมนต์แทนเข้าไปในสมการ (5.1)และ (5.2)
ที่โหนด *i* มีค่าการเคลื่อนตัวที่จุดนี้เท่ากับ

$$u_i=u(x_i,y_i)=a_1+a_2x_i+a_3y_i \quad \text{และ} \quad v_i=v(x_i,y_i)=a_4+a_5x_i+a_6y_i \tag{5.6}$$

ทำนองเดียวกันที่จุด j และ k มีค่าการเคลื่อนตัวที่จุดนี้เท่ากับ

$$u_j=u(x_j,y_j)=a_1+a_2x_j+a_3y_j \quad \text{และ} \quad v_j=v(x_j,y_j)=a_4+a_5x_j+a_6y_j \tag{5.7}$$

$$u_k=u(x_k,y_k)=a_1+a_2x_k+a_3y_k \quad \text{และ} \quad v_k=v(x_k,y_k)=a_4+a_5x_k+a_6y_k \tag{5.8}$$

จากสมการ (5.6) ถึง (5.8) นำมารูปเพื่อแสดงค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดในแนวต่างๆ ในรูปเมตริกซ์ได้คือ

$$\{d\}=\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\\u_k\\v_k\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{Bmatrix} \tag{5.9}$$

ดังนั้น

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

หรือ

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = [x]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

ดังนั้นสามารถจัดรูปฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในรูปเวคเตอร์การเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดได้คือ

$$\{\omega\} = [X_{xy}] \cdot [x]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

จากสมการที่ (5.10) แยกฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) $[N]$ ออกมาได้ดังนี้

$$[N] = [X_{xy}] \cdot [x]^{-1} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}$$

และฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนที่ที่จุด xy ใดๆ ถูกแปลงอยู่ในรูปของการเคลื่อนที่ของแต่ละโหนดคือ

$$\{\omega\} = [N] \cdot \{d\} \tag{5.11}$$

เมื่อความเครียดในระนาบ xy ของปัญหา 2D สัมพันธ์กับฟังก์ชันการเคลื่อนตัว [1] คือ

$$\{\epsilon\}=\begin{Bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}\end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

เมื่อประยุกต์กับสมการที่ (5.10) – (5.11) สามารถจัดรูปความเครียดในรูปฟังก์ชันรูปร่างและเวคเตอร์การเคลื่อนตัวแต่ละโหนดได้คือ

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_k}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k}{\partial y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial x}\end{bmatrix}\cdot\{d\} \tag{5.13}$$

เมื่อให้

$$[B]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_k}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k}{\partial y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{5.14}$$

ค่า [B] คือกลุ่มตัวแปรที่อยู่ในรูปฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละโหนดและเมื่อกำหนดให้ A คือพื้นที่ของเอลิเมนต์นั้นได้ว่า

$$[B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}(y_j-y_k) & 0 & (y_k-y_i) & 0 & (y_i-y_j) & 0\\ 0 & (x_k-x_j) & 0 & (x_i-x_k) & 0 & (x_j-x_i)\\ (x_k-x_j) & (y_j-y_k) & (x_i-x_k) & (y_k-y_i) & (x_j-x_i) & (y_i-y_j)\end{bmatrix} \tag{5.15}$$

ดังนั้นสามารถหาความเครียดของเอลิเมนต์จากการเคลื่อนตัวที่โหนดได้ดังนี้

$$\{\epsilon\}=[B]\cdot\{d\} \tag{5.16}$$

สมการที่ (5.16) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดที่เกิดขึ้นที่เอลิเมนต์นั้นๆ กับค่าการเคลื่อนตัวของโหนดของแต่ละเอลิเมนต์

จากกฎของฮุคเมื่อความเค้นและความเครียดสัมพันธ์กันแบบเชิงเส้นตามสมการที่ (5.17) สิ่งที่ต่างกันระหว่าง CPS3 และ CPE3 คือเมตริกซ์ค่าคงที่ [D] ที่กำหนดสมบัติวัสดุหรือเรียกว่า constitutive matrix

$$\{\sigma\}=[D]\{\epsilon\} \quad \text{หรือ} \quad \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[D]\begin{Bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{5.17}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (5.16) สามารถเขียนความเค้นของเอลิเมนต์ได้จากการการเคลื่อนตัวของโหนดได้คือ

$$\{\sigma\}=[D][B]\{d\} \tag{5.18}$$

เมื่อ

$\{\sigma\}$ คือเมตริกซ์ความเค้น ขนาด 3 แถว 1 สดมภ์
$\{\epsilon\}$ คือเมตริกซ์ค่าความเครียด ขนาด 3 แถว 1 สดมภ์
$\{d\}$ คือเวคเตอร์ค่าการเคลื่อนตัวของโหนดทั้งสามซึ่งมีขนาด 6 แถว 1 สดมภ์
$[B]$ คือเมตริกซ์ค่าตำแหน่งโหนดซึ่งขึ้นกับฟังก์ชันรูปร่าง N_i, N_j, N_k ขึ้นกับตำแหน่งโหนด $(x_i, y_i),(x_j, y_j),(x_k, y_k)$
$[D]$ คือเมตริกซ์ค่าสมบัติวัสดุในรูปเมตริกซ์จตุรัส ขนาด 3 แถว 3 สดมภ์

ถ้าเป็นปัญหาความเค้นในระนาบซึ่งไม่มีความเค้นในแนวแกน z หรือ $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ ดังนั้น

$$[D]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5.19}$$

และสำหรับปัญหาความเครียดในระนาบซึ่งไม่มีความเครียดในแนวแกน z หรือ $\epsilon_z=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ ดังนั้น

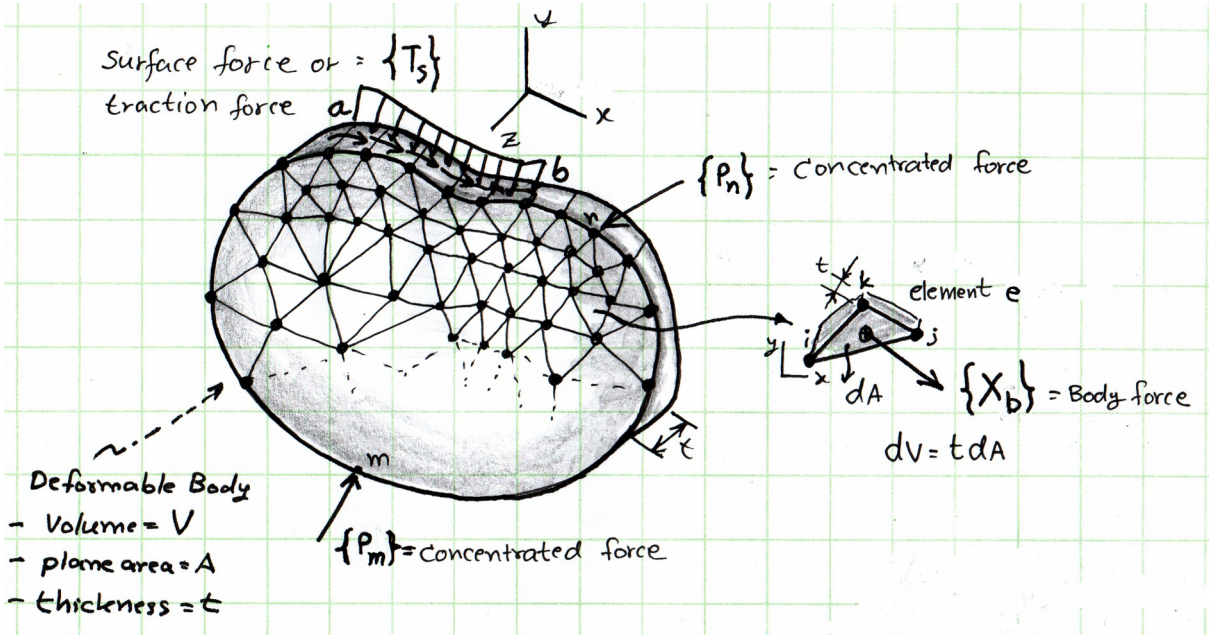
$$[D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{5.20}$$

เมื่อ E คือค่ามอดุลัสยืดหยุ่น และ ν คือค่าอัตราส่วนปัวซอง

5.1.1 พลังงานความเครียดภายในชิ้นงาน (E_U)

สมมติแผ่นชิ้นงานในระนาบดังรูปที่ 5.3 มีความหนาคงที่เท่ากับ t มีแรงประเภทต่างๆ กระทำในระนาบดังนี้

- $\{T_s\}$ คือแรงกระจายกระทำที่ขอบผิวของชิ้นงานเรียกว่า Traction Force มีหน่วยเป็น แรง/หน่วยความยาว หรือแรง/หน่วยพื้นที่ ตัวอย่างเช่น ความดัน
- $\{X_b\}$ คือแรงกระทำต่อรูปของชิ้นงานที่เรียกว่า Body Force มีหน่วยเป็น แรง/หน่วยปริมาตร หรือแรง/หน่วยมวล ตัวอย่างเช่น น้ำหนัก แรงหนีศูนย์ แรงจากการเร่ง
- $\{P\}$ คือแรงกระทำที่จุดหนึ่งๆ ที่ผิวชิ้นงาน



รูปที่ 5.3 แรงแบบต่างๆ ที่กระทำต่อชิ้นงานในระนาบ

เมื่อมีงานจากแรงภายนอกกระทำต่อชิ้นงานทำให้ชิ้นงานมีการเปลี่ยนรูป ถ้าสมมติให้ไม่มีพลังงานความร้อนเกิดขึ้นหรือเกี่ยวข้องกับกระบวนการ ตามกฎเทอร์โมไดนามิคส์จะมีการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในเนื้อวัสดุอันเนื่องจากงานภายนอกเกิดขึ้นเรียกว่า "พลังงานความเครียด" ถ้าแบ่งชิ้นงานออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยหลายๆ เอลิเมนต์ แต่ละเอลิเมนต์นั้นมีพลังงานความเครียดภายในของตนเอง จากรูปที่ 5.3 ถ้าเฉพาะเอลิเมนต์ e มีพลังงานความเครียดเกิดขึ้นเท่ากับ E_u^e ในปริมาตร dV เอลิเมนต์นี้มีความหนาแน่นของพลังงานความเครียดต่อหน่วยปริมาตร คือ

$$\frac{dE_u^e}{dV}=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\epsilon_x+\sigma_y\epsilon_y+\sigma_z\epsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\right)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \epsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}^T\cdot\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\{\epsilon\}^T\{\sigma\}$$

ดังนั้นพลังงานความเครียดในเอลิเมนต์ใดๆ ของปัญหาในระนาบจึงเท่ากับ

$$\frac{dE_u^e}{dV}=\frac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x+\sigma_y\epsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}^T\cdot\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\{\epsilon\}^T\{\sigma\}$$

และจากสมการ (5.16)-(5.18) เมื่อ

$dV=t\cdot dA$ และ $\{d_e\}$ คือการเคลื่อนตัวของโหนดของแต่ละเอลิเมนต์ t คือความหนา dA คือพื้นที่บนระนาบของเอลิเมนต์ สามารถจัดรูปพลังงานความเครียดภายในแต่ละเอลิเมนต์และค่าการเคลื่อนตัวของโหนดของแต่ละเอลิเมนต์สัมพันธ์กันดังนี้

$$E_u^e=\frac{t}{2}\iint\{\epsilon^T\}[D]\{\epsilon\}dA=\frac{t}{2}\iint\{d_e^T\}[B]^T[D][B]\{d_e\}dA$$

เนื่องจากการเคลื่อนของโหนดไม่ได้เกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กับการอินทิเกรทบนพื้นที่ ดังนั้น

$$E_u^e=\frac{t}{2}\{d_e^T\}\iint[B]^T[D][B]dA\{d_e\} \tag{5.21}$$

จากสมการที่ (5.21) พิจารณาในรูปแบบพลังงานความเครียดของสปริงดังนี้

$$E_u^e=\frac{1}{2}k\delta^2 \tag{5.22}$$

เมื่อ k = ค่าความแข็งของสปริง (stiffness) และ δ คือระยะเปลี่ยนรูปของสปริงในแนวแกน (deformation)

จัดรูปสมการที่ (5.21) ให้คล้ายคลึงสมการ (5.22) ได้คือ

$$E_u^e=\frac{1}{2}\{d_e^T\}\cdot[t\cdot\iint[B]^T[D][B]dA]\cdot\{d_e\}=\frac{1}{2}\{d_e^T\}\cdot[k_e]\cdot\{d_e\} \tag{5.23}$$

$$[k_e]=t\cdot\iint[B]^T[D][B]dA \tag{5.24}$$

เมื่อ

$[k_e]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งของเอลิเมนต์ (element stiffness matrix) ที่มีขนาด 6x6

ค่า $[k_e]$ มาจากการอินทิเกรทพื้นที่บนระนาบของแต่ละเอลิเมนต์ เนื่องจากชิ้นงานประกอบจากหลายเอลิเมนต์ ผลจากการรวมพลังงานความเครียดในการเปลี่ยนรูปของแต่ละเอลิเมนต์เข้าด้วย (จากจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด ne เอลิเมนต์) คือพลังงานความเครียดทั้งหมดที่เกิดกับชิ้นงานคือ

$$E_U = \sum_{e=1}^{ne} E_{ue} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{ne} \{d_e{}^T\} \cdot [k_e] \cdot \{d_e\} \tag{5.25}$$

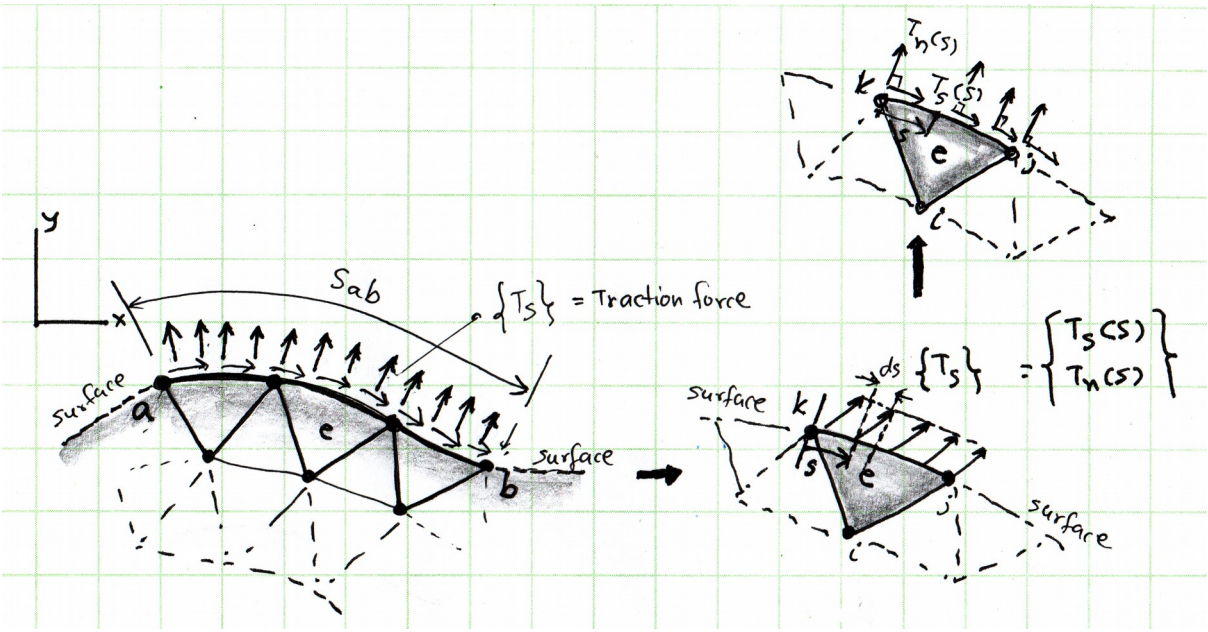
การเคลื่อนตัวของแต่ละโหนด $(\{d_e\})$ ในสมการ(5.25) คือเวคเตอร์การเคลื่อนตัวของโหนดตามระบบพิกัดเฉพาะของแต่ละเอลิเมนต์ (local coordinate system) ในการใช้งานสมการจำเป็นต้องแปลงค่าเวคเตอร์การเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดของแต่ละเอลิเมนต์ให้เป็นตามระบบพิกัดทั่วไป (global coordinate system, $\{d\}$) ก่อนแล้วจึงรวมพลังงานจากทุกเอลิเมนต์ที่แปลงค่า $\{d_e\}$ แล้วเสร็จเข้าด้วยกันจะได้พลังงานความเครียดรวมของชิ้นงานในระบบพิกัดทั่วไปดังสมการ (5.26)

$$E_U = \frac{1}{2} \{d^T\} \cdot [K] \cdot \{d\} \tag{5.26}$$

$[K]$ คือเมตริกซ์ความแข็งสปริงรวมของชิ้นงานที่เกิดจากการรวมค่าความแข็งสปริงจากแต่ละเอลิเมนต์ในระบบพิกัดทั่วไป อย่างไรก็ตามการอินทิเกรทเพื่อหาค่าความแข็งของเอลิเมนต์จะมีความซับซ้อนยุ่งยากในการทำโดยตรง การพัฒนาสูตรไอโซพาราเมทรกซ์ (Isoparametric Formulation) ถูกนำมาใช้เพื่อการแปลงพิกัดและรูปร่างของเอลิเมนต์ให้สะดวกต่อการอินทิเกรทในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งในหนังสือเล่มนี้ไม่ขอกล่าวถึงรายละเอียดเรื่องนี้ผู้อ่านสามารถอ่านเพิ่มเติมได้จากหนังสือระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [2]

5.1.2 พลังงานศักย์จากแรงภายนอกที่กระจายตามผิวชิ้นงาน (Surface Force, $\{T_s\}$)

จากรูปที่ 5.3 $\{T_s\}$ คือแรงที่กระจายต่อหน่วยพื้นที่และกระทำในระนาบตามขอบเอลิเมนต์ตามผิวชิ้นงานเรียกว่า surface force หรือ traction force



รูปที่ 5.4 แรงกระจายที่กระทำที่ขอบเอลิเมนต์ตามผิวของชิ้นงาน

เมื่อ $\{T_s\}$ กระทำบนผิวตั้งแต่จุด a-b ที่มีความยาวตามผิวเท่ากับ S_{ab} ดังรูปที่ 5.4 มีพื้นที่ทั้งหมดที่รับแรงกระจายเท่ากับ $t \cdot S_{ab}$ เมื่อ t คือความหนา และเมื่อพิจารณาเอลิเมนต์ e ซึ่งเป็นเอลิเมนต์ใดๆ ที่มี $\{T_s\}$ กระทำที่ขอบผิวเอลิเมนต์ ถ้าสมมติให้ s คือแนวสัมผัสตามขอบผิวระหว่างโหนด j ถึง k ถ้ากำหนดฟังก์ชันการเคลื่อนตัวที่จุดใดๆ ที่ขอบเอลิเมนต์ขึ้นกับ s คือ $u(s)=a+b(s)$ และ $v(s)=c+d(s)$ คือฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในแนว s และแนว n (แนวตั้งฉากกับ s) ตามลำดับดังนั้นฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในรูปฟังก์ชันรูปร่างและค่าการเคลื่อนตัวของโหนดคือ

$$\omega_s=\begin{Bmatrix}u(s)\\v(s)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & N_j(s) & 0 & N_k(s) & 0\\ 0 & 0 & 0 & N_j(s) & 0 & N_k(s)\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}u_i(s)\\v_i(s)\\u_j(s)\\v_j(s)\\u_k(s)\\v_k(s)\end{Bmatrix}=[N(s)]\cdot\{d_{se}\} \qquad (5.27)$$

เมื่อ $\{d_{se}\}$ คือเวคเตอร์การเคลื่อนตัวของโหนดของเอลิเมนต์ e และแรง $\{T_s\}$ ในแนวสัมผัสกับผิว (s) และแนวตั้งฉากกับผิว (n) ดังรูปที่ 5.4 ดังนั้นสามารถเขียนแรงในรูปเมตริกซ์ตามแนวทั้งสองได้คือ

$$\{T_s\}=\begin{Bmatrix}T_s(s)\\T_n(s)\end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

จากสมการ (5.27)-(5.28) ค่าพลังงานศักย์ที่เกิดจากแรงภายนอกบนขอบของเอลิเมนต์ e จากโหนด *j-k* คือ

$$E_{fs}^{e}=-\int_{A_{j-k}}\{\omega_s\}^T\cdot\{T_s\}\,dA=-\{d_s^e\}^T\int_{s_{j-k}}t[N(s)]^T\{T_s\}\,ds \tag{5.29}$$

ถ้าแรงของโหนด *j-k* ของเอลิเมนต์ e คือ $-\{f_s^e\}=\int_{s_{j-k}}t[N(s)]^T\{T_s\}\,ds$

ดังนั้นพลังงานศักย์จากแรงกระทำจากภายนอกที่ผิวของเอลิเมนต์ e คือ

$$E_{fs}^{e}=-\{d_{se}\}\cdot\{f_s^e\} \tag{5.30}$$

จากนั้นแปลงจากระบบพิกัด s ซึ่งเป็นระบบพิกัดเฉพาะเป็นระบบพิกัดทั่วไปจะได้

$$E_{fs}^{e}=-\{d_e\}^T\cdot\{f^e\} \tag{5.31}$$

สมมติแรง $\{T_s\}$ กระทำตามขอบผิวตั้งแต่จุด a-b มีจำนวนรวม ns เอลิเมนต์ ดังนั้นพลังงานศักย์จากแรงภายนอกที่กระทำที่ผิวชิ้นงาน คือ

$$E_{FS}=\sum_{e=1}^{ns}E_f^e=-\{d\}^T\cdot\{F_S\} \tag{5.32}$$

5.1.3 พลังงานศักย์จากแรงภายนอกกระทำต่อรูปของชิ้นงาน (Body Force, $\{X_b\}$)

จากชิ้นงานในรูปที่ 5.3 เมื่อมีแรงจากภายนอกกระทำต่อรูปของแต่ละเอลิเมนต์ด้วยค่าแรงเท่ากับ $\{X_b\}$ มีหน่วยเป็นแรงต่อปริมาตร พิจารณาจากเอลิเมนต์ใดๆ สมมติเอลิเมนต์ e และจากสมการที่ (5.10)-(5.11) ค่าฟังก์ชันการเคลื่อนตัวในรูปของฟังก์ชันรูปร่างและการเคลื่อนตัวของโหนด *i-j-k* คือ

$$\{\omega\}=[N_{ijk}]\cdot\{d_e\}$$

ถ้า $\{X_b\}$ คือเวคเตอร์ของแรงที่มีองค์ประกอบในแกน x และ y ดังนั้น

$$\{X_b\}=\begin{Bmatrix}X_b^x\\X_b^y\end{Bmatrix}$$

ดังนั้นพลังงานศักย์จากแรง $\{X_b\}$ ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ e คือ

$$E_{fb}^e=-\iiint_{V_{i-j-k}}\{\omega\}^T\cdot\{X_b\}\,dV=-\{d_e\}^T\int_{A_{i-j-k}}t\,[N_{ijk}]^T\{X_b\}\,dA=-\{d_e\}^T\cdot\{f_b^e\}$$

เมื่อ

$$\{f_b^e\}=\int_{A_{i-j-k}}t\,[N_{ijk}]^T\{X_b\}\,dA=\int_{A_{i-j-k}}t\begin{bmatrix}N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0\\0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k\end{bmatrix}^T\cdot\begin{Bmatrix}X_b^x\\X_b^y\end{Bmatrix}dA \qquad (5.33)$$

เนื่องจากพลังงานศักย์ที่เกิดจากแรงนี้เกิดขึ้นที่ทุกเอลิเมนต์ (มีทั้งหมดจำนวน *ne* เอลิเมนต์) ดังนั้นพลังงานศักย์ทั้งหมดจากแรง $\{X_b\}$ คือ

$$E_{FB}=\sum_{e=1}^{ne}E_{fb}^e=-\sum_{e=1}^{ne}\{d_e\}^T\cdot\{f_b^e\}=-\{d\}^T\cdot\{F_B\} \qquad (5.34)$$

เมื่อ $\{F_B\}=\sum_{e=1}^{ne}\{f_b^e\}$

5.1.4 พลังงานศักย์จากแรงภายนอกกระทำที่จุดบนผิวชิ้นงาน (Point Force, $\{P\}$)

จากรูปที่ 5.3 เมื่อมีแรงกระทำที่จุดบนผิวชิ้นงานคือ $\{P_m\}$ สมมติกระทำที่โหนด *m* และ $\{P_n\}$ สมมติกระทำที่โหนด *n* แรงดังกล่าวเป็นเวคเตอร์อยู่ในรูปองค์ประกอบแกน x และ y คือ

$$\{P_m\}=\begin{Bmatrix}P_{mx}\\P_{my}\end{Bmatrix} \quad \text{และ} \quad \{P_n\}=\begin{Bmatrix}P_{nx}\\P_{ny}\end{Bmatrix}$$

และค่าการเคลื่อนตัวของโหนด m และ n ในแกน x และ y คือ

$$\{d_m\}=\begin{Bmatrix}d_{mx}\\d_{my}\end{Bmatrix} \quad \text{และ} \quad \{d_n\}=\begin{Bmatrix}d_{nx}\\d_{ny}\end{Bmatrix}$$

ดังนั้นพลังงานศักย์ที่เกิดจากแรง $\{P_m\}$ และ $\{P_n\}$ คือ

$$E_{FP}=-\sum_{i=1}^{m,n}\{d_i\}^T\cdot\{P_i\}=-\{d\}^T\cdot\{F_P\} \tag{5.35}$$

5.1.5 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากพลังงานศักย์รวม

พลังงานศักย์ทั้งหมดที่เกิดกับชิ้นงาน (E_P) คือผลรวมจากพลังงานความเครียดภายในที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปร่าง (E_U) และพลังงานศักย์ที่เกิดจากแรงกระทำจากภายนอก (E_F) ดังนั้นค่าพลังงานศักย์รวมของชิ้นงานคือ

$$E_P=E_U+E_F$$

จากหัวข้อข้างต้นทราบพลังงานความเครียดภายในที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปร่าง (E_U) จากสมการที่ (5.26) และพลังงานศักย์ที่เกิดจากแรงกระทำจากภายนอก (E_F) จากสมการ (5.32) – (5.35) ดังนั้น

$$(E_P)=E_{FS}+E_{FB}+E_{FP}=\frac{1}{2}\{d\}^T\cdot[K]\{d\}-\{d\}^T\cdot\{F_S+F_B+F_P\} \tag{5.36}$$

จากหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุด (principle of minimum potential energy) [3] ที่ว่าชิ้นงานที่มีเปลี่ยนรูปโดยแรงกระทำจากภายนอกจะเกิดสมดุลแบบสถิต (static equilibrium) เมื่อพลังงานศักย์รวมของชิ้นงานมีต่ำสุด จากสมการ (5.36) เมื่อพลังงานศักย์แปรตาม $\{d\}$ และอยู่ในรูปยกกำลังสอง การหาพลังงานต่ำสุดที่เกิดขึ้นเมื่อพลังงานแปรตาม $\{d\}$ หาได้จากจาก $\frac{\partial E_P}{\partial\{d\}}=0$ จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์คือ

$$[K]\{d\}=\{F_S+F_B+F_P\} \tag{5.37}$$

โดย

$[K]$ คือ ค่าความแข็งสปริงของชิ้นงานในพิกัดทั่วไป
$\{d\}$ คือ ค่าการเคลื่อนตัวที่ทุกโหนดตามองศาอิสระที่เคลื่อนตัว
$\{F_S+F_B+F_P\}$ คือค่าแรงกระทำที่ทุกโหนดของชิ้นงาน

การเข้าใจรูปแบบและตัวแปรของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (5.37) จะทำให้เข้าใจการเลือกใช้คำสั่งเพื่อเขียน inp file ให้มีผลลัพธ์ที่ถูกต้องตามต้องการได้ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบจากกลุ่มตัวแปรที่สำคัญมีอยู่สามกลุ่มคือ กลุ่มแรกคือแรงที่โหนดทั้งหมด กลุ่มที่สองคือค่าความแข็งสปริงของชิ้นงานซึ่งเกิดจากการรวมจากทุกเอลิเมนต์ และกลุ่มที่สามคือค่าการเคลื่อนตัวของทุกโหนดตามองศาอิสระการเคลื่อนตัว ซึ่งจะได้นำเสนอต่อไปว่ามีความเกี่ยวข้องอย่างไรกับคำสั่งสำคัญๆ ที่ควรใช้ในการเขียน inp file

5.2 คำสั่งที่เกี่ยวข้องกับการเขียน inp file

ตารางที่ 5.1 เป็นคำสั่งพื้นฐานที่สอดคล้องกับระเบียบวิธีและสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับใช้แก้ปัญหา 2D แบบความเค้นและความเครียดในระนาบเพื่อใช้กับสมการ (5.37)

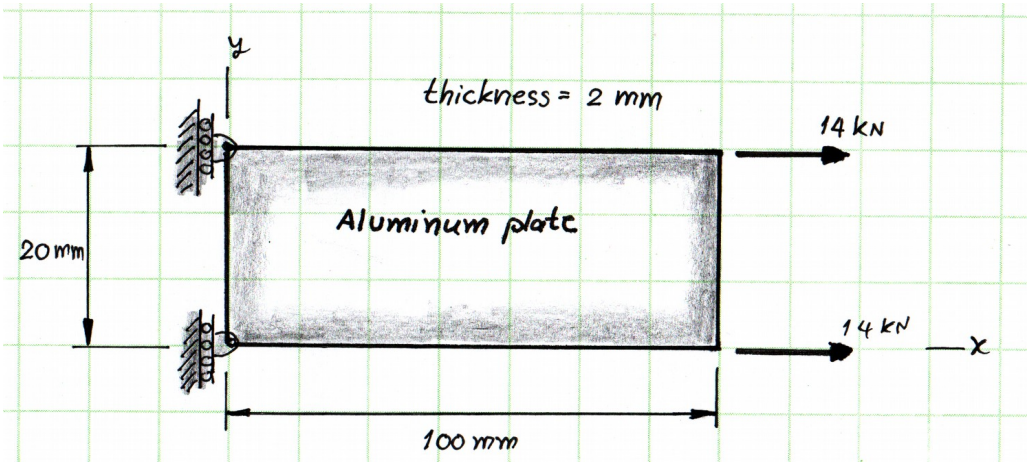
ตารางที่5.1 คำสั่งพื้นฐานที่สอดคล้องกับระเบียบวิธีและสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับใช้แก้ปัญหา 2D

ตัวแปร	ความหมาย	คำสั่งที่เกี่ยวข้อง
k_e	Element stiffness	-
t	Element thickness	*SOLID SECTION
$[B]$	Constant Matrix	*NODE, *ELEMENT TYPE
$[D]$	Element Properties	*MATERIAL
$\{d\}$	Nodal Displacement	*BOUNDARY
$\{F_S\}$	Surface force	*DLOAD
$\{F_B\}$	Body force	*DLOAD
$\{F_P\}$	Concentrated force	*CLOAD

หัวข้อนี้แสดงตัวอย่างการเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหาความเค้นและความเครียดในระนาบจากตัวอย่างปัญหา ขณะเดียวกันจะมีการอธิบายรายละเอียดการใช้คำสั่งที่สำคัญๆ ไปพร้อมกับการเขียนไฟล์ ตัวอย่างปัญหาจะมีแตกต่างกันไปเพื่อแง่มุมหลากหลายในการประดิษฐ์ชุดคำสั่งใน inp file ให้เหมาะกับปัญหา คำสั่งต่างๆ จะมีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบการใช้งานตามเงื่อนไขของปัญหานั้นๆ โดยจะเริ่มจากตัวอย่างปัญหาที่ง่ายๆ รูปร่างชิ้นงานไม่ซับซ้อนและจำนวนเอลิเมนต์ไม่มาก

5.2.1 การใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมอันดับที่หนึ่งกับปัญหาความเค้นในระนาบ

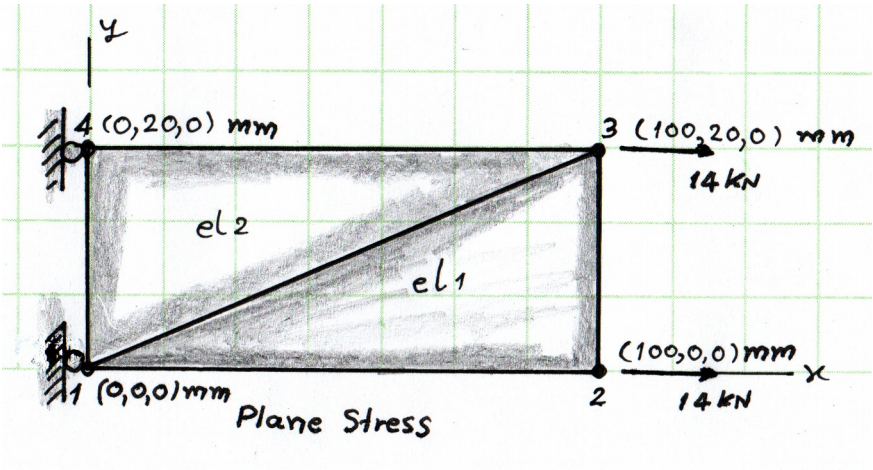
ตัวอย่างที่ 5.1 แผ่นอลูมินัมขนาด 20 mm x 100 mm หนา 2 mm ดังรูปที่ 5.5 รับแรงดึงแบบจุดในแนวแกนตามยาวของชิ้นงานเท่ากับ 28 kN จงแสดงการเขียน inp file เพื่อหาระยะที่ยืดตัว ความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในแผ่นอลูมินัมเมื่อค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 70 GPa ค่าอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3



รูปที่ 5.5 แผ่นอลูมินัมมีแรงดึงกระทำที่จุด

การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา

1.เริ่มต้นจากการเลือกใช้จำนวนเอลิเมนต์ไม่มาก สำหรับปัญหานี้ลองเลือกใช้เพียง 2 เอลิเมนต์โดยกำหนดให้ชนิดเอลิเมนต์รูปทรงสามเหลี่ยมอันดับที่หนึ่งแบบความเค้นในระนาบจำนวน 2 เอลิเมนต์และกำหนดให้อยู่ในระนาบ xy โดยมีพิกัดและหมายเลขโหนดตามรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.6 โหนด ตำแหน่งโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ของตัวอย่าง 5.1

2.กำหนดหัวข้อเรื่องคือ

```
*HEADING
ch51.inp 2D plane stress triangular element
```

3. กำหนดตำแหน่งต่างๆ ในหน่วย มิลลิเมตร (mm) ตั้งชื่อโหนดทั้งหมดว่า nall เขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*NODE,NSET=Nall
1,0.0,0.0,0.0
2,100.0,0.0,0.0
3,100.0,20.0,0.0
4,0.0,20.0,0.0
```

4..กำหนดเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ตามตารางที่ 5.2 ต่อไปนี้

ตารางที่5.2 ชื่อเอลิเมนต์และหมายเลขโหนดของแต่ละเอลิเมนต์

Element no.	Elset	Element type	Connectivity node no.
1	el1	CPS3	1,2,3
2	el2	CPS3	1,3,4

จากตารางสามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดหมายเลขเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์และกำหนดกลุ่มเอลิเมนต์ชื่อ plate หมายถึงกลุ่มเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์ el1 และ el2 ดังนี้

```
*ELEMENT,TYPE=CPS3,ELSET=el1
1,1,2,3
*ELEMENT,TYPE=CPS3,ELSET=el2
2,1,3,4
*ELSET,ELSET=plate
el1,el2
```

5. กำหนดสมบัติของเอลิเมนต์ (materials property and element section)
กำหนดสมบัติวัสดุของแผ่นชิ้นงาน
-เรียกใช้ *MATERIAL เพื่อกำหนดชื่อวัสดุให้เป็นชื่อ ALUMINUM
-เรียกใช้ *ELASTIC เพื่อกำหนดสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นคือค่ามอดุลัสยืดหยุ่นของอลูมินัมเท่ากับ $70x10^3$ MPa อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3
-ดังนั้นในส่วนของ inp file สำหรับกำหนดค่าของวัสดุคือ

```
*MATERIAL,NAME=ALUMINUM
*ELASTIC
70E+03,0.3
```

กำหนดสมบัติหน้าตัดแผ่นอลูมินัม
-เรียกใช้ *SOLID SECTION เพื่อกำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ที่ชื่อว่า plate และกำหนดให้เอลิเมนต์เหล่านี้มีค่าสมบัติวัสดุตาม ALUMINUM โดยกำหนดให้มีความหนาในแนว z เท่ากับ 2 mm
ดังนั้นในส่วนของ inp file คือ

```
*SOLID SECTION,ELSET=plate,MATERIAL=ALUMINUM
2.0
```

6 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

7. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)
กำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากการเคลื่อนตัวของโหนดพบว่าโหนดหมายเลข 1 และ 4 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x หรือในองศาอิสระ 1 ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้คือ

```
*BOUNDARY
1,1,1,0.0
4,1,1,0.0
```

8. กำหนดเงื่อนไขภาระแรงกระทำ (load conditions)
พิจารณาจากแรงกระทำที่เป็นจุดที่โหนด 2 และ 3 มีแรงกระทำในแนว x เท่ากันแต่ละโหนดเท่ากันคือ 1400 N ซึ่งเมื่อรวมกันคือแรงกระทำดึงชิ้นงานเท่ากับ 28 kN กระทำในองศาอิสระหมายเลข 1 เขียนคำสั่งได้คือ

```
*CLOAD
2,1,14000
3,1,14000
```

9. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) แรงปฏิกิริยา (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall และให้แสดงค่าผลลัพธ์ของเอลิเมนต์คือความเค้น (S) ความเครียด (E) ทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file) โดยกำหนดให้รายงานค่าความเค้นความเครียดในเอลิเมนต์ทั้งหมดและค่าระยะเคลื่อนตัว (U) และแรงกระทำ (RF) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า nall สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*EL PRINT,ELSET=plate
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=Nall
U,RF
*EL FILE,ELSET=plate
S,E
```

10. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง ***END STEP**

11.รวบรวมคำสั่งตั้งแต่ข้อ 1-9 เป็น inp file ตั้งชื่อไฟล์คือ ch51.inp

```
*HEADING
ch51.inp 2D plane stress triangular element
*NODE,NSET=Nall
1,0.0,0.0,0.0
2,100.0,0.0,0.0
3,100.0,20.0,0.0
4,0.0,20.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=CPS3,ELSET=el1
1,1,2,3
*ELEMENT,TYPE=CPS3,ELSET=el2
2,1,3,4
*ELSET,ELSET=plate
el1,el2
*MATERIAL,NAME=ALUMINUM
*ELASTIC
70E+03,0.3
*SOLID SECTION,ELSET=plate,MATERIAL=ALUMINUM
2.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,1,0.0
4,1,1,0.0
*CLOAD
2,1,14000
3,1,14000
*EL PRINT,ELSET=plate
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=Nall
U,RF
*EL FILE,ELSET=plate
S,E
*END STEP
```

12. ส่ง ch51.inp ประมวลผลด้วย CCX จะได้dat file ch51.dat แสดงข้อมูลเฉพาะความเค้นที่เกิดขึ้นที่จุดอินทิเกรชั่นดังนี้

stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set PLATE and time 0.1000000E+01

```
 1   1  7.000000E+02 -3.410605E-13 -5.684342E-14 -2.252743E-12 -6.058990E-13  7.456236E-13
 1   2  7.000000E+02 -3.410605E-13 -5.684342E-14 -2.345421E-12 -8.886548E-13 -7.523738E-13
 2   1  7.000000E+02  3.410605E-13  1.136868E-13  1.672864E-12  1.528601E-13  6.863313E-13
 2   2  7.000000E+02  3.410605E-13  1.136868E-13  1.672864E-12 -1.528829E-13 -6.965478E-13
```

strains (elem, integ.pnt.,exx,eyy,ezz,exy,exz,eyz) forset PLATE and time 0.1000000E+01

```
 1   1  1.000000E-02 -3.000000E-03 -3.000000E-03 -4.183665E-17 -1.125241E-17  1.384729E-17
 1   2  1.000000E-02 -3.000000E-03 -3.000000E-03 -4.355782E-17 -1.650359E-17 -1.397266E-17
 2   1  1.000000E-02 -3.000000E-03 -3.000000E-03  3.106747E-17  2.838831E-18  1.274615E-17
 2   2  1.000000E-02 -3.000000E-03 -3.000000E-03  3.106747E-17 -2.839254E-18 -1.293589E-17
```

displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time 0.1000000E+01

```
         1  0.000000E+00  6.068899E-02  0.000000E+00
         2  1.000000E+00  6.068899E-02  0.000000E+00
         3  1.000000E+00  6.889891E-04  0.000000E+00
         4  0.000000E+00  6.889891E-04  0.000000E+00
```

forces (fx,fy,fz) for set NALL and time 0.1000000E+01

```
1 -1.400000E+04  1.187559E-11  1.545636E-11
2  1.400000E+04 -1.187559E-11 -1.460803E-11
3  1.400000E+04 -6.487712E-13 -3.377381E-13
4 -1.400000E+04  6.487712E-13 -5.105980E-13
```

รูปที่ 5.7 dat file ของตัวอย่างที่ 5.1

การศึกษาผลลัพธ์และความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม

13. ศึกษาวิเคราะห์ความถูกต้องของผลลัพธ์จาก dat file

13.1 ตรวจสอบความถูกต้องของแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่สภาวะสมดุลแรงและระยะยืดที่เกิดขึ้นว่ามีความสอดคล้องตามหลักทางกลศาสตร์วัสดุหรือไม่

-ตรวจสอบแรงปฏิกิริยาจาก dat file ดังรูปที่ 5.7 รายละเอียดดังนี้

forces (fx,fy,fz) for set NALL and time 0.1000000E+01

```
1 -1.400000E+04  1.187559E-11  1.545636E-11
2  1.400000E+04 -1.187559E-11 -1.460803E-11
3  1.400000E+04 -6.487712E-13 -3.377381E-13
4 -1.400000E+04  6.487712E-13 -5.105980E-13
```

จากข้อมูลตรงนี้อธิบายได้ว่ามีแรงปฏิกิริยาเกิดขึ้นในแนวแกน x หรือ fx ที่โหนดหมายเลข 3 และ 4 เท่ากันแต่ละโหนดคือ -1.400000E+04 หรือ -14 kN ซึ่งถ้ารวมกันเท่ากับ -28 kN ซึ่งเท่ากับแรงกริยาที่โหนด 2 และ 3 เป็นไปตามเงื่อนไขสมดุลแรงในภาวะสถิต สำหรับแรงปฏิกิริยาในแกน y และ z (fy,fz)นั้นมีค่าผลลัพธ์จากการคำนวณที่น้อยมากเมื่อเทียบ fx ซึ่งตามความเป็นจริงแรงในแนวแกน y และ z เป็นศูนย์นั้นเอง

-ตรวจสอบระยะการเคลื่อนตัวจาก dat file ดังรูปที่ 5.7 มีรายละเอียดดังนี้

displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time 0.1000000E+01

```
1  0.000000E+00  6.068899E-02  0.000000E+00
2  1.000000E+00  6.068899E-02  0.000000E+00
3  1.000000E+00  6.889891E-04  0.000000E+00
4  0.000000E+00  6.889891E-04  0.000000E+00
```

จากข้อมูลตรงนี้อธิบายได้ว่ามีการเคลื่อนตัวเกิดขึ้นในแนวแกน x หรือ vx ที่โหนดหมายเลข 2 และ 3 เท่ากันคือ 1.000000E+00 หรือ 1mm ส่วนการเคลื่อนตัวในแนวแกน y หรือ vy เกิดขึ้นที่ทุกโหนดทั้งนี้เป็นผลจากอัตราส่วนปัวซองแต่ถือว่าน้อยเมื่อเทียบกับ vx และไม่มีการเคลื่อนตัวในแกน z ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์นี้ไม่มีการกำหนดฟังก์ชันการเคลื่อนที่ในแนวแกน z ตั้งแต่ต้น ทดลองตรวจสอบการเคลื่อนตัวในแนวแกน x ของชิ้นงานโดยจากหลักทางทฤษฎี ชิ้นงานนี้รับแรงดึงในแนวแกน ดังนั้นระยะยืดในแนวแกนคือ

$\delta = \frac{Pl}{AE}$ เมื่อ P คือแรงดึงในแนวแกน l คือความยาวของชิ้นงาน A คือหน้าตัดชิ้นงานที่ตั้งฉากกับแนวแรง E คือค่ามอดุลัสยืดหยุ่น ดังนั้นระยะยืดของชิ้นงานจากแรงดึงคือ

$$\delta = \frac{28\,x10^3\,N\,(100\,\mathrm{mm})}{(2\,\mathrm{mm}\,x20\,\mathrm{mm})(70\,x10^3\,\mathrm{N/mm^2})} = 1 \quad \mathrm{mm}$$

ผลการคำนวณระยะยืดคือ 1 mm มีความสอดคล้องกับผลคำนวณที่ได้จาก dat file แสดงว่า inp file ที่สร้างขึ้นมามีความถูกต้องเชื่อถือได้

13.2 ตรวจสอบความถูกต้องของความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมกับผลการคำนวณทางทฤษฎี

-การพิจารณาตรวจสอบความเค้นจาก dat file

```
stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set PLATE and time  0.1000000E+01

1   1  7.000000E+02 -3.410605E-13 -5.684342E-14 -2.252743E-12 -6.058990E-13  7.456236E-13
1   2  7.000000E+02 -3.410605E-13 -5.684342E-14 -2.345421E-12 -8.886548E-13 -7.523738E-13
2   1  7.000000E+02  3.410605E-13  1.136868E-13  1.672864E-12  1.528601E-13  6.863313E-13
2   2  7.000000E+02  3.410605E-13  1.136868E-13  1.672864E-12 -1.528829E-13 -6.965478E-13
```

ผลลัพธ์ข้างต้นคือรายงานค่าของความเค้นในทุกแนวของเอลิเมนต์หมายเลข 1 และ 2 ของกลุ่มเอลิเมนต์ plate ค่าความเค้นของแต่ละเอลิเมนต์แสดงที่ค่าจุดอินทิเกรชั่น ซึ่งในแต่ละเอลิเมนต์มีจุดอินทิเกรชั่นสองจุด จากผลพบว่าค่าความเค้นตั้งฉากแนวแกน x (Sxx) มีค่าเท่ากับ 7.000000E+02 (ค่าที่ขีดเส้นใต้) หรือ 700 MPa สำหรับความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนแนวอื่นๆ มีค่าใกล้ศูนย์

จากการคำนวณค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x โดยตรงพบว่า

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A} = \frac{28\,x10^3\,N}{(2\,\mathrm{mm}\,x20\,\mathrm{mm})} = 700 \quad \mathrm{MPa}$$ ซึ่งผลการคำนวณสอดคล้องกับที่รายงานใน dat file

-ตรวจสอบความเครียดจาก dat file

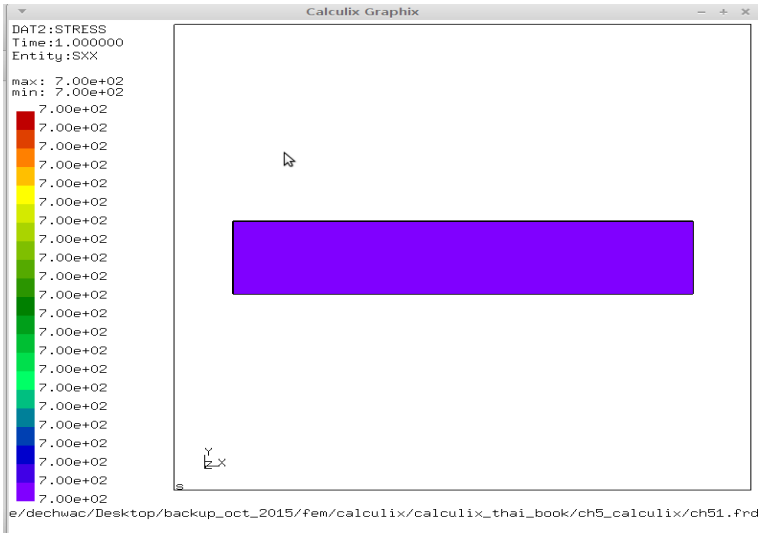
```
strains (elem, integ.pnt.,exx,eyy,ezz,exy,exz,eyz) forset PLATE and time  0.1000000E+01

1   1  1.000000E-02 -3.000000E-03 -3.000000E-03 -4.183665E-17 -1.125241E-17  1.384729E-17
1   2  1.000000E-02 -3.000000E-03 -3.000000E-03 -4.355782E-17 -1.650359E-17 -1.397266E-17
2   1  1.000000E-02 -3.000000E-03 -3.000000E-03  3.106747E-17  2.838831E-18  1.274615E-17
2   2  1.000000E-02 -3.000000E-03 -3.000000E-03  3.106747E-17 -2.839254E-18 -1.293589E-17
```

ผลลัพธ์ข้างต้นคือรายงานค่าของความเครียดในทุกแนวของเอลิเมนต์หมายเลข 1 และ 2 พบว่าค่าความเครียดตั้งฉากแนวแกน x (exx) มีค่าเท่ากับ 1.000000E-02 สำหรับความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y และ z (eyy,ezz) มีค่าเท่ากันคือ -3.000000E-03 ซึ่งเป็นผลจากอัตราส่วนปัวซอง ส่วนค่าความเครียดเฉือน (exy exz eyz) มีค่าใกล้ศูนย์

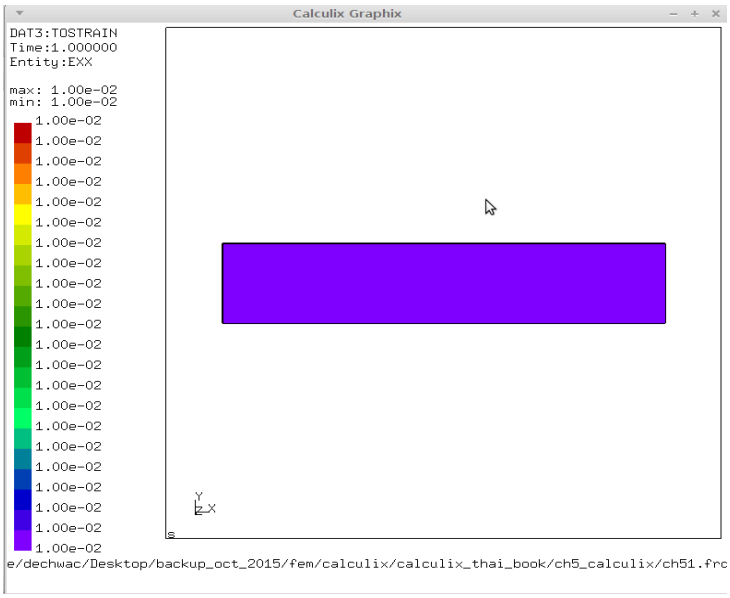
ลองตรวจสอบค่าความเครียดตั้งฉาก exx จากการคำนวณค่าความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x โดยตรงพบว่า $\epsilon_{xx} = \frac{\delta}{l} = \frac{1\,\mathrm{mm}}{(100\,\mathrm{mm})} = 0.01$ ซึ่งผลการคำนวณสอดคล้องกับที่รายงานใน dat file

14. ศึกษาวิเคราะห์ผลลัพธ์จาก frd file

การแสดงค่าของความเค้นตั้งฉาก Sxx โดยการใช้ Calculic Graphix (CGX) ดำเนินการได้โดยคำสั่ง Datasets->Stress->Entity->SXX ดังแสดงผลในรูปที่5.8 ซึ่งมีค่าในช่วง 700 MPa สำหรับภาพแสดงค่าของความเครียดก็สามารถแสดงได้ด้วยวิธีเดียวกันสามารถเข้าไปที่ Datasets->Tostrain->Entity->EXX ดังแสดงผลในรูปที่ 5.9 ซึ่งพบว่ามีค่าในช่วง 0.01 และมีความสอดคล้องกับค่าที่แสดงใน dat file และค่าที่ได้จากทฤษฎี



รูปที่ 5.8 แสดงค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x



รูปที่ 5.9 แสดงค่าความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x

5.2.2 การกำหนดแรงกระจายด้วย *DLOAD กับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมอันดับที่หนึ่ง

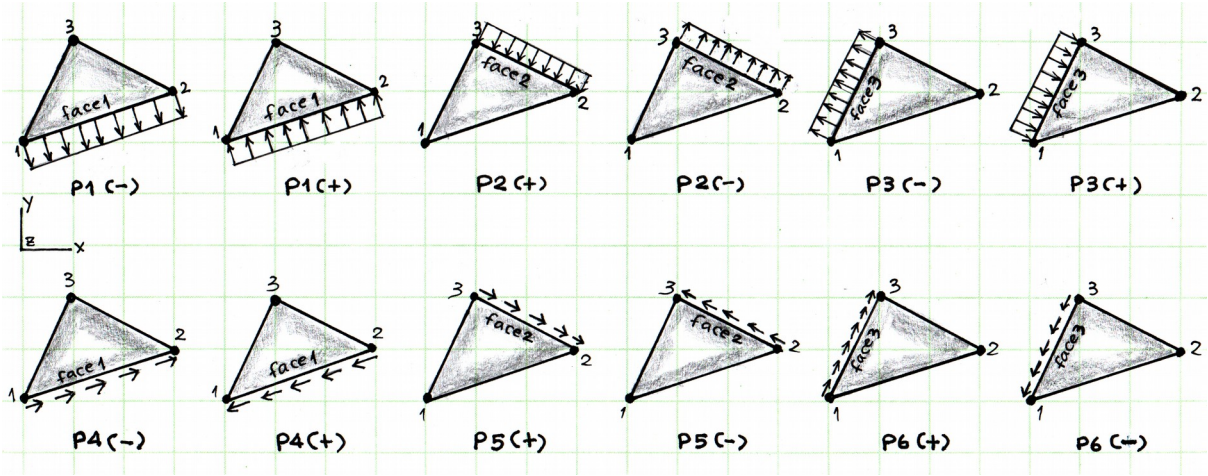
หัวข้อนี้นำเสนอการใช้คำสั่ง *DLOAD ซึ่งเป็นคำสั่งที่ใช้กำหนดแรงกระจายภายนอกกระทำที่ผิว $\{F_S\}$ และแรงจากภายนอกที่กระทำต่อรูปปริมาตรของชิ้นงาน $\{F_B\}$ ซึ่งมีรูปแบบการใช้งานดังนี้

```
*DLOAD
element no. or element set,type label,magnitude
```

การใช้คำสั่งคือ

1.กำหนดหมายเลขเอลิเมนต์หรือกลุ่มเอลิเมนต์ที่มีแรงกระจายอยู่ที่ผิว

2.กำหนดรูปแบบแรงที่กระทำเช่นแรงกระจายตั้งฉากกับผิว (normal force) หรือแรงกระจายบนผิว (tangential force)



รูปที่ 5.10 รูปแบบและลักษณะของแรงกระทำต่อผิว $\{F_S\}$ ที่ขอบเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

รูปที่ 5.10 แสดงรูปแบบและลักษณะของแรงกระทำที่ผิว $\{F_S\}$ ที่แต่ละด้านของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม สมมติเอลิเมนต์นี้มีหมายเลขโหนด 1-2-3 กำหนดให้เอลิเมนต์มี 3 ด้านที่แรง $\{F_S\}$ สามารถกระทำได้คือ

face 1 คือด้านหมายเลข 1 ของเอลิเมนต์ระหว่างโหนดหมายเลข 1 และ 2

face 2 คือด้านหมายเลข 2 ของเอลิเมนต์ระหว่างโหนดหมายเลข 2 และ 3

face 3 คือด้านหมายเลข 3 ของเอลิเมนต์ระหว่างโหนดหมายเลข 3 และ 4

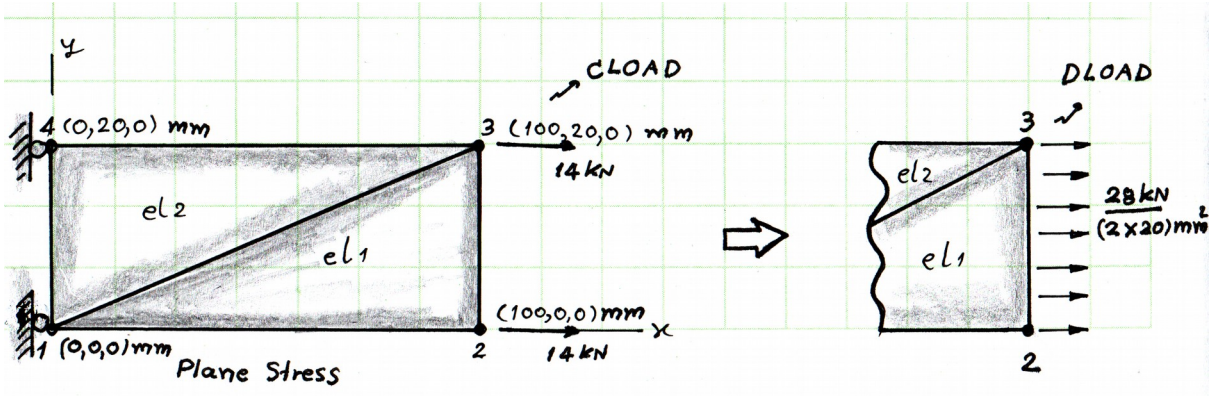
ลักษณะของแรงที่กระทำแต่ละด้านมีสองแนวคือตั้งฉากและเฉือนซึ่งมี type label ในการใช้งานกับคำสั่ง *DLOAD ดังความหมายในตารางที่ 5.3 โดยอ P1-P6 คือสัญลักษณ์ที่ระบุลักษณะของแรงที่กระทำต่อหมายเลขด้าน

ตารางที่5.3 การกำหนดทิศและหมายเลขด้านของเอลิเมนต์ทรงสามเหลี่ยมในระนาบ

Type label	Face No.	Type of surface force	Direction
P1	face1	Normal force	- (tensile),+(compress)
P2	face2	Normal force	- (tensile),+(compress)
P3	face3	Normal force	- (tensile),+(compress)
P4	face1	Shear force	- (ccw),+ (cw)
P5	face2	Shear force	- (ccw),+ (cw)
P6	face3	Shear force	- (ccw),+ (cw)

ccw=counter clockwise cw= clockwise

ตัวอย่างที่ 5.2 จากรูปที่ 5.11 สมมติให้เป็นแรงกริยา 28 kN กระจายบนพื้นที่ 2 mm x 20 mm ดังนั้นแรงดึงกระจายต่อหน่วยพื้นที่ (N/mm^2) มีค่าเท่ากับ 700 MPa ค่านี้คือค่าแรงกระจายที่กระทำที่ขอบผิวระหว่างโหนดที่ 2-3 ของเอลิเมนต์หมายเลข 1 ซึ่งต้องเปลี่ยนจากการใช้คำสั่ง *CLOAD เป็น *DLOAD



รูปที่ 5.11 แรงดึงกระจายกระทำต่อชิ้นงาน

วิธีการใช้งาน *DLOAD พิจารณาข้อมูลจาก

1.แรงกระทำที่ผิวของด้านเอลิเมนต์ el1 ที่ต่อระหว่างโหนดหมายเลข 2-3

2.หมายเลขด้านที่แรงกระทำคือ face2 ของเอลิเมนต์ el1 มีแรงกระจายกระทำเท่ากับ 700 MPa

3.ลักษณะแรงเป็น normal force

4. ทิศกระทำของแรงคือ ลบเพราะดึงตั้งฉากออกจากผิว

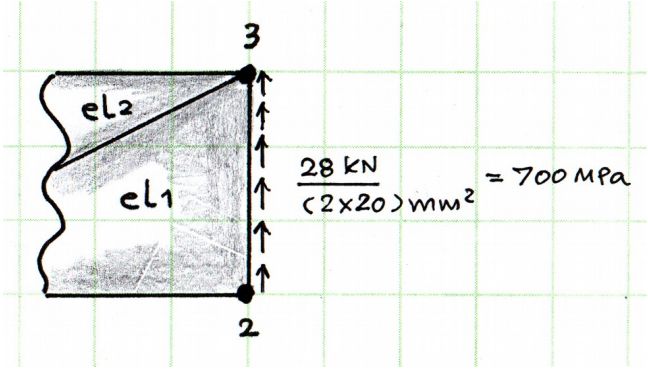
พิจารณาข้อมูลร่วมกับรูปที่ 5.10 และตารางที่ 5.2 จึงเขียนชุดคำสั่ง *DLOAD แทน *CLOAD ได้ดังนี้

```
*DLOAD
el1,P2,-700
```

จากแนวทางนี้สามารถดัดแปลง inp file ch51.inp ตรงคำสั่ง *CLOAD แทนด้วย *DLOAD และเปลี่ยนชื่อไฟล์เป็น ch52.inp ดังนี้

```
*HEADING
ch52.inp 2D plane stress triangular element
*NODE,NSET=Nall
1,0.0,0.0,0.0
2,100.0,0.0,0.0
3,100.0,20.0,0.0
4,0.0,20.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=CPS3,ELSET=el1
1,1,2,3
*ELEMENT,TYPE=CPS3,ELSET=el2
2,1,3,4
*ELSET,ELSET=plate
el1,el2
*MATERIAL,NAME=ALUMINUM
*ELASTIC
70E+03,0.3
*SOLID SECTION,ELSET=plate,MATERIAL=ALUMINUM
2.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,1,0.0
4,1,1,0.0
*DLOAD
el1,P2,-700
*EL PRINT,ELSET=plate
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=Nall
U,RF
*EL FILE,ELSET=plate
S,E
*END STEP
```

<u>ตัวอย่างที่</u> 5.3 จากตัวอย่าง 5.2 สามารถเปลี่ยนแรงดึงที่ผิวกระจายคงที่เป็นแรงเฉือนที่ผิวกระจายคงที่ได้ดังรูปที่ 5.12 โดยยังคงให้มีขนาดของแรงกระจายต่อหน่วยพื้นที่เท่าเดิมคือ 700 MPa และดัดแปลงการจับยึดที่ปลายด้านซ้ายของชิ้นงานตามกรณีตัวอย่างที่ 5.2 ไม่สามารถใช้ได้กับกรณีแรงกระทำแบบนี้เพราะทำให้เกิดการเคลื่อนที่ ดังนั้นต้องมีการเปลี่ยนแปลงลักษณะจุดจับยึดให้เป็นแบบสลักที่ตำแหน่งโหนด 1 และ 4



รูปที่ 5.12 แรงเฉือนกระจายที่ขอบผิวชิ้นงาน

วิธีการใช้งาน *DLOAD พิจารณาข้อมูลจาก

1.แรงกระทำบนด้านของเอลิเมนต์ el1

2.หมายเลขด้านที่แรงกระทำคือ face2

3.ลักษณะแรงเป็น shear force

4.ทิศกระทำของแรงคือ – เพราะทิศทวนเข็มนาฬิกา (จากรูป 5.10)

พิจารณาข้อมูลร่วมกับรูปที่ 5.10 และตารางที่ 5.2 จากแนวทางนี้สามารถดัดแปลง ch52.inp ตรงคำสั่ง *DLOAD และเปลี่ยนชื่อไฟล์เป็น ch53.inp ดังนี้

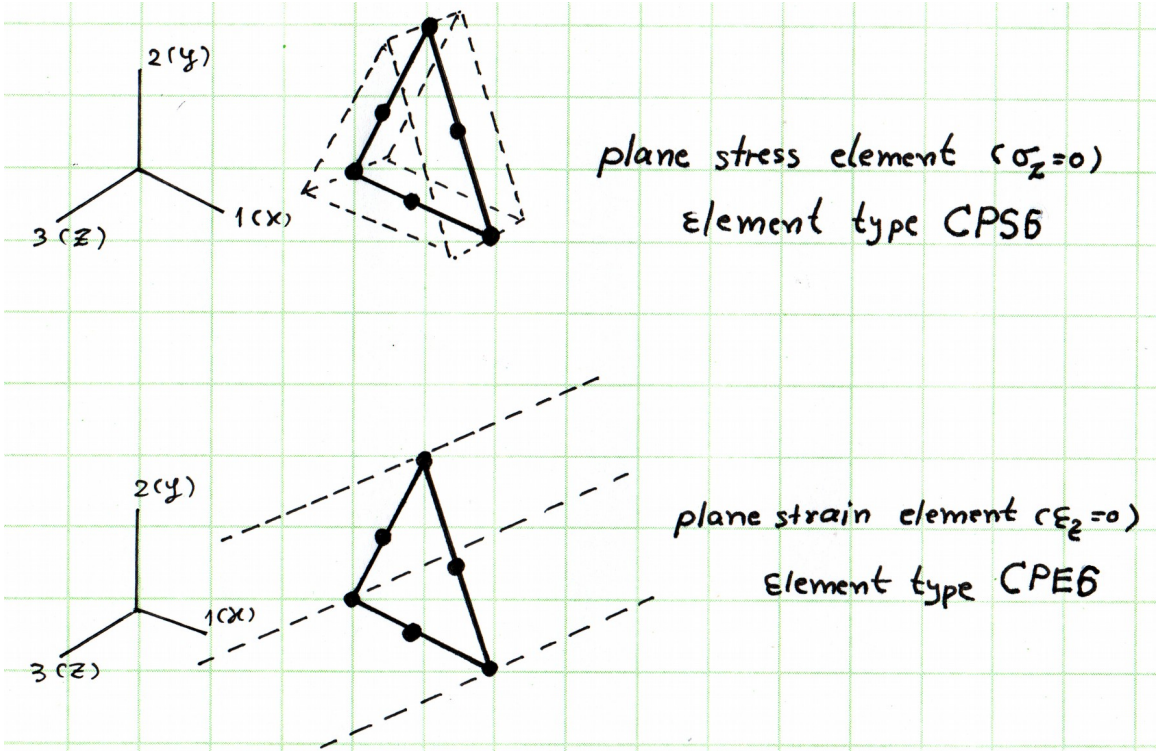
```
*HEADING
ch53.inp 2D plane stress triangular element
*NODE,NSET=Nall
1,0.0,0.0,0.0
2,100.0,0.0,0.0
3,100.0,20.0,0.0
4,0.0,20.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=CPS3,ELSET=el1
1,1,2,3
*ELEMENT,TYPE=CPS3,ELSET=el2
2,1,3,4
*ELSET,ELSET=plate
el1,el2
*MATERIAL,NAME=ALUMINUM
*ELASTIC
70E+03,0.3
*SOLID SECTION,ELSET=plate,MATERIAL=ALUMINUM
2.0
*STEP
*STATIC
```

```
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
4,1,3,0.0
*DLOAD
el1,P5,-700
*EL PRINT,ELSET=plate
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=Nall
U,RF
*EL FILE,ELSET=plate
S,E
*END STEP
```

5.2.3 การใช้เอลิเมนต์ ในระนาบรูปสามเหลี่ยมอันดับที่หนึ่งกับปัญหาความเครียดในระนาบ

สำหรับการใช้งานเอลิเมนต์กับปัญหาความเครียดในระนาบนั้นไม่ได้มีหลักการแตกต่างจากการใช้งานกับปัญหาความเค้นในระนาบ ส่วนที่ต่างกันคือการกำหนดประเภทหรือชนิดเอลิเมนต์ต้องเปลี่ยนจาก CPS3 เป็น CPE3 เท่านั้น

5.3 เอลิเมนต์ในระนาบรูปสามเหลี่ยมอันดับที่สอง (Triangular Second Order Plane Element)



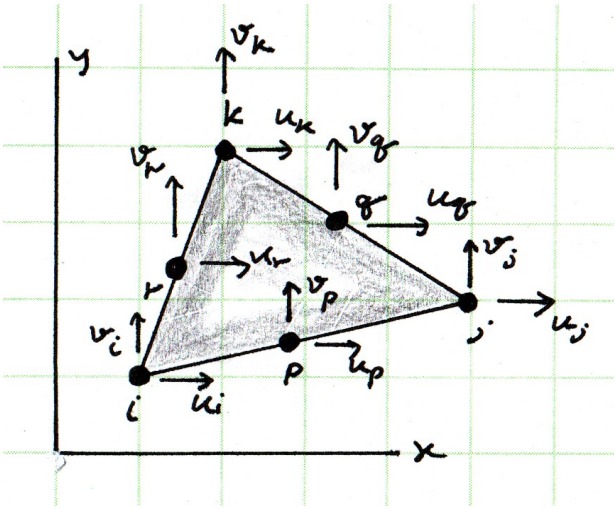
รูปที่ 5.13 เอลิเมนต์ 2-D รูปสามเหลี่ยมอันดับที่สอง (triangular second order element)

รูปแบบของเอลิเมนต์แบบที่สองคือ เอลิเมนต์ในระนาบรูปสามเหลี่ยมอันดับที่สอง (triangular second order element) ดังแสดงในรูปที่ 5.13 โดยรูปแบบทรงเรขาคณิตเป็นแบบสามเหลี่ยม มีโหนด I, j, k อยู่ที่เหลี่ยมทั้งสามของเอลิเมนต์และ p, q, r อยู่ที่กึ่งกลางของแต่ละด้านรวมทั้งหมดใน 1 เอลิเมนต์มี 6 โหนด สำหรับรูปแบบเอลิเมนต์ที่ใช้ได้ในโปรแกรม CalculiX คือ CPS6 และ CPE6 ค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดของเอลิเมนต์ทั้งสองรูปแบบเหมือนกันดังแสดงในรูปที่ 5.14 จากรูปเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม 6 โหนดแบบ CPS6 และ CPE6 มีฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในรูปแบบพหุนามในแนว x คือ

$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2 \tag{5.38}$$

และฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในแนวแกน y คือ

$$v(x,y)=a_7+a_8x+a_9y+a_{10}x^2+a_{11}xy+a_{12}y^2 \tag{5.39}$$



รูปที่ 5.14 ค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดของเอลิเมนต์แบบ CPS6 และ CPE6

จัดรูปฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวจากสมการ (5.38) และ (5.39) อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x&y&x^2&xy&y^2&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&x&y&x^2&xy&y^2\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\\a_7\\a_8\\a_9\\a_{10}\\a_{11}\\a_{12}\end{Bmatrix} \tag{5.40}$$

หรือ

$$\{\omega\}=[X_{xy}]\cdot\{A\} \tag{5.41}$$

เมื่อฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวที่จุดใดๆ คือ $\{\omega\}=\begin{Bmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{Bmatrix}$

และ

$[X_{xy}]=\begin{bmatrix}1&x&y&x^2&xy&y^2&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&x&y&x^2&xy&y^2\end{bmatrix}$ คือกลุ่มตัวแปร x และ y

และ $\{A\}=\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix}$ คือกลุ่มค่าคงที่ในฟังก์ชันประมาณการ

นำค่าคู่ลำดับของแต่ละโหนดบนเอลิเมนต์แทนในสมการ (5.38) และ (5.39) ที่โหนด *i* มีค่าการเคลื่อนตัวที่จุดนี้เท่ากับ

$$u(x_i, y_i)=u_i=a_1+a_2 x_i+a_3 y_i+a_4 x_i^2+a_5 x_i y_i+a_6 y_i^2 \quad \text{และ}$$

$$v(x_i, y_i)=v_i=a_7+a_8 x_i+a_9 y_i+a_{10} x_i^2+a_{11} x_i y_i+a_{12} y_i^2$$

ทำนองเดียวกันที่จุด j, k, p, q และ r มีค่าการเคลื่อนตัวเท่ากับ

$$\{d\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_p \\ v_p \\ u_q \\ v_q \\ u_r \\ v_r \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k y_k & y_k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k y_k & y_k^2 \\ 1 & x_p & y_p & x_p^2 & x_p y_p & y_p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_p & y_p & x_p^2 & x_p y_p & y_p^2 \\ 1 & x_q & y_q & x_q^2 & x_q y_q & y_q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_q & y_q & x_q^2 & x_q y_q & y_q^2 \\ 1 & x_r & y_r & x_r^2 & x_r y_r & y_r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_r & y_r & x_r^2 & x_r y_r & y_r^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k y_k & y_k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k y_k & y_k^2 \\ 1 & x_p & y_p & x_p^2 & x_p y_p & y_p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_p & y_p & x_p^2 & x_p y_p & y_p^2 \\ 1 & x_q & y_q & x_q^2 & x_q y_q & y_q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_q & y_q & x_q^2 & x_q y_q & y_q^2 \\ 1 & x_r & y_r & x_r^2 & x_r y_r & y_r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_r & y_r & x_r^2 & x_r y_r & y_r^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_p \\ v_p \\ u_q \\ v_q \\ u_r \\ v_r \end{Bmatrix}$$

หรือ

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k y_k & y_k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k y_k & y_k^2 \\ 1 & x_p & y_p & x_p^2 & x_p y_p & y_p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_p & y_p & x_p^2 & x_p y_p & y_p^2 \\ 1 & x_q & y_q & x_q^2 & x_q y_q & y_q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_q & y_q & x_q^2 & x_q y_q & y_q^2 \\ 1 & x_r & y_r & x_r^2 & x_r y_r & y_r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_r & y_r & x_r^2 & x_r y_r & y_r^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_p \\ v_p \\ u_q \\ v_q \\ u_r \\ v_r \end{Bmatrix} = [x]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_p \\ v_p \\ u_q \\ v_q \\ u_r \\ v_r \end{Bmatrix}$$

นำไปแทนในสมการ (5.40) จะได้ฟังก์ชันการเคลื่อนตัวในรูปแบบฟังก์ชันรูปร่างหรือ shape function ดังนี้

$$\{\omega\} = [X_{xy}] \cdot [x]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r \\ v_r \end{Bmatrix}$$

เมื่อฟังก์ชันรูปร่าง (shape function)

$$[N] = [X_{xy}] \cdot [x]^{-1} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_p & 0 & N_q & 0 & N_r & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_p & 0 & N_q & 0 & N_r \end{bmatrix} \qquad (5.41)$$

และจัดรูปฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนที่ที่จุด xy ใดๆ อยู่ในรูปของการเคลื่อนที่ของแต่ละโหนดคือ

$$\{\omega\}=[N]\cdot\{d\} \tag{5.42}$$

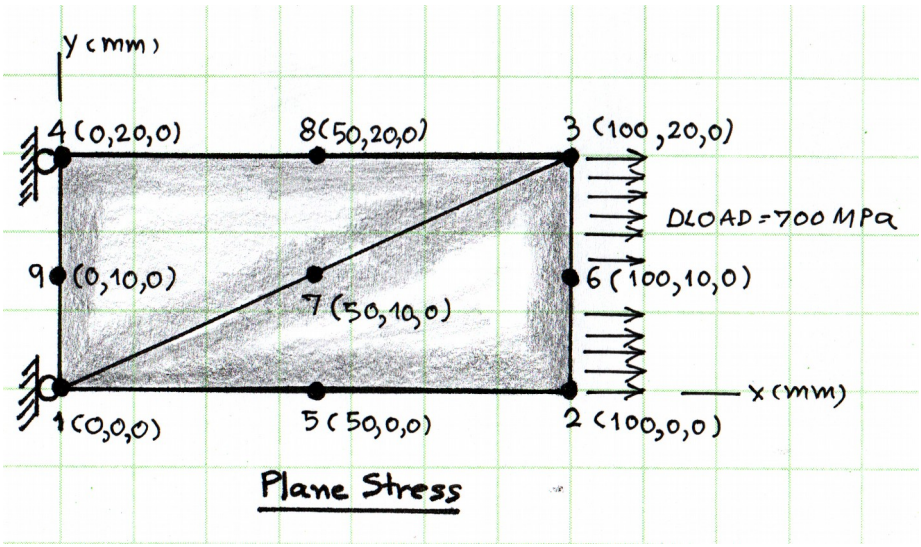
ดังนั้นค่าความเครียดในแนวแกนต่างๆ คือ

$$\{\epsilon\}=\begin{Bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}\end{Bmatrix}=[B]\cdot\{d\} \tag{5.43}$$

เมื่อหาค่า $[N]$ ได้จากสมการ (5.41) จะทราบค่า [B] ในรูปกลุ่มตัวแปรที่ตำแหน่งโหนด สำหรับการหาความเค้นและความเครียดรวมถึงสมการของเอลิเมนต์นั้นโดยหลักการจะเหมือนกับเอลิเมนต์แบบอันดับที่หนึ่งตามที่แสดงไว้ในสมการ (5.16)-(5.37)

5.3.1 การใช้งานเอลิเมนต์ในระนาบรูปสามเหลี่ยมอันดับที่สอง

ตัวอย่างที่ 5.4 การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหาความเค้นและความเครียดในระนาบ โดยใช้เอลิเมนต์ในระนาบรูปสามเหลี่ยมอันดับที่สอง โจทย์ตัวอย่าง 5.1 เป็นการใช้เอลิเมนต์ CPS6 แทน CPS3 และสำหรับกรณีปัญหาความเครียดในระนาบก็สามารถใช้เอลิเมนต์ CPE6 แทนเอลิเมนต์ CPE3 ได้เช่นกัน



รูปที่ 5.15 แรงดึงกระจายที่ขอบผิวชิ้นงานของตัวอย่างที่ 5.4

การเขียน inp file เพื่อแก้ปัญหา

1.รูปแบบจำลองของปัญหาแสดงดังรูปที่ 5.15 โดยกำหนดให้ชิ้นงานประกอบจากเอลิเมนต์ CPS6 สองเอลิเมนต์โดยแต่ละเอลิเมนต์มี 6 โหนด ดังนั้นชิ้นงานทั้งหมดมี 9 โหนดแต่ละโหนดมีองศาอิสระเท่ากับสอง ดังนั้นจำนวนองศาอิสระของปัญหานี้จึงเท่ากับ 9x2 = 18 ตัวแปรองศาอิสระ (number of degree of freedom) สำหรับการเขียน inp file สามารถดัดแปลงจากไฟล์ ch51.inp ได้

2.กำหนดหัวข้อเรื่องคือ

```
*HEADING
ch54.inp 2D plane stress triangular element second degree
```

3. กำหนดตำแหน่งต่างๆ อยู่ในหน่วย มิลลิเมตร (mm) ตั้งชื่อโหนดทั้งหมดว่า nall เขียนคำสั่งได้ดังนี้ โดยเพิ่มโหนดที่กึ่งกลางของแต่ละขอบเอลิเมนต์ลงไปดังแสดงในรูปที่ 5.15

```
*NODE,NSET=Nall
```

```
1,0.0,0.0,0.0
2,100.0,0.0,0.0
3,100.0,20.0,0.0
4,0.0,20.0,0.0
5,50.0,0.0,0.0
6,100.0,10.0,0.0
7,50.0,10.0,0.0
8,50.0,20.0,0.0
9,0.0,10.0,0.0
```

4 .กำหนดเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์ตามตารางต่อไปนี้

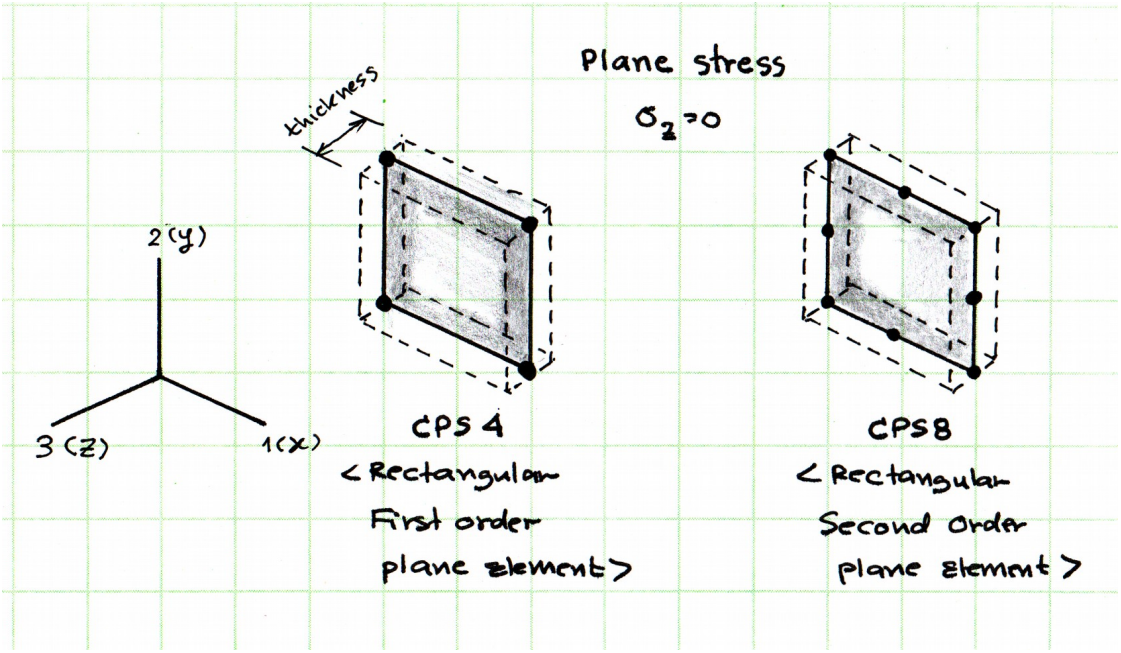
ตารางที่5.4 หมายเลขเอลิเมนต์ ชื่อเอลิเมนต์และชนิดของเอลิเมนต์

Element no.	Elset	Element type	Connectivity node no.
1	el1	CPS6	1,2,3,5,6,7
2	el2	CPS6	1,3,4,7,8,9

สำหรับลำดับของโหนดในการกำหนดเป็นเอลิเมนต์นั้น ให้จัดลำดับเรียงจากโหนดที่มุมของสามเหลี่ยมก่อน จากนั้นเรียงตามด้วยโหนดที่กึ่งกลางด้านตามทิศทวนเข็มนาฬิกา จากตารางสามารถเขียนคำสั่งเพื่อกำหนดหมายเลขเอลิเมนต์และประเภทของเอลิเมนต์และกำหนดกลุ่มเอลิเมนต์ชื่อ plate หมายถึงกลุ่มเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์ el1 และ el2 ได้ดังนี้

5. สำหรับขั้นตอนอื่นๆ เหมือนกับที่ปรากฏในไฟล์ ch51.inp

5.4 เอลิเมนต์ในระนาบรูปสี่เหลี่ยม (Rectangular Plane Element)



รูปที่ 5.16 ลักษณะเอลิเมนต์ 2D ทรงสี่เหลี่ยมที่ใช้กับปัญหาในระนาบ

ในหัวข้อนี้นำเสนอเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมที่ใช้กับปัญหาในระนาบ ซึ่งมีทั้งแบบอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง ดังแสดงรูปแบบในภาพที่ 5.16 กำหนดให้ CPS4 คือเอลิเมนต์ในระนาบรูปสี่เหลี่ยมอันดับที่หนึ่งใช้กับปัญหาความเค้นในระนาบ และ CPS8 คือเอลิเมนต์ในระนาบรูปสี่เหลี่ยมอันดับที่สองใช้กับปัญหาความเค้นในระนาบ สำหรับปัญหาความเครียดในระนาบเลือกใช้ CPE4 และ CPE8 แทน CPS4 และ CPS8 ได้ตามลำดับ

รูปแบบเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมอันดับที่หนึ่ง CPS4 และ CPE4 มีฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวของโหนดในรูปแบบพหุนามในระนาบตามแกน (x) ดังนี้

$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy \tag{5.45}$$

และฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในแนวแกนตั้ง (y) คือ

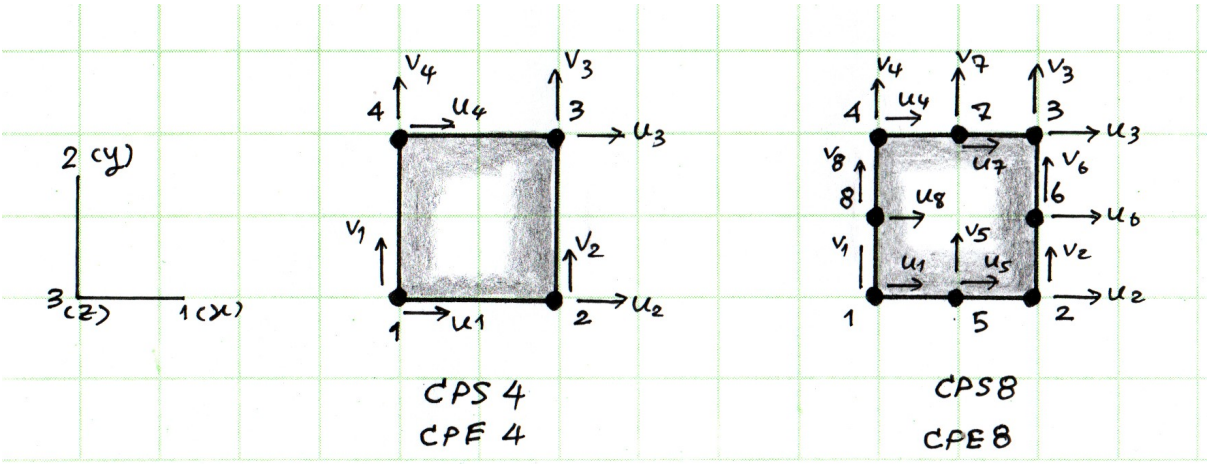
$$v(x,y)=a_5+a_6x+a_7y+a_8xy \tag{5.46}$$

และรูปแบบเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมอันดับที่สอง CPS8 และะ CPE8 มีฟังก์ชันการเคลื่อนตัวของโหนดในระนาบตามแกน (x) ดังนี้

$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy+a_5x^2+a_6y^2+a_7x^2y+a_8xy^2 \tag{5.47}$$

และฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในแนวแกนตั้ง (y) คือ

$$v(x,y)=a_9+a_{10}x+a_{11}y+a_{12}xy+a_{13}x^2+a_{14}y^2+a_{15}x^2y+a_{16}xy^2 \tag{5.48}$$



รูปที่ 5.17 โหนดและองศาอิสระการเคลื่อนตัวของโหนดในเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมในระนาบ

จากรูปแบบโหนดของเอลิเมนต์แต่ละแบบในรูปที่ 5.17 ถ้ากำหนดให้ (x_n, y_n) คือตำแหน่งของโหนดหมายเลข n และสมมติให้ฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวของแต่ละจุดคือ

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{Bmatrix}=[X_{xy}]\cdot\{A\}$$

เมื่อ $[X_{xy}]$ คือกลุ่มตัวแปร x กับ y และ $\{A\}$ คือกลุ่มค่าคงที่ของฟังก์ชันประมาณการอันดับที่หนึ่งมีค่าดังนี้

$$[X_{xy}]=\begin{bmatrix}1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy\end{bmatrix} \tag{5.49}$$

สำหรับเอลิเมนต์อันดับที่สองคือ

$$[X_{xy}]=\begin{bmatrix}1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & x^2y & xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & x^2y & xy^2\end{bmatrix} \tag{5.50}$$

$[A]$ สำหรับเอลิเมนต์อันดับที่หนึ่งคือ $\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix}$ และสำหรับอันดับที่สองคือ $\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ . \\ . \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{Bmatrix}$

ดังนั้นเมื่อจัดรูปใหม่พบว่าฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์คือ

$$[N]=[X_{xy}]\cdot[x]^{-1} \tag{5.51}$$

เมื่อ $[X_{xy}]$ ตามปรากฏในสมการ (5.49)-(5.50) สำหรับอันดับที่หนึ่งและสองตามลำดับ

และ $[x]$ สำหรับอันดับที่หนึ่งคือ

$$[x]=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

ขณะเดียวกัน $[x]$ ของอันดับที่สองคือ

$$[x]=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_8 & y_8 & x_8y_8 & x_8^2 & y_8^2 & x_8^2y_8 & x_8y_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_8 & y_8 & x_8y_8 & x_8^2 & y_8^2 & x_8^2y_8 & x_8y_8^2 \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

เมื่อแทนค่าจากสมการ (5.49) และ (5.52) ลงในสมการ (5.51) และแทนค่าสมการ (5.50) และ (5.53) ลงในสมการ (5.51) จะได้ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) สำหรับเอลิเมนต์อันดับที่หนึ่งจากสมการ (5.51) คือ

$$[N]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

และฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) สำหรับเอลิเมนต์อันดับที่สองจากสมการ (5.51) คือ

$$[N]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \tag{5.55}$$

เมื่อเวคเตอร์ค่าการเคลื่อนที่แต่ละโหนดของเอลิเมนต์คือ

$\{d\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$ สำหรับเอลิเมนต์อันดับที่หนึ่ง และ $\{d\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix}$ สำหรับเอลิเมนต์อันดับที่สอง

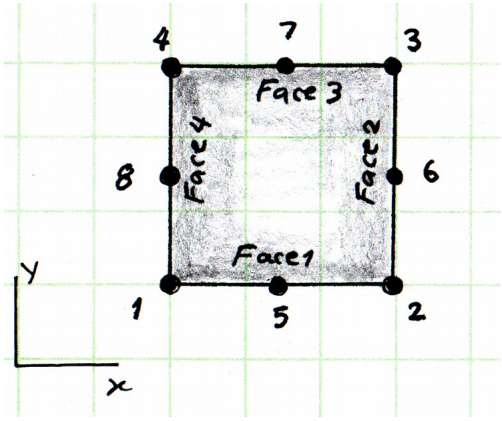
ดังนั้นสามารถจัดรูปค่าความเครียดในแนวแกนต่างๆ คือ

$$\{\epsilon\}=\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{Bmatrix}=[B]\cdot\{d\}$$

เมื่อหาค่า $[N]$ ได้จากสมการ (5.54)-(5.55) จะทราบค่า $[B]$ ในรูปกลุ่มตัวแปรที่ตำแหน่งโหนด สำหรับการหาความเค้นและความเครียดรวมถึงสมการของเอลิเมนต์นั้นโดยหลักการจะเหมือนที่แสดงไว้ในสมการ (5.16)-(5.37)

5.4.1 การใช้ *DLOAD กับเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม

รูปแบบคำสั่งของการใช้งาน *DLOAD เพื่อกำหนดแรงกระจายที่ผิวของชิ้นงาน ยังคงหลักการใช้งานเหมือนกับที่ใช้กับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทุกประการ และต้องกำหนดหมายเลขผิวขอบของเอลิเมนต์ให้ถูกต้อง



รูปที่ 5.18 แสดงหมายเลขกำกับผิวขอบเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลียม

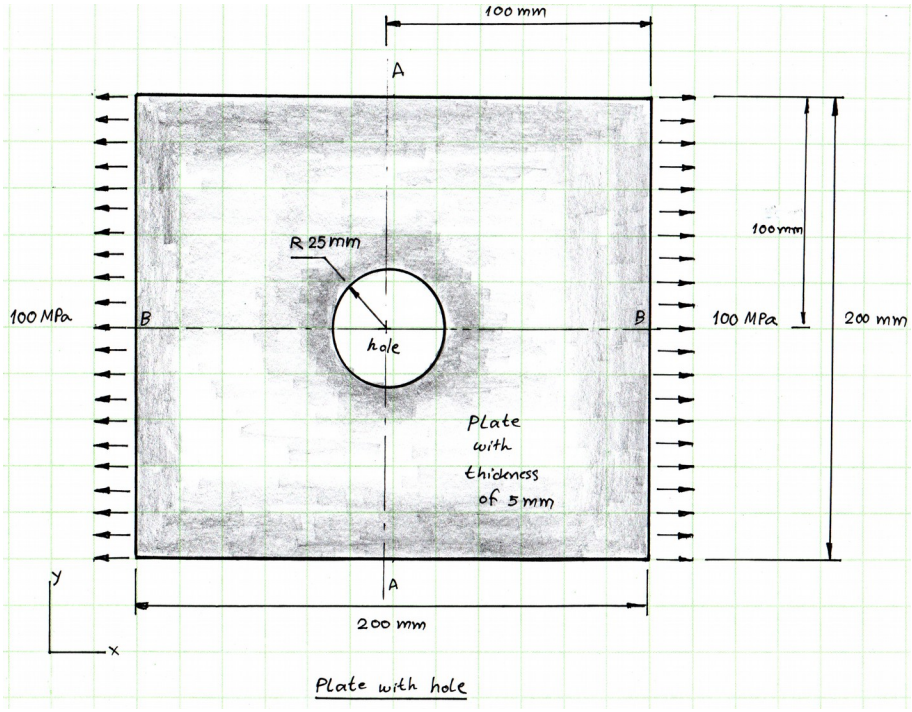
รูปที่ 5.18 แสดงหมายเลขกำกับผิวขอบเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมทั้งแบบ CPS4 CPE4 CPS8 และ CPE8
face 1 คือด้านหมายเลข 1 ของเอลิเมนต์ระหว่างโหนดหมายเลข 1 และ 2
face 2 คือด้านหมายเลข 2 ของเอลิเมนต์ระหว่างโหนดหมายเลข 2 และ 3
face 3 คือด้านหมายเลข 3 ของเอลิเมนต์ระหว่างโหนดหมายเลข 3 และ 4
face 4 คือด้านหมายเลข 4 ของเอลิเมนต์ระหว่างโหนดหมายเลข 4 และ 1

5.5 การใช้ GMSH ช่วยสร้างโหนดและเอลิเมนต์

GMSH [4] เป็นโปรแกรมฟรีทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถช่วยสร้างต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีโหนดและเชื่อมโยงโหนดเป็นเอลิเมนต์หรือการสร้างโครงร่างแห (Meshing) โดยเฉพาะชิ้นงานที่มีรูปร่างซับซ้อนและสามารถแปลงเป็น inp file พื้นฐานที่พร้อมในการจัดรูปแบบเพื่อพัฒนาสำหรับใช้คำนวณด้วย CCX ให้ได้ผลลัพธ์ที่สมบูรณ์ต่อไป

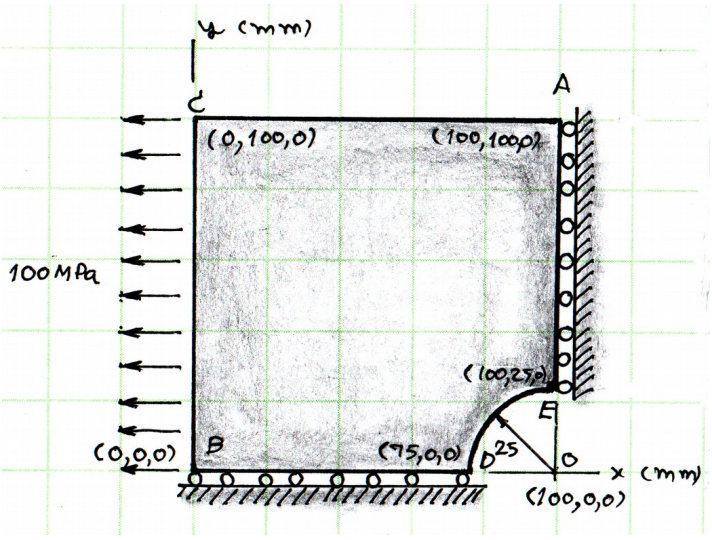
ในหัวข้อนี้นำเสนอตัวอย่างการใช้งาน GMSH เพื่อช่วยสร้าง inp file สำหรับการประมวลผลด้วย CalculiX

ตัวอย่างที่ 5.5 รูปที่ 5.19 แผ่นเหล็กกล้า (E = 210 GPa ν=0.25) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความหนาเท่ากันตลอดแผ่นที่มีรูเจาะทะลุตรงกลางแผ่นขนาดรัศมีเท่ากับ 25 mm มีความหนาเท่ากับ 5 mm เมื่อมีแรงดึงกระจาย 100 MPa ที่กระทำที่ด้านทั้งสอง จงใช้เอลิเมนต์ในระนาบรูปสามเหลี่ยมอันดับที่หนึ่ง (CPS3) เพื่อหาความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นที่รูเจาะ



รูปที่ 5.19 ชิ้นงานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีรูเจาะตรงกลาง

ปัญหานี้สามารถพิจารณาแบบสมมาตรได้ โดยการแบ่งชิ้นงานออกเป็นสี่ส่วน ตามแนวตั้งและแนวนอนผ่าน A และ B จากรูปที่ 5.19 สามารถลดรูปมาแสดงสมมาตรได้ในรูปที่ 5.20 โดยกำหนดเงื่อนไขของขอบเขตในแนวตั้งและแนวนอนใหม่ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขจริงคือขอบแนวตั้ง (AE) จะไม่มีอิสระในการเคลื่อนตัวในแนวนอน และขอบในแนวนอน (BD) จะไม่มีอิสระในการเคลื่อนตัวในแนวตั้ง



รูปที่ 5.20 รูปแบบแสดงการแบ่งแบบสมมาตรและเงื่อนไขขอบเขตของตัวอย่างที่ 5.5

1.<u>สร้างรูปชิ้นงานด้วย GMSH</u> ก่อนใช้งานกับปัญหานี้ผู้อ่านสามารถศึกษาการใช้ GMSH อย่างง่ายจากภาคผนวก ก)

1.1 เริ่มต้นการสร้างต้นแบบ
กำหนดจุดที่สำคัญจาก Geometry->Elementary entities->Add->Point ได้แก่ จุด B, D, O, E, A และ C โดยแต่ละจุดมีคู่ลำดับที่จะต้องป้อนลงในโปรแกรมคือ

```
B = (0,0,0)
D = (75,0,0)
O= (100,0,0)
E = (100,25,0)
A = (100,100,0)
C = (0,100,0)
```

1.2 กำหนดเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดต่างๆ จาก Geometry->Elementary entities->Add->Straight line
เส้นตรงที่ 1 ระหว่างจุด B, D
เส้นโค้งที่ 2 ระหว่างจุด D, E โดยมี O เป็นจุดศูนย์กลาง
เส้นตรงที่ 3 ระหว่างจุด E, A
เส้นตรงที่ 4 ระหว่างจุด C, B

1.3 กำหนดพื้นที่ของต้นแบบจาก Geometry->Elementary entities->Add->Plane Surface

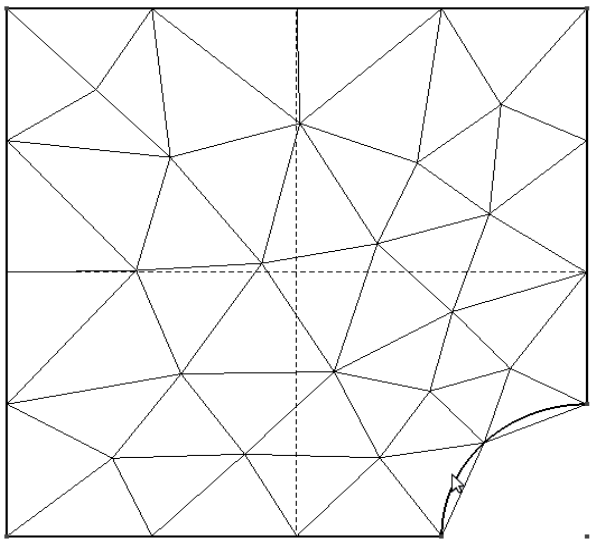
1.4 ตรวจสอบไฟล์ของ GMSH โดยทดลองเรียกไฟล์ geo ซึ่งเป็น script file ของ GMSH มาตรวจสอบ

โดยปกติต้นแบบที่ได้จะถูกบันทึกในไฟล์สกุล geo หรือที่เรียกว่า geo file บรรจุบรรทัดคำสั่งในการสร้างต้นแบบไว้ลักษณะไฟล์ตัวอย่างเป็นดังนี้

```
cl__1 = 25;
Point(1) = {0, 0, 0, cl__1};
Point(2) = {75, 0, 0, cl__1};
Point(3) = {100, 0, 0, cl__1};
Point(4) = {100, 25, 0, cl__1};
Point(5) = {100, 100, 0, cl__1};
Point(6) = {0, 100, 0, cl__1};
Line(1) = {1, 2};
Circle(2) = {2, 3, 4};
Line(3) = {4, 5};
Line(4) = {5, 6};
Line(5) = {6, 1};
Line Loop(6) = {1, 2, 3, 4, 5};
Plane Surface(7) = {6};
```

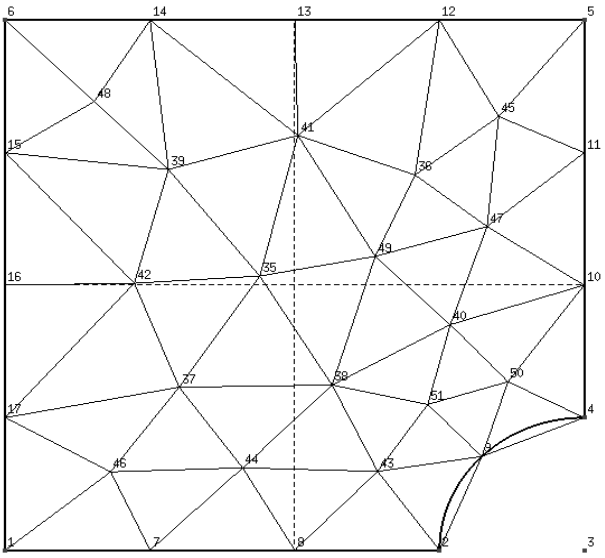
รายละเอียดของไฟล์ (geo file) ประกอบด้วยการสร้าง point สร้าง Line สร้าง Line Loop และสร้าง Surface สำหรับตัวแปร cl_1 นั้นมีความสำคัญในการกำหนดขนาดของเอลิเมนต์ที่ขอบว่าจะแบ่งเอลิเมนต์หนึ่งที่ขอบให้ยาวกี่หน่วย จากข้อนี้ กำหนด cl_1=25 หมายถึงให้แบ่งช่วงรอบรูปส่วนละ 25 mm ถ้าต้องการให้ละเอียดก็กำหนดตัวเลขตามต้องการหรือถ้าต้องการดัดแปลงต้นแบบสามารถแก้ไขได้จาก geo file ได้โดยตรง

2.สร้างโหนดและเอลิเมนต์ด้วย GMSH เมื่อสร้างและกำหนดพื้นที่แล้วเสร็จสามารถสร้างโหนดและแบ่งเอลิเมนต์ลงบนพื้นที่โดยการใช้คำสั่ง Mesh->2D ก็จะได้โครงสร้างร่างแหตัวอย่างดังรูปที่ 5.21



รูปที่ 5.21 ชิ้นงานที่เกิดการแบ่งเอลิเมนต์

2.1.เมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์บนชิ้นงานสำเร็จแล้ว ต่อไปควรทำการตรวจสอบโหนดว่าสอดคล้องกับที่ต้องการหรือไม่โดยการกำหนดให้โปรแกรมแสดงหมายเลขโหนดจาก Tool->Options->Mesh->Visibility->Node labels หมายเลขโหนดแสดงดังรูปที่ 5.22



รูปที่ 5.22 ชิ้นงานที่แบ่งเอลิมเนต์และแสดงหมายเลขโหนด

3 <u>การแปลงไฟล์ geo file (GMSH meshing file) เป็น GMSH-inp file</u>

เมื่อสร้างโครงร่างแหแล้วเสร็จ ต่อไปคือการแปลง geo file เป็น inp file เพื่อใช้งานกับโปรแกรม Calculix หรือการประมวลผลด้วย CCX ดังนี้

-File->Save as->Show

-เลือก Mesh-Abaqus INP (*.inp)

-ไปที่ File name ทำการตั้งชื่อไฟล์ .inp พร้อมระบุไดเร็คทอรี่และเส้นทางของไฟล์

-กด OK เพื่อ save

-โปรแกรมแสดงกล่องข้อความ (Abaqus inp Option)

-กด OK

จบสิ้นกระบวนการแปลงเป็น inp file อย่างไรก็ตาม inp file ที่ได้ยังไม่สมบูรณ์ต้องทำการแปลงอีกครั้งด้วย Launcher-Calculix อีกครั้ง

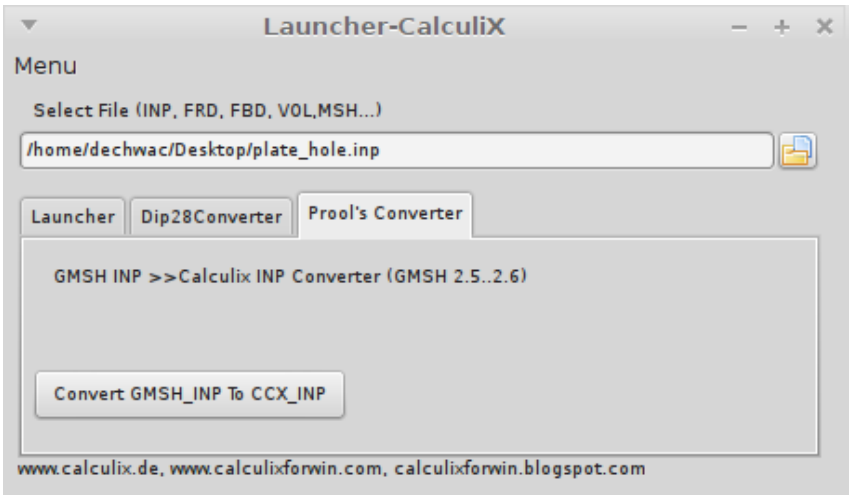
4. <u>การแปลง GMSH-inp file เป็น CCX-inp file ด้วย Launcher</u>

4.1. เปิด Launcher-Calculix ดังแสดงในรูปที่ 5.23

-ไปที่ Select File เลือก inp file

-เลือก แท็บ Pool's Converter

-กด Convert GMSH_INP TO CCX_INP เพื่อแปลง inp จาก GMSH เป็น inp สำหรับใช้งานด้วย CCX



รูปที่ 5.23 รูปแบบหน้าต่างของ Launcher เพื่อแปลง inp file

4.2. เมื่อสิ้นสุดกระบวนการจะได้ inp file เพิ่มขึ้นอีกไฟล์โดยยังอยู่ในไดเร็คทอรี่เดียวกันและมีชื่อไฟล์ส่วนขยายคือ _P _ out.inp

4.3. สิ้นสุดการแปลง inp file อย่างไรก็ตามไฟล์ที่แปลงมาได้จากข้อ 4.2 ยังไม่สมบูรณ์แบบ จำเป็นต้องมีการปรับแต่งเพิ่มเติมบางส่วนเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ตามเงื่อนไขของปัญหา

5. <u>ปรับแต่ง inp file ให้เข้ากับเงื่อนไขของปัญหา</u>

5.1 inp file จากข้อ 4.2 ที่แปลงมาได้แสดงรายละเอียดดังนี้

```
*Heading
/home/dechwac/Desktop/plate_hole.inp
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,7.500000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
4,1.000000000000e+02,2.500000000000e+01,0.000000000000e+00
5,1.000000000000e+02,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
.....................................................
.....................................................
.....................................................
30,8.322310638428e+01,6.106734466553e+01,0.000000000000e+00
31,1.534688568115e+01,8.465311431885e+01,0.000000000000e+00
32,6.404962158203e+01,5.556238174438e+01,0.000000000000e+00
33,8.683657073975e+01,3.177933502197e+01,0.000000000000e+00
34,7.148159790039e+01,2.789003562927e+01,0.000000000000e+00
*NSET,NSET=Line1
1
7
8
2
*NSET,NSET=Line2
2
```

220

```
9
4
*NSET,NSET=Line3
4
10
11
5
*NSET,NSET=Line4
5
12
13
14
6
*NSET,NSET=Line5
6
15
16
17
1
*Element, type=S3, ELSET=sur7
99, 18, 20, 21
120, 19, 12, 24
127, 17, 20, 25
..............
..............
171, 9, 34, 26
169, 9, 33, 34
167, 21, 26, 34
170, 23, 34, 33
```

5.2 จาก inp file ข้างต้น สังเกตได้ว่ายังใช้งานไม่ได้เพราะ

- มีเฉพาะ node set และ element set มาให้
-รูปแบบเอลิเมนต์ element type = S3 ยังไม่ถูกต้อง ควรเปลี่ยนเป็น CPS3
-ยังไม่มีเงื่อนไขแรงกระทำ และเงื่อนไขขอบเขต
-ยังไม่มีการกำหนด outputs

ดังนั้นมีความจำเป็นต้องปรับแต่ง inp file เพิ่มเติมเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขต่างๆ

5.3 เพิ่มเติมแก้ไข inp file ดังนี้

5.3.1 แก้ไขรูปแบบเอลิเมนต์

```
- *Element, type=S3, ELSET=sur7
```

เนื่องจากต้องการกำหนดให้เป็นเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมในระนาบ แก้ไขเป็น CPS3 และเปลี่ยนชื่อกลุ่มเอลิเมนต์ใหม่จาก sur7 เป็น plate ดังนี้

```
*Element, type=CPS3, ELSET=plate
```

5.3.2 กำหนดเงื่อนไขแรงและเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

จากโจทย์แรงดึงกระจายกระทำบนผิวขอบ BC ในต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์คือ NSET=LINE5 แต่แรงที่จะกำหนดบน NSET ได้ต้องเป็น CLOAD เท่านั้น ดังนั้นถ้าจะใช้ CLOAD ต้องแปลงแรงต่อพื้นที่ลงบนโหนดซึ่งอาจยุ่งยาก จึงแนะนำให้ใช้ DLOAD จะง่ายกว่า ในการใช้ DLOAD จำเป็นต้องทราบกลุ่มเอลิเมนต์ที่ผิวขอบ BC ซึ่งอยู่บน NSET=LINE5 ซึ่งสามารถใช้เครื่องมือคือ CGX-preprocessor mode เพื่อตรวจหาหมายเลขเอลิเมนต์ที่อยู่ตามขอบ BC ได้

สำหรับการเรียก CGX-preprocessor mode มาใช้งานทำได้โดยการเปิด Launcher ไปที่

Launcher->Select file-> เลือกแท็บ Launcher->กด RUN CGX Preprocessor Mode

เมื่อ CGX ทำงานจะปรากฏ terminal ขึ้นมาพร้อมกัน

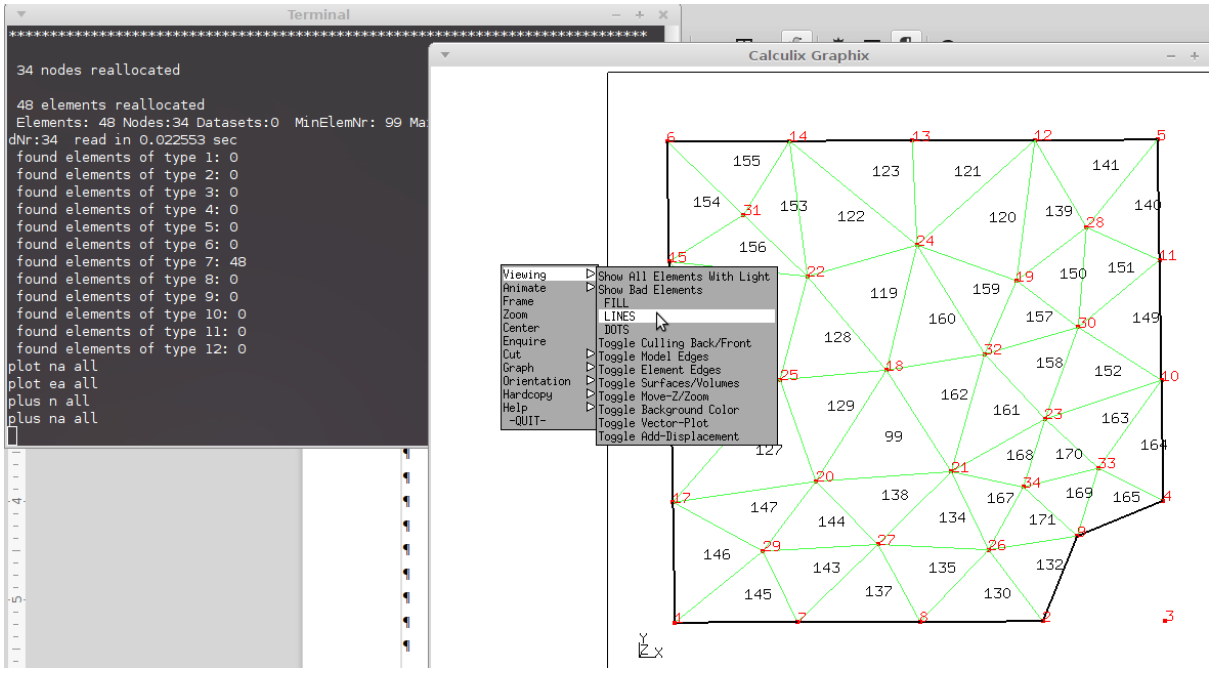
-ทำการป้อนคำสั่งใน terminal เช่น

plot na all , plus n all , plot ea all และ plus ea all

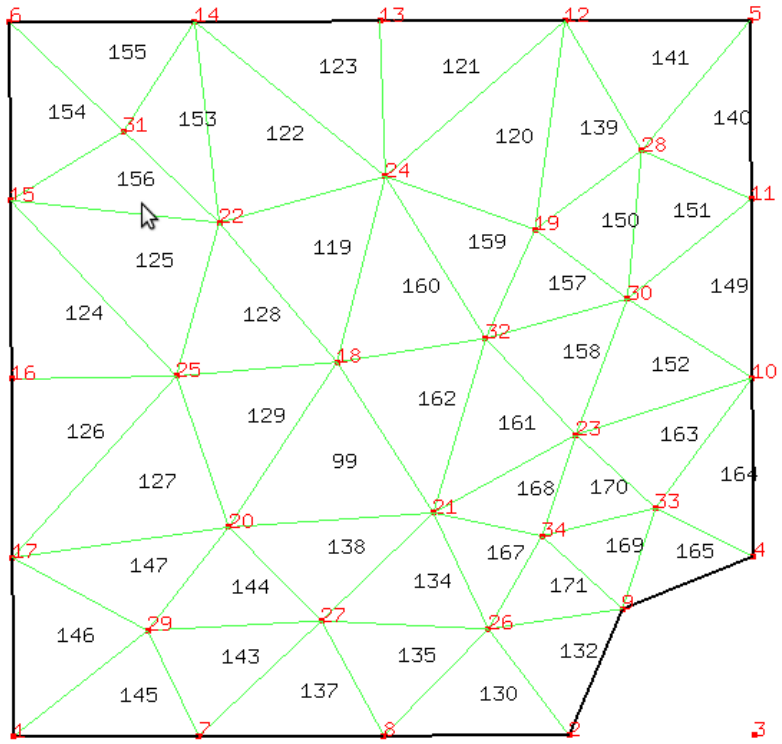
เพื่อแสดงหมายเลขโหนดและเอลิเมนต์ (รายละเอียดเพิ่มเติมสามารถอ่านได้จาก [5])

-ที่ CGX เข้าไปที่ Viewing->Lines

จะปรากฏต้นแบบที่มีหมายเลขเอลิเมนต์และโหนดบนภาพคอมพิวเตอร์ดังรูปที่ 5.24



รูปที่ 5.24 การใช้คำสั่งใน terminal และ CGX เพื่อให้แสดงหมายเลขโหนด



รูปที่ 5.25 หมายเลขโหนดและหมายเลขเอลิเมนต์ที่แสดงโดย CGX

รูปที่ 5.25 แสดงหมายเลขโหนดและหมายเลขเอลิเมนต์ จากรูปนี้ทำให้ทราบว่า เอลิเมนต์หมายเลข 146,126,124,154 อยู่ติดขอบ BC หรือ NSET=LINE5 ดังนั้น สามารถกำหนด *ELSET ของเอลิเมนต์ที่ขอบนี้เพิ่มเติมใน inp file ได้ดังนี้

```
*ELSET,ELSET=load_edge
146,126,124,154
```

เมื่อต้องการกำหนด *DLOAD ลงไปที่ ELSET ควรระวังการกำหนดหมายเลขผิว FACE 1-3 ให้สอดคล้องกันทุกเอลิเมนต์ ซึ่งมักผิดพลาดได้บ่อยครั้ง วิธีการคือหมายเลขเอลิเมนต์หรือกลุ่มเอลิเมนต์ที่กำหนด *DLOAD ควรมีการจัดลำดับหมายเลขโหนดในทิศทวนเข็มนาฬิกาและมีหมายเลขผิวตามด้านของเอลิเมนต์ที่ถูกต้อง (P1-P3)

จากตัวอย่างนี้เมื่อลองตรวจสอบเอลิเมนต์หมายเลข 146, 126, 124 และ 154 จาก inp file พบว่า

- เอลิเมนต์หมายเลข 146 เกิดจากโหนด 1, 29, 17
- เอลิเมนต์หมายเลข 126 เกิดจากโหนด 16, 17, 25
- เอลิเมนต์หมายเลข 124 เกิดจากโหนด 16, 25, 15
- เอลิเมนต์หมายเลข 154 เกิดจากโหนด 6, 15, 31

จากข้อมูลดังกล่าวถ้าต้องการให้ขอบเอลิเมนต์มี DLOAD กระทำบน FACE 1 เหมือนกันหมดทุกเอิเมนต์ สามารถทำได้โดย การปรับการเรียงโหนดของบางเอลิเมนต์ใหม่ใน inp file ดังแสดงในตารางที่ 5.5

ตารางที่5.5 การปรับเรียงหมายเลขโหนดให้สอดคล้องกับหมายเลขของผิวเอลิเมนต์

เอลิเมนต์	เรียงแบบเดิม	เรียงใหม่สำหรับ FACE1
146	1, 29, 17	17, 1, 29
126	16, 17, 25	-
124	16, 25, 15	15, 16, 25
154	6, 15, 31	-

เมื่อทำการดัดแปลงการเรียงลำดับโหนดของเอลิเมนต์แล้วตามตารางที่ 5.4 ดังนั้นคำสั่ง *DLOAD ที่เพิ่มเติมใน inp file คือ

```
*DLOAD
load_edge,P1,-100
```

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตจากรูปสมมาตร กำหนดให้ BD หรือ NSET=LINE1 ไม่มีการเคลื่อนตัวในทิศ y และกำหนดให้ AE หรือ NSET=LINE3 ไม่มีการเคลื่อนตัวในทิศทาง x ดังนั้นคำสั่ง *BOUNDARY ที่ถูกต้องคือ

```
*BOUNDARY
LINE3,1,1,0.0
LINE1,2,2,0.0
```

สำหรับการกำหนดสมบัติวัสดุและหน้าตัด สามารถเพิ่มได้ดังนี้

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
210E+03,0.3
*SOLID SECTION,ELSET=plate,MATERIAL=STEEL
5.0
```

ส่วนท้ายของไฟล์กำหนดผลลัพธ์ที่ให้รายงานดังนี้

```
*EL PRINT,ELSET=plate
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=Nall
U,RF
*EL FILE,ELSET=plate
S,E
```

```
*END STEP
```

ดังนั้น inp file ในแบบที่ดัดแปลงสมบูรณ์คือ

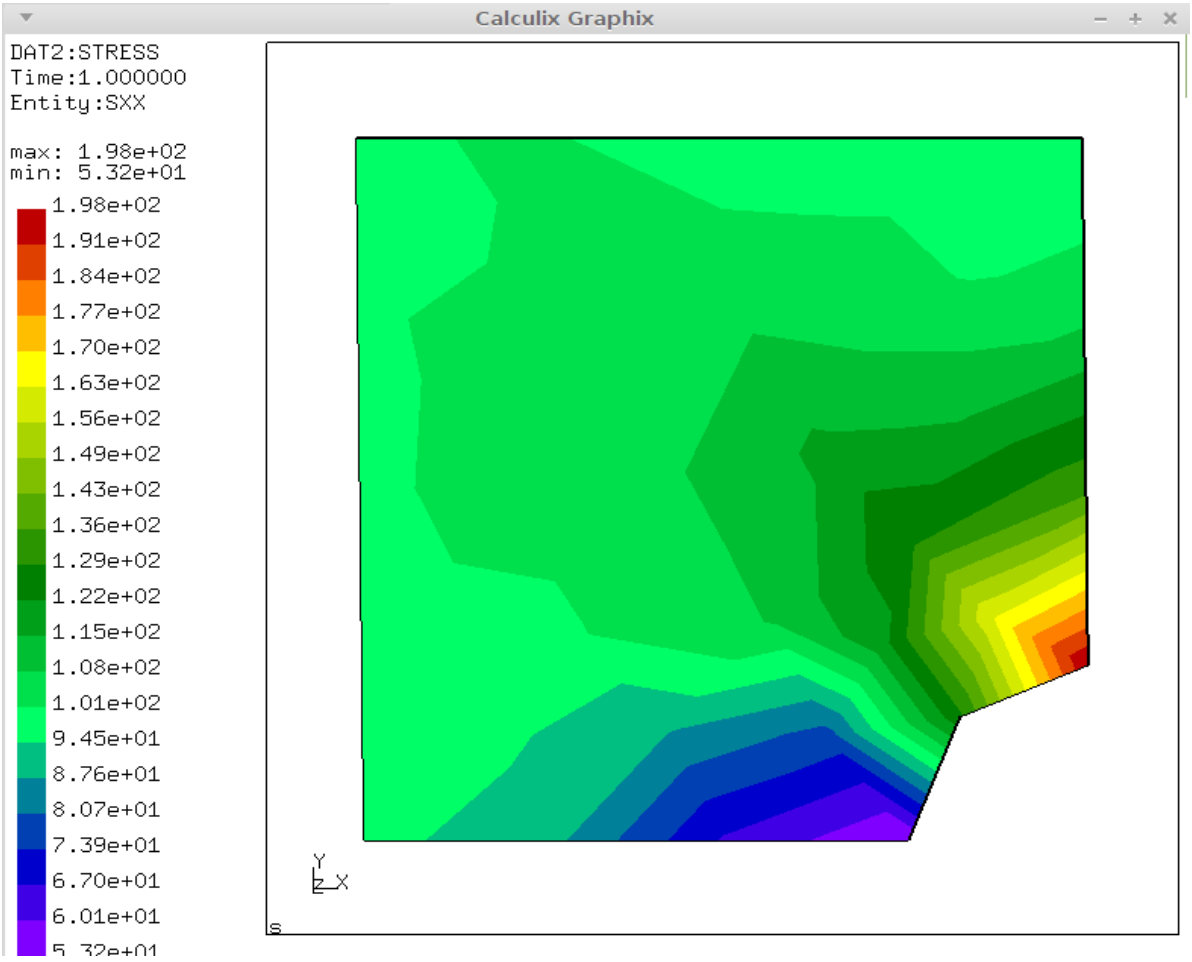
```
*Heading
 /home/dechwac/Desktop/plate_hole.inp
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,7.500000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
4,1.000000000000e+02,2.500000000000e+01,0.000000000000e+00
5,1.000000000000e+02,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
6,0.000000000000e+00,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
7,2.500000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
8,5.000000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
9,8.232232666016e+01,1.767766952515e+01,0.000000000000e+00
10,1.000000000000e+02,5.000000000000e+01,0.000000000000e+00
11,1.000000000000e+02,7.500000000000e+01,0.000000000000e+00
12,7.500000000000e+01,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
13,5.000000000000e+01,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
14,2.500000000000e+01,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
15,0.000000000000e+00,7.500000000000e+01,0.000000000000e+00
16,0.000000000000e+00,5.000000000000e+01,0.000000000000e+00
17,0.000000000000e+00,2.500000000000e+01,0.000000000000e+00
18,4.396591567993e+01,5.227674102783e+01,0.000000000000e+00
19,7.079058837891e+01,7.079058837891e+01,0.000000000000e+00
20,2.920940971375e+01,2.920940971375e+01,0.000000000000e+00
21,5.684597778320e+01,3.115439414978e+01,0.000000000000e+00
22,2.816697883606e+01,7.183302307129e+01,0.000000000000e+00
23,7.616311645508e+01,4.204153823853e+01,0.000000000000e+00
24,5.062786483765e+01,7.826678466797e+01,0.000000000000e+00
25,2.226297950745e+01,5.036407852173e+01,0.000000000000e+00
26,6.419122314453e+01,1.489332389832e+01,0.000000000000e+00
27,4.165922164917e+01,1.606706428528e+01,0.000000000000e+00
28,8.523994445801e+01,8.182895660400e+01,0.000000000000e+00
29,1.817555046082e+01,1.476326179504e+01,0.000000000000e+00
30,8.322310638428e+01,6.106734466553e+01,0.000000000000e+00
31,1.534688568115e+01,8.465311431885e+01,0.000000000000e+00
32,6.404962158203e+01,5.556238174438e+01,0.000000000000e+00
33,8.683657073975e+01,3.177933502197e+01,0.000000000000e+00
34,7.148159790039e+01,2.789003562927e+01,0.000000000000e+00
*NSET,NSET=Line1
1
7
8
2
*NSET,NSET=Line2
2
9
4
*NSET,NSET=Line3
4
10
11
5
*NSET,NSET=Line4
5
12
13
14
6
*NSET,NSET=Line5
6
15
16
17
1
*Element, type=CPS3, ELSET=plate
99, 18, 20, 21
120, 19, 12, 24
```

```
127, 17, 20, 25
125, 15, 25, 22
122, 14, 22, 24
121, 12, 13, 24
126, 16, 17, 25
124, 15, 16, 25
123, 14, 24, 13
162, 21, 32, 18
129, 18, 25, 20
161, 21, 23, 32
119, 18, 24, 22
128, 18, 22, 25
139, 19, 28, 12
147, 17, 29, 20
168, 21, 34, 23
160, 18, 32, 24
138, 21, 20, 27
156, 15, 22, 31
153, 14, 31, 22
130, 2, 26, 8
164, 10, 33, 4
159, 19, 24, 32
134, 21, 27, 26
135, 8, 26, 27
163, 10, 23, 33
143, 7, 27, 29
151, 11, 28, 30
137, 7, 8, 27
149, 10, 11, 30
144, 20, 29, 27
140, 11, 5, 28
146, 17, 1, 29
141, 12, 28, 5
145, 7, 29, 1
150, 19, 30, 28
152, 10, 30, 23
155, 14, 6, 31
154, 6, 15, 31
132, 2, 9, 26
165, 4, 33, 9
158, 23, 30, 32
157, 19, 32, 30
171, 9, 34, 26
169, 9, 33, 34
167, 21, 26, 34
170, 23, 34, 33
*ELSET,ELSET=load_edge
146,126,124,154
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
210E+03,0.3
*SOLID SECTION,ELSET=plate,MATERIAL=STEEL
5.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
LINE3,1,1,0.0
LINE1,2,2,0.0
*DLOAD
load_edge,P1,-100
*EL PRINT,ELSET=plate
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=Nall
U,RF
*EL FILE,ELSET=plate
S,E
*END STEP
```

สรุป inp file ที่ได้จาก GMSH และ Calculix Launcher Converter จะได้เฉพาะ nodes และ elements เท่านั้น จำเป็นต้องเพิ่มเติมเงื่อนไขของแรงกระทำ เงื่อนไขขอบเขตคุณสมบัติวัสดุและหน้าตัด รวมถึงการกำหนดผลลัพธ์

6. <u>การศึกษาผลลัพธ์ ความเค้นสูงสุดของแผ่นรูเจาะ</u>

inp file ที่ได้ในหัวข้อ 5.3 เมื่อประมวลผลด้วย Calculix CCX จะได้ output files คือ dat file และ frd file ในส่วนของ frd file สามารถนำมาแสดงผลด้วย Calculix CGX เพื่อศึกษาค่าความเค้นในแนวแกน x จากรูปที่ 5.26 พบว่าความเค้นดึงตั้งฉากสูงสุดเกิดขึ้นตรงบริเวณรูเจาะ



รูปที่ 5.26 ค่าความเค้นในแนวแกน x (Sxx) เกิดจากการใช้เอลิเมนต์แบบ CPS3 แสดงด้วย CGX

ความเค้นดึงสูงสุดที่เกิดขึ้นนี้เกิดขึ้นในแนวแกน x มีค่าเท่ากับ 198 MPa โดยเกิดขึ้นที่บริเวณรูเจาะคือเอลิเมนต์หมายเลข 164 และ 165 เพื่อความแน่ใจสามารถตรวจสอบค่าได้จาก dat file อีกครั้งดังนี้

```
stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set PLATE and time  0.1000000E+01

164   1  1.612052E+02  1.982400E+01 -6.708277E+00 -8.969279E+00  3.469520E-01 -1.431849E+00
164   2  1.612052E+02  1.982400E+01 -6.708277E+00 -8.969279E+00 -3.469520E-01  1.431849E+00
165   1  2.338594E+02  1.836850E+01  1.105540E+01  3.597433E+01  1.417909E+00  6.476262E-01
165   2  2.338594E+02  1.836850E+01  1.105540E+01  3.597433E+01 -1.417909E+00 -6.476262E-01
```

จากข้อมูลใน dat file ได้รายงานค่าความเค้นในแนวต่างๆ ที่จุดอินทิเกรชั่นพบว่าค่าความเค้นในแนวแกน x คือความเค้นสุงสุดมีค่าเท่ากับ 233.9 MPa (ค่าที่ขีดเส้นใต้) ซึ่งต่างจากค่าที่เห็นจากการพล็อตของ frd file ด้วย CGX โดยปกติค่าจากการพล็อตจะกำหนดออกมาเป็นช่วงของสีบนบริเวณพื้นที่จึงไม่สามารถระบุออกมาเป็นจุดได้ จึงมีประเด็นว่าแล้วค่าใดมีความถูกต้องกว่ากัน

สิ่งหนึ่งที่สามารถนำมาเทียบเพื่อตรวจสอบคำตอบคือค่าความเค้นของรูเจาะที่ได้ในทางทฤษฎี [6] ค่าความเค้นของรูเจาะคือ $\sigma_{max}=K\cdot\sigma_{nom}$ เมื่อ K คือค่าตัวประกอบความเข้มความเค้นที่รูเจาะซึ่งมีค่ามีค่าเท่ากับ 2.4 และ σ_{nom} คือความเค้นตั้งฉากเฉลี่ยในแกน x ที่คำนวณบนหน้าตัด AE มีค่าเท่ากับ 133.33 MPa ดังนั้น

$$\sigma_{max}=K\cdot\sigma_{nom} = (2.4)\cdot(133.33)\ \text{MPa} = 320\ \text{MPa}$$

ซึ่งเห็นได้ว่าค่าที่ได้จาก dat file มีค่าใกล้เคียงกว่า อย่างไรก็ตามค่าที่ได้การคำนวณยังมีความแตกต่างจากทฤษฎีอยู่ค่อนข้างมาก ดังนั้นในขั้นตอนต่อไปคือจะทำอย่างไรให้ผลของไฟไนต์เอลิเมนต์มีความใกล้เคียงกับทฤษฎี

7.การเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์จากรูปแบบเอลิเมนต์ทรงสามเหลี่ยมในระนาบ

จากหัวข้อที่ 6 พบว่าผลลัพธ์ความเค้นตั้งฉากที่ได้ยังไม่แม่นยำนัก ในหัวข้อนี้จึงนำเสนอวิธีการหาผลลัพธ์ที่แม่นยำยิ่งขึ้นดังนี้

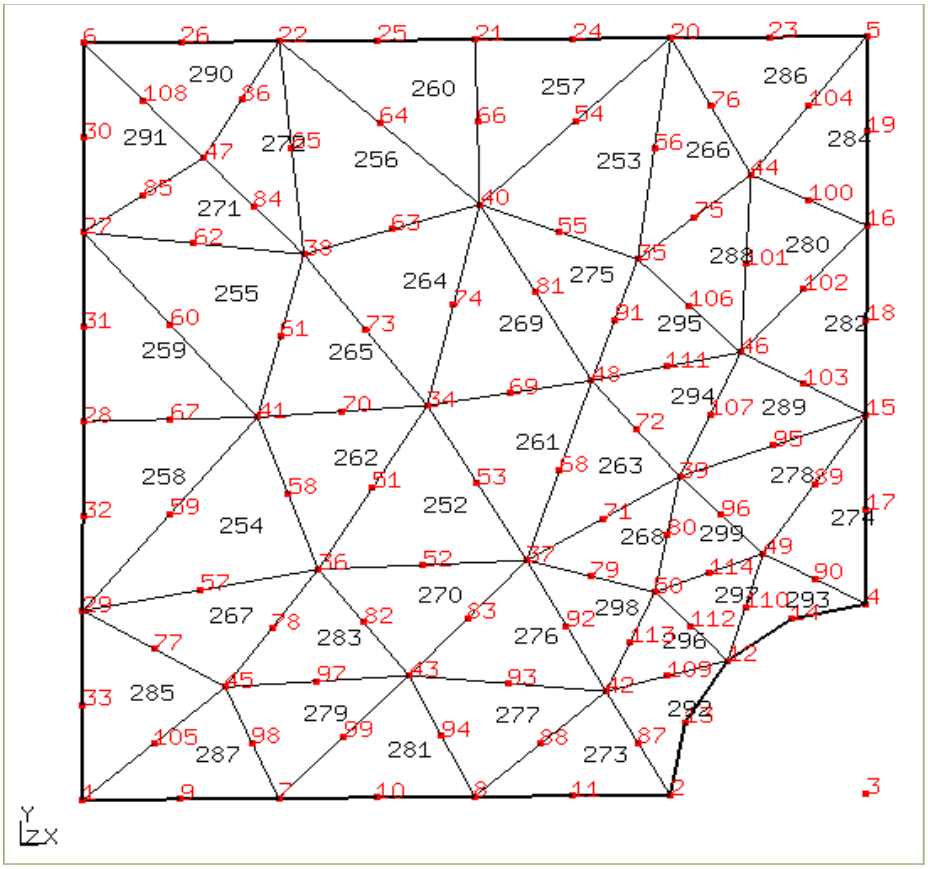
- ทดลองใช้เอลิเมนต์อันดับที่สอง CPS6 แทน เอลิเมนต์อันดับที่หนึ่ง CPS3
- เพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ CPS3 ขึ้นอีกเท่าตัวหรือเป็นการเพิ่มความละเอียดของเอลิเมนต์

7.1 ทดลองใช้ CPS6 แทน CPS3 โดยยังคงจำนวนเอลิเมนต์ไว้เท่าเดิม

วิธีการนี้คือทำการดัดแปลงเอลิเมนต์ทรงสามเหลี่ยมจากอันดับที่หนึ่งเป็นอันดับที่สองได้โดยการใช้ GMSH ช่วย ซึ่งดำเนินการได้ดังนี้

เรียก geo file ->File->Modules->Mesh->2D->set order 2

จากนั้นดำเนินการเหมือนกับข้อ 3 ถึง 6 คือแปลงไฟล์เป็น inp ด้วย GMSH และแปลงอีกครั้งด้วย Launcher Conveter จากนั้นทำการดัดแปลง inp file อีกครั้งโดยเฉพาะ elset และการกำหนดโหนดเพื่อเรียงลำดับให้ถูกต้องตามหมายเลขผิวขอบของแต่ละเอลิเมนต์ รูปที่ 5.27 แสดงเอลิเมนต์ CPS6 และการเชื่อมต่อโหนด พบว่าเอลิเมนต์หมายเลข 258, 259, 294, 285 คือเอลิเมนต์ที่อยู่ขอบผิวชิ้นงานและพบว่าเอลิเมนต์ 259 ที่มีการจัดเรียงหมายเลขไม่สอดคล้องกับเอลิเมนต์อื่น จึงทำการดัดแปลงเฉพาะเอลิเมนต์นี้



รูปที่ 5.27 หมายเลขโหนดและหมายเลขเอลิเมนต์เมื่อใช้เอลิเมนต์แบบ CPS6

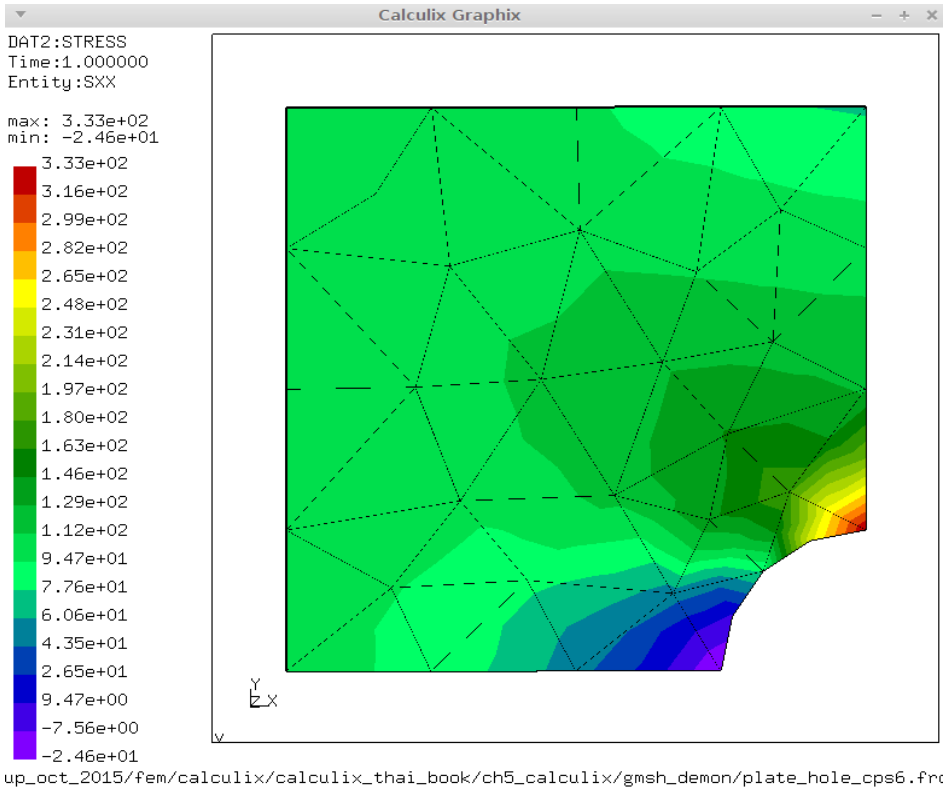
inp file (inp file) ที่ดัดแปลงและเพิ่มเติมสำหรับ CPS6 แสดงดังนี้

```
*Heading
  /home/dechwac/Desktop/backup_oct_2015/fem/calculix/calculix_thai_book/ch5_calculix
/gmsh_demon/plate_hole_cps6.inp
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,7.500000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
4,1.000000000000e+02,2.500000000000e+01,0.000000000000e+00
5,1.000000000000e+02,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
…..........................................................
…..........................................................

111,7.445016479492e+01,5.659795379639e+01,0.000000000000e+00
112,7.766245269775e+01,2.224758911133e+01,0.000000000000e+00
113,6.990326690674e+01,2.028388023376e+01,0.000000000000e+00
114,7.991957092285e+01,2.929842185974e+01,0.000000000000e+00
*NSET,NSET=Line1
1
9
7
10
```

```
8
11
2
*NSET,NSET=Line2
2
13
12
14
4
*NSET,NSET=Line3
4
17
15
18
16
19
5
*NSET,NSET=Line4
5
23
20
24
21
25
22
26
6
*NSET,NSET=Line5
6
30
27
31
28
32
29
33
1
*Element, type=CPS6, ELSET=plate
252, 34, 36, 37, 51, 52, 53
253, 20, 40, 35, 54, 55, 56
254, 29, 36, 41, 57, 58, 59
255, 27, 41, 38, 60, 61, 62
256, 38, 40, 22, 63, 64, 65
257, 20, 21, 40, 24, 66, 54
258, 28, 29, 41, 32, 59, 67
259, 27, 28, 41, 31, 67, 60
260, 22, 40, 21, 64, 66, 25
261, 34, 37, 48, 53, 68, 69
262, 34, 41, 36, 70, 58, 51
263, 37, 39, 48, 71, 72, 68
264, 38, 34, 40, 73, 74, 63
265, 38, 41, 34, 61, 70, 73
266, 20, 35, 44, 56, 75, 76
267, 29, 45, 36, 77, 78, 57
268, 37, 50, 39, 79, 80, 71
269, 34, 48, 40, 69, 81, 74
270, 36, 43, 37, 82, 83, 52
271, 27, 38, 47, 62, 84, 85
272, 38, 22, 47, 65, 86, 84
273, 8, 2, 42, 11, 87, 88
274, 15, 49, 4, 89, 90, 17
275, 35, 40, 48, 55, 81, 91
276, 42, 37, 43, 92, 83, 93
277, 8, 42, 43, 88, 93, 94
278, 15, 39, 49, 95, 96, 89
```

```
279, 43, 45, 7, 97, 98, 99
280, 16, 44, 46, 100, 101, 102
281, 8, 43, 7, 94, 99, 10
282, 16, 46, 15, 102, 103, 18
283, 43, 36, 45, 82, 78, 97
284, 16, 5, 44, 19, 104, 100
285, 29, 1, 45, 33, 105, 77
286, 20, 44, 5, 76, 104, 23
287, 1, 7, 45, 9, 98, 105
288, 44, 35, 46, 75, 106, 101
289, 15, 46, 39, 103, 107, 95
290, 6, 47, 22, 108, 86, 26
291, 6, 27, 47, 30, 85, 108
292, 2, 12, 42, 13, 109, 87
293, 4, 49, 12, 90, 110, 14
294, 46, 48, 39, 111, 72, 107
295, 46, 35, 48, 106, 91, 111
296, 42, 12, 50, 109, 112, 113
297, 49, 50, 12, 114, 112, 110
298, 42, 50, 37, 113, 79, 92
299, 49, 39, 50, 96, 80, 114
*ELSET,ELSET=load_edge
258,259,291,285
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
210E+03,0.3
*SOLID SECTION,ELSET=plate,MATERIAL=STEEL
5.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
LINE3,1,1,0.0
LINE1,2,2,0.0
*DLOAD
load_edge,P1,-100
*EL PRINT,ELSET=plate
S,E
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE,NSET=Nall
U,RF
*EL FILE,ELSET=plate
S,E
*END STEP
```

inp file ที่ได้เมื่อประมวลผลด้วย Calculix CCX จะได้ output files คือ dat file และ frd file ในส่วนของ frd file สามารถนำมาแสดงผลด้วย Calculix CGX เพื่อศึกษาค่าความเค้นในแนวแกน x จากรูปที่ 5.28 พบว่าความเค้นตั้งฉากสูงสุดเกิดขึ้นตรงบริเวณรูเจาะ เหมือนกับการใช้เอลิเมนต์ CPS3 จากรูปที่ 5.26



รูปที่ 5.28 ค่าความเค้นในแนวแกน x (Sxx) ที่เกิดจากการใช้เอลิเมนต์แบบ CPS6

จากผลของ frd file ซึ่งแสดง CGX)ดังรูปที่ 5.28 พบว่าความเค้นตั้งฉากสูงสุดเกิดในแนวแกน x ที่บริเวณเอลิเมนต์หมายเลข 293 และ 274 แต่จากที่ตรวจสอบด้วย dat file พบว่าค่าความเค้นตั้งฉากสูงสุดในแกน x เกิดขึ้นที่เอลิเมนต์ 293 ดังนี้

```
 stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set PLATE and time  0.1000000E+01
293    1  2.995773E+02  2.713138E+01  4.250897E+00  5.305946E+01  2.116305E+00 -2.074840E+00
293    2  2.010835E+02  2.287784E+01 -1.154913E+00  2.285631E+01  2.132216E+00 -1.824489E+00
293    3  1.633106E+02  3.468144E+01 -1.427150E+00  7.176459E+01  2.985375E+00  1.577985E+00
293    4  2.995773E+02  2.713138E+01  4.250897E+00  5.305946E+01  2.187737E-13 -2.212801E-13
293    5  2.010835E+02  2.287784E+01 -1.154913E+00  2.285631E+01 -1.903238E-13 -2.314967E-14
293    6  1.633106E+02  3.468144E+01 -1.427150E+00  7.176459E+01 -6.572101E-14  3.895534E-14
293    7  2.995773E+02  2.713138E+01  4.250897E+00  5.305946E+01 -2.116305E+00  2.074840E+00
293    8  2.010835E+02  2.287784E+01 -1.154913E+00  2.285631E+01 -2.132216E+00  1.824489E+00
293    9  1.633106E+02  3.468144E+01 -1.427150E+00  7.176459E+01 -2.985375E+00 -1.577985E+00
```

จาก dat file รายงานผลคำนวณค่าความเค้นที่จุดอินทิเกรชั่นพบว่าค่าความเค้นตั้งฉากสูงสุดในแนวแกน x คือ 299.58 MPa (ค่าที่ขีดเส้นใต้) หรือประมาณ 300 MPa และจาก frd file แสดงค่าสีความเค้นสูงสุดเท่ากับ 333 MPa (ซึ่งเกิดจากการทำนายหรือประมาณการเท่านั้น) ค่าที่ได้จาก dat file เป็นค่าที่ได้จากการคำนวณ

โดยตรงและเกิดขึ้นที่จุดระบุตามหมายเลขอินทิเกรชั่น จึงเป็นตัวเลขที่น่าเชื่อถือมากกว่า

7.2 ทดลองเพิ่มจำนวน CPS3

วิธีการนี้เราสามารถทำการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ทรงสามเหลี่ยมอันดับที่หนึ่งโดยการใช้ GMSH ดังนี้

File->Modules->Mesh->2D->Refine by splitting

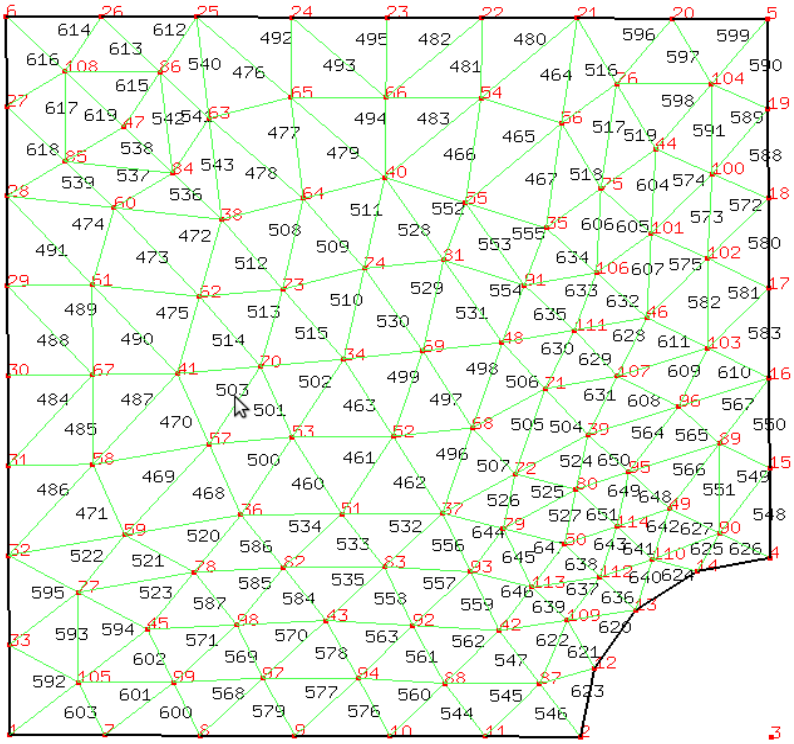
จากนั้นดำเนินการเหมือนกับข้อ 2 ถึง 5 คือแปลงไฟล์เป็น inp ด้วย GMSH และแปลงอีกครั้งด้วย Launcher Conveter จากนั้นทำการดัดแปลง inp file อีกครั้งโดยเฉพาะ elset และการกำหนดโหนดเพื่อเรียงลำดับให้ถูกต้องตามหมายเลขผิวขอบของแต่ละเอลิเมนต์ รูปที่ 5.29 แสดงเอลิเมนต์ CPS3 และการเชื่อมต่อโหนด พบว่าเอลิเมนต์หมายเลข 616, 618, 491, 488, 484, 486, 595 และ 592 คือเอลิเมนต์ที่อยู่ขอบผิวชิ้นงานและพบว่าเอลิเมนต์ 491, 488, 595 และ 592 ที่มีการจัดเรียงหมายเลขไม่สอดคล้องกับผิวขอบหมายเลข P1 จึงทำการดัดแปลงเฉพาะกลุ่มเอลิเมนต์นี้

จากผลของ frd file ซึ่งแสดงทาง Calculix Graphic (CGX) ดังรูปที่ 5.30 พบว่าความเค้นตั้งฉากสูงสุดเกิดในแนวแกน x ที่บริเวณเอลิเมนต์หมายเลข 626, 625 และ 627 แต่จากที่ตรวจสอบด้วย dat file พบว่าค่าความเค้นตั้งฉากสูงสุดในแกน x เกิดขึ้นที่เอลิเมนต์ 626 ดังนี้

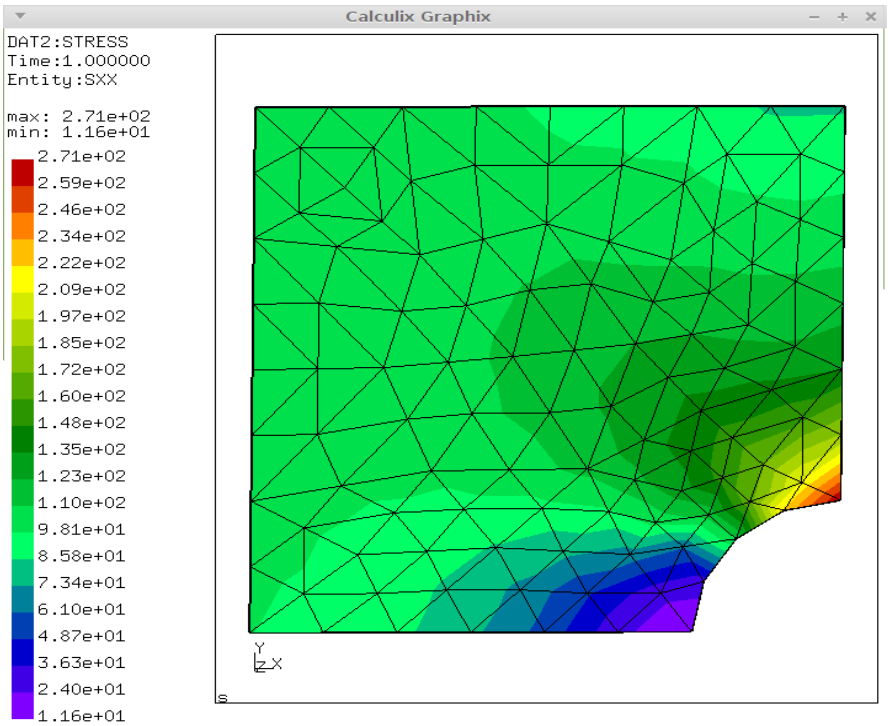
```
 stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set PLATE and time  0.1000000E+01
626    1  3.101929E+02  2.962496E+01  1.073388E+01  5.045119E+01  2.199356E+00 -2.190768E+00
626    2  3.101929E+02  2.962496E+01  1.073388E+01  5.045119E+01 -2.199356E+00  2.190768E+00
```

ค่าความเค้นที่จุดอินทิเกรชั่นจาก dat file พบว่าค่าความเค้นตั้งฉากสูงสุดในแนวแกน x คือ 310 MPa (ค่าที่ขีดเส้นใต้) เมื่อศึกษาความเค้นสูงสุดจาก frd file แสดงค่าสีเท่ากับ 271 MPa

จากการทดลองเปลี่ยนรูปแบบเอลิเมนต์จาก CPS3 เป็น CPS6 โดยให้จำนวนเอลิเมนต์เท่ากันพบว่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของผลลัพธ์เมื่อเทียบกับการคำนวณโดยตรงลดลงจาก 27.2% เป็น 6.25% ซึ่งเห็นว่าการเปลี่ยนรูปแบบจากอันดับที่หนึ่งเป็นอันดับที่สองที่จำนวนเอลิเมนต์เท่ากันมีผลต่อผลการคำนวณที่แม่นยำมากขึ้น การทดลองเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ของ CPS3 ให้มากขึ้น 3 เท่าพบว่าผลลัพธ์มีความแม่นตรงมากยิ่งขึ้นอย่างเห็นได้ชัด สรุปได้ว่าความละเอียดของโครงร่างแหเมื่อจำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่มากขึ้นนั้นมีผลต่อความแม่นตรงของผลการคำนวณดังแสดงผลความแม่นยำที่เพิ่มขึ้นในตารางที่ 5.6



รูปที่ 5.29 หมายเลขโหนดและเอลิเมนต์เมื่อใช้เอลิเมนต์แบบ CPS3 มากขึ้น

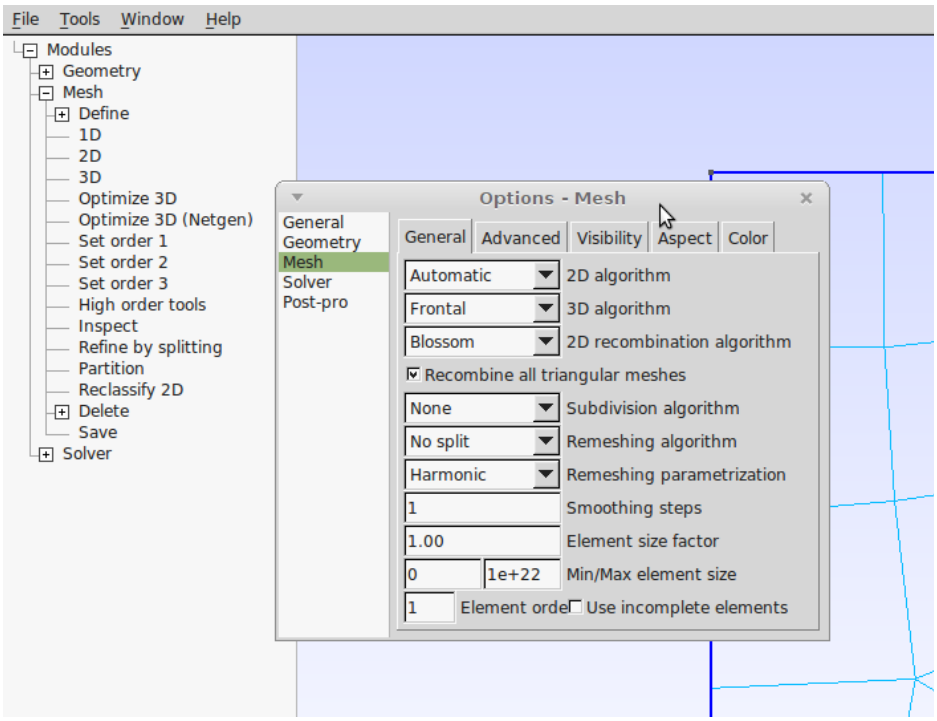


รูปที่ 5.30 ค่าความเค้นในแนวแกน x (Sxx) ที่เกิดจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์แบบ CPS3 มากขึ้น

ตารางที5.6 เปรียบเทียบความแตกต่างของผลลัพธ์เมื่อใช้จำนวนและเอลิเมนต์แบบต่างๆ

รูปแบบเอลิเมนต์	จำนวนเอลิเมนต์	จำนวนโหนด	ค่าความเค้นสูงสุดที่รูเจาะ (MPa)	% ความแตกต่างจากผลเฉลยแม่นตรง (exacted solution)
CPS3	48	34	233	27.2%
CPS3	192	114	310	3.1%
CPS6	48	114	300	6.3%

8. การทดลองหาผลลัพธ์จากรูปแบบเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมในระนาบ



รูปที่ 5.31 หน้าต่างของ GMSH เพื่อใช้กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์

ในการดัดแปลงต้นแบบเพื่อใช้เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมแบบ CPS4 และ CPS8 ด้วย GMSH สามารถทำได้โดยการปรับค่าใน option-mesh เป็นแบบ Recombine all triangular meshes ดังแสดงลักษณะการใช้งานดังรูปที่ 5.31 ดังนี้

-เปิด geo file จากนั้นไปที่ Tools->Option->Mesh->General->Recombine all triangular meshes

-ทำการ Meshing ดังนี้

File->Modules->Mesh->2D

-ปรับจากอันดับที่หนึ่ง เป็นอันดับที่สอง สามารถดำเนินการผ่านเมนู

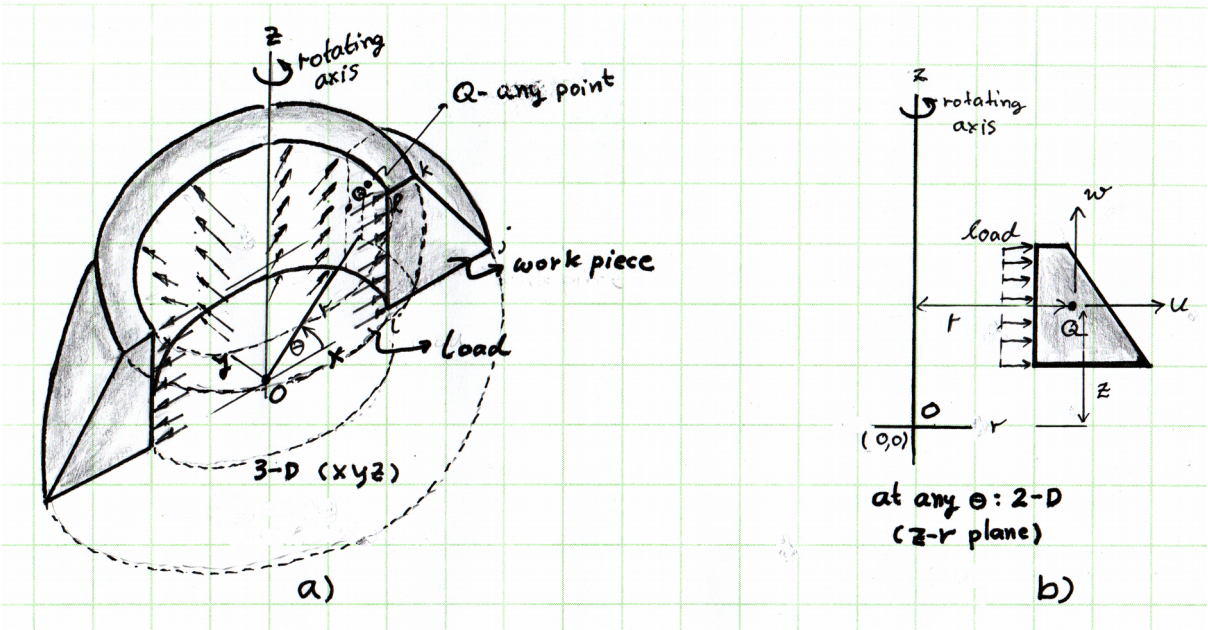
File->Modules->Mesh->2D->set order 2

-แปลง inp file ต้นแบบและการดัดแปลงมีหลักการต่างๆ เหมือนกับที่ได้กล่าวมาแล้วกับการใช้เอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมดังตัวอย่างที่ 5.5

5.6 เอลิเมนต์สมมาตรรอบแกนหมุน (axisymmetric 2-D element)

5.6.1 หลักการทั่วไปของปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน

จากรูปที่ 5.32a) คือภาพตัดครึ่งหนึ่งของชิ้นงานรับความดันภายในที่มีความหนาแปรตามแกน z สมมติให้ระนาบ ijkl คือผิวเนื้อชิ้นงานที่ถูกตัดบนระนาบ xz และที่ขอบ il ของระนาบนี้มีแรงดันกระทำ ถ้าหมุนระนาบ ijkl ไปพร้อมกับแรงกระทำ 360 องศารอบแกน z จะได้ชิ้นงานที่มีความดันกระทำภายในอย่างสมบูรณ์ สมมติจุด Q คือจุดที่ตำแหน่งใดๆ ในเนื้อชิ้นงานซึ่งเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 5.32b) อยู่ที่ตำแหน่ง (r,θ,z) ใดๆ บนระบบพิกัดเชิงขั้ว



รูปที่ 5.32 a) ชิ้นงานสมมาตรรอบแกนหมุน b) แบบสองมิติจำลองชิ้นงานสมมาตรรอบแกนหมุน

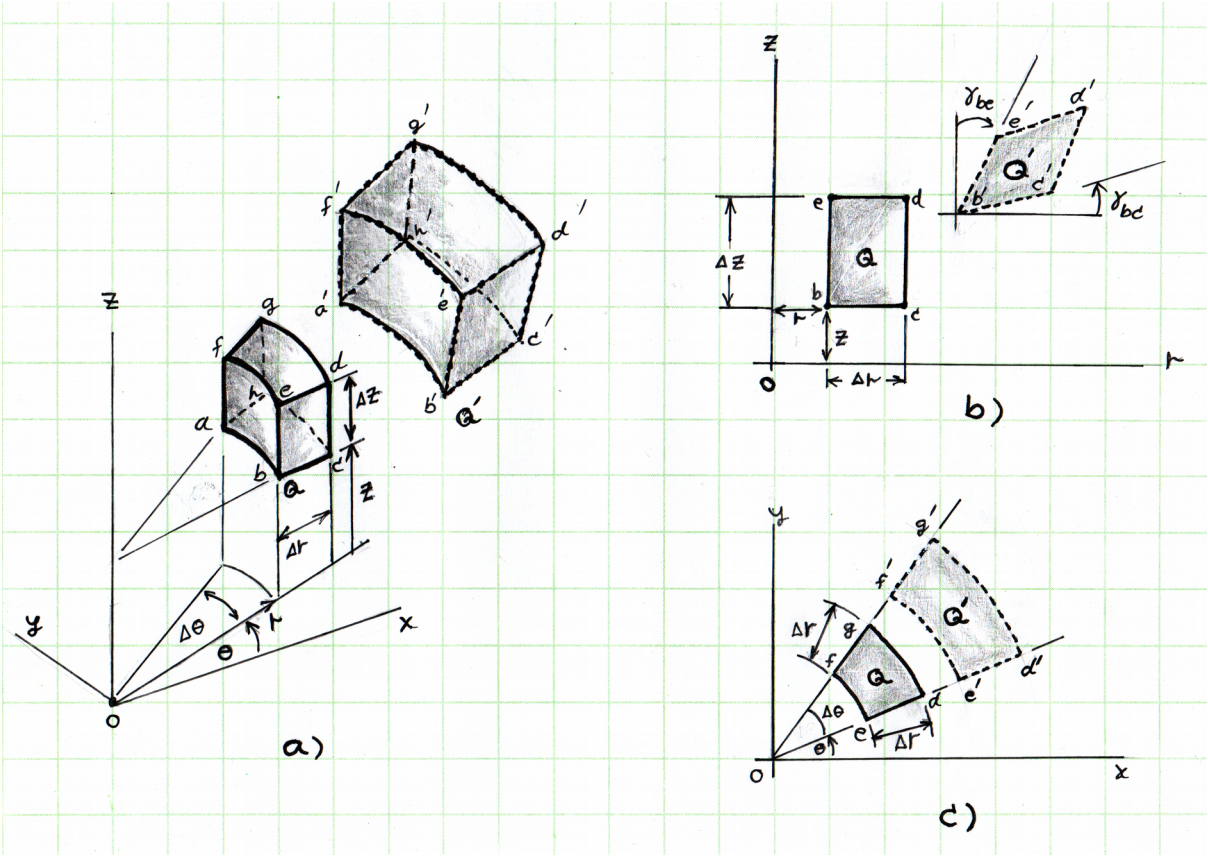
เมื่อพิจารณาจุด Q บนระนาบ $r-z$ มีการเคลื่อนตัวของจุดดังนี้คือ

-การเคลื่อนตัวในแนว r เป็นไปตามฟังก์ชัน $u(r,z)$ ซึ่งขึ้นกับตัวแปร r และ z

-การเคลื่อนที่ในแนว z เป็นไปตามฟังก์ชัน $w(r,z)$ ซึ่งขึ้นกับตัวแปร r และ z

การเคลื่อนที่ในแนว θ ซึ่งเป็นแนวตั้งฉากกับระนาบ $r-z$ นั้นเป็นศูนย์

สมมติจุด Q เป็นรูปทรงเล็กๆ abcdefgh ตามแนวระบบพิกัดเชิงขั้วดังรูปที่ 5.33 และมีการเคลื่อนตัวเฉพาะแกน r และ z เมื่อได้รับความดัน จุดนี้เปลี่ยนรูปไปเป็นจุด Q' คือ a'b'c'd'e'f'g'h' และแสดงรูปแบบการเปลี่ยนรูปบนระนาบต่างๆ ได้ดังรูปที่ 5.33b)-c) จะเห็นว่ารูปทรงสี่เหลี่ยมมีการเปลี่ยนมุมบนระนาบ $r-z$ เท่านั้น ส่วนระนาบอื่นยังคงความเป็นมุมฉากไว้เหมือนเดิม จึงสรุปได้ว่าที่จุด Q มีความเครียดเฉือน γ_{rz} เกิดขึ้นบนระนาบ $r-z$ เท่านั้น ส่วนความเครียดเฉือนนนระนาบอื่นเป็นศูนย์เช่น $\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}$



รูปที่ 5.33 ความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นงานสมมาตรรอบแกนหมุน

สำหรับความเครียดเฉือน (γ_{rz}) และความเครียดตั้งฉากตามระบบพิกัดเชิงขั้วได้แก่ ϵ_r , ϵ_θ , ϵ_z สามารถหาได้จากฟังก์ชันการเคลื่อนตัว $u(r,z)$ และ $w(r,z)$ ได้ดังนี้

พิจารณาจากระนาบ $r-z$ ดังรูปที่ 5.33b) จากส่วนของ Δr ระหว่างจุด bc จะเปลี่ยนรูปเป็น b'c' ถ้าพิจารณาเฉพาะการเปลี่ยนแปลงของ Δr ในทิศทาง r คือ

$u(r+\Delta r,z)=u(r,z)+\Delta r\dfrac{\partial u(r,z)}{\partial r}$ ดังนั้นความเครียดตั้งฉากในแนว r คือ

$$\epsilon_r=\frac{u(r+\Delta r,z)-u(r,z)}{\Delta r}=\frac{\partial u(r,z)}{\partial r} \tag{5.56}$$

ในทำนองเดียวกันจากส่วนของ Δz ระหว่างจุด be จะเปลี่ยนรูปเป็น b'e' ถ้าพิจารณาเฉพาะการเปลี่ยนแปลงของ Δz ในทิศทาง z พบว่า

$w(r,z+\Delta z)=w(r,z)+\Delta z\dfrac{\partial w(r,z)}{\partial z}$ ความเครียดตั้งฉากในแนว z คือ

$$\epsilon_z=\frac{w(r,z+\Delta z)-w(r,z)}{\Delta z}=\frac{\partial w(r,z)}{\partial z} \tag{5.57}$$

สำหรับความเครียดเฉือนบนระนาบ $r-z$ พิจารณาจากการเปลี่ยนมุมระหว่างด้าน bc และ be ซึ่งเดิมคือมุมฉากจะเปลี่ยนไปเท่ากับ $\gamma_{rz}=\gamma_{bc}+\gamma_{be}$ เมื่อ

$u(r,z+\Delta z)=u(r,z)+\Delta z\dfrac{\partial u(r,z)}{\partial z}$ และ $w(r+\Delta r,z)=w(r,z)+\Delta r\dfrac{\partial w(r,z)}{\partial r}$

$\gamma_{bc}=\dfrac{w(r+\Delta r,z)-w(r,z)}{\Delta r}=\dfrac{\partial w(r,z)}{\partial r}$ และ $\gamma_{be}=\dfrac{u(r,z+\Delta z)-u(r,z)}{\Delta z}=\dfrac{\partial u(r,z)}{\partial z}$

ดังนั้นความเครียดเฉือนบนระนาบ $r-z$ คือ

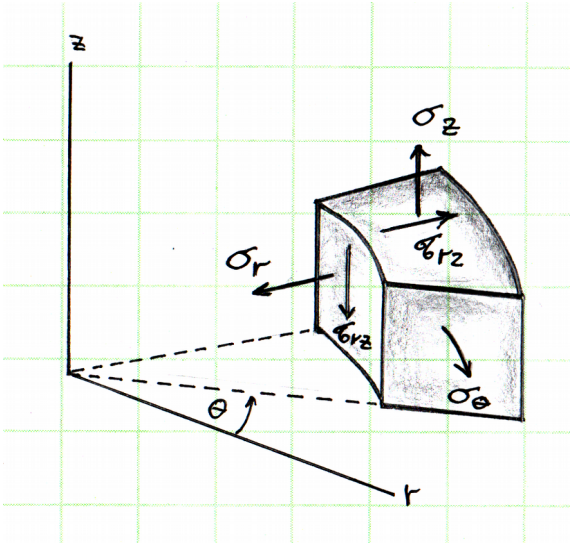
$$\gamma_{rz}=\frac{\partial u(r,z)}{\partial z}+\frac{\partial w(r,z)}{\partial r} \tag{5.58}$$

เมื่อพิจารณาส่วนโค้ง ef จากระนาบ $r-\theta$ ดังรูปที่ 5.33c) พบว่าเดิมส่วนโค้ง ef มีความยาวเท่ากับ $\text{ef}=r\Delta\theta$ เมื่อมีภาระแรงกระทำสมมาตรรอบแกนตลอดส่วนโค้ง ef เปลี่ยนความยาวเป็น e'f' มีค่าเท่ากับ $(r+u(r,z))\Delta\theta$ และความยาวที่เปลี่ยนไปตามแนวโค้ง θ คือ
$\Delta\text{ef}=(r+u(r,z))\Delta\theta-r\Delta\theta$ ดังนั้นความเครียดของส่วนโค้งนี้ตามแนวโค้ง θ คือ

$$\epsilon_\theta=\frac{(r+u(r,z))\Delta\theta-r\Delta\theta}{r\Delta\theta}=\frac{u(r,z)}{r} \tag{5.59}$$

จากสมการ (5.56)-(5.59) คือความเครียดที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุเกิดจากปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน เมื่อนำความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในช่วงยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นของวัสดุในสามมิติหรือในระบบพิกัด (xyz) มาใช้กับระบบพิกัดเชิงขั้ว $r-\theta-z$ โดย $\gamma_{r\theta}=\gamma_{\theta z}=0$ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดตามสมการ (5.60) และมีสถานะความเค้นดังรูป 5.34

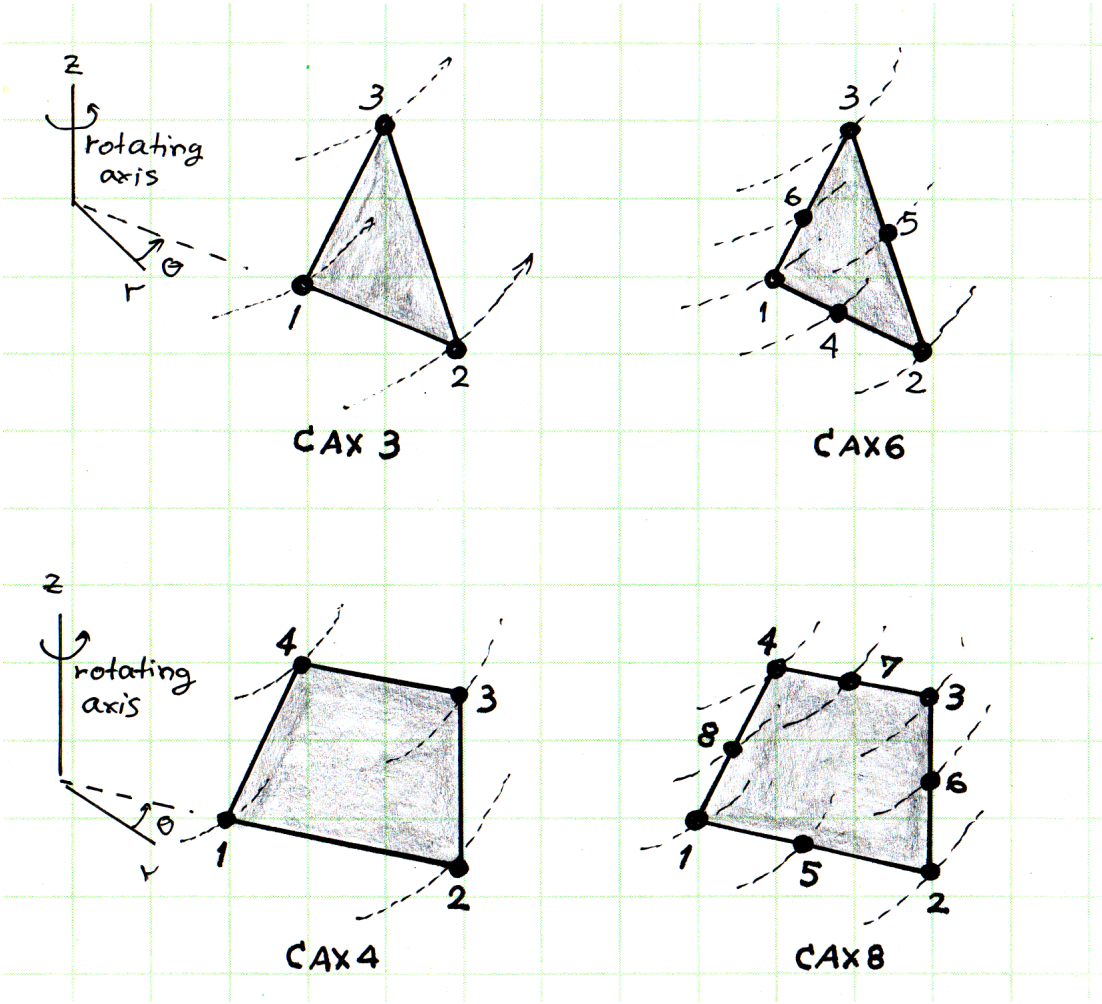
$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\epsilon_r\\ \epsilon_\theta\\ \epsilon_z\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix} \tag{5.60}$$



รูปที่ 5.34 สภาวะความเค้นที่เกิดขึ้นที่จุดใดๆ ของชิ้นงานที่สมมาตรรอบแกนหมุน

5.6.2 เอลิเมนต์ในระนาบใช้กับปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน

โปรแกรม CalculiX มีรูปเอลิเมนต์ในระนาบทั้งรูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมทั้งแบบอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองให้เลือกใช้ ดังแสดงในรูปที่ 5.35



รูปที่ 5.35 แบบของเอลิเมนต์ที่ใช้งานกับปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน

จากรูปที่ 5.35

CAX3	คือเอลิเมนต์ในระนาบสมมาตรรอบแกนหมุนทรงสามเหลี่ยมอันดับที่หนึ่ง
CAX6	คือเอลิเมนต์ในระนาบสมมาตรรอบแกนหมุนทรงสามเหลี่ยมอันดับที่สอง
CAX4	คือเอลิเมนต์ในระนาบสมมาตรรอบแกนหมุนทรงสี่เหลี่ยมอันดับที่หนึ่ง
CAX8	คือเอลิเมนต์ในระนาบสมมาตรรอบแกนหมุนทรงสี่เหลี่ยมอันดับที่สอง

5.6.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ 2-D ของปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน

ตารางที5.7 ฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวของโหนดบนเอลิเมนต์แต่ละแบบที่ใช้กับปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน

Element Type	$u(r,z)$	$w(r,z)$
CAX3	$a_1+a_2r+a_3z$	$a_4+a_5r+a_6z$
CAX6	$a_1+a_2r+a_3z+a_4r^2+a_5rz+a_6z^2$	$a_7+a_8r+a_9z+a_{10}r^2+a_{11}rz+a_{12}z^2$
CAX4	$a_1+a_2r+a_3z+a_4rz$	$a_5+a_6r+a_7z+a_8rz$
CAX8	$a_1+a_2r+a_3z+a_4r^2+a_5rz+a_6z^2+a_7r^2z+a_8rz^2$	$a_9+a_{10}r+a_{11}z+a_{12}r^2$ $+a_{13}rz+a_{14}z^2+a_{15}r^2z+a_{16}rz^2$

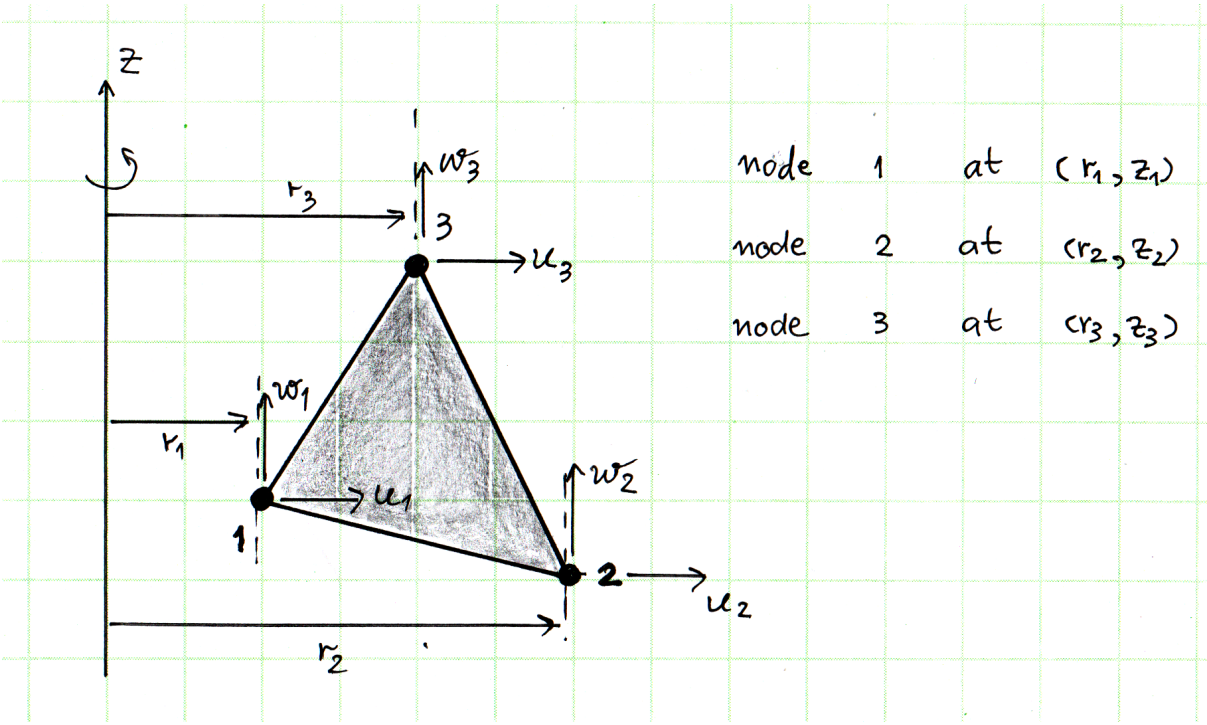
รูปแบบของเอลิเมนต์ในระนาบที่ใช้ในโปรแกรม CalculiX กับปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุนมีอยู่ 4 แบบ ดังแสดงฟังก์ชันการเคลื่อนตัวในแนวแกน r และ z ในตารางที่ 5.7 ซึ่งจะขอนำเสนอตัวอย่างการพัฒนาสมการเอลิเมนต์แบบ CAX3 พอเป็นแนวทางส่วนเอลิเมนต์แบบอื่นๆ เช่น CAX6 CAX4 และ CAX8 นั้นไม่ขอลงรายละเอียดอย่างไรก็ตามมีรายละเอียดเหมือนกับที่นำเสนอไปแล้วในการพัฒนารูปแบบเอลิเมนต์ของปัญหาความเค้นในระนาบ CPS6, CPS4 และ CPS8

สำหรับเอลิเมนต์แบบ CAX3 สมมติฟังก์ชันการเคลื่อนตัวตามแนวแกน r และแกน z ของโหนดใดๆ บนระนาบ $r-z$ ดังนี้

$$u(r,z)=a_1+a_2r+a_3z \tag{5.61}$$

และ

$$w(r,z)=a_4+a_5r+a_6z \tag{5.62}$$



รูปที่ 5.36 การเคลื่อนตัวของโหนดของเอลิเมนต์แบบ CAX3

เอลิเมนต์ CAX3 ดังรูปที่ 5.36 มีโหนด 1, 2 และ 3 ที่ตำแหน่ง (r_n, z_n) เมื่อ n คือหมายเลขโหนดและมีฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในรูปเมตริกซ์คือ

$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} u(r,z) \\ w(r,z) \end{Bmatrix} = [X_{rz}] \cdot [A]$ คือฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนที่ของตำแหน่ง (r, z) ใดๆ

$[X_{rz}]$ คือกลุ่มตัวแปร r และ z

$[A]$ คือกลุ่มค่าคงที่ในฟังก์ชันประมาณการ

สำหรับเอลิเมนต์ CAX3

$$[X_{rz}] = \begin{bmatrix} 1 & r & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & z \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

$[A]$ สำหรับเอลิเมนต์ CAX3 คือ $\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$

เขียนฟังก์ชันประมาณการอยู่ในรูปฟังชันรูปร่างและเวคเตอร์การเคลื่อนตัวของโหนดของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$\{\omega\}=[N]\cdot\{d\}$ และ $\{\omega\}=[X_{rz}]\cdot[x]^{-1}\cdot\{d\}$ เมื่อ $\{d\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix}$

ได้ฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์คือ

$$[N]=[X_{rz}]\cdot[x]^{-1} \tag{5.64}$$

เมื่อ $[X_{rz}]$ ตามปรากฏในสมการ (5.63)

และ $[x]$ คือ

$$[x]=\begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix} \tag{5.65}$$

ดังนั้นฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) สำหรับเอลิเมนต์ CAX3 หาจากสมการ (5.63) และ (5.65) แทนใน (5.64) คือ

$$[N]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{5.66}$$

ค่าฟังก์ชันรูปร่างคือ

$$N_1=\frac{1}{2A}(\alpha_1+\beta_1 r+\gamma_1 z) \qquad N_2=\frac{1}{2A}(\alpha_2+\beta_2 r+\gamma_2 z) \qquad N_3=\frac{1}{2A}(\alpha_3+\beta_3 r+\gamma_3 z) \tag{5.67}$$

เมื่อ

$$2A = r_1(z_2 - z_3) + r_2(z_3 - z_1) + r_3(z_1 - z_2)$$

และ

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = r_2 z_3 - z_2 r_3 & \beta_1 = z_2 - z_3 & \gamma_1 = r_3 - r2 \\ \alpha_2 = r_3 z_1 - z_3 r_1 & \beta_2 = z_3 - z_1 & \gamma_2 = r_1 - r_3 \\ \alpha_3 = r_1 z_2 - z_1 r_2 & \beta_3 = z_1 - z_2 & \gamma_3 = r_2 - r_1 \end{array}$$

จากนั้นหาความเครียดของเอลิเมนต์ CAX3 ในรูปฟังก์ชันรูปร่าง $[N]$ และค่าเวคเตอร์การเคลื่อนตัวของโหนด $\{d\}$ ได้จาก

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u(r,z)}{\partial r} \\ \dfrac{\partial w(r,z)}{\partial z} \\ \dfrac{u(r,z)}{r} \\ \dfrac{\partial u(r,z)}{\partial z} + \dfrac{\partial w(r,z)}{\partial r} \end{Bmatrix} = [B] \cdot \{d\}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial r} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial z} \\ \dfrac{N_1}{r} & 0 & \dfrac{N_2}{r} & 0 & \dfrac{N_3}{r} & 0 \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{\partial N_2}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & \dfrac{\partial N_3}{\partial z} & \dfrac{\partial N_3}{\partial r} \end{bmatrix} \qquad (5.68)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial N_1}{\partial r} = \frac{\beta_1}{2A} \quad \frac{\partial N_2}{\partial r} = \frac{\beta_2}{2A} \quad \frac{\partial N_3}{\partial r} = \frac{\beta_3}{2A} \quad \frac{\partial N_1}{\partial z} = \frac{\gamma_1}{2A} \quad \frac{\partial N_2}{\partial z} = \frac{\gamma_2}{2A} \quad \frac{\partial N_3}{\partial z} = \frac{\gamma_3}{2A}$$

$$\frac{N_1}{r} = \frac{1}{2A}\left(\frac{\alpha_1}{r} + \beta_1 + \gamma_1 \frac{z}{r}\right) \quad \frac{N_2}{r} = \frac{1}{2A}\left(\frac{\alpha_2}{r} + \beta_2 + \gamma_2 \frac{z}{r}\right) \quad \frac{N_3}{r} = \frac{1}{2A}\left(\frac{\alpha_3}{r} + \beta_3 + \gamma_3 \frac{z}{r}\right)$$

เมื่อหาทราบ $[B]$ จากสมการ (5.68) และทราบความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจากสมการที่ (5.60) จะได้สมการความสัมพันธ์ในรูปของความเค้นกับเวคเตอร์การเคลื่อนที่ของโหนดดังนี้คือ

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z}\\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0\\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}u_1\\ w_1\\ u_2\\ w_2\\ u_3\\ w_3\end{Bmatrix} \tag{5.69}$$

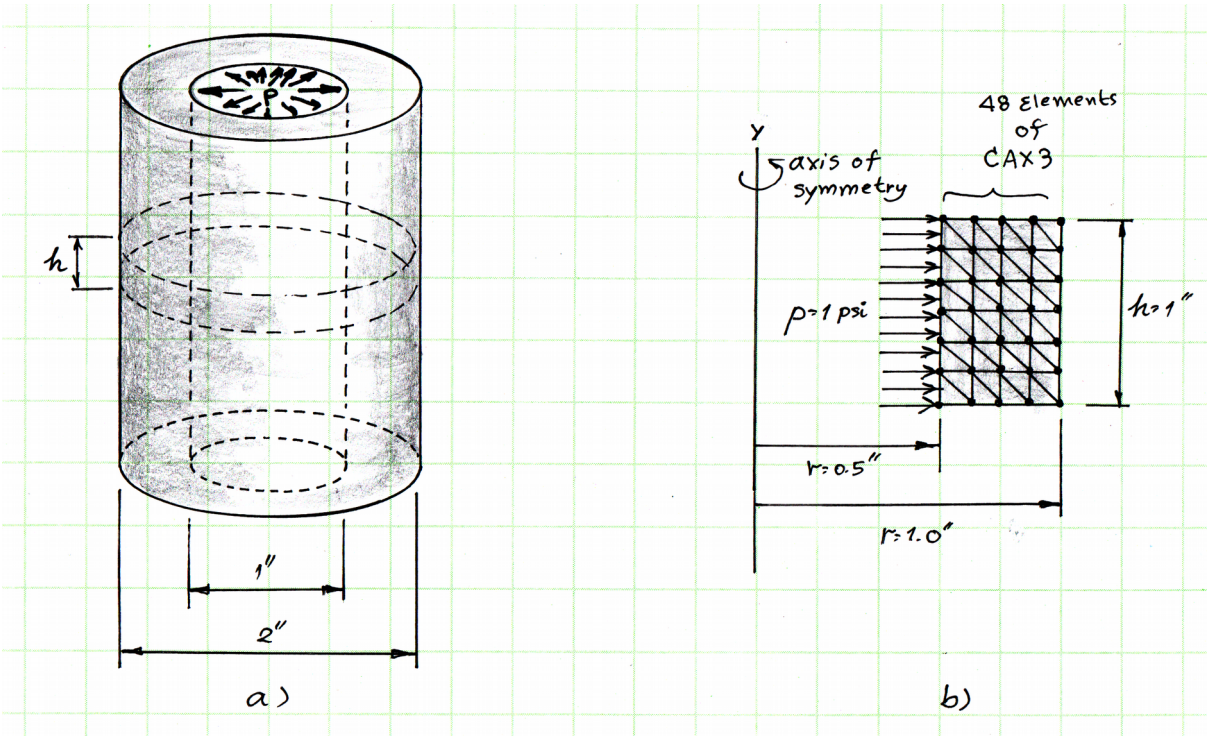
ค่าความแข็งสปริงของเอลิเมนต์ในระนาบสมมาตรรอบแกนหมุนหาจาก $k_e=\iiint [B]^T[D][B]dV$ โดยเมตริกซ์ $[B]$ ได้จากสมการ (5.68) และ $[D]$ จากสมการ (5.60) สำหรับ dV คือปริมาตรเล็กในหนึ่งรอบการหมุนรอบแกนดังนั้นเมื่อหมุนพื้นที่ $dA=drdz$ รอบแกน z ได้ $dV=2\pi r\,drdz$ ดังนั้น

$$k_e=2\pi\iint [B]^T[D][B]r\,dr\,dz \tag{5.70}$$

และสำหรับการกำหนดแรงที่จุด *CLOAD และแรงกระจาย *DLOAD กับเอลิเมนต์ CAX มีหลักการใช้งานเหมือนกับเอลิเมนต์ CPS และ CPE

5.6.4 ตัวอย่าง inp file ของปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน

<u>ตัวอย่างที่ 5.6</u> ภาชนะทรงกระบอกผนังหนามีความหนาเท่ากับ 0.5 in มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในเท่ากับ 1 in และเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกเท่ากับ 2 in รับความดันดังรูปที่ 5.37 บรรจุอากาศภายในเท่ากับ 1 psi ทำจากเหล็กกล้า E=30 x 10^6 psi อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 จงเขียน inp file เพื่อหาความเค้นที่เกิดขึ้นในผนังหนาและตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

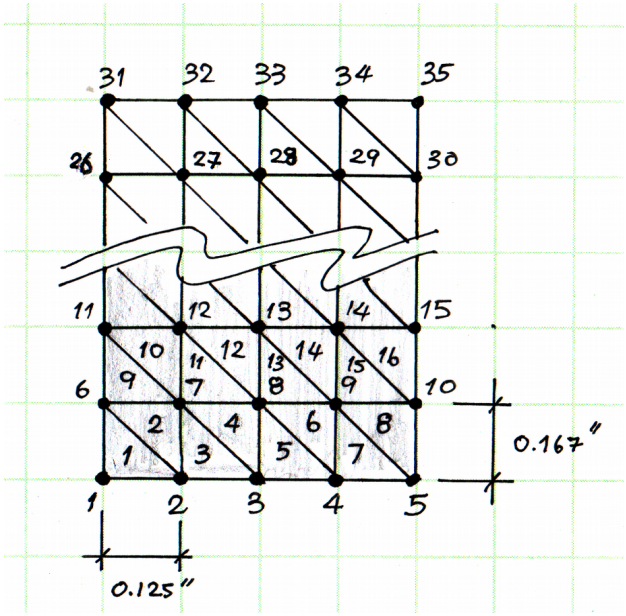


รูปที่ 5.37 a) ภาชนะทรงกระบอกหนารับความดันภายใน b) แบบจำลองเพื่อใช้กับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

<u>แนวคิด</u>

-ปัญหาข้อนี้สามารถใช้เอลิเมนต์สมมาตรรอบแกน y ได้ โดยผนังถังเกิดจากการหมุนหน้าตัดบนระนาบ y และ r รอบแกน y ทั้งนี้ความเค้นความเครียดบนหน้าตัดจะเหมือนกันทุกช่วงตามความยาวในแกน y จึงตัดมาเฉพาะในช่วงความสูง h มาพิจารณาดังปรากฏในรูปที่ 5.37 b)

-กำหนดและสร้างโหนดเอลิเมนต์ไสำหรับข้อนี้จะลองใช้เอลิเมนต์แบบ CAX3 จำนวน 48 เอลิเมนต์ มีโหนดทั้งหมด 35 โหนด ดังรูปที่ 5.37 b) และ 5.38 กำหนดโหนดขึ้นมาตามความสัมพันธ์ เริ่มจากโหนดที่ 1 อยู่ที่ตำแหน่ง (r,y) = (0.5,0) และสร้างความสัมพันธ์ให้โหนดที่ 2 ห่างเท่ากับโหนดที่ 1 เท่ากับ 0.125” ทำการกำหนดโหนดที่ y=0 จนถึงโหนด หมายเลข 5 จากนั้นกำหนดโหนดหมายเลข 6 ที่ตำแหน่ง (r,y) = (0.5,0.167) แบบนี้ไปจนถึงโหนดที่ 35



รูปที่ 5.38 หมายเลขโหนดและเอลิเมนต์แบบ CAX3 ของตัวอย่าง 5.6

1. กำหนดหัวเรื่องคือ `ch56_cax3.inp pressure vessel`

```
*Heading
ch56_cax3.inp pressure vessel
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดและตำแหน่งที่ (r,y,z) โดยกำหนดโหนดบนระนาบ (r,y) ส่วน z ทุกๆ จุดกำหนดให้เป็นศูนย์ สำหรับตำแหน่ง r คือ x ในข้อนี้ผู้เขียนใช้ spread sheet เช่น Excel หรือ LibreOffice (calculation) เป็นเครื่องมือกำหนดโหนดทั้งนี้เนื่องจากมีจำนวนโหนดไม่มากและแต่ละโหนดสัมพันธ์กันอย่างง่าย วิธีการคือการใช้ตารางคำนวณใน spread sheet สร้างโหนดขึ้นมา จากนั้นแปลงเป็นไฟล์ในรูปแบบ csv เพื่อใช้กับ text editor เพื่อเขียน inp file ต่อไป สำหรับปัญหานี้โหนดทั้งหมดกำหนดเป็น กลุ่มชื่อว่า Nall

```
*NODE,NSET=Nall
1,0.500,0.000,0.00
2,0.625,0.000,0.00
3,0.750,0.000,0.00
4,0.875,0.000,0.00
5,1.000,0.000,0.00
6,0.500,0.167,0.00
7,0.625,0.167,0.00
8,0.750,0.167,0.00
9,0.875,0.167,0.00
10,1.000,0.167,0.00
11,0.500,0.333,0.00
12,0.625,0.333,0.00
13,0.750,0.333,0.00
14,0.875,0.333,0.00
```

```
15,1.000,0.333,0.00
16,0.500,0.500,0.00
17,0.625,0.500,0.00
18,0.750,0.500,0.00
19,0.875,0.500,0.00
20,1.000,0.500,0.00
21,0.500,0.667,0.00
22,0.625,0.667,0.00
23,0.750,0.667,0.00
24,0.875,0.667,0.00
25,1.000,0.667,0.00
26,0.500,0.833,0.00
27,0.625,0.833,0.00
28,0.750,0.833,0.00
29,0.875,0.833,0.00
30,1.000,0.833,0.00
31,0.500,1.000,0.00
32,0.625,1.000,0.00
33,0.750,1.000,0.00
34,0.875,1.000,0.00
35,1.000,1.000,0.00
```

3. กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ หมายเลขเอลิเมนต์ และโหนดต่างๆ ที่ประกอบกันเป็นอลิเมนต์ สำหรับปัญหานี้ กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์คือ CAX3 มีทั้งหมดจำนวน 48 เอลิเมนต์ เรียงจากเอลิเมนต์หมายเลข 1 ถึงหมายเลข 48 ตั้งชื่อกลุ่มของเอลิเมนต์ทั้งหมดว่า Eall

```
*ELEMENT,TYPE=CAX3,ELSET=Eall
1,1,2,6
2,2,7,6
3,2,3,7
4,3,8,7
5,3,4,8
6,4,9,8
7,4,5,9
8,5,10,9
9,6,7,11
10,7,12,11
11,7,8,12
12,8,13,12
13,8,9,13
14,9,14,13
15,9,10,14
16,10,15,14
17,11,12,16
18,12,17,16
19,12,13,17
20,13,18,17
21,13,14,18
22,14,19,18
23,14,15,19
24,15,20,19
25,16,17,21
26,17,22,21
27,17,18,22
28,18,23,22
```

```
29,18,19,23
30,19,24,23
31,19,20,24
32,20,25,24
33,21,22,26
34,22,27,26
35,22,23,27
36,23,28,27
37,23,24,28
38,24,29,28
39,24,25,29
40,25,30,29
41,26,27,31
42,27,32,31
43,27,28,32
44,28,33,32
45,28,29,33
46,29,34,33
47,29,30,34
48,30,35,34
```

4. กำหนดค่าสมบัติทางกลของวัสดุ ในข้อนี้กำหนดเป็นเหล็กกล้า (STEEL) มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้นเท่ากับ 3,000 psi และมีอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.25

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
30E+06,0.25
```

5.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า Eall ให้มีสมบัติตามค่าของเหล็กกล้าที่กำหนดในข้อ 4.

```
*SOLID SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=STEEL
1.0
```

6 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

7. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)
-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้ทุกโหนดที่ตำแหน่ง y=h/2 ตามแนว r ไม่มีการเคลื่อนที่อิสระในแนว y โดยกลุ่มดังกล่าวให้ชื่อ middle_fix ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 16,17,18,19,20

```
*NSET,NSET=middle_fix
16,17,18,19,20
*BOUNDARY
middle_fix,2,2,0.0
```

8. และกำหนดเงื่อนไขภาระแรงกระทำ (load conditions)

พิจารณาจากแรงกระทำเป็นความดันที่กระทำที่ขอบภายในผนังซึ่งกระทำต่อขอบผิว face3 (P3) ของเอลิเมนต์หมายเลข 1,9,17,25,33,41 โดยกำหนดให้เอลิเมนต์กลุ่มนี้ชื่อว่า element_load มีแรงดันกระทำเข้าสู่ผิวมีค่าเท่ากับ 1 psi

```
*ELSET,ELSET=element_load
1,9,17,25,33,41
*DLOAD
element_load,P3,1.0
```

9. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file)

```
*NODE PRINT,NSET=Nall
U
*EL PRINT,ELSET=Eall
S
*NODE FILE
U
*EL FILE
S
```

10. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

11. การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

11.1 แนวคิดในการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถทำได้โดยการเทียบค่าความเค้นในแนวรัศมีที่เกิดขึ้นในผนังหนาที่ได้กับการคำนวณโดยตรงทางทฤษฎี [7]

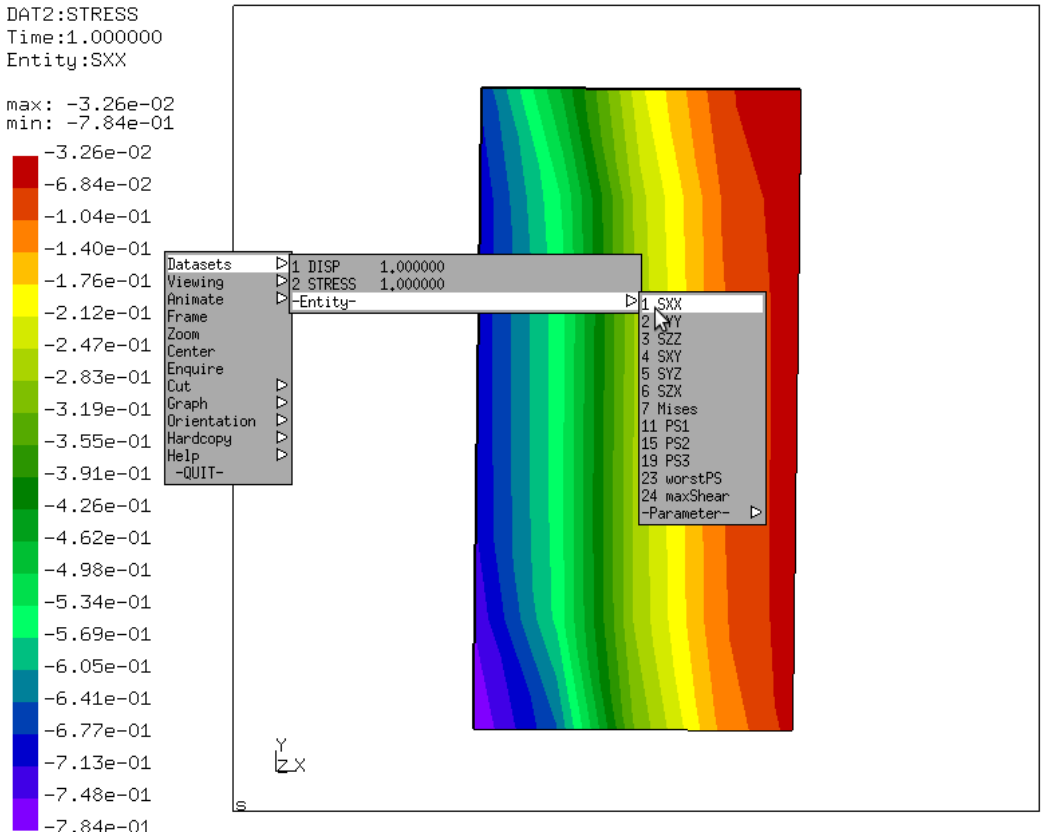
ผลลัพธ์แม่นตรงของความเค้นในแนวรัศมีขึ้นอยู่กับค่าความดันภายใน ความดันภายนอก และรัศมีดังนี้

$$\sigma_r=\frac{P_i r_i^2}{r_e^2-r_i^2}\left(1-\left(\frac{r_e}{r}\right)^2\right)-\frac{P_e r_e^2}{r_e^2-r_i^2}\left(1-\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right) \qquad (5.71)$$

เมื่อ σ_r คือค่าของความเค้นตามความหนาในแนวรัศมี
P_i คือค่าความดันภายใน กรณีนี้คือ 1 psi
P_e คือค่าความดันภายนอก กรณีนี้คือ 0 psi
r_i คือรัศมีภายใน กรณีนี้คือ 0.5 in
r_e คือรัศมีภายนอก กรณีนี้คือ 1 in
เมื่อ r คือรัศมีใดๆ ระหว่าง r_i กับ r_e

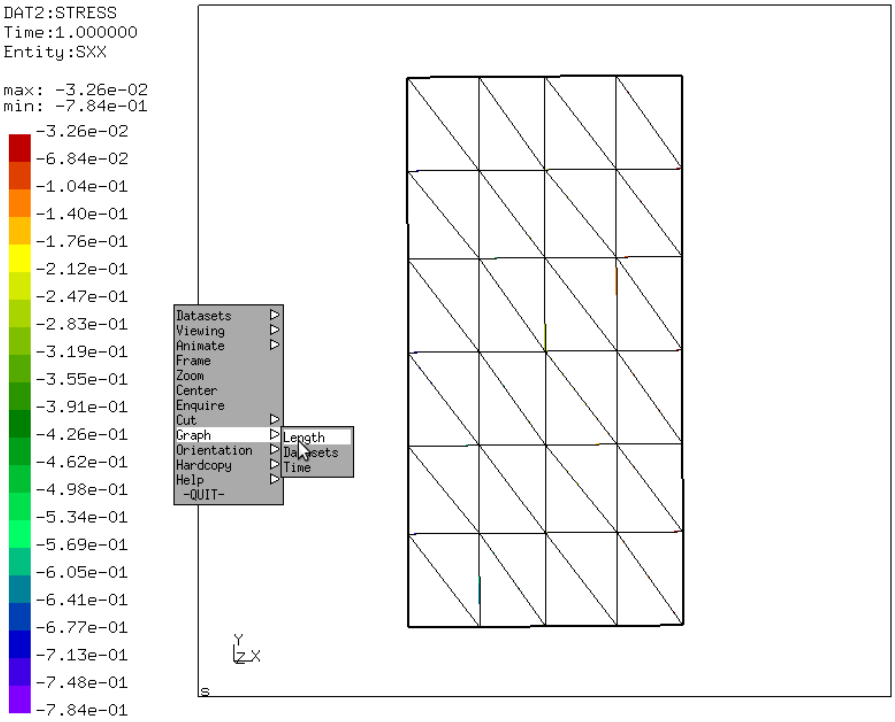
11.2 การหาค่าผลลัพธ์ของความเค้นในแนวรัศมีจาก CGX (Calculix Graphic) ทำได้โดยการเรียกไฟล์

ch56_cax3.frd ผ่าน launcher จากนั้นเรียก Datasets->Stress->Entity->SXX ในที่นี้ SXX คือความเค้นในแนวแกน x หรือความเค้นในแนวรัศมีนั่นเอง ดังแสดงค่าทางคอมพิวเตอร์กราฟิกในรูปที่ 5.39



รูปที่ 5.39 แสดงความเค้นตลอดความความหนาของภาชนะรับความดัน

รูปที่ 5.39 แสดงค่าความเค้นในแนวรัศมีด้วยสีที่แตกต่างกันไป พบว่าความเค้นสูงสุดเกิดขึ้นที่รัศมีในและลดลงเมื่อรัศมีมากขึ้นและมีแนวโน้มเท่ากับศูนย์ที่รัศมีนอกสุด เราสามารถใช้ CGX รายงานค่าความเค้นที่ตำแหน่งรัศมีต่างๆ โดยการใช้เมนู Graph->Length ดังแสดงในรูปที่ 5.40 แต่ก่อนจะเรียกควรปรับรูปเข้าสู่ Viewing->Lines ก่อน จากนั้นคลิกที่โหนดที่ต้องการให้รายงานค่าตัวแปร SXX ออกมา ค่าที่โหนดจะถูกรายงานค่าออกมาที่ terminal ดังในรูปที่ 5.41 สามารถนำค่า v ที่ปรากฏใน terminal ไปเปรียบเทียบกับผลจากทฤษฎีต่อไป



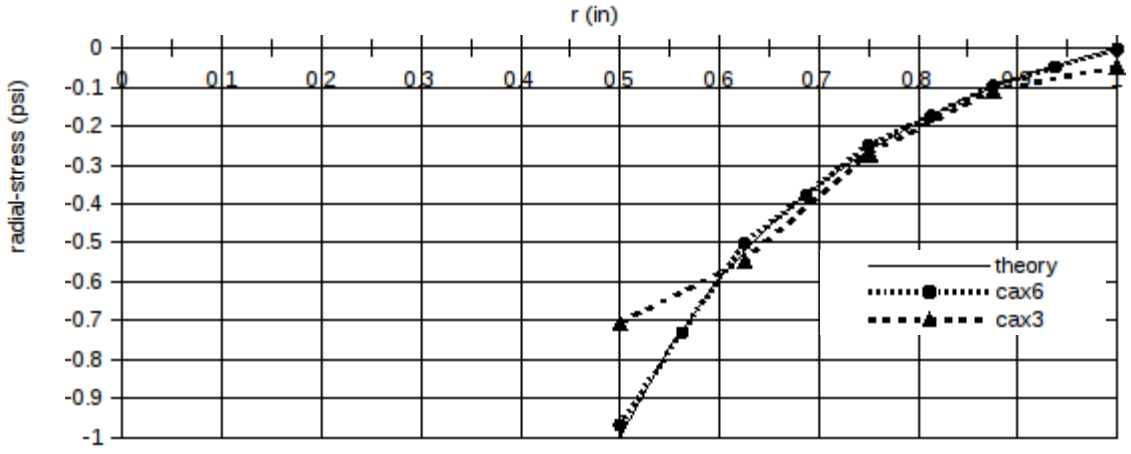
รูปที่ 5.40 การใช้งานหน้าต่างของ CGX เพื่อให้แสดงค่าความเค้น Sxx ตลอดความหนา

```
 max:-3.261190e-02 at node:35
 min:-7.842330e-01 at node:1

 Values over length. Select nodes with 'left mouse button' then quit with 'right
 mouse button'

 Values over length. Select nodes with 'left mouse button' then quit with 'right
 mouse button'
pic node
16 v= -7.063670e-01  xyz= 0.500000 0.500000 0.000000 axyz= 0.000000 90.000000 45
.000000 rxyz= 0.500000 0.500000 0.707107
pic node
17 v= -5.469280e-01  xyz= 0.630000 0.500000 0.000000 axyz= 0.000000 90.000000 38
.437301 rxyz= 0.500000 0.630000 0.804301
pic node
18 v= -2.721760e-01  xyz= 0.750000 0.500000 0.000000 axyz= 0.000000 90.000000 33
.690068 rxyz= 0.500000 0.750000 0.901388
pic node
19 v= -1.094680e-01  xyz= 0.880000 0.500000 0.000000 axyz= 0.000000 90.000000 29
.604451 rxyz= 0.500000 0.880000 1.012126
pic node
20 v= -4.805440e-02  xyz= 1.000000 0.500000 0.000000 axyz= 0.000000 90.000000 26
.565051 rxyz= 0.500000 1.000000 1.118034
```

รูปที่ 5.41 ค่าของความเค้นที่โหนดต่างๆ ตลอดความหนาโดยรายงานผ่าน Terminal

11.3 ผลการเปรียบเทียบกับทางทฤษฎี

รูปที่ 5.42 แสดงการเปรียบเทียบผลของการคำนวณค่าความเค้นในแนวรัศมีระหว่างค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎีและค่าที่ได้จากการใช้โปรแกรม CalculiX พบว่าแนวโน้มของผลลัพธ์มีความสอดคล้องกัน ผลจากทฤษฎีมีค่าความเค้นที่รัศมีของผิวใน (r_i) กับเท่ากับความดันภายในและมีค่าเป็นศูนย์ที่รัศมีของผิวนอก (r_e) ขณะที่ผลจาก CalculiX ให้ผลที่ผิดพลาดที่ตำแหน่งรัศมีของผิวใน (r_i)

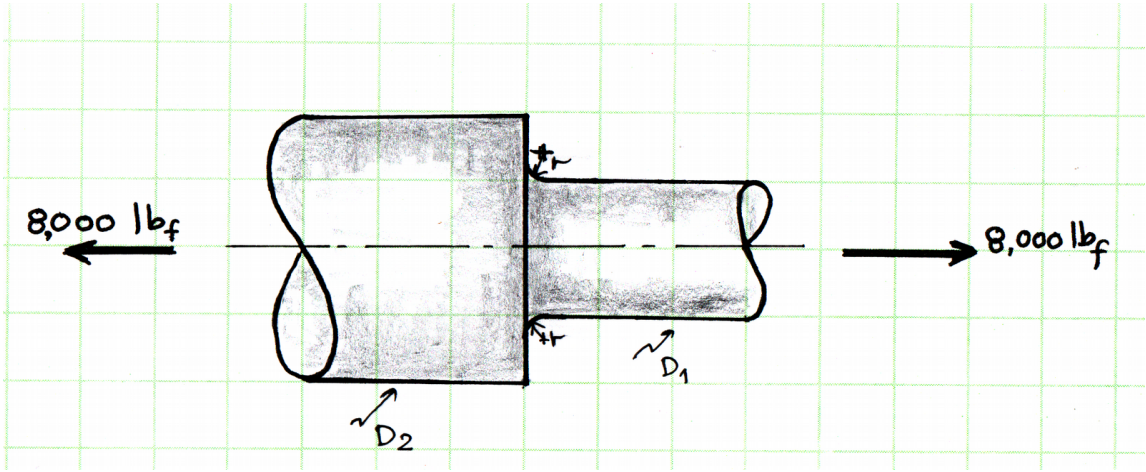


รูปที่ 5.42 เปรียบเทียบความเค้น Sxx ตลอดความหนาในแนวรัศมี

จากผลดังกล่าวสามารถปรับปรุงการจำลองแบบทางไฟไนต์เอลิเมนต์ได้สองแนวทางคือ
-เพิ่มจำนวนเอลิเมนต์แบบ CAX3 ให้มากยิ่งขึ้น
-จำนวนเอลิเมนต์เท่าเดิมแต่เปลี่ยนรูปแบบเอลิเมนต์จาก CAX3 เป็น CAX6

ในการศึกษาครั้งนี้ผู้เขียนทดลองการใช้แนวทางหลังคือใช้จำนวนเอลิเมนต์เท่าเดิมแต่เปลี่ยน CAX6 ซึ่งแนวทางนี้ต้องมีการเพิ่มจำนวนโหนดใน inp file จากจำนวนเอลิเมนต์เท่าเดิมคือ 48 เอลิเมนต์แต่ต้องเพิ่มจำนวนโหนดจาก 35 โหนดสำหรับ CAX3 เป็น 117 โหนดสำหรับ CAX6 จากรูปที่ 5.42 พบว่าผลการคำนวณสอดคล้องและตรงกันกับผลที่ได้จากการคำนวณทางทฤษฎีมากกว่า CAX3

<u>ตัวอย่างที่</u> 5.7 เพลาหน้าตัดกลมตันทำจากเหล็กกล้าเส้นผ่านศูนย์กลางต่างกัน (stepped shaft) ดังรูปที่ 5.43 มีรัศมีบ่าเพลาเท่ากับ 1 นิ้ว มอดุลัสเชิงเส้นเท่ากับ $30\text{x}10^6$ psi อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 เมื่อรับแรงดึงแบบสถิตย์ในแนวแกนเท่ากับ 8.0 kips จงเขียน inp file เพื่อคำนวณหาค่าความเค้นสูงสุดในแนวแกนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดเพลา โดยกำหนดให้รัศมีเพลาและบ่าเพลามีขนาดดังนี้ $D_2 = 20\,\text{in}$ $D_1 = 10\,\text{in}$ และ $r = 1\,\text{in}$ ตามลำดับ



รูปที่ 5.43 เพลาหน้าตัดกลมตันมีบ่า

1.<u>แนวคิดเกี่ยวกับต้นแบบ</u>

-ปัญหาข้อนี้สามารถพิจารณาเป็นปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุนได้ เมื่อแกนหมุนคือแกนเพลาดังนั้นจึงไม่จำเป็นที่จะต้องสร้างต้นแบบสามมิติ เพียงแต่จำลองแบบสมมาตรรอบแกนเพลาและมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสม ซึ่งต้นแบบในสองมิติที่สมมาตรรอบแกนหมุนมีรายละเอียดแสดงในรูปที่ 5.44

-กำหนดให้แกนหมุนที่ใช้ในต้นแบบคือแกน y และแกน x คือแกนของรัศมี r

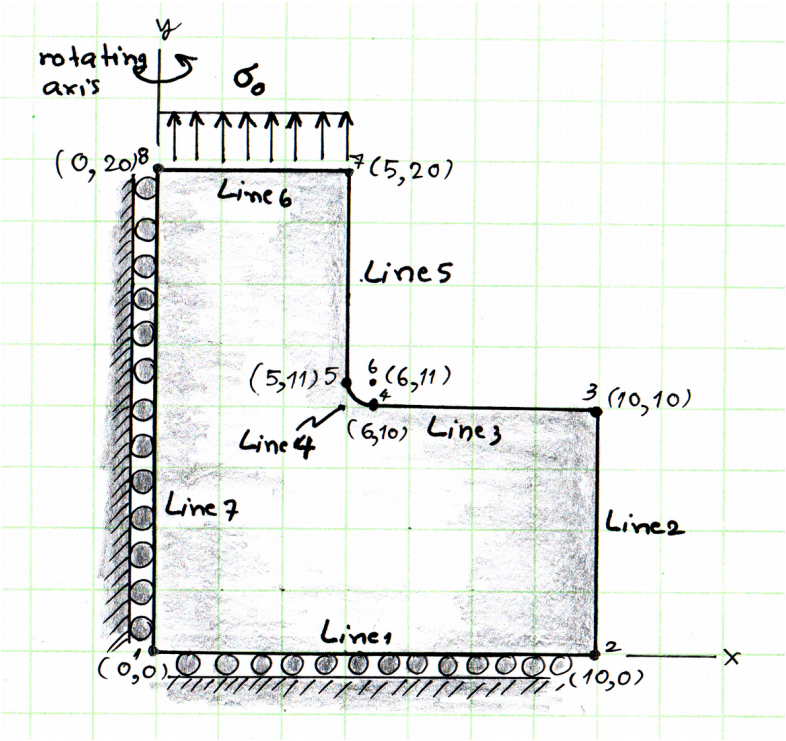
-สำหรับความยาวของต้นแบบต้องกำหนดขึ้นมาเองเนื่องจากโจทย์ไม่กำหนดมาให้ ในที่นี้คือกำหนดให้ยาวเท่ากับ 10” ในความยาวในแต่ละช่วงเพลาหรือยาวทั้งหมด 20”

-กำหนดเส้นรอบรูปขึ้นมา 7 เส้น คือ Line1 Line2 Line3 Line4 Line5 Line 6 และ Line7 โดยแต่ละ Line เกิดจากการต่อโหนด 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-7, 7-8 และ 8-1 ตามลำดับ

- กำหนดให้ความเค้นหรือความดันกระทำที่ขอบผิวของ Line6 โดยความดันนี้แปลงมาจากแรงดึงในแนวแกนคือ $\sigma_o = (8000\,\text{lb}_f)/(\pi/4\,D_1^2) = 102\,\text{psi}$

-กำหนดเงื่อนไขให้ Line7 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x และ Line 1 ไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน y

-ศึกษาหาค่าความเค้นดึงสูงสุดที่เกิดขึ้นในแนวแกน ในที่นี้มีการดึงในแนวแกน y ดังนั้นความเค้นสูงสุดคือ Syy หรือความเค้นในแนวแกน y



รูปที่ 5.44 แบบจำลองของชิ้นงานสำหรับสร้างต้นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน

2. <u>การสร้าง Mesh ต้นแบบด้วย GMSH</u>

-เริ่มต้นจากการสร้าง point ทั้ง 8 points ซึ่งมีคู่ลำดับ (x,y) ตามที่กำหนดในรูปที่ 5.44

-สร้าง Line ทั้ง 7 Lines จาก points

-สร้าง Plane Surface จาก Lines

-สร้าง Mesh แบบ 2D เลือก Set order 2 เพื่อกำหนดเอลิเมนต์แบบอันดับที่สอง

-แปลงไฟล์จาก geo format เป็น geo inp format

-ใช้ Launcher-Calculix แปลง geo inp format เป็น CCX inp format โดยเลือก Pool's Converter

-จากนั้นเปลี่ยนชนิดเอลิเมนต์ เป็นแบบ CAX6

-ตรวจสอบ mesh โดยการเรียก Launcher-Calculix และ run CCX inp file แบบ Preprocessor Mode

3. <u>การเขียน inp file</u>

3.1 กำหนดหัวเรื่องคือ `ch57_cax6.inp stepped-shaft`

```
*Heading
ch57_cax6.inp stepped-shaft
```

3.2 หมายเลขโหนดพร้อมคู่ลำดับ (x,y) ที่เกิดจากการสร้างด้วยโปรแกรม GMSH สำหรับต้นแบบนี้มี

ทั้งหมด 874 โหนด และโหนดทั้งหมดถูกกำหนดชื่อกลุ่มว่า Nall คือ

```
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,1.000000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,1.000000000000e+01,1.000000000000e+01,0.000000000000e+00
….....................................................
….....................................................
872,6.956761360168e+00,5.462857246399e+00,0.000000000000e+00
873,3.128061294556e+00,1.752112197876e+01,0.000000000000e+00
874,3.863541603088e+00,1.886354255676e+01,0.000000000000e+00
```

3.3 GMSH สร้างกลุ่มโหนดที่อยู่บน Line ต่างๆ ทั้ง 7 Lines มาให้ Line เหล่านี้มีประโยชน์ในการนำไปกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่อไปคือ

```
*NSET,NSET=Line1
1
18
….
17
27
2
*NSET,NSET=Line2
2
37
….

46
3
*NSET,NSET=Line3
3
….
4
*NSET,NSET=Line4
4
...
6
*NSET,NSET=Line5
6
65
….
73
7
*NSET,NSET=Line6
...
*NSET,NSET=Line7
…..
```

3.4 GMSH ได้สร้างกลุ่มคำสั่งใน inp file ไว้ให้ ทำการเปลี่ยนรูปแบบเอลิเมนต์เป็น type=CAX6 และเปลี่ยนชื่อกลุ่มเอลิเมนต์เป็น ELSET=stepped_shaft มีทั้งหมดจำนวน 406 เอลิเมนต์ มีหมายเลขเอลิเมนต์เริ่มตั้งแต่ 1822-2227 คือ

```
**Element, type=CAX6, ELSET=stepped_shaft
1822, 92, 211, 161, 296, 297, 298
1823, 97, 163, 96, 299, 300, 116
1824, 127, 214, 209, 301, 302, 303
……
….................................
2224, 130, 261, 276, 351, 873, 822
2225, 153, 245, 287, 766, 792, 871
2226, 153, 237, 292, 522, 843, 765
2227, 61, 251, 288, 833, 855, 79
```

3.5 กำหนดค่าสมบัติทางกลของวัสดุ ในข้อนี้กำหนดเป็นเหล็กกล้า (STEEL) มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้นเท่ากับ 30 x 10^6 psi และมีอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 คือ

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
30E+06,0.3
```

3.6 กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า stepped-shaft ให้มีสมบัติตามค่าของเหล็กกล้าที่กำหนดใน 3.5 คือ

```
*SOLID SECTION,ELSET=stepped_shaft,MATERIAL=STEEL
1.0
```

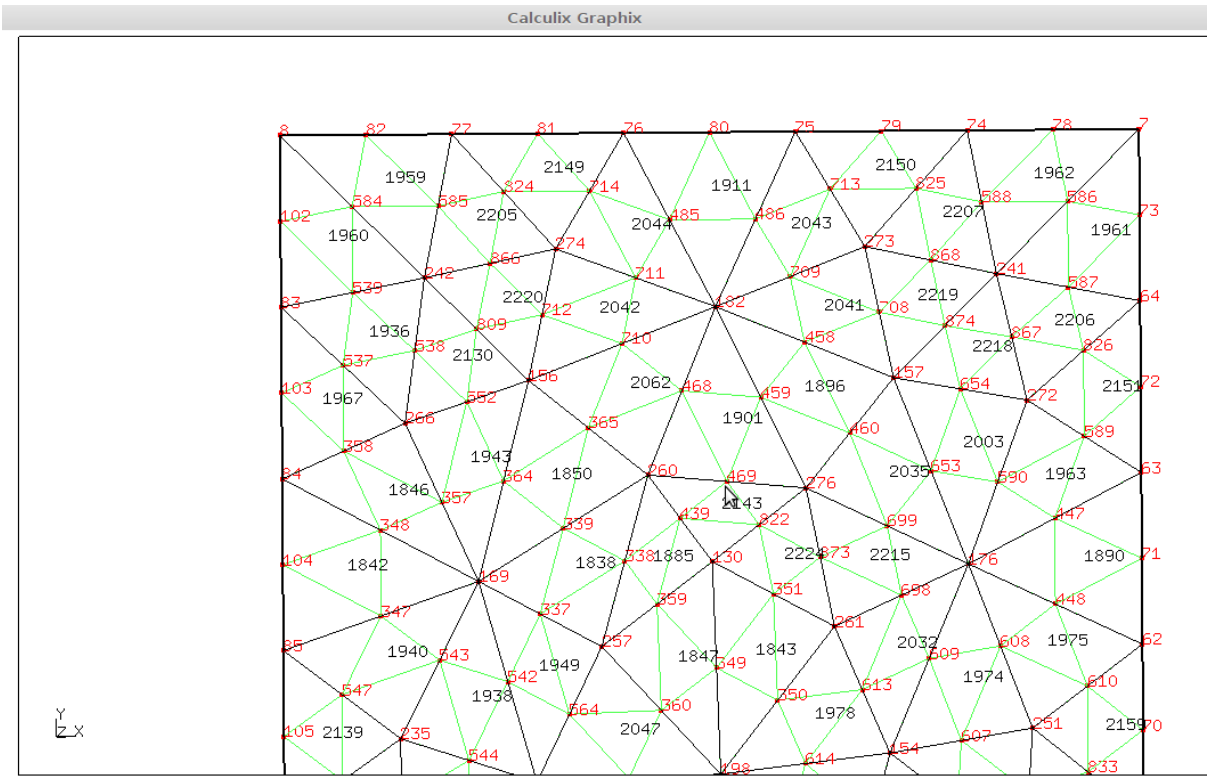
3.7 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

3.8. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)
-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้โหนดทั้งหมดบน Line1 ไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวแกน y
-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้โหนดทั้งหมดบน Line7 ไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x

```
*BOUNDARY
Line1,2,2,0.0
Line7,1,1,0.0
```

3.9 และกำหนดเงื่อนไขภาระแรงกระทำ (load conditions)
พิจารณาจากแรงกระทำเป็นความเค้น σ_o= 102 psi กระทำที่ขอบ Line6 ซึ่งต้องทำการตรวจสอบว่ามีเอลิเมนต์หมายเลขอะไรบ้างที่เกาะติดตามขอบ Line6 ในกระบวนการนี้สามารถเรียกใช้ Launcher-Calculix ใน Preprocessor Mode เรียกต้นแบบขึ้นมา จากนั้นใช้คำสั่งใน terminal ของ CGX เช่น plot ea all และ plus na all เพื่อตรวจสอบดูหมายเลขเอลิเมนต์และตรวจสอบการจัดลำดับโหนดให้สอดคล้องกับหมายเลขขอบผิวของแต่ละเอลิเมนต์ สำหรับต้นแบบนี้ต้องทำการจัดลำดับโหนดสำหรับเอลิเมนต์ที่อยู่ขอบ Line 6 ใหม่ดังนี้



รูปที่ 5.45 โหนดและเอลิเมนต์ที่ได้จากการสร้างด้วย GMSH แสดงด้วย CGX

จากภาพที่ 5.45 พบว่า เอลิเมนต์ที่อยู่ติดขอบ Line6 มีทั้งหมด 5 เอลิเมนต์คือเอลิเมนต์หมายเลข 1959, 2149, 1911, 2150 และ 1962 สำหรับต้นแบบนี้พบว่า GMSH ไม่ได้เรียงหมายเลขด้านของแต่ละเอลิเมนต์ให้สอดคล้องกัน ดังนั้นต้องมีการปรับลำดับการเรียงโหนดของเอลิเมนต์ดังกล่าวให้สอดคล้องกับหมายเลขด้าน เช่น ถ้าต้องการให้แรงกระทำบนหน้าเอลิเมนต์ทั้ง 5 เหมือนกันคือกระทำที่ด้านเลข 1 หรือ P1 ผู้เขียนควรทำการปรับเรียงลำดับโหนดให้กับกลุ่มเอลิเมนต์ใหม่ดังนี้

```
1959,77,8,242,82,584,585
2149,76,77,274,81,824,714
1911,75,76,182,80,485,486
2150,74,75,273,79,713,825
1962,7,74,241,78,588,586
```

จากนั้นตั้งชื่อกลุ่มเอลิเมนต์ที่ขอบ Line6 ทั้ง 5 เอลิเมนต์ว่า `element_load`

```
*ELSET,ELSET=element_load
1959,2149,1911,2150,1962
```

และกำหนด $\sigma_o = 102$ psi ลงในคำสั่งดังนี้

```
*DLOAD
element_load,P1,-102
```

3.10 กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)

จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file)

```
*EL PRINT,ELSET=stepped_shaft
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U
*NODE FILE
U
*EL FILE
S
```

3.11 กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

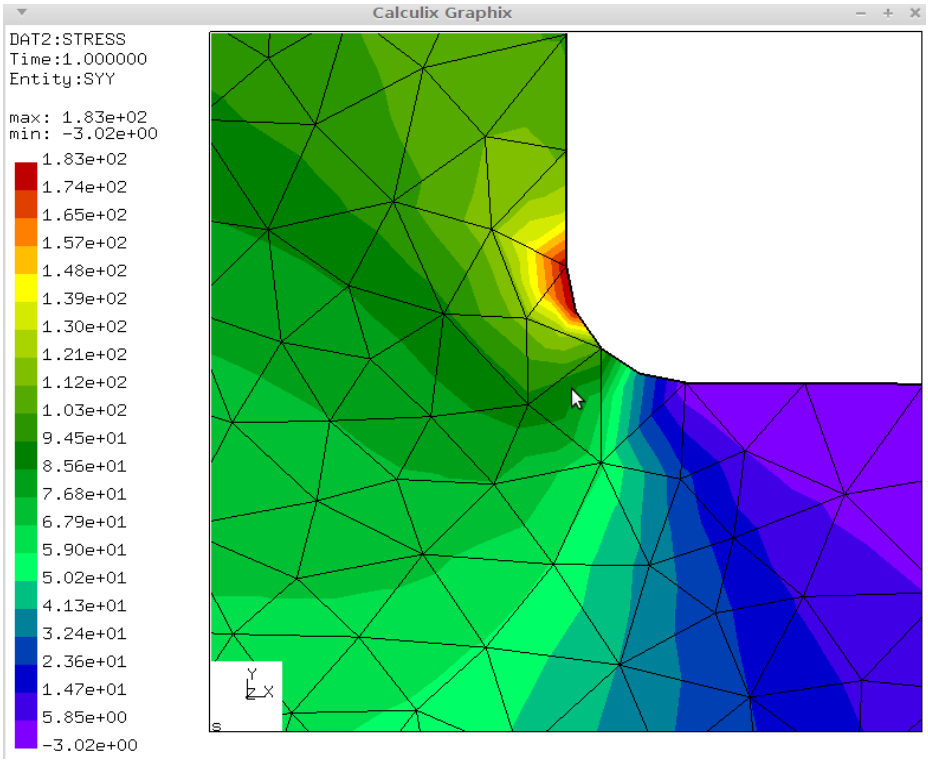
3.12 การตรวจสอบผลลัพธ์และความถูกต้อง

-ผลลัพธ์ที่สนใจคือความเค้นในแนวแกน y หาได้จาก CGX (Calculix Graphic) ทำได้โดยการเรียกไฟล์ ch57_cax6.frd ผ่าน launcher จากนั้นเรียก Datasets->Stress->Entity->SYY ดังแสดงค่าทางคอมพิวเตอร์กราฟิกในรูปที่ 5.46 ค่าความเค้นมีค่าสูงสุดคือ ประมาณ 183 psi ซึ่งเกิดขึ้นบริเวณเอลิเมนต์หมายเลข 2170 หรือที่บ่าเพลานั้นเอง

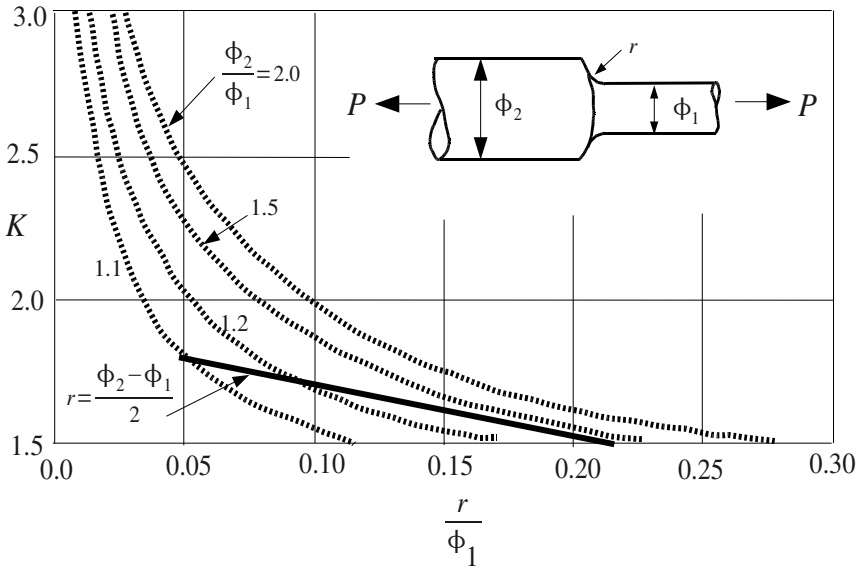
-อีกแนวทางคือตรวจสอบค่าจากผลคำนวณโดยตรงที่จุดอินทิเกรชั่นต่างๆ ของเอลิเมนต์หมายเลข 2170 โดยตรวจสอบจาก dat file พบข้อมูลรายงานดังนี้

```
stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set STEPPED_SHAFT and time
0.1000000E+01

 2170   1  5.350943E+01  1.509149E+02  5.340917E+01 -7.923245E+01 -2.230149E-03  1.076119E+00
 2170   2  2.173549E+01  1.909904E+02  5.206987E+01 -4.413853E+01  4.078491E-01  5.983909E-01
 2170   3  4.042408E+01  1.344677E+02  4.350263E+01 -4.243878E+01  3.938427E-02  5.744045E-01
 2170   4  5.351090E+01  1.509217E+02  5.341163E+01 -7.923919E+01  8.869609E-14  2.214604E-13
 2170   5  2.173481E+01  1.909919E+02  5.207737E+01 -4.414201E+01 -5.003809E-14  3.258985E-14
 2170   6  4.042334E+01  1.344679E+02  4.350321E+01 -4.244354E+01 -7.943866E-15  1.251003E-16
 2170   7  5.350943E+01  1.509149E+02  5.340917E+01 -7.923245E+01  2.230149E-03 -1.076119E+00
 2170   8  2.173549E+01  1.909904E+02  5.206987E+01 -4.413853E+01 -4.078491E-01 -5.983909E-01
 2170   9  4.042408E+01  1.344677E+02  4.350263E+01 -4.243878E+01 -3.938427E-02 -5.744045E-01
```

จากข้อมูลใน dat file ค่าความเค้น SYY สูงสุดที่จุดอินทิเกรชั่นคือ 191 psi ซึ่งมากกว่าที่ได้จากการรายงานภาพทาง Calulix GraphiX (CGX) เล็กน้อย สำหรับการเลือกค่าที่จุดอินทิเกรชั่นนั้นมีความแม่นยำมากกว่าเพราะเป็นผลจากการคำนวณโดยตรง จึงสรุปว่าความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นคือ 191 psi ในแนวแกน y



รูปที่ 5.46 ค่าความเค้นสูงสุดในแนวแกนเพลา (Syy) เกิดขึ้นที่บ่าเพลา



รูปที่ 5.47 ค่าตัวประกอบความเข้มความเค้น (SCF) ของเพลากลมมีบ่า

- การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์สามารถทำได้โดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของชิ้นงานที่เป็นเพลาแบบนี้ โดยหาค่า SCF (Stress Concentration Factor) โดยเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 5.47 ค่า K หรือ SCF ของบ่าเพลาที่มีรัศมีบ่าเพลาเท่ากับ 1 นิ้วและมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 นิ้วและ 20 นิ้ว พบว่า K เท่ากับ 2 ดังนั้นค่าแม่นตรงของความเค้นสูงสุดในแนวแกน y คือ $\sigma_{max} = K\sigma_o = 2(102) = 204$ psi ซึ่งมีความแตกต่างกับผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมประมาณ 6.8 %

5.6 เอกสารอ้างอิงบทที่ 5

[1] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, “Theory of Elasticity”, McGraw-Hill, New York, 1987

[2] Daryl L. Logan, “A First Course in the Finite Element Method”, 4th Edition, Thomson, Ontario, 2007

[3] Nam-Ho Kim, Bhavani V. Sankar, “Introduction to Finite Element Analysis and Design”, John Wiley & Sons, NJ, 2009

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Gmsh

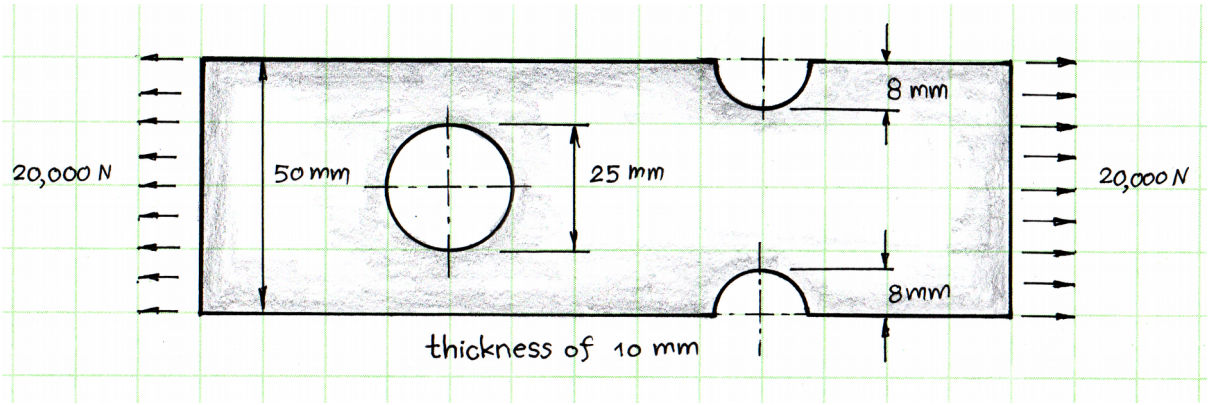
[5] Guido Dhondt, “CalculiX CrunchiX USER'S MANUAL”, version 2.8p2, March 19, 2015, www.calculix.de

[6] Ferdinand Beer, E. Russel Johnston, Jr. John Dewolf, David Mazurek, “Mechanics of Materials”, 7th Edition, McGrawHill, New York, 2015

[7] Arthur P. Boresi,Richard J. Schmidt, “Advanced Mechanics of Materials”, 6th Edition,John Wiley & Sons, NJ, 2003

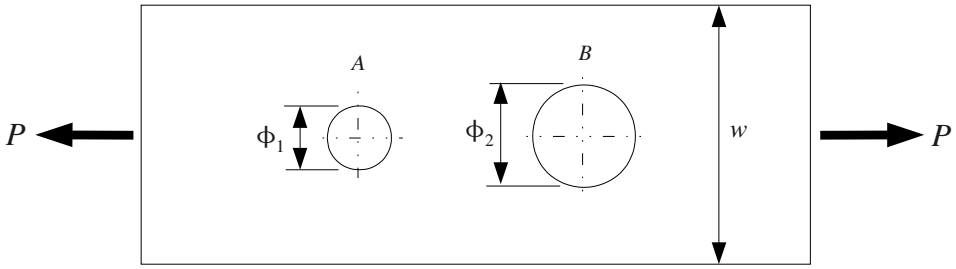
5.7 แบบฝึกหัดบทที่ 5

5.1) ชิ้นงานโลหะแผ่นบางมีรูเจาะและมีการบากขอบครึ่งวงกลมดังแสดงในรูปที่ P 5.1 ถ้าชิ้นงานทำจากอลูมินัมมีค่า E = 70 GPa ขณะที่มีแรงกระทำในแนวแกนที่ปลายทั้งสองเท่ากับ 20 kN จงเขียน inp file เพื่อหาค่าความเค้นสูงสุดในแนวแกนที่รูเจาะและรอยบาก พร้อมตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์



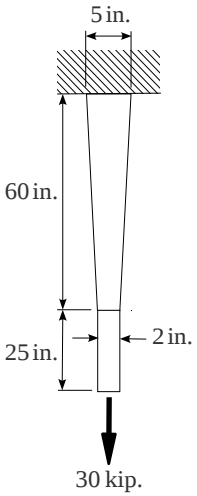
รูปที่ P 5.1

5.2) ชิ้นงานแผ่นเรียบหนา 6 mm มีรูเจาะสองรูที่ตำแหน่ง A และ B ดังรูปที่ 5.30 เมื่อ $\Phi_1=8$ mm $\Phi_2=12$ mm และ $w=36$ mm จงเขียน inp file พร้อมระบุค่า P ที่ทำให้ความเค้นในเนื้อวัสดุตามแนวแรงดึงมีค่าเกิน 560 MPa



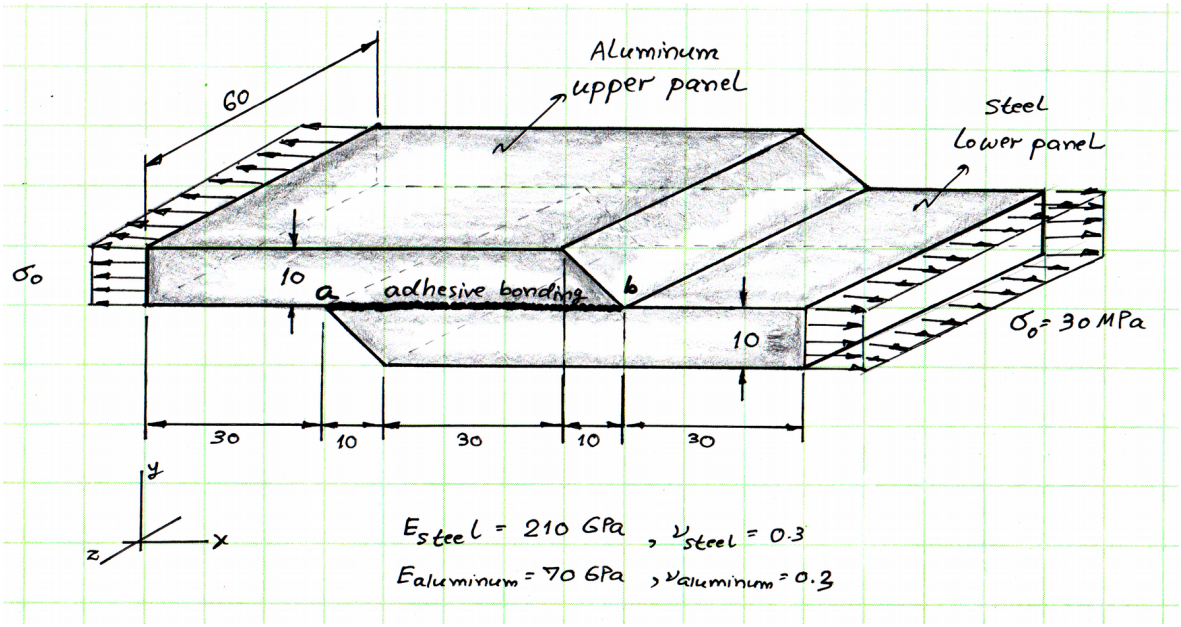
รูปที่ P 5.2

5.3) ชิ้นงานเหล็กกล้า ($E=29{,}000$ ksi , $\gamma=0.284$ lb/in^3) ดังรูปที่ P 5.3 หนาเท่ากันตลอดชิ้นงานเท่ากับ 2 in. จงเขียน inp file หาระยะยืดทั้งหมดของชิ้นงานเนื่องจากน้ำหนักและแรงดึงกระทำที่ปลาย (แนะนำให้ใช้คำสั่ง *DLOAD กับ gravity)



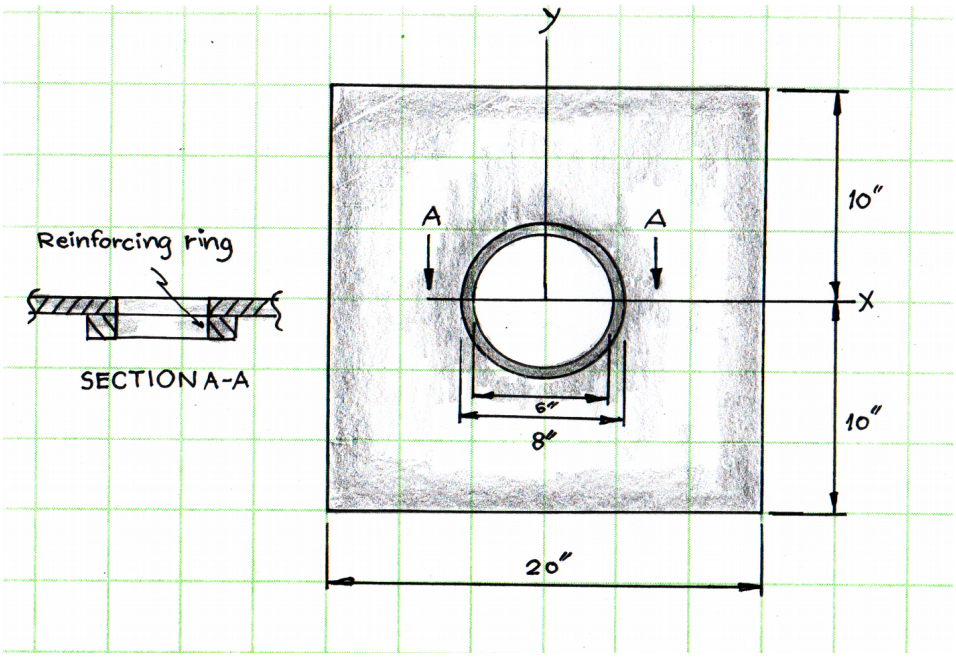
รูปที่ P 5.3

5.4) รูปที่ P 5.4 คือชิ้นงานต่อแบบเกยโดยมีการยึดติดแบบสมบูรณ์ตลอดช่วงรอยต่อ ab ที่เกยกัน ถ้าพิจารณาปัญหาในรูปแบบความเครียดในระนาบ จงหาเขียน inp file เพื่อหาค่าความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นที่รอยต่อ ab เมื่อระยะตัวเลขที่กำกับขนาดคือ มิลลิเมตร



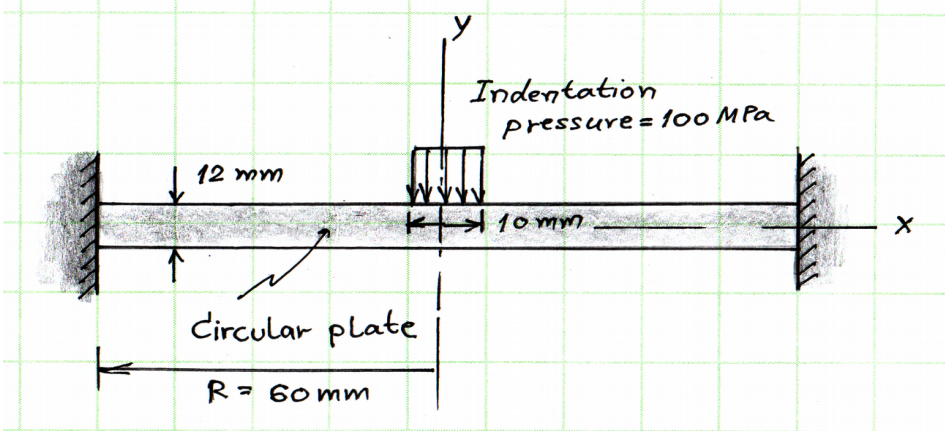
รูปที่ P 5.4

5.5) รูปที่ P 5.5 คือแผ่นเหล็ก (steel plate) หนา 1 นิ้วเจาะรูเส้นผ่านศูนย์กลาง 6 นิ้วทะลุความหนากึ่งกลางของแผ่น และเสริมรูเจาะด้วยแหวนเหล็กกล้า (steel reinforcing ring) โดยการเชื่อมติดบนรูเจาะ ทั้งนี้เพื่อลดความเค้นที่รูเจาะ เมื่อแผ่นเหล็กรับแรงดึงในแกน y เท่ากับ 6,000 psi จงเขียน inp file เพื่อหาค่าความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน (ข้อแนะนำใช้เอลิเมนต์ B32 กับแหวนและใช้ OFFSET สำหรับการเลื่อนแหวนไปแปะที่ผิวของแผ่นเหล็ก)



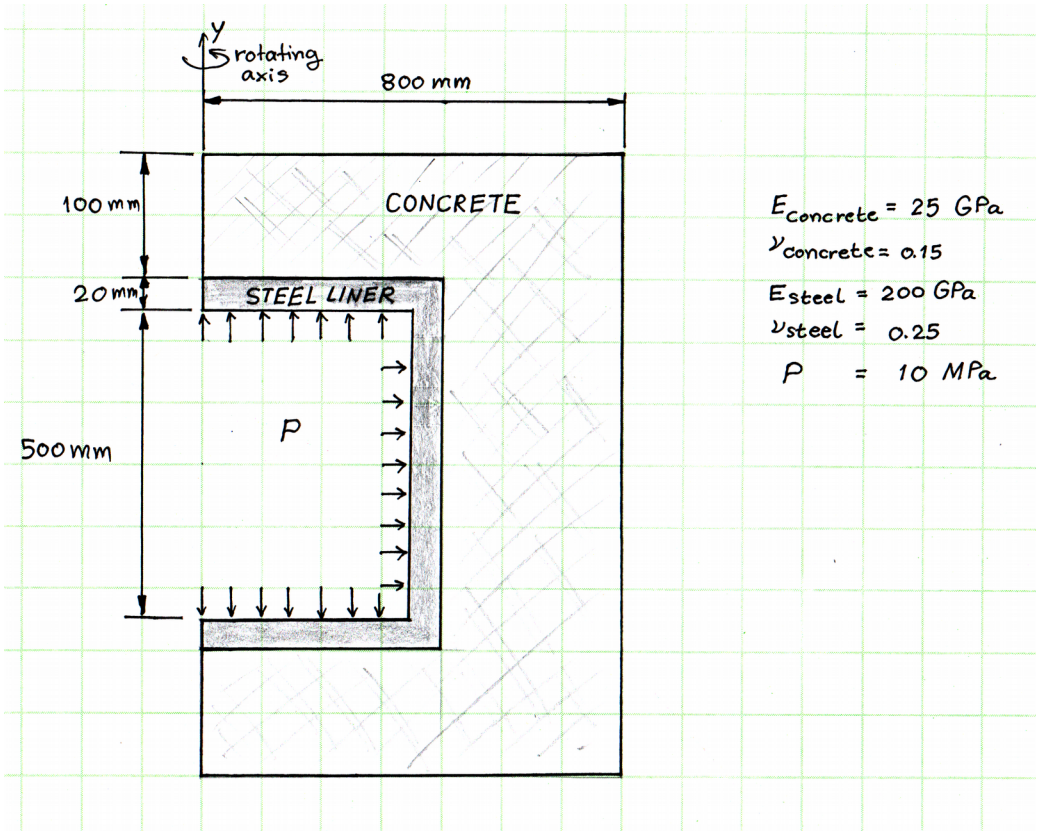
รูปที่ P 5.5

5.6) รูปที่ P 5.6 คือโลหะทำจากอลูมินัมแผ่นกลมรัศมี 60 มิลลิเมตรหนา 12 มิลลิเมตร ถูกจับยึดไว้ที่ขอบนอกบริเวณจุดศนย์กลางแผ่นมีแรงดันกดไว้ จงเขียน inp file เพื่อหาระยะโก่งตัวสูงสุดและความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นในแผ่นโลหะ โดยใช้เอลิเมนต์สมมาตรรอบแกนหมุน



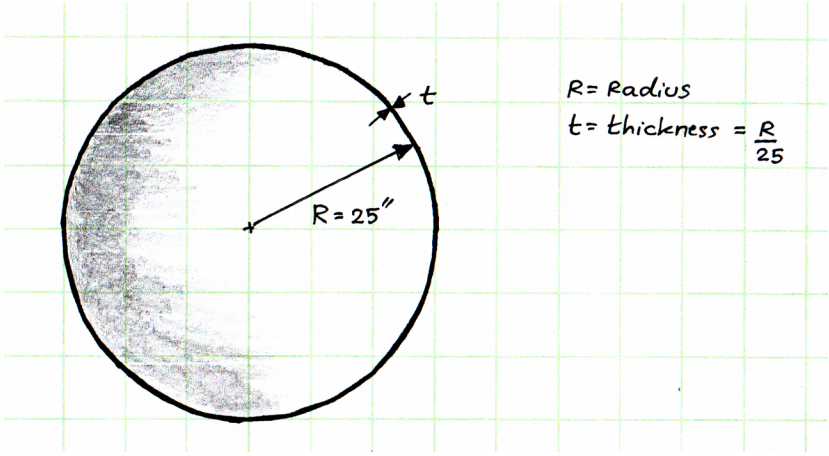
รูปที่ P 5.6

5.7) รูปที่ P 5.7 คืออุปกรณ์รับความดันทรงกระบอก มีสองชั้น ชั้นในทำจากเหล็กกล้า (steel) ชั้นนอกหุ้มด้วยคอนกรีต (concrete) เมื่ออุปกรณ์รับความดันภายในเท่ากับ 10 MPa จงเขียน inp file และแสดงค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในอุปกรณ์โดยสมมติให้ต้นแบบเป็นปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน



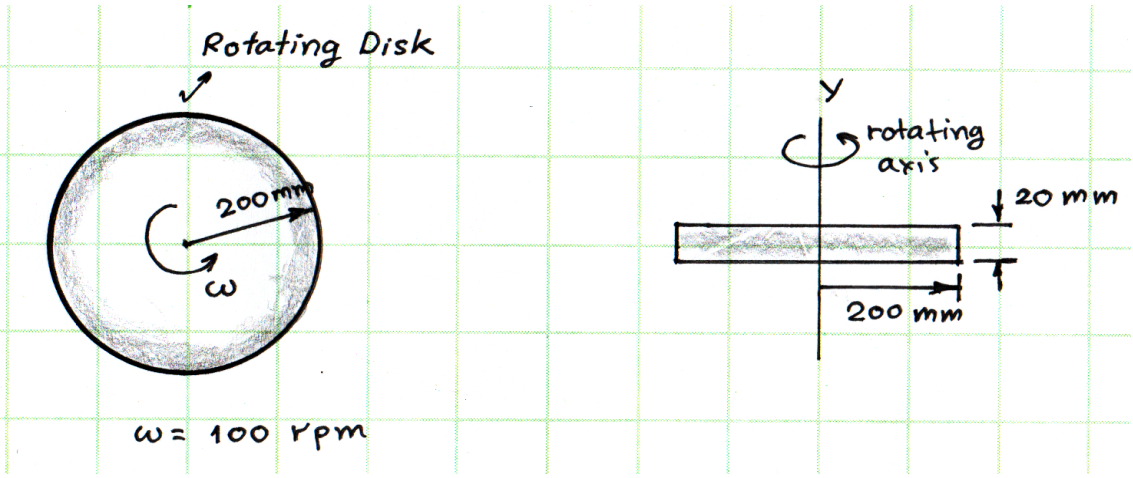
รูปที่ P 5.7

5.8) ถังทรงกลมทำจากเหล็กกล้ารับความดันภายในเท่ากับ 5 MPa ทดลองใช้การจำลองต้นแบบ 2D สมมาตรรอบแกนหมุนเพื่อหาค่าความเค้นในผนังและในแนวรัศมีของถังเมื่อมีการเปลี่ยนรูปเนื่องจากความดัน



รูปที่ P 5.8

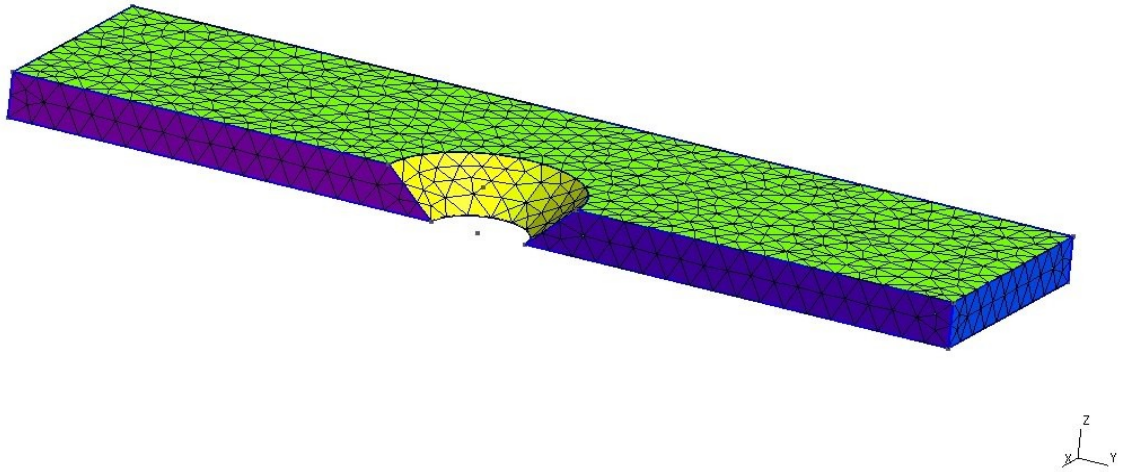
5.9) แผ่นจานหมุนดังแสดงในรูปที่ P 5.9 ทำจากเหล็กกล้า รัศมีและความหนาของแผ่นเท่ากับ 200 มิลิเมตร และ 20 มิลลิเมตร ตามลำดับ เมื่อแผ่นจานหมุนรอบแกน y ที่ผ่านจุดศูนย์กลางของแผ่น ด้วยความเร็วรอบเท่ากับ 100 รอบต่อนาที จงเขียน inp file พร้อมวิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นในแผ่นจานหมุน (ค่าความหนาแน่นเหล็กคือ 8000 kg/m^3 และค่าคงที่โน้มถ่วงโลกเท่ากับ 9.81 m/s^2)



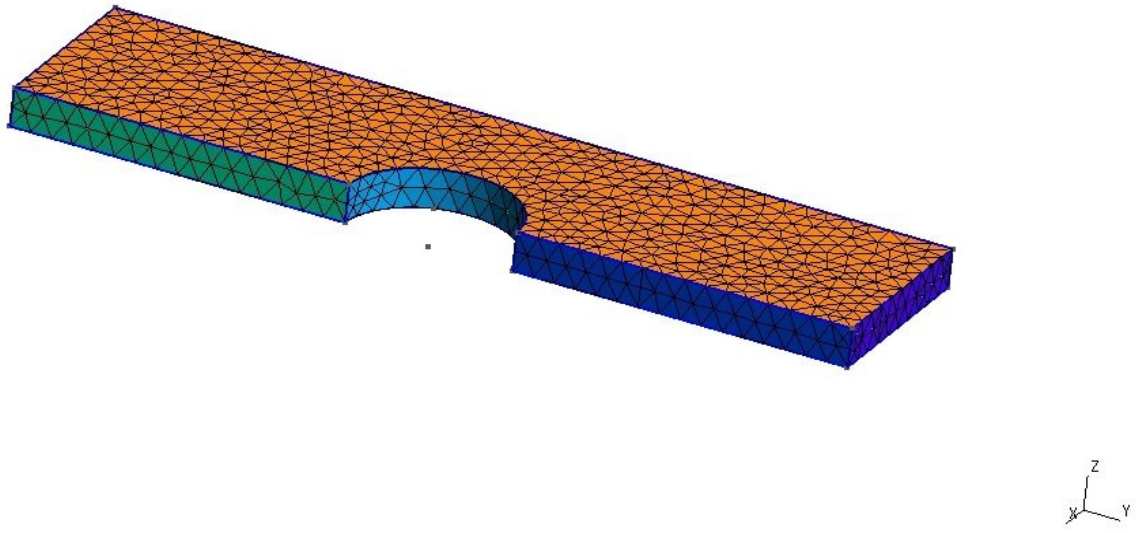
รูปที่ P 5.9

บทที่ 6 เอลิเมนต์ของแข็งในสามมิติวิเคราะห์ความเค้น

ในบทนี้เป็นการแนะนำให้รู้จักเอลิเมนต์ในสามมิติหรือ 3-D solid element มีหลายรูปทรง สามารถนำไปใช้วิเคราะห์หาความเค้นและการเปลี่ยนรูปของชิ้นงานรูปทรงซับซ้อน ซึ่งไม่สามารถนำเอลิเมนต์สองมิติในระนาบไปใช้วิเคราะห์หาคำตอบได้ ยกตัวอย่างเช่น ดังแสดงในรูปที่ 6.1 คือแบบครึ่งหนึ่งที่สมมาตรของแผ่นโลหะที่มีรูเจาะแบบเรียวทะลุความหนา



รูปที่ 6.1 สมมาตรของชิ้นงานแผ่นโลหะที่มีรูเจาะเรียวตามความหนา



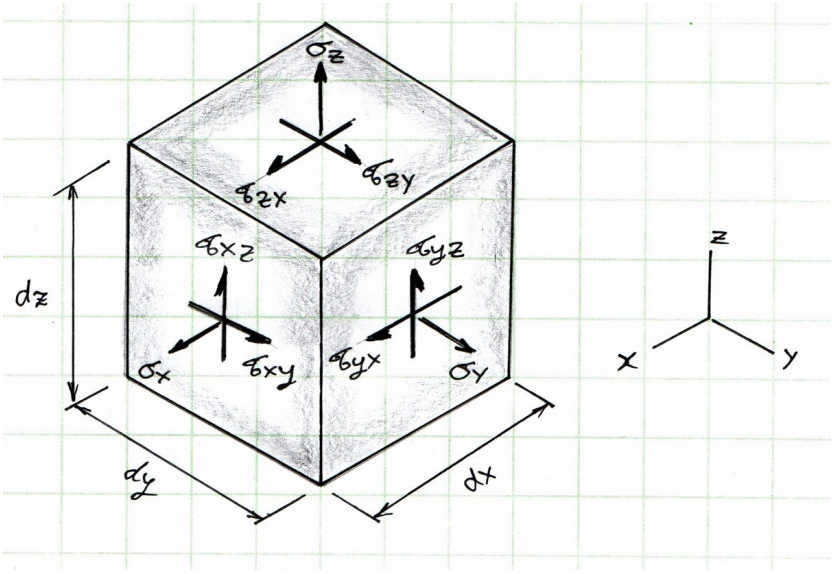
รูปที่ 6.2 สมมาตรของชิ้นงานแผ่นโลหะที่มีรูเจาะตรงตามความหนา

ชิ้นงานที่มีรูเจาะลักษณะแบบนี้มีเส้นผ่านศูนย์กลางของรูเจาะเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้นตลอดความหนา จากเหตุนี้มีผลทำให้พื้นที่ในระนาบ xy ไม่คงที่ตลอดความหนา จึงไม่สามารถใช้เอลิเมนต์ 2-D แบบความเค้นในระนาบและความเครียดในระนาบ (CPS และ CPE) ไปใช้วิเคราะห์หาความเค้นเมื่อรับแรงดึงในแนวแกน y ได้ ด้วยเหตุนี้จึงต้องใช้เอลิเมนต์ของแข็งในสามมิติกับต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งต่างจากชิ้นงานดังรูปที่ 6.2 ที่มีรูเจาะเส้นผ่านศูนย์กลางคงที่ตลอดความหนา ชิ้นงานแบบนี้สามารถใช้เอลิเมนต์ทั้งในแบบสองมิติในระนาบและแบบสามมิติกับต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ได้

ในตอนต้นของบทเป็นการนำเสนอสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด รวมถึงความเครียดกับฟังก์ชันการเคลื่อนตัวที่จุดใดๆ ของชิ้นงาน จากนั้นแนะนำรูปแบบเอลิเมนต์ ที่ใช้ในโปรแกรม CalculiX สำหรับวิเคราะห์ความเค้น และสุดท้ายแนะนำการใช้งาน GMSH และการเขียน inp file เพื่อวิเคราะห์หาความเค้นจากตัวอย่าง

6.1 ความเค้นและความเครียดใน 3 มิติ (3-D) ตามระบบพิกัดฉาก

ชิ้นงานที่เป็นของแข็งเมื่อมีแรงจากภายนอกกระทำจะเกิดความเค้นภายในเนื้อวัสดุในระบบพิกัดฉาก xyz สมมติที่จุดใดๆ ในเนื้อวัสดุสามารถจำลองความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนบนรูปลูกบาศก์ซึ่งมีขนาด dx dy และ dz ดังแสดงในรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 สภาวะความเค้นในสามมิติตามระบบพิกัดฉาก

เมื่อพิจารณาสมดุลแรงด้วยการแปลงความเค้นเป็นแรงตามแนวต่างๆ ที่กระทำบนพื้นที่ผิวของลูกบาศก์ พบว่า

$\tau_{xy}=\tau_{yx}$ $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ และ $\tau_{zx}=\tau_{xz}$

ความเค้นเกิดขึ้นจุดใดๆ ตามระบบพิกัดฉาก xyz คือ

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix} \tag{6.1}$$

และขณะเดียวกันความเครียดคือ

$$\{\epsilon\}=\begin{Bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \epsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix} \tag{6.2}$$

และเมื่อสมมติให้

$u(x,y,z)$ $v(x,y,z)$ และ $w(x,y,z)$ คือ ฟังก์ชันการเคลื่อนตัวที่จุด (x,y,z) ใดๆ ในแกน x y และ z ตามลำดับ จะได้ความเครียดดังนี้

$$\{\epsilon\}=\begin{Bmatrix}\epsilon_x=\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\\ \epsilon_y=\dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial y}\\ \epsilon_z=\dfrac{\partial w(x,y,z)}{\partial z}\\ \gamma_{xy}=\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+\dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}\\ \gamma_{yz}=\dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}+\dfrac{\partial w(x,y,z)}{\partial y}\\ \gamma_{zx}=\dfrac{\partial w(x,y,z)}{\partial x}+\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\end{Bmatrix} \tag{6.3}$$

สมมติวัสดุมีสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้น (elastic) และมีสมบัติไม่ขึ้นกับทิศทาง (isotropic)

$\{\sigma\}=[D]\{\epsilon\}$

เมื่อ E คือค่ามอดุลัสเชิงเส้นและ ν คืออัตราส่วนปัวซองดังนั้น

$$[D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

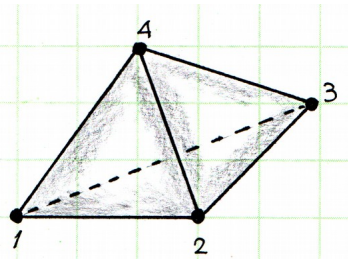
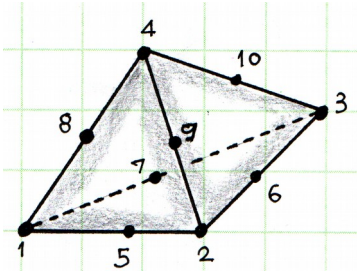
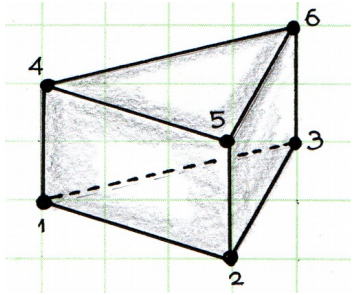
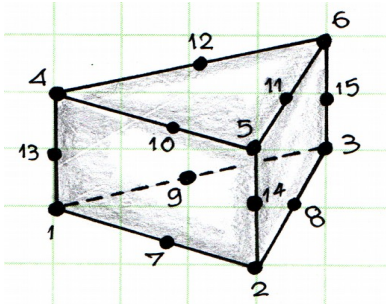
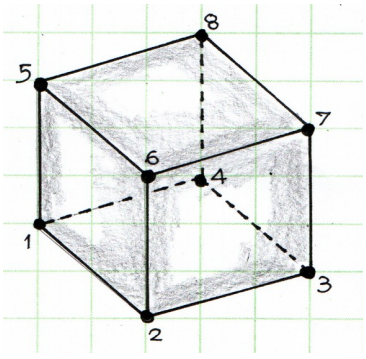
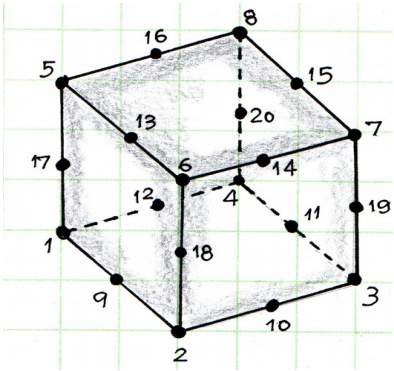
เมื่อ $[D]$ คือเมตริกซ์ที่กำหนดสมบัติยืดหยุ่นของวัสดุดังนั้นสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและฟังก์ชันการเคลื่อนตัวในสามมิติคือ

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}+\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

6.2 เอลิเมนต์ของแข็งในสามมิติ

รูปแบบและลักษณะของเอลิเมนต์ของแข็งในสามมิติมีอยู่ 6 แบบดังแสดงในตารางที่ 6.1

ตารางที่6.1 รูปแบบเอลิเมนต์ของแข็งในสามมิติ

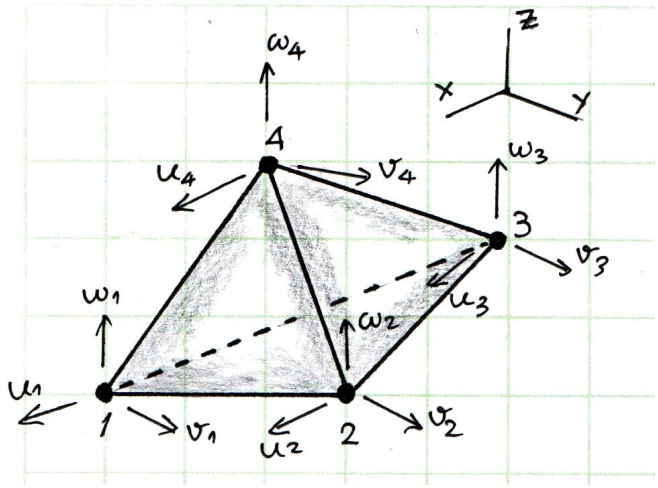
แบบเอลิเมนต์ (element type)	เอลิเมนต์อันดับที่หนึ่ง (First Order)	เอลิเมนต์อันดับที่สอง (Second Order)
รูปสามเหลี่ยม 4 หน้า Tetrahedral Element	 C3D4	 C3D10
รูปสามเหลี่ยมปริซึมห้าหน้า Triangular Prism Element	 C3D6	 C3D15
รูปสี่เหลี่ยมหกหน้า Hexahedral Element	 C3D8	 C3D20

จากตารางจำแนกรูปทรงเอลิเมนต์ออกได้สามรูปทรงคือ

1. รูปปิรามิดสี่หน้า (tetrahedral element) มีสองแบบย่อยคือ
    -อันดับที่หนึ่ง C3D4 (4-node linear tetrahedral element)
    -อันดับที่สอง C3D10 (10-node quadratic tetrahedral element)
2. รูปปริซึมห้าหน้า (triangular prism element) มีสองแบบย่อยคือ
    -อันดับที่หนึ่ง C3D6 (6-node linear triangular prism element)
    -อันดับที่สอง C3D15 (15-node quadratic triangular prism element)
3. รูปเหลี่ยมหกหน้า (hexahedral element) มีสองแบบย่อยคือ
    -อันดับที่หนึ่ง C3D8 (8-node linear hexahedral element)
    -อันดับที่สอง C3D20 (20-node quadratic hexahedral element)

6.3 สตีฟเนสเมตริกซ์ของเอลิเมนต์ C3D4

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์ของแข็งสามมิติมีหลักการเหมือนกับที่นำเสนอในการวิเคราะห์ความเค้นในปัญหาสองมิติดังที่นำเสนอไปในบทที่ 5 ต่างกันที่ รูปแบบของฟังก์ชันประมาณการ ฟังก์ชันรูปร่างการอินทิเกรทบนปริมาตร ในหัวข้อนี้จะนำเสนอเฉพาะเอลิเมนต์แบบทรงสามเหลี่ยมสี่หน้า (tetrahedral element) อันดับที่หนึ่ง C3D4 (4-node linear tetrahedral element) ให้พอเข้าใจการหาสตีฟเนสเมตริกซ์หรือเมตริกซ์ค่าคงที่สปริง เนื้อหาเริ่มจากการกำหนดฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์แบบนี้ ซึ่งมี 4 โหนด แต่ละโหนดมีองศาอิสระการเคลื่อนที่เท่ากับสามองศาอิสระ จากนั้นหาฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) หาสตีฟเนสเมตริกซ์ และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 6.4 องศาอิสระของแต่ละโหนดของเอลิเมนต์แบบ C3D4

รูปที่ 6.4 แสดงรูปแบบเอลิเมนต์ C3D4 ประกอบจากโหนด 1-2-3-4 โดย

-โหนดหมายเลข 1 อยู่ที่ตำแหน่ง (x_1, y_1, z_1)

-โหนดหมายเลข 2 อยู่ที่ตำแหน่ง (x_2, y_2, z_2)

-โหนดหมายเลข 3 อยู่ที่ตำแหน่ง (x_3, y_3, z_3)

-โหนดหมายเลข 4 อยู่ที่ตำแหน่ง (x_4, y_4, z_4)

แต่ละโหนดมีเวคเตอร์อิสระในการเคลื่อนตัวในแบบสามมิติตามฟังก์ชันการเคลื่อนตัวในแกน x คือ $u(x,y,z)$ ในแกน y คือ $v(x,y,z)$ และในแนว z คือ $w(x,y,z)$ สามารถเขียนเป็นเมตริกซ์กำหนดเวคเตอร์แต่ละโหนดได้ดังนี้คือ

$$\{d\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ . \\ . \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \tag{6.5}$$

เมื่อฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวในรูปพหุนามคือ

$$\begin{aligned} u(x,y,z)&=a_1+a_2x+a_3y+a_4z \\ v(x,y,z)&=a_5+a_6x+a_7y+a_8z \\ w(x,y,z)&=a_9+a_{10}x+a_{11}y+a_{12}z \end{aligned} \tag{6.6}$$

เมื่อ

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}=[X_{xyz}]\cdot\{A\} \tag{6.7}$$

$[X_{xyz}]$ คือกลุ่มตัวแปร x, y และ z

$\{A\}$ คือกลุ่มค่าคงที่ในฟังก์ชันประมาณการ

สำหรับเอลิเมนต์ C3D4 $[X_{xyz}]$ คือ

$$[X_{xyz}]=\begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$\{A\}$ สำหรับเอลิเมนต์ C3D4 คือ $\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ . \\ . \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix}$

เขียนฟังก์ชันการเคลื่อนที่ประมาณการอยู่ในรูปฟังก์ชั่นรูปร่างและค่าการเคลื่อนตัวของโหนดของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$\{\omega\}=[N]\cdot\{d\}$ และ $\{\omega\}=[X_{xyz}]\cdot[x]^{-1}\cdot\{d\}$

ดังนั้นฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์คือ

$$[N]=[X_{xyz}]\cdot[x]^{-1} \tag{6.9}$$

เมื่อ $[X_{xyz}]$ ตามปรากฏในสมการ (6.8)

และ $[x]$ คือ

$$[x]=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

ดังนั้นฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) สำหรับเอลิเมนต์ C3D4 คือ

$$[N]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

เมื่อ

$$N_1=\frac{(\alpha_1+\beta_1 x+\gamma_1 y+\delta_1 z)}{6V} \qquad N_2=\frac{(\alpha_2+\beta_2 x+\gamma_2 y+\delta_2 z)}{6V}$$

$$N_3=\frac{(\alpha_3+\beta_3 x+\gamma_3 y+\delta_3 z)}{6V} \qquad N_4=\frac{(\alpha_4+\beta_4 x+\gamma_4 y+\delta_4 z)}{6V} \tag{6.12}$$

เมื่อ

$$6V=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \tag{6.13}$$

และ

$$\alpha_1=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \beta_1=-\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \gamma_1=-\begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \delta_1=-\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \tag{6.14}$$

$$\alpha_2=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \beta_2=\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \gamma_2=-\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \delta_2=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \tag{6.15}$$

$$\alpha_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \beta_3=-\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \gamma_3=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \delta_3=-\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \tag{6.16}$$

$$\alpha_4=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \beta_4=\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \gamma_3=-\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \delta_3=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{6.17}$$

ดังนั้นเขียนฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัวอยู่ในรูปฟังก์ชันรูปร่างและเวคเตอร์การเคลื่อนที่ของโหนดได้ดังนี้

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}=[N]\cdot\{d\}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \tag{6.18}$$

จากนั้นหาความเครียดของเอลิเมนต์ C3D4 ในรูปฟังก์ชันรูปร่าง $[N]$ และค่าเวคเตอร์การเคลื่อนตัวของโหนด $\{d\}$ ได้จากสมการ 6.3-6.4

$$\{\epsilon\}=\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \epsilon_x=\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} \\ \epsilon_y=\dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} \\ \epsilon_z=\dfrac{\partial w(x,y,z)}{\partial z} \\ \gamma_{xy}=\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+\dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \\ \gamma_{yz}=\dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}+\dfrac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} \\ \gamma_{zx}=\dfrac{\partial w(x,y,z)}{\partial x}+\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} \end{Bmatrix}=[B]\cdot\{d\} \tag{6.19}$$

เมื่อ

$$[B]=[\underline{B_1} \quad \underline{B_2} \quad \underline{B_3} \quad \underline{B_4}] \tag{6.20}$$

$$\underline{B_1}=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \underline{B_2}=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B_3}=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \underline{B_4}=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

เมื่อหาค่า $[B]$ จากสมการ (6.19)-(6.21) และทราบความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจากสมการที่ (6.4) จะได้สมการความสัมพันธ์ในรูปของความเค้นกับเวคเตอร์การเคลื่อนที่ของโหนดดังนี้

$$\{\sigma\}=[D][B]\{d\}$$

ในทำนองเดียวกันค่าความแข็งสปริงของเอลิเมนต์สมมาตรมีหลักการหาเหมือนกับที่นำเสนอในหัวข้อ 5.1

$$[k_e]=\int [B]^T[D][B]dV$$

เมตริกซ์ $[B]$ ได้จากสมการ (6.20)-(6.21) และ $[D]$ จากสมการที่ (6.4) สำหรับ dV คือปริมาตรเล็กตามระบบพิกัดฉาก $dV = dx\,dy\,dz$ ดังนั้นค่าความแข็งสปริงของเอลิเมนต์หรือสทีฟเนสเมตริกซ์ของเอลิเมนต์คือ

$$[k_e]=\iiint [B]^T[D][B]\,dx\,dy\,dz \tag{6.22}$$

ซึ่งมีขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 12 x 12 สำหรับเอลิเมนต์ชนิดอื่นสิ่งที่แตกต่างออกไปคือ $[B]$ ทั้งนี้ $[N]$ เปลี่ยนไปตามฟังก์ชันประมาณการของแต่ละเอลิเมนต์

แรงที่กระทำต่อเอลิเมนต์เช่น แรงจากรูปร่าง (Body Force) แรงกระทำที่ผิว (Traction Force) ยังคงมีหลักการหาเหมือนกับเอลิเมนต์ในระนาบคือการกระจายแรงไปที่โหนด และมีเทคนิคแตกต่างตรงที่การอินทิเกรทบนปริมาตรและพื้นที่

-สำหรับ แรงจากรูปร่าง (Body Force) $\{X_b\}$ ที่กระทำต่อเอลิเมนต์ 3-D สามารถเขียนอยู่ในรูปเวคเตอร์ในทิศทาง x y และ z คือ

$$\{X_b\}=\begin{Bmatrix} X_b^x \\ X_b^y \\ X_b^z \end{Bmatrix} \tag{6.23}$$

แรงที่กระทำต่อรูปร่างกระจายไปยังโหนดที่แต่ละเอลิเมนต์โดยฟังก์ชันรูปร่างเป็นตัวกำหนดคือ

$$\{f_b^e\}=\iiint [N]^T\{X_b\}\,dx\,dy\,dz \tag{6.24}$$

จากสมการ (611) และ (6.23) ได้ว่า

$$\{f_b^e\}=\iiint \begin{Bmatrix} N_1X_b^x \\ N_1X_b^y \\ N_1X_b^z \\ N_2X_b^x \\ N_2X_b^y \\ N_2X_b^z \\ N_3X_b^x \\ N_3X_b^y \\ N_3X_b^z \\ N_4X_b^x \\ N_4X_b^y \\ N_4X_b^z \end{Bmatrix} dx\,dy\,dz \tag{6.25}$$

-สำหรับ แรงกระทำที่ผิว (Traction Force) $\{T\}$ ที่กระทำต่อเอลิเมนต์ในสามมิติมีสมการพื้นฐานคือ

$$\{f_s^e\}=\iint [N_s]^T\{T\}\,dA \tag{6.26}$$

6.4 ตัวอย่างการใช้งานเอลิเมนต์ C3D4 วิเคราะห์ความเค้น

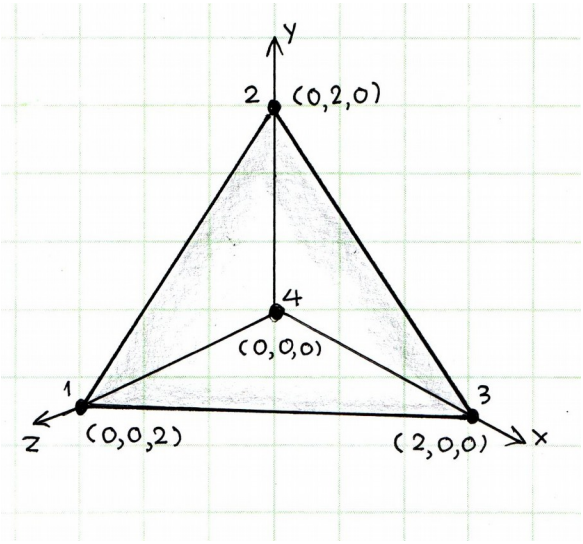
<u>ตัวอย่างที่</u> 6.1 [1] เอลิเมนต์ 3-D มีรูปร่างและขนาดดังรูปที่ 6.5 จงเขียน inp file เพื่อหาความเค้นในเอลิเมนต์ กำหนดให้ใช้เอลิเมนต์ C3D4 จำนวน 1 เอลิเมนต์เท่านั้น โดยกำหนดเงื่อนไขการเคลื่อนที่คือ

$u_1 = 0.005$ in. $u_2 = 0.001$ in. $u_3 = 0.005$ in. $u_4 = -0.001$ in.

$v_1 = 0.0$ in. $v_2 = 0.0$ in. $v_3 = 0.0$ in. $v_4 = 0.0$ in.

$w_1 = 0.0$ in. $w_2 = 0.001$ in. $w_3 = 0.0$ in. $w_4 = 0.005$ in.

และค่าคงที่สมบัติวัสดุคือ $E = 30\,x\,10^6$ psi และ $\nu = 0.3$



รูปที่ 6.5 เอลิเมนต์แบบ C3D4 และตำแหน่งของโหนด

<u>การเขียน inp file</u>

1. กำหนดหัวเรื่องคือ `ch61.inp 1 element of C3D4`

```
*Heading
ch61.inp 1 element of C3D4
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดพร้อมคู่ลำดับ (x,y,z) มีทั้งหมด 4 โหนดตามที่โจทย์ให้ข้อมูลมา และโหนดทั้งหมดถูกกำหนดชื่อกลุ่มว่า Nall

```
*Node,NSET=Nall
1,0.0,0.0,2.0
2,0.0,2.0,0.0
3,2.0,0.0,0.0
4,0.0,0.0,0.0
```

3. กำหนดเอลิเมนต์และระบุประเภทเอลิเมนต์ เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ใช้เอลิเมนต์แบบ C3D4 จำนวน 1 เอลิเมนต์ ตั้งชื่อกลุ่มเอลิเมนต์ว่า el1 ซึ่งมีเอลิเมนต์หมายเลข 1 ประกอบขึ้นจากโหนดหมายเลข 1-3-4-2 ซึ่งเรียงตามทิศทวนเข็มนาฬิกา

```
*Element, type=C3D4, ELSET=el1
1, 1, 3, 4, 2
```

4. กำหนดค่าสมบัติทางกลของวัสดุ ในข้อนี้กำหนดเป็นเหล็กกล้า (STEEL) มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้นเท่ากับ 30×10^6 psi และมีอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
30E+06,0.3
```

5.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า el1 ให้มีสมบัติตามค่าของเหล็กกล้าที่กำหนดในข้อ 4.

```
*SOLID SECTION,ELSET=el1,MATERIAL=STEEL
1.0
```

6 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

7. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)
-กำหนดการเคลื่อนที่ของแต่ละโหนดตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ ที่โหนด 1-2-3-4 ดังนี้

```
*BOUNDARY
1,1,1,0.005
1,2,2,0.0
1,3,3,0.0
2,1,1,0.001
2,2,2,0.0
2,3,3,0.001
3,1,1,0.005
```

```
3,2,2,0.0
3,3,3,0.0
4,1,1,-0.001
4,2,2,0.0
4,3,3,0.005
```

8. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions) จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file)

```
*EL PRINT,ELSET=el1
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U
*NODE FILE
U
*EL FILE
S
```

9. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

10. การตรวจสอบผลลัพธ์

ตรวจสอบผลคำนวณความเค้นโดยตรงจาก dat file พบข้อมูลรายงานดังนี้

```
 stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set EL1 and time  0.1000000E+01
  1   1  7.788462E+04  8.653846E+03 -4.903846E+04  1.153846E+04  5.769231E+03 -2.307692E+04
```

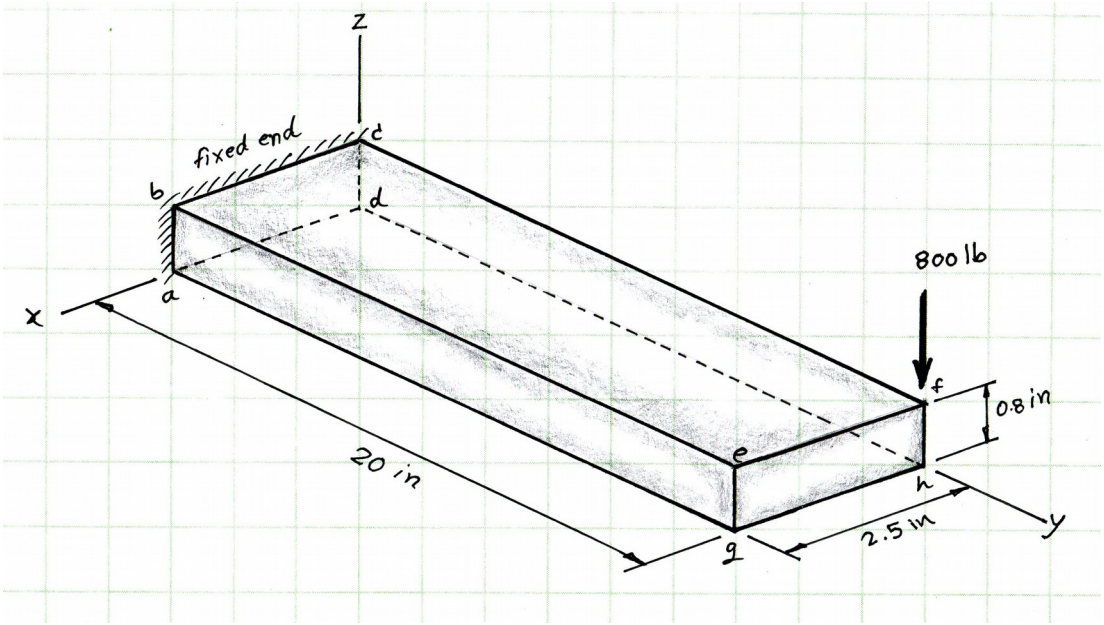
จากรายงาน dat file พบว่าที่เอลิเมนต์หมายเลข 1 ซึ่งในตัวอย่างนี้มีแค่เอลิเมนต์เดียวที่มีความเค้นเกิดขึ้นคือ

$\sigma_{xx} = 77.88$ ksi $\quad \sigma_{yy} = 8.65$ ksi $\quad \sigma_{zz} = -49.04$ ksi

$\tau_{xy} = 11.54$ ksi $\quad \tau_{yz} = -23.08$ ksi $\quad \tau_{zx} = 57.69$ ksi

ซึ่งพออธิบายได้ว่าเอลิเมนต์นี้มีความเค้นตั้งฉากแบบดึงเกิดขึ้นในแนวแกน x และ y ส่วนในแนวแกน z มีความเค้นอัดเกิดขึ้น สำหรับความเค้นเฉือนนั้นเกิดขึ้นบนทุกระนาบทุกทิศทางโดยมีความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นบนระนาบ z ทิศทางในแกน x

<u>ตัวอย่างที่</u> 6.2 [1] จงเขียน inp file เพื่อวิเคราะห์หาระยะโก่งและความเค้นหลักสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานทำจากเหล็กมีปลายหนึ่งฝังและอีกปลายยื่นอิสระ (cantilever beam) ดังรูปที่ 6.6 โดยกำหนดให้ใช้เอลิเมนต์ C3D4 และกำหนดให้มีค่าสมบัติวัสดุคือ $E = 30x10^6$ psi และ $\nu=0.3$



รูปที่ 6.6 แบบสามมิติของคานฝังปลายยื่นอิสระ (cantilever beam)

<u>การสร้าง Mesh ต้นแบบด้วย GMSH</u>

-เริ่มต้นจากการสร้าง point ทั้ง 4 points คือ a-b-c-d ซึ่งมีคู่ลำดับ (x,y,z) ดังนี้

-จุด d เป็นจุดที่1 พิกัดคือ (0,0,0)

-จุด c เป็นจุดที่2 พิกัดคือ (0,0,0.8)

-จุด b เป็นจุดที่3 พิกัดคือ (2.5,0,0.8)

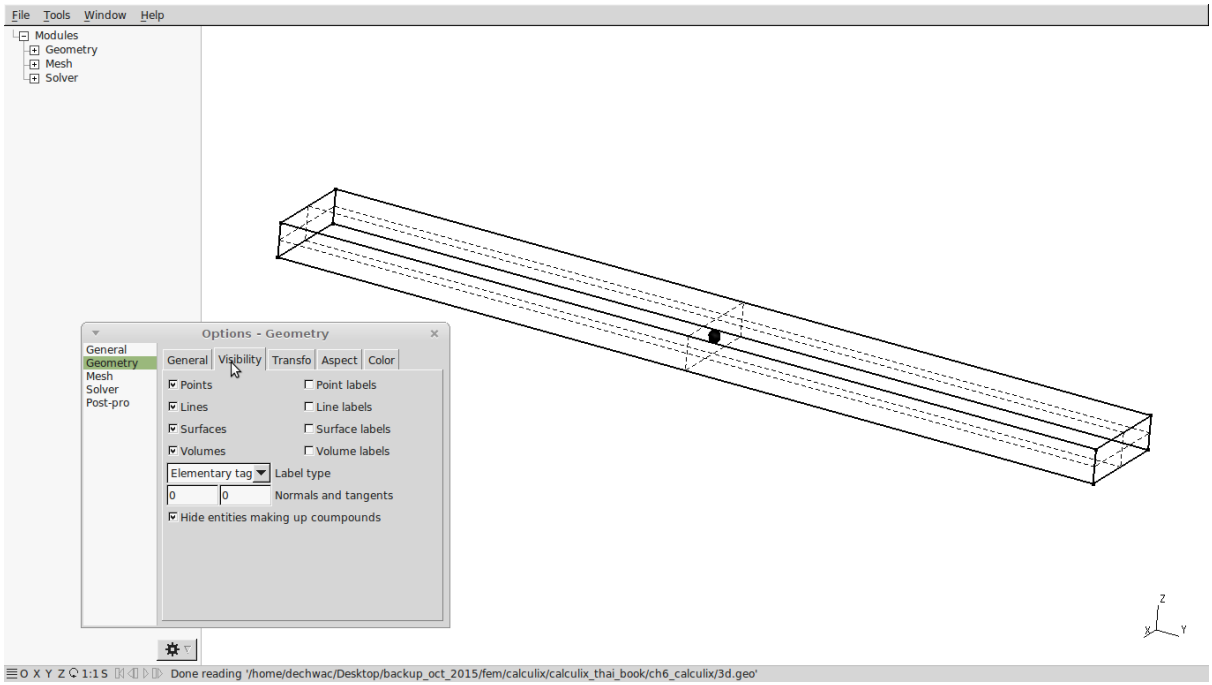
-จุด a เป็นจุดที่4 พิกัดคือ (2.5,0,0.)

-จากนั้นสร้าง line จากจุดต่างๆ แล้วสร้าง plane surface จาก line

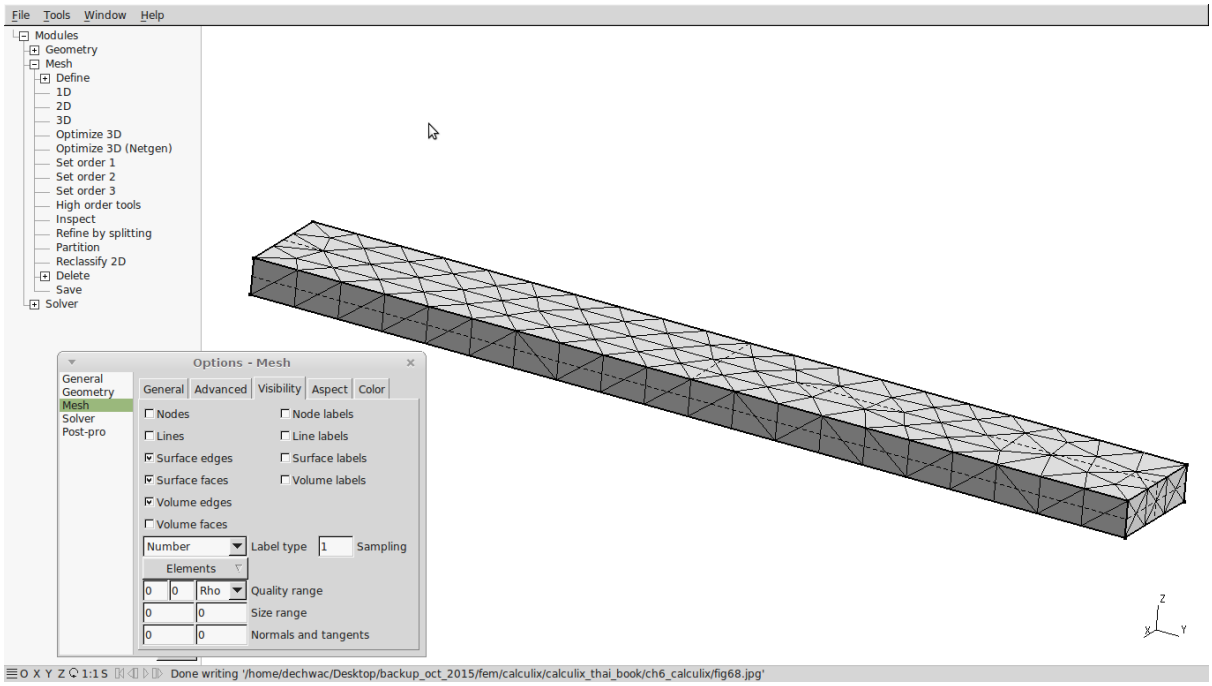
-เมื่อได้ plane surface แล้วใช้วิธีการ extrude เพื่อสร้าง volume

-ก่อนทำการ mesh ตรวจสอบความถูกต้องของ surface และ volume ที่เกิดขึ้นก่อนโดยให้ GMSH แสดง surface และ volume โดยการไปที่ Tools->Options->Geometry->Visibility->click surface และ click volume จากนั้น GMSH จะแสดงรูปร่างของต้นแบบ จุดสีดำคือ volume และเส้นประคือ surface ดังแสดงในรูปที่ 6.7

-ทำการ mesh 3D บน volume จากนั้นไปที่ Tools->Options->Mesh->Visibility->click surface edges และ click click surface faces เพื่อแสดงภาพเอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นดังแสดงในรูปที่ 6.8



รูปที่ 6.7 เส้นแสดงขอบและปริมาตรของชิ้นงานจาก GMSH



รูปที่ 6.8 การแบ่งเอลิเมนต์ด้วย GMSH

- ตัวอย่าง geo file ในรูปแบบ text ของตัวอย่างนี้ก่อนการ meshing

```
Point(1) = {0, 0, 0, 1.0};
Point(2) = {0, 0, 0.8, 1.0};
Point(3) = {2.5, 0, 0.8, 1.0};
Point(4) = {2.5, 0, 0, 1.0};
Line(1) = {2, 3};
Line(2) = {3, 4};
Line(3) = {4, 1};
Line(4) = {1, 2};
Line Loop(5) = {3, 4, 1, 2};
Plane Surface(6) = {5};
Extrude {0, 20, 0} { Surface{6}; }
Surface Loop(29) = {23, 6, 15, 19, 28, 27};
Volume(30) = {29};
```

-แปลงไฟล์จาก geo format เป็น geo inp format

-ใช้ Launcher-Calculix แปลง geo inp format เป็น CCX inp format โดยเลือก Pool's Converter

-จากนั้นเปลี่ยนชนิดเอลิเมนต์ เป็นแบบ C3D4

-ตรวจสอบ mesh โดยการเรียก Launcher-Calculix และ run CCX inp file แบบ Preprocessor Mode

-ปรับแต่ง inp file อีกครั้งให้สมบูรณ์ต่อไป

<u>การเขียน inp file</u>

1. กำหนดหัวเรื่องคือ `ch62.inp rectangular beam using element type C3D4`

```
*Heading
ch62.inp rectangular beam using element type C3D4
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดพร้อมคู่ลำดับ (x,y,z) ที่เกิดจากการสร้างด้วยโปรแกรม GMSH สำหรับต้นแบบนี้มีทั้งหมด 205 โหนด และโหนดทั้งหมดถูกกำหนดชื่อกลุ่มว่า Nall

```
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,8.000000119209e-01
3,2.500000000000e+00,0.000000000000e+00,8.000000119209e-01
4,2.500000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
5,2.500000000000e+00,2.000000000000e+01,0.000000000000e+00
….....................................................
….....................................................
201,2.083333253860e+00,2.000000000000e+01,4.000000059605e-01
202,1.250000000000e+00,2.000000000000e+01,4.000000059605e-01
203,4.166666567326e-01,2.000000000000e+01,4.000000059605e-01
204,2.227999925613e+00,9.440029144287e+00,4.749633967876e-01
205,2.252635955811e+00,9.616374969482e+00,5.279999971390e-01
```

3. ใช้ GMSH สร้าง กลุ่มโหนด (NSET) ที่อยู่บนแต่ละ Line ต่างๆ ทั้งหมดและสร้างกลุ่มโหนดที่อยู่บนแต่ละ Surface มาให้ ข้อมูลเหล่านี้มีประโยชน์ในการนำไปกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่อไป จากปัญหาข้อนี้ต้องทำการยึดระนาบ abcd เข้ากับผนัง ดังนั้นจะต้องสำรวจดูว่า inp file ที่ได้มานั้น ผิวของระนาบ abcd ตรงกับ NSET อะไร

4. ใช้ GMSH ได้สร้างกลุ่มเอลิเมนต์และกำหนดประเภทของเอลิเมนต์ ขั้นตอนนี้ทำการตรวจสอบว่าสอดคล้องกับประเภทเอลิเมนต์ที่ต้องการหรือไม่ ถ้าไม่สอดคล้องให้ทำการเปลี่ยนรูปแบบเอลิเมนต์เป็นแบบ `type=C3D4` ตามที่ต้องการและเปลี่ยนชื่อกลุ่มเอลิเมนต์เป็น `ELSET=beam` ซึ่งมีทั้งหมดจำนวน 510 เอลิเมนต์ มีหมายเลขเอลิเมนต์เริ่มตั้งแต่ 719-1228

```
*Element, type=C3D4, ELSET=beam
719, 171, 161, 170, 116
720, 134, 157, 185, 106
721, 159, 135, 180, 186
722, 182, 171, 116, 131
……
….
1224, 83, 135, 204, 205
1225, 83, 204, 82, 205
1226, 186, 205, 82, 204
1227, 205, 180, 83, 135
1228, 186, 204, 135, 205
```

5. กำหนดค่าสมบัติทางกลของวัสดุ ในข้อนี้กำหนดเป็นเหล็กกล้า (STEEL) มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้นเท่ากับ 30×10^6 psi และมีอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
30E+06,0.3
```

6.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า beam ให้มีสมบัติตามค่าของเหล็กกล้าที่กำหนดในข้อ 5

```
*SOLID SECTION,ELSET=beam,MATERIAL=STEEL
1.0
```

7 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

8. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) จาก inp file ที่แปลงมาจาก GMSH พบว่ากลุ่มโหนดที่อยู่บนระนาบ abcd ที่ต้องการยึดไว้ไม่ให้เคลื่อนที่คือ

```
*NSET,NSET= ….(ชื่อ Surface ที่ GMSH ตั้งขึ้นมาให้).
10
3
93
94
9
1
95
12
11
4
2
```

เปลี่ยนชื่อกลุ่มโหนดนี้เป็น fixed_plane ดังนั้นใน inp file จะถูกเปลี่ยนเป็น

```
*NSET,NSET=fixed_plane
10
3
93
94
9
1
95
12
11
4
2
```

และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต โดยกำหนดให้กลุ่มโหนดที่อยู่บนระนาบ abcd นี้ถูกบังคับไม่ให้เคลื่อนที่เนื่องจากมีการฝังปลายคานเข้ากับผนังตามเงื่อนไขโจทย์

```
*BOUNDARY
fixed_plane,1,3,0.0
```

9. กำหนดเงื่อนไขภาระแรงกระทำ (load conditions) ในขั้นตอนนี้ทำการเขียนคำสั่งกำหนดแรงกระทำตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดคือมีแรงกระทำที่จุด f ขนาด 800 lb_f ในทิศลงตามแกน z ซึ่งจากโมเดลจุด f คือโหนดหมายเลข 8 ดังนั้นสามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*CLOAD
8,3,-800
```

10. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions) จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file)

```
*EL PRINT,ELSET=beam
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U
*NODE FILE
U
*EL FILE
S
```

11. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

12. การตรวจสอบผลลัพธ์และความถูกต้อง โดยตรวจสอบค่าการโก่งตัวของปลายคานอิสระจากค่าผลเฉลยแม่นตรงของคานฝังปลายยื่นอิสระ (cantilever beam) อย่างไรก็ตามผลเฉลยแม่นตรงที่มีอาจไม่ครอบคลุมเงื่อนไขทั้งหมดแต่น่าจะนำมาเป็นค่าเทียบเพื่อหาแนวโน้มของความเป็นได้ของผลลัพธ์

สำหรับผลเฉลยแม่นตรงของคานคือ ระยะโก่งสูงสุดในแนวแกน z ที่เกิดขึ้นของคานเกิดขึ้นที่ปลายของ efgh ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\delta^{z}_{max} = \frac{-PL^3}{3EI} = \frac{(-800)(20)^3}{3(30x10^6)(\frac{1}{12}(2.5)(0.8)^3)} = -0.667 \text{ in.}$$

เมื่อ P คือแรงกระทำที่ปลายคาน L คือระยะของคาน E คือค่ามอดุลัสยืดหยุ่น I คือค่าโมเมนต์พื้นที่หน้าตัดของคานรอบแกนสะเทิน

สำหรับการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของระยะโก่งตัวที่จุด f หรือที่โหนดหมายเลข 2 จาก dat file (ค่าที่ขีดเส้นใต้) มีค่าดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  1.522695E-03  3.586576E-03 -1.228942E-01
         2  7.697344E-04 -3.809716E-03 -1.229299E-01
```

นั้นคือเมื่อพิจารณาค่าระยะโก่งในแนวแกน z ของโหนดหมายเลข 2 คือ -0.1229 in. ซึ่งมีค่าที่คลาดเคลื่อนจากค่าผลลัพธ์แม่นตรงมากเกินไป จึงพอสรุปได้ว่าการใช้ C3D4 ในข้อนี้ให้ผลลัพธ์ของระยะโก่งที่คลาดเคลื่อนซึ่งอาจเกิดจากสาเหตุที่เอลิเมนต์แบบนี้มีความแข็งในการรับแรงในแนวแนวขวางหรือแรงเฉือนเกิดการล็อคของเอลิเมนต์เนื่องจากการมีพฤติกรรมเป็น linear element หรือที่เรียกว่า shear locking [2] แนวทางในการปรับปรุงผลลัพธ์ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้แม่นยำขึ้น สามารถทำได้โดยการเปลี่ยนแปลงรูปแบบเอลิเมนต์เป็นแบบ quaratic element หรือ C3D10 ซึ่งจะนำเสนอในตัวอย่างที่ 6.3 ต่อไป

ตัวอย่างที่ 6.3 [1] จงเขียน inp file เพื่อหาคำตอบระยะโก่งและความเค้น โดยการใช้เอลิเมนต์เป็นแบบ quaratic element หรือ C3D10 แทน C3D4

การสร้าง Mesh ต้นแบบด้วย GMSH

-เรียกใช้ geo file ที่ได้จากตัวอย่าง 6.2
-ทำการ meshing บนปริมาตรเดิมโดยคำสั่ง File->Mesh->Define->3D->Set order 2
-แปลงไฟล์จาก geo format เป็น geo inp format
-ใช้ Launcher-Calculix แปลง geo inp format เป็น CCX inp format โดยเลือก Pool's Converter
-จากนั้นเปลี่ยนชนิดเอลิเมนต์ เป็นแบบ C3D10
-ตรวจสอบ mesh โดยการเรียก Launcher-Calculix และ run CCX inp file แบบ Preprocessor Mode
-ปรับแต่ง inp file อีกครั้งให้สมบูรณ์ต่อไป

การเขียน inp file

1. กำหนดหัวเรื่องคือ `ch63.inp rectangular beam using element type C3D10`

```
*Heading
ch63.inp rectangular beam using element type C3D10
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดพร้อมคู่ลำดับ (x,y,z) ที่เกิดจากการสร้างด้วยโปรแกรม GMSH สำหรับต้นแบบนี้มีทั้งหมด 1059 โหนด และโหนดทั้งหมดถูกกำหนดชื่อกลุ่มว่า Nall

```
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,8.000000119209e-01
3,2.500000000000e+00,0.000000000000e+00,8.000000119209e-01
4,2.500000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
5,2.500000000000e+00,2.000000000000e+01,0.000000000000e+00
….....................................................
….....................................................
1055,8.935542106628e-01,6.777966618538e-01,4.000000059605e-01
1056,2.291666746140e+00,1.950000000000e+01,6.000000238419e-01
1057,3.128450512886e-01,1.526352882385e+01,4.000000059605e-01
1058,3.122830092907e-01,1.677408409119e+01,4.000000059605e-01
1059,3.124639987946e-01,1.576039123535e+01,4.000000059605e-01
```

3. ใช้ GMSH สร้าง กลุ่มโหนด (NSET) ที่อยู่บนแต่ละ Line ต่างๆ ทั้งหมดและสร้างกลุ่มโหนดที่อยู่บนแต่ละ Surface มาให้ ข้อมูลเหล่านี้มีประโยชน์ในการนำไปกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่อไป จากปัญหาข้อนี้ต้องทำการยึดระนาบ abcd เข้ากับผนัง ดังนั้นจะต้องสำรวจดูว่า inp file ที่ได้มานั้น ผิวของระนาบ abcd ตรงกับ NSET อะไร

4. ใช้ GMSH ได้สร้างกลุ่มเอลิเมนต์และได้กำหนดประเภทของเอลิเมนต์ให้กับชิ้นงานไว้ ทำการตรวจสอบว่าสอดคล้องกับประเภทเอลิเมนต์ที่ต้องการกำหนดหรือไม่ ถ้าไม่สอดคล้องให้ทำการเปลี่ยนรูปแบบเอลิเมนต์เป็น แบบ `type=C3D10` ตามที่ต้องการและเปลี่ยนชื่อกลุ่มเอลิเมนต์เป็น `ELSET=beam` ซึ่งมีทั้งหมดจำนวน 471 เอลิเมนต์ มีหมายเลขเอลิเมนต์เริ่มตั้งแต่ 2620-3091 ซึ่งในที่นี้จำนวนเอลิเมนต์อาจต่างไปจากเดิมเนื่องจากมีการสร้าง mesh ใหม่ขึ้นมาจากต้นแบบเรขาคณิตเดิม

```
*Element, type=C3D10, ELSET=beam
2621, 189, 241, 4, 15, 783, 361, 201, 200, 360, 17
2622, 768, 90, 254, 129, 784, 443, 785, 787, 467, 786
2623, 528, 16, 191, 242, 788, 197, 789, 791, 366, 790
2624, 530, 167, 489, 236, 720, 725, 721, 794, 792, 793
2625, 528, 16, 242, 190, 788, 366, 791, 796, 198, 795
……..
…..
3087, 86, 87, 126, 226, 106, 462, 461, 287, 286, 1059
3088, 512, 508, 127, 229, 609, 570, 579, 1053, 1050, 1058
3089, 229, 512, 88, 127, 1053, 953, 299, 1058, 579, 473
3090, 226, 229, 87, 126, 339, 300, 286, 1059, 1052, 462
3091, 502, 226, 86, 126, 959, 287, 1057, 551, 1059, 461
```

5. กำหนดค่าสมบัติทางกลของวัสดุ ในข้อนี้กำหนดเป็นเหล็กกล้า (STEEL) มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้นเท่ากับ 30×10^6 psi และมีอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
30E+06,0.3
```

6.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า beam ให้มีสมบัติตามค่าของเหล็กกล้าที่กำหนดในข้อ 5

```
*SOLID SECTION,ELSET=beam,MATERIAL=STEEL
1.0
```

7 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

8. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) จาก inp file ที่แปลงมาจาก GMSH พบว่ากลุ่มโหนดที่อยู่บนระนาบ *abcd* ที่ต้องการยึดไว้ไม่ให้เคลื่อนที่คือ

```
*NSET,NSET=fixed_plane
3
189
10
```

292

192
193
13
9
190
12
194
195
1
191
16
196
197
19
15
18
198
199
4
17
200
201
2
11
202
203
204
205
14
20

และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต โดยกำหนดให้กลุ่มโหนดที่อยู่บนระนาบ abcd นี้ถูกบังคับไม่ให้เคลื่อนที่เนื่องจากมีการฝังปลายคานเข้ากับผนังตามเงื่อนไขโจทย์

```
*BOUNDARY
fixed_plane,1,3,0.0
```

9. กำหนดเงื่อนไขภาระแรงกระทำ (load conditions) ในขั้นตอนนี้ทำการเขียนคำสั่งกำหนดแรงกระทำตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดคือมีแรงกระทำที่จุด f ขนาด 800 lb_f ในทิศลงตามแกน z ซึ่งจากโมเดลจุด f คือโหนดหมายเลข 8 ดังนั้นสามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
*CLOAD
8,3,-800
```

10. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file)

```
*EL PRINT,ELSET=beam
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U
```

```
*NODE FILE
U
*EL FILE
S
```

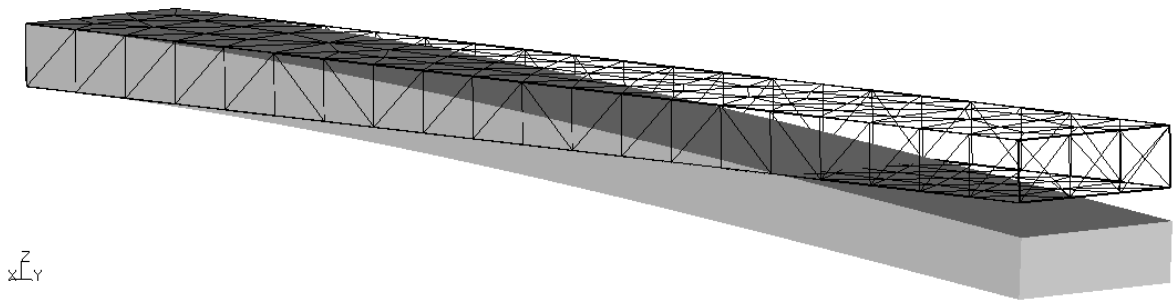
11. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

12. การตรวจสอบผลลัพธ์และความถูกต้อง สำหรับผลเฉลยแม่นตรงของคานคือ ระยะโก่งสูงสุดในแนวแกน z ที่เกิดขึ้นของคานเกิดขึ้นที่ปลายของ efgh ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\delta_{max}^{z} = \frac{-PL^3}{3EI} = \frac{(-800)(20)^3}{3(30x10^6)(\frac{1}{12}(2.5)(0.8)^3)} = -0.667 \text{ in.}$$

เมื่อ P คือแรงกระทำที่ปลายคาน L คือระยะของคาน E คือค่ามอดุลัสยืดหยุ่น I คือค่าโมเมนต์พื้นที่หน้าตัดของคานรอบแกนสะเทิน

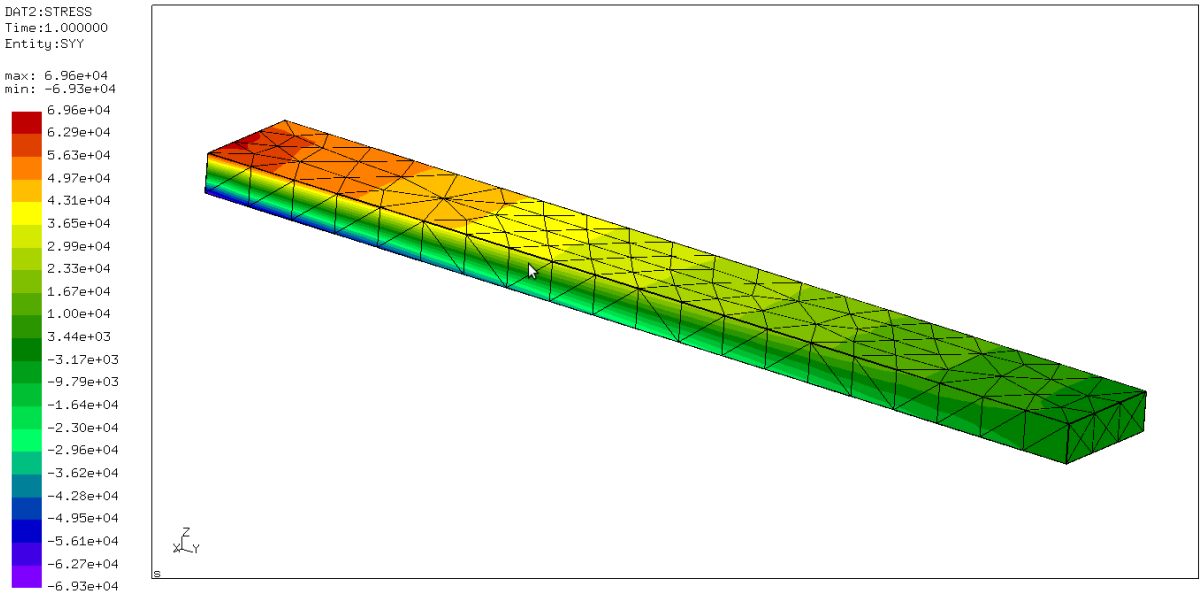


รูปที่ 6.9 แสดงการการโก่งตัวของคานด้วย CGX

การโก่งตัวของคานดังแสดงในรูปที่ 6.9 สำหรับการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของระยะโก่งตัวที่จุด f หรือที่โหนดหมายเลข 2 จาก dat file (ค่าที่ขีดเส้นใต้) มีค่าดังนี้

```
displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  1.891376E-03  1.993348E-02 -6.644773E-01
         2 -1.998206E-03 -1.996801E-02 -6.647544E-01
```

เมื่อพิจารณาค่าระยะโก่งในแนวแกน z ของโหนดหมายเลข 2 คือ -0.6647 in. ซึ่งมีค่าที่คลาดเคลื่อนจากค่าผลลัพธ์แม่นตรงไม่มาก จึงพอสรุปได้ว่าในต้นแบบที่มีจำนวนเอลิเมนต์ใกล้เคียงกันการใช้เอลิเมนต์แบบอันดับที่สอง (C3D10) ในข้อนี้ให้ผลลัพธ์ของระยะโก่งสอดคล้องกับผลลัพธ์แม่นตรงมากกว่าการใช้เอลิเมนต์แบบอันดับที่หนึ่ง (C3D4) ทั้งนี้เนื่องจากจำนวนโหนดและอินทิเกรชันของเอลิเมนต์มีจำนวนมากขึ้นทำให้มีการเคลื่อนตัวของโหนดตรงกลางส่งผลให้การล็อคจากแรงเฉือน (shear locking) ลดลง



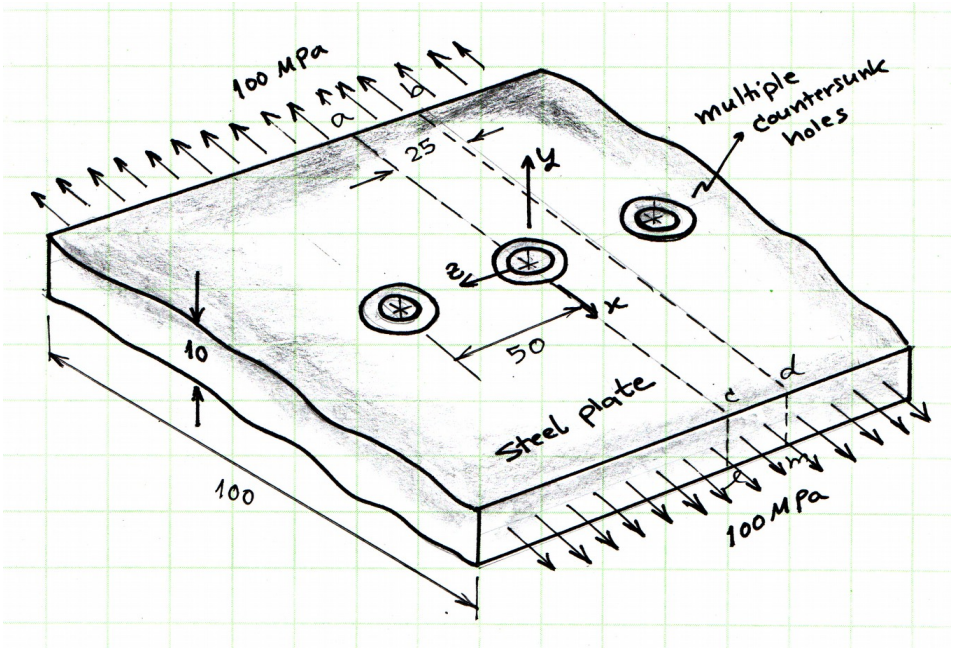
รูปที่ 6.10 ค่าความเค้นที่เกิดจากการดัด (Syy) แสดงด้วย CGX

สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของความเค้น สามารถตรวจสอบค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y ซึ่งเป็นความเค้นดัด จากโจทย์พบว่าที่จุดยึดรับโมเมนต์ดัดสูงสุดเท่ากับ 800 lb_f x 20 in ดังนั้นค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y สูงสุดที่ควรจะเกิดขึ้นคือ

$$\sigma^{y}_{max} = \pm\frac{Mc}{I} = \frac{(-800\,x20)(0.4)}{(\frac{1}{12}(2.5)(0.8)^3)} = \pm 6.0\,x\,10^4 \text{ psi}$$

จากการตรวจสอบผลลัพธ์ด้วย CGX โดยการเรียก ch3.frd มาศึกษาค่าของ Syy ซึ่งก็คือความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y พบว่าค่าความเค้นอยู่ในช่วง -6.93 x 10^4 ถึง 6.96 x 10^4 psi ซึ่งเปลี่ยนแปลงจากความเค้นอัดที่ผิวล่างบริเวณขอบ ad เป็นความเค้นดึงที่ผิวบนบริเวณขอบ bc ซึ่งค่าจากการคำนวณด้วยโปรแกรมกับที่คำนวณได้จากทฤษฎีมีความคลาดเคลื่อนประมาณ 17% อย่างไรก็ตามในการตรวจสอบความเค้นเงื่อนไขของแรงที่ใช้นั้นไม่เหมือนกันเพราะการคิดจากทฤษฎีไม่ได้คำนึงถึงการบิดในแนวแกน y ในขณะที่การคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นคิดผลจากการบิดด้วย

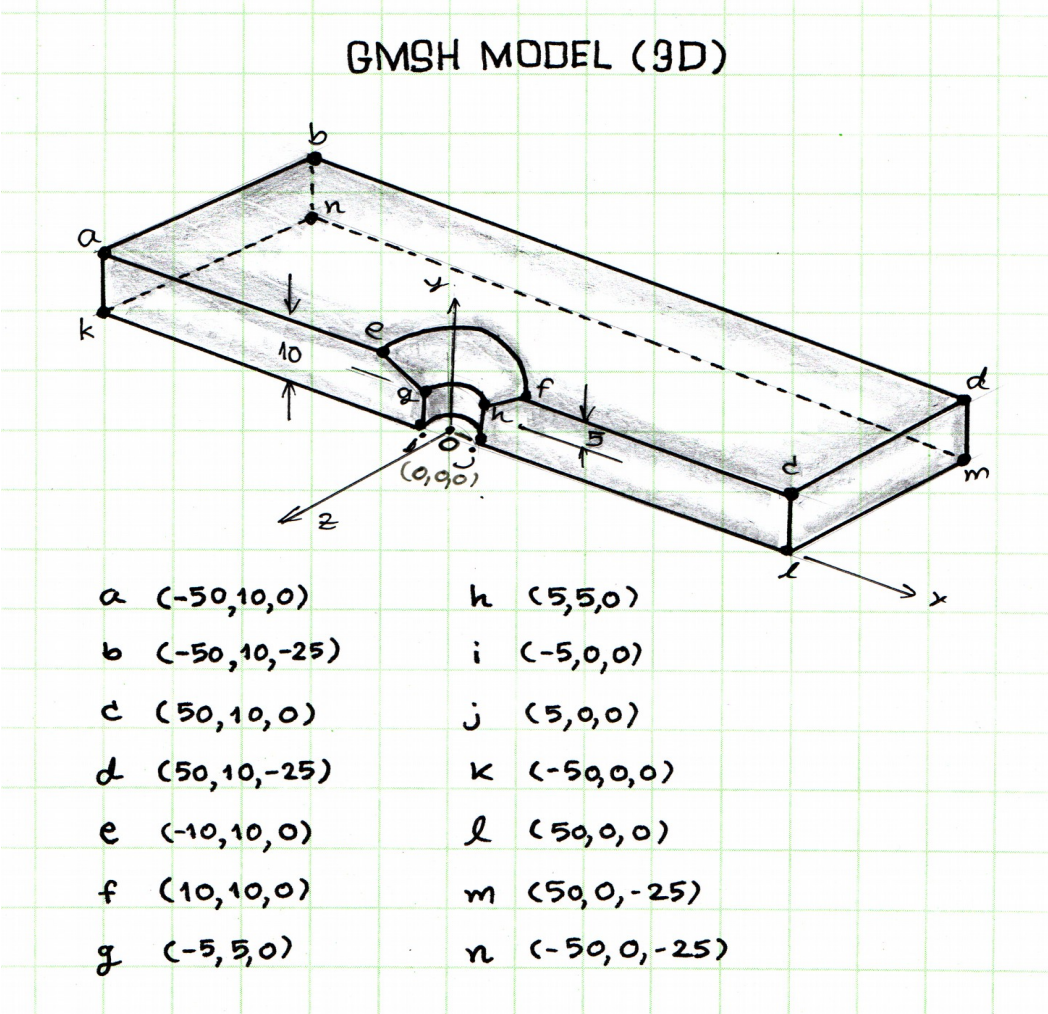
<u>ตัวอย่างที่</u> 6.4 รูปที่ 6.11 แผ่นเหล็กกล้ากว้าง 10 mm หนาเท่ากันตลอดทั้งแผ่นเท่ากับ 10 mm ที่แนวกึ่งกลางความกว้างมีรูเจาะทะลุแบบมีบ่า (countersunk hole) ระยะห่างเท่ากันคือ 50 mm จงเขียน inp file เพื่อวิเคราะห์หาความเค้นที่รูเจาะ เมื่อรับแรงดึงต่อหน่วยพื้นที่เท่ากับ 100 MPa



รูปที่ 6.11 แผ่นโลหะมีรูเจาะแบบมีบ่า (countersunk hole)

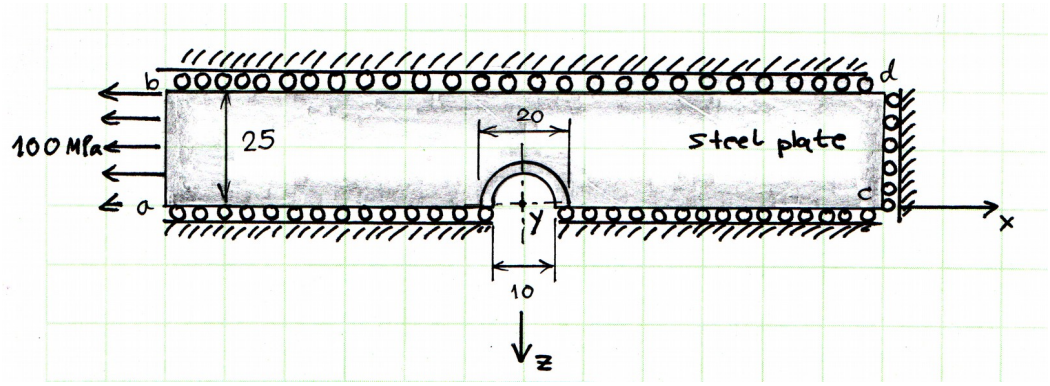
<u>แนวคิดในการสร้างต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์</u>

ปัญหานี้ไม่จำเป็นต้องสร้างต้นแบบสามมิติตลอดความยาวแผ่น เนื่องจากถ้าเลือกตัดบางส่วนตามความกว้างผ่านครึ่งรูเจาะจะมีรูปแบบของชิ้นงานและแรงกระทำที่ซ้ำและเหมือนกัน สามารถนำมาวิเคราะห์ความเค้นที่รูเจาะได้ จึงเลือกตัดบางส่วนดังแสดงในรูปที่ 6.12



รูปที่ 6.12 ตำแหน่งของจุดสำหรับสร้างต้นแบบ

รูปที่ 6.12 คือต้นแบบที่เลือกเกิดจากการแบ่งผ่านแนวศูนย์กลางรูเจาะขนานกับแนวระหว่างรูเจาะ แนวที่กำหนดขึ้นมาคือแนว ac ตัดผ่านศูนย์กลางรูเจาะในขณะที่แนว bd ขนานกับ ac ผ่านกึ่งกลางระหว่างรูเจาะตลอดความหนาทำให้เกิดระนาบที่ถูกตัดเกิดขึ้น 3 ระนาบได้แก่ ระนาบ aegjk, ระนาบ fcljh และระนาบ bdmn เพื่อให้ส่วนที่เลือกมีพฤติกรรมในการเคลื่อนตัวเหมือนกับแผ่นจริงทั้งหมด จึงกำหนดเงื่อนไขการเคลื่อนที่โดยบังคับให้ระนาบดังกล่าวไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวแกน z หรือไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวตามยาวในแนวแกน z เป็นศูนย์นั้นเอง จากนั้นกำหนดเงื่อนไขไม่มีการเคลื่อนตัวของระนาบ cdml ในแนวแกน x ทั้งนี้เพื่อรักษาสมดุลแรงที่เกิดจากการดึงที่ระนาบ abnk แนวคิดการกำหนดเงื่อนไขการเคลื่อนที่แสดงรายละเอียดในรูปที่ 6.13 โดยแสดงบนระนาบ xz

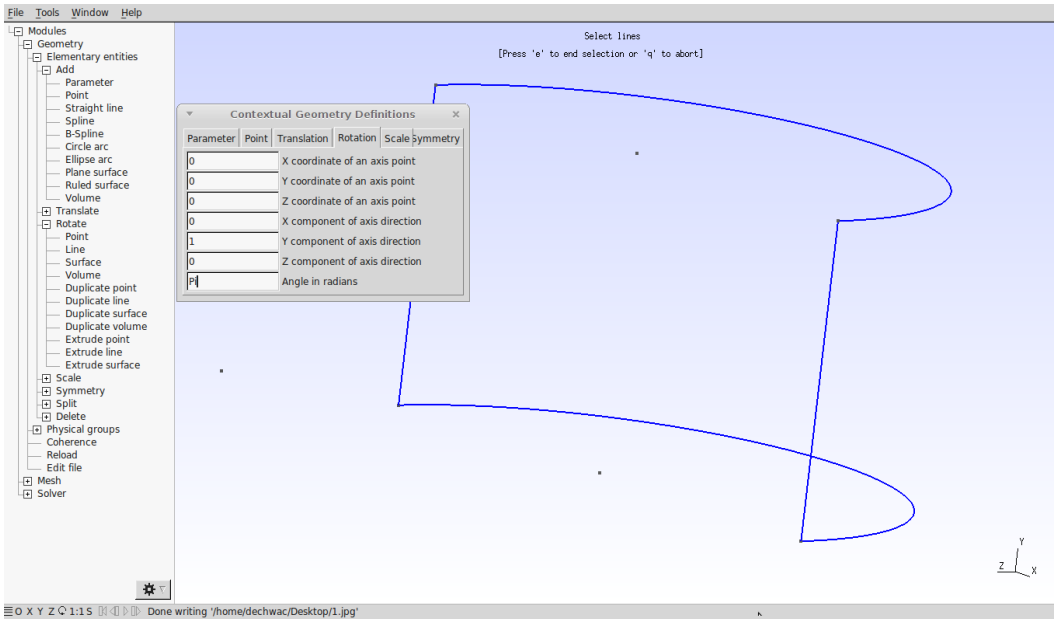


รูปที่ 6.13 เงื่อนไขแรงและขอบเขตของแบบจำลองสามมิติ

<u>การสร้างต้นแบบ 3-D ด้วย GMSH</u>

กำหนดระบบพิกัดฉาก xyz โดยกำหนดให้จุด O คือจุด (0,0,0) และกำหนดจุดพิกัดของตำแหน่งที่เหลือตั้งแต่ a-n ดังแสดงในรูปที่ 6.12 จากนั้นเริ่มต้นใช้งาน GMSH ดังนี้

1. สร้างจุด j และ h ขึ้นมาโดยคำสั่ง Geometry->Elementary entities->Add->Point
2. สร้างเส้นตรง jh เชื่อมระหว่างจุด j และ h โดยคำสั่ง Geometry->Elementary entities->Add->Straight line
3. สร้างผิวโค้ง ijhg จากเส้นตรง jh โดยการหมุน 180 องศารอบแกน y ผ่านจุด (0,0,0) โดยใช้คำสั่ง Geometry->Elementary entities->Rotate->Extrude line กดเลือกเส้น jh จะได้ผิว ijhg ดังรูปที่ 6.14

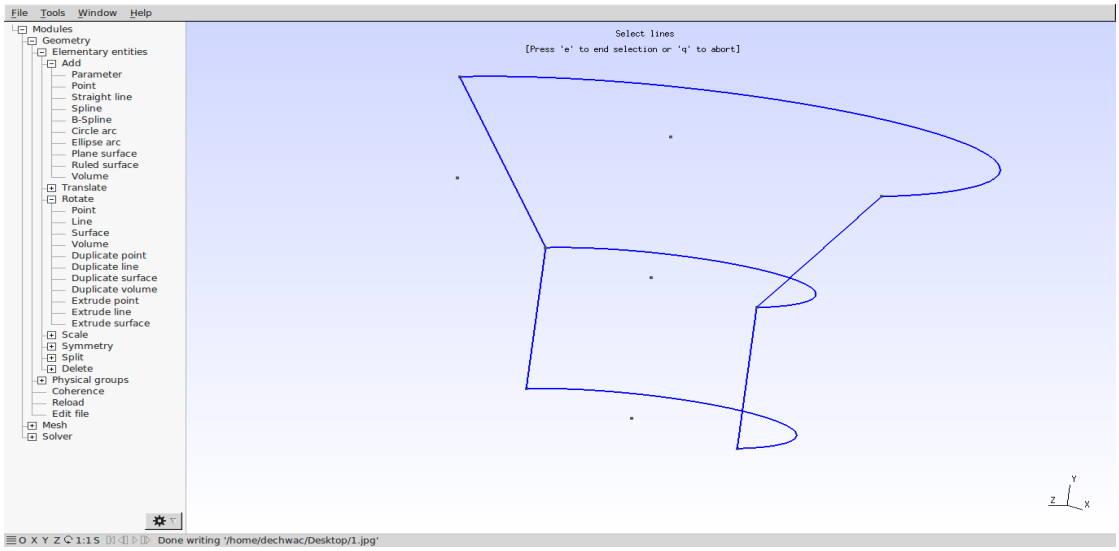


รูปที่ 6.14 การสร้างผิวของรูเจาะตรงด้วย GMSH

4. สร้างจุด f ขึ้นมาโดยคำสั่ง Geometry->Elementary entities->Add->Point

5.สร้างเส้นตรง fh เชื่อมระหว่างจุด f และ h โดยคำสั่ง Geometry->Elementary entities->Add->Straight line

6.สร้างผิวโค้ง efgh จากเส้นตรง fh โดยการหมุน 180 องศารอบแกน y ผ่านจุด (0,0,0) โดยใช้คำสั่ง Geometry->Elementary entities->Rotate->Extrude line กดเลือกเส้น fh จะได้ผิว efgh ดังรูปที่ 6.15



รูปที่ 6.15 การสร้างผิวเอียงที่เป็นบ่าของรูเจาะ

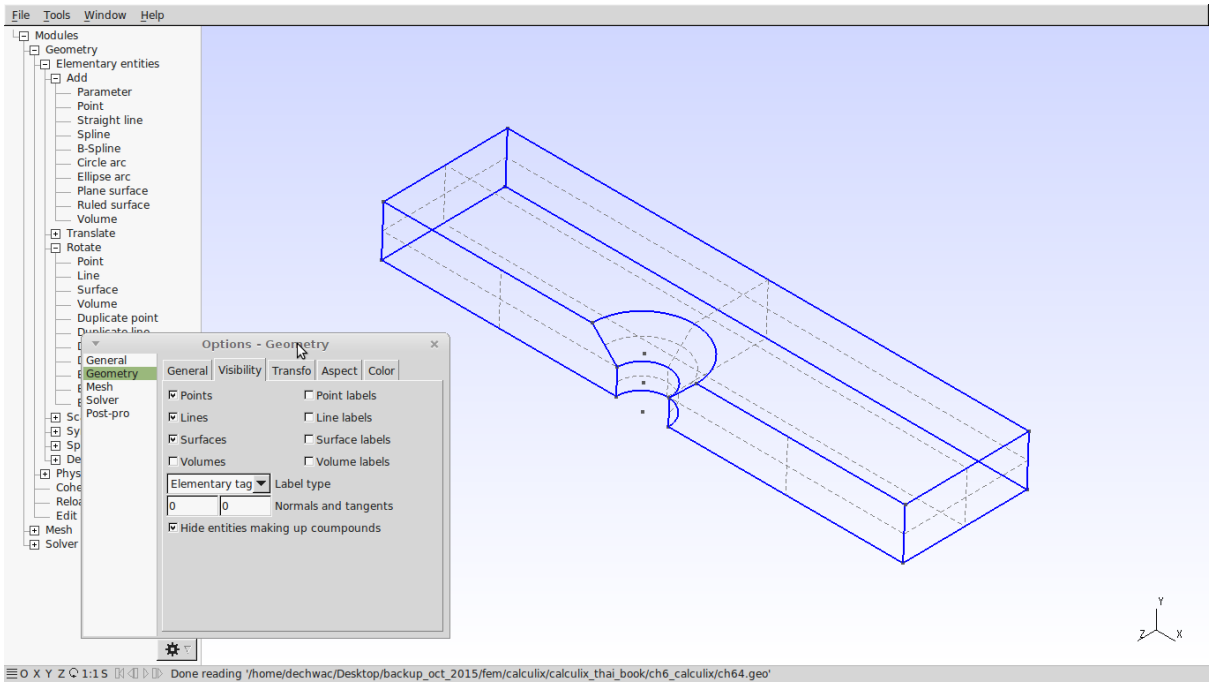
7. ดำเนินการสร้างจุดที่เหลือและสร้างเส้นตรง รวมถึงผิวโดยใช้คำสั่ง Geometry->Elementary entities->Add->Plane surface ให้ครบทุกผิวได้แก่ ผิวระนาบ aegjk, ระนาบ fcljh, ระนาบ bdmn, ระนาบ cdml, ระนาบ abnk, ระนาบ abdcfe และระนาบ ijlmnk ให้ครบ

8. ทำการตรวจสอบผิวระนาบที่สร้างขึ้นโดยใช้คำสั่ง Tools->Geometry->Visibility->Surfaces ถ้ามีผิวเกิดขึ้นครบจะมีเส้นประตัดกันบนผิวนั้นแสดงให้เห็นดังแสดงในรูปที่ 6.16

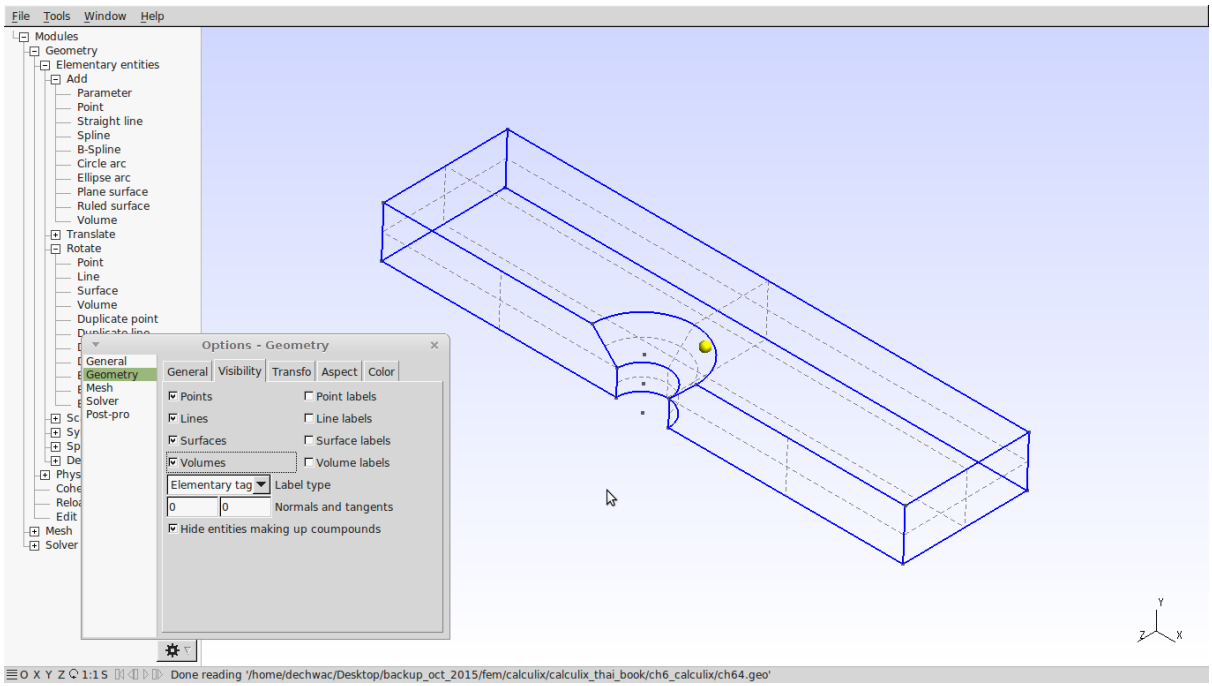
9. เมื่อตรวจสอบว่ามีผิวครบตามต้องการ ต่อไปทำการสร้างรูปปริมาตรของต้นแบบจากผิวทั้งหมดโดยใช้คำสั่ง Geometry->Elementary entities->Add->Volume

10 ทำการตรวจสอบรูปปริมาตรที่สร้างขึ้นโดยใช้คำสั่ง Tools->Geometry->Visibility->Volume ถ้ามีปริมาตรเกิดขึ้นจะมีรูปก้อนทรงกลมเล็กๆ เกิดขึ้นให้เห็นดังแสดงในรูปที่ 6.17

11. เมื่อตรวจสอบว่ามีรูปปริมาตรเกิดขึ้นจริง ต่อไปทำการสร้าง mesh บนก้อนปริมาตรทั้งหมดโดยใช้คำสั่ง Mesh->3D

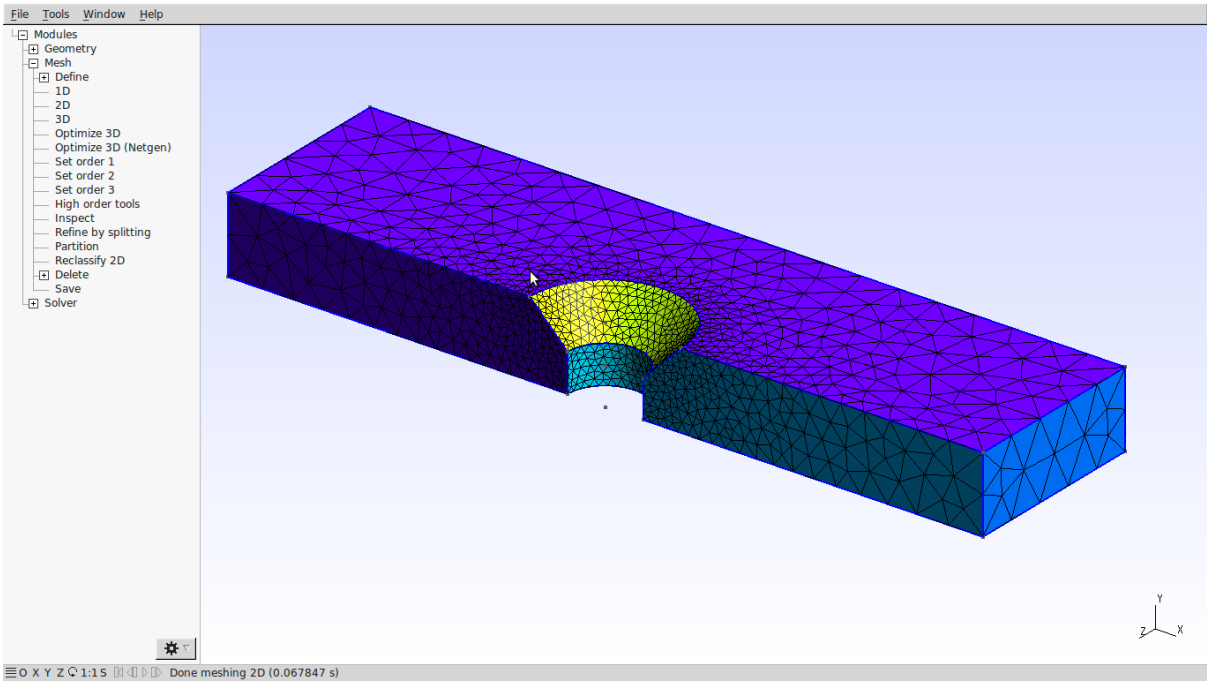


รูปที่ 6.16 แบบจำลองด้วยเส้นแสดงขอบผิวของชิ้นงานและรูปชิ้นงาน



รูปที่ 6.17 จุดกลมกลางรูปที่แสดงถึงการมีปริมาตรของชิ้นงาน

12. รูปปริมาตรที่ผ่านการ meshing ในข้อ 11 จะปรากฏขึ้นดังรูปที่ 6.18 การปรับ element size ให้ละเอียดบริเวณรูเจาะสามารถทำได้โดยการปรับ mesh element size at point ใน geo file แล้วทำการ meshing อีกครั้ง



รูปที่ 6.18 ลักษณะและความหนาแน่นของเอลิเมนต์ในแบบสามมิติ

13. แปลงไฟล์จาก geo format เป็น geo inp format โดยการ Save as และเปลี่ยน extension ในรูปแบบ inp

14. เมื่อได้ inp file ในรูปแบบ geo inp format ใช้ Launcher-Calculix แปลง geo inp format เป็น CCX inp format โดยเลือก Pool's Converter

15. ทำการดัดแปลง inp file ที่ได้เช่นเปลี่ยนชนิดเอลิเมนต์ เป็นแบบ C3D10

16. ตรวจสอบ mesh โดยการเรียก Launcher-Calculix และ run CCX inp file แบบ Preprocessor Mode

17. ทำการปรับแต่ง inp file อีกครั้งให้สมบูรณ์ต่อไป

18. แสดงตัวอย่าง geo file ของปัญหานี้ได้ดังนี้

```
Point(1) = {5, 0, 0, 1.0};
Point(2) = {5, 5, 0, 1.0};
Point(3) = {10, 10, 0, 1.0};
Line(1) = {1, 2};
Extrude {{0, 1, 0}, {0, 0, 0}, Pi} {
  Line{1};
}
Line(6) = {2, 3};
Extrude {{0, 1, 0}, {0, 0, 0}, Pi} {
```

```
  Line{6};
}
Point(20) = {50, 0, 0, 5.0};
Point(21) = {50, 10, 0, 5.0};
Point(22) = {50, 0, -25, 5.0};
Point(23) = {50, 10, -25, 5.0};
Point(24) = {-50, 10, -25, 5.0};
Point(25) = {-50, 0, -25, 5.0};
Point(26) = {-50, 10, 0, 5.0};
Point(27) = {-50, 0, 0, 5.0};
Line(11) = {1, 20};
Line(12) = {20, 21};
Line(13) = {21, 3};
Line(14) = {20, 22};
Line(16) = {23, 22};
Line(17) = {23, 21};
Line(18) = {23, 24};
Line(19) = {22, 25};
Line(20) = {25, 24};
Line(21) = {24, 26};
Line(22) = {26, 27};
Line(23) = {27, 25};
Line(24) = {26, 13};
Line(25) = {27, 4};
Line Loop(26) = {11, 12, 13, -6, -1};
Plane Surface(27) = {26};
Line Loop(28) = {14, -16, 17, -12};
Plane Surface(29) = {28};
Line Loop(30) = {19, 20, -18, 16};
Plane Surface(31) = {30};
Line Loop(32) = {23, 20, 21, 22};
Plane Surface(33) = {32};
Line Loop(34) = {22, 25, 2, 7, -24};
Plane Surface(35) = {34};
Line Loop(36) = {13, 9, -24, -21, -18, 17};
Plane Surface(37) = {36};
Line Loop(38) = {23, -19, -14, -11, 3, -25};
Plane Surface(39) = {38};
Surface Loop(40) = {35, 33, 39, 31, 37, 27, 29, 10, 5};
Volume(41) = {40}
```

สำหรับ mesh element size at point ที่กล่าวถึงในข้อ 12 สามารถปรับได้ที่คำสั่ง Point () = {_ , _, _ , mesh element size at point or cl}

<u>การเขียนและดัดแปลง inp file</u>

1. กำหนดหัวเรื่องคือ

```
*Heading
ch64.inp stresses in countersunk hole (3-D model)
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดพร้อมคู่ลำดับ (x,y,z) ที่เกิดจากการสร้างด้วยโปรแกรม GMSH สำหรับต้นแบบนี้มีทั้งหมด 2,002 โหนด และโหนดทั้งหมดถูกกำหนดชื่อกลุ่มว่า Nall

```
*Node,NSET=Nall
1,5.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,5.000000000000e+00,5.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,1.000000000000e+01,1.000000000000e+01,0.000000000000e+00
4,-5.000000000000e+00,0.000000000000e+00,-6.123233998228e-16
5,-5.000000000000e+00,5.000000000000e+00,-6.123233998228e-16
6,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
….....................................................
….....................................................
1999,7.049158096313e+00,5.072304248810e+00,-3.023033142090e+00
2000,7.128712177277e+00,4.638733863831e+00,-2.474234342575e+00
2001,7.192389011383e+00,4.362265110016e+00,-2.368775367737e+00
2002,7.100548744202e+00,4.339081764221e+00,-2.731768608093e+00
```

3. GMSH ได้สร้าง กลุ่มโหนด (NSET) ที่อยู่บนแต่ละ Line ต่างๆ ทั้งหมดและสร้างกลุ่มโหนดที่อยู่บนแต่ละ Surface มาให้ด้วย ทั้งนี้ข้อมูลเหล่านี้มีประโยชน์ในการนำไปกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่อไป จากปัญหาข้อนี้ต้องทำการสำรวจดูว่า inp file ที่ได้มานั้น ผิวของระนาบ aegjk, fcljh, cdml, bdmn และ abkn ตรงกับ NSET อะไร ผลการตรวจพบว่า

- ระนาบ aegjk ตรงกับ NSET=sur7
- ระนาบ fcljh ตรงกับ NSET=sur3
- ระนาบ cdml ตรงกับ NSET=sur4
- ระนาบ bdmn ตรงกับ NSET=sur5
- ระนาบ abkn ตรงกับ NSET=sur6

4. GMSH ได้สร้างกลุ่มเอลิเมนต์และได้กำหนดประเภทของเอลิเมนต์ให้กับชิ้นงานไว้ ทำการตรวจสอบว่าสอดคล้องกับประเภทเอลิเมนต์ที่ต้องการกำหนดหรือไม่ ถ้าไม่สอดคล้องให้ทำการเปลี่ยนรูปแบบเอลิเมนต์เป็น แบบ `type=C3D14` ตามที่ต้องการและเปลี่ยนชื่อกลุ่มเอลิเมนต์เป็น `ELSET=countersunk` ดังนี้

```
*Element, type=C3D4, ELSET=countersunk
239439, 1838, 1506, 1287, 1101
239440, 1133, 1062, 1149, 1614
239441, 1170, 1838, 1287, 1101
239442, 169, 565, 1162, 554
239443, 1353, 1665, 1160, 1302
……..
….................................
247671, 1999, 2001, 2000, 2002
247672, 1318, 2001, 1999, 2002
247673, 2001, 1318, 1437, 2002
247674, 2000, 2001, 1437, 2002
```

5. กำหนดค่าสมบัติทางกลของวัสดุ ในข้อนี้กำหนดเป็นเหล็กกล้า (STEEL) มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้นเท่ากับ 200 GPa และมีอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
```

6.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ชื่อว่า countersunk ให้มีสมบัติตามค่าของเหล็กกล้าที่กำหนดในข้อ 5

```
*SOLID SECTION,ELSET=countersunk,MATERIAL=STEEL
1.0
```

7 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์และเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis)

```
*STEP
*STATIC
```

8. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) จาก inp file ที่แปลงมาจาก GMSH พบว่ากลุ่มโหนดตามปรากฏในข้อ 3 เพื่อการกำหนดผิวให้ตรงกับเงื่อนไขดังรูปที่ 6.13 จะได้

```
*BOUNDARY
sur4,1,1,0.0
sur3,3,3,0.0
sur7,3,3,0.0
sur5,3,3,0.0
```

9. กำหนดเงื่อนไขภาระแรงกระทำ (load conditions) เนื่องจากการใส่แรงดึงแบบกระจาย *DLOAD เท่ากับ 100 MPa ตั้งฉากกับผิวระนาบ abkn นั้นมีความยุ่งยาก จึงขอเลือกใช้ *CLOAD แทน โดยต้องทราบจำนวนโหนดทั้งหมดของระนาบนี้ซึ่งพบว่ามี 21 โหนดบนผิว sur6 หรือผิว abkn ดังนั้นแรงที่กระทำแต่ละโหนดคือ (100 MPa x 10 mm x 25 mm)/21 = 1190.5 N/โหนด ดังนั้นคำสั่งกำหนดแรงดึงคือ

```
*CLOAD
sur6,1,-1190.5
```

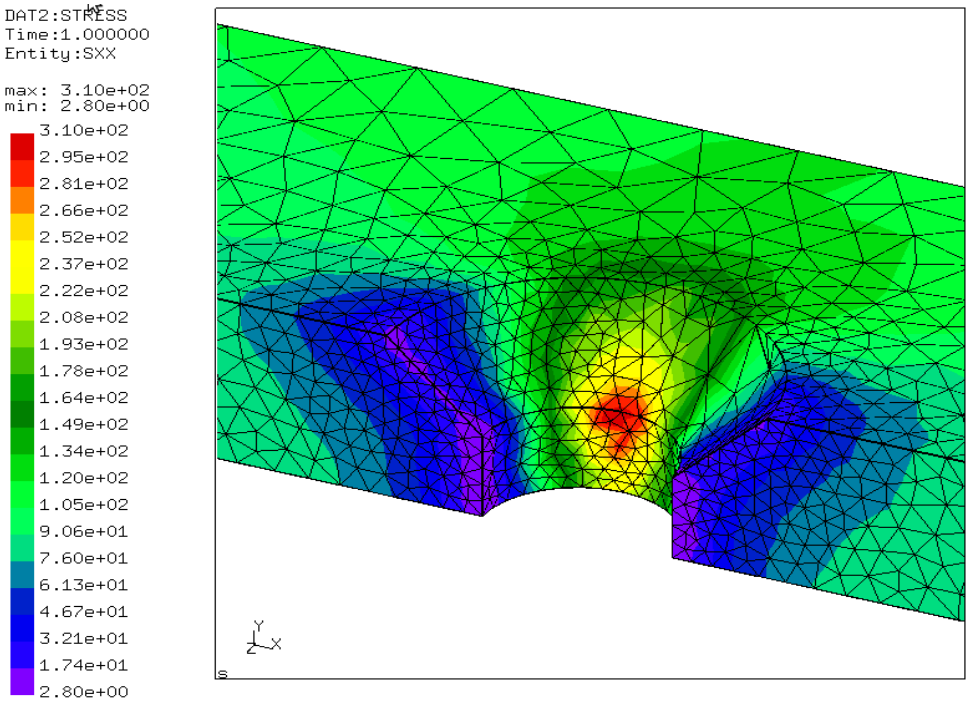
10. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions) จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file โดยกำหนดให้รายงานค่าระยะเคลื่อนตัว (U) ของโหนดทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความเค้น (S) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด ทำนองเดียวกันต้องการ dat file เพื่อแสดงทางคอมพิวเตอร์กราฟิก (frd file)

```
*EL PRINT,ELSET=countersunk
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U
*NODE FILE
U
*EL FILE
S
```

11. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

12. การศึกษาและตรวจสอบผลลัพธ์



รูปที่ 6.19 ความเค้นในแนวแกน x (Sxx) ที่เกิดขึ้นที่รูเจาะเมื่อรับแรงดึง

จากรูปที่ 6.19 แสดงภาพการกระจายตัวของความเค้นในแนวแกน x จาก frd file พบว่าค่าความเค้นที่เกิดขึ้นเป็นความเค้นดึงซึ่งมีค่าสูงสุดเกิดขึ้นที่กึ่งกลางความหนาของรูเจาะบริเวณใกล้กับพื้นที่บ่าเอียงซึ่งค่าความเค้นที่เกิดขึ้นประมาณ 310 MPa และเมื่อทำการตรวจสอบค่าความเค้นในแนวแกน x สูงสุดที่เกิดขึ้นจาก dat file พบว่าค่าความเค้นที่สูงสุดเกิดขึ้นที่จุดอินทิเกรชั่นของเอลิเมนต์เท่ากับ 372 MPa สำหรับค่าที่เกิดขึ้นมีความเป็นไปได้ทั้งนี้เนื่องจากเมื่อพิจารณาความเค้นในแนวแกน x ที่เกิดขึ้นกับแผ่นรูเจาะตรงขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 mm ตลอดความหนานั้นมีค่าความเค้นประมาณ 312.5 MPa ซึ่งคิดจาก

$$\sigma_{max}^{x} = k_t \sigma_{nom} = (2.5)\frac{(100\,\text{MPa}\,x\,10\,\text{mm}\,x\,50\,\text{mm})}{10\,\text{mm}\,x\,40\,\text{mm}} = 312.5\ \ \text{MPa}$$

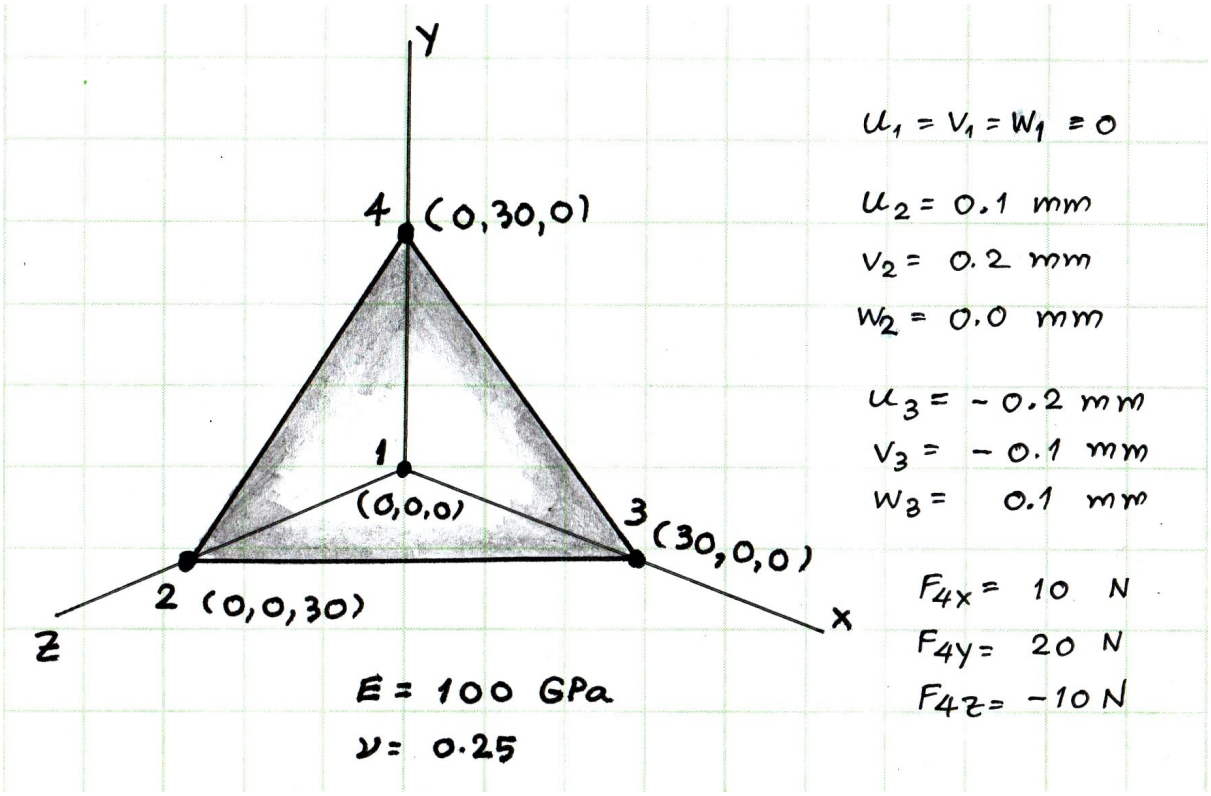
6.5 เอกสารอ้างอิงบทที่ 6

[1] Daryl L. Logan, “A First Course in the Finite Element Method”, 4th Edition, Thomson , Ontario, 2007

[2] Guido Dhondt, “The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications”, John Wiley & Sons , London, 2004

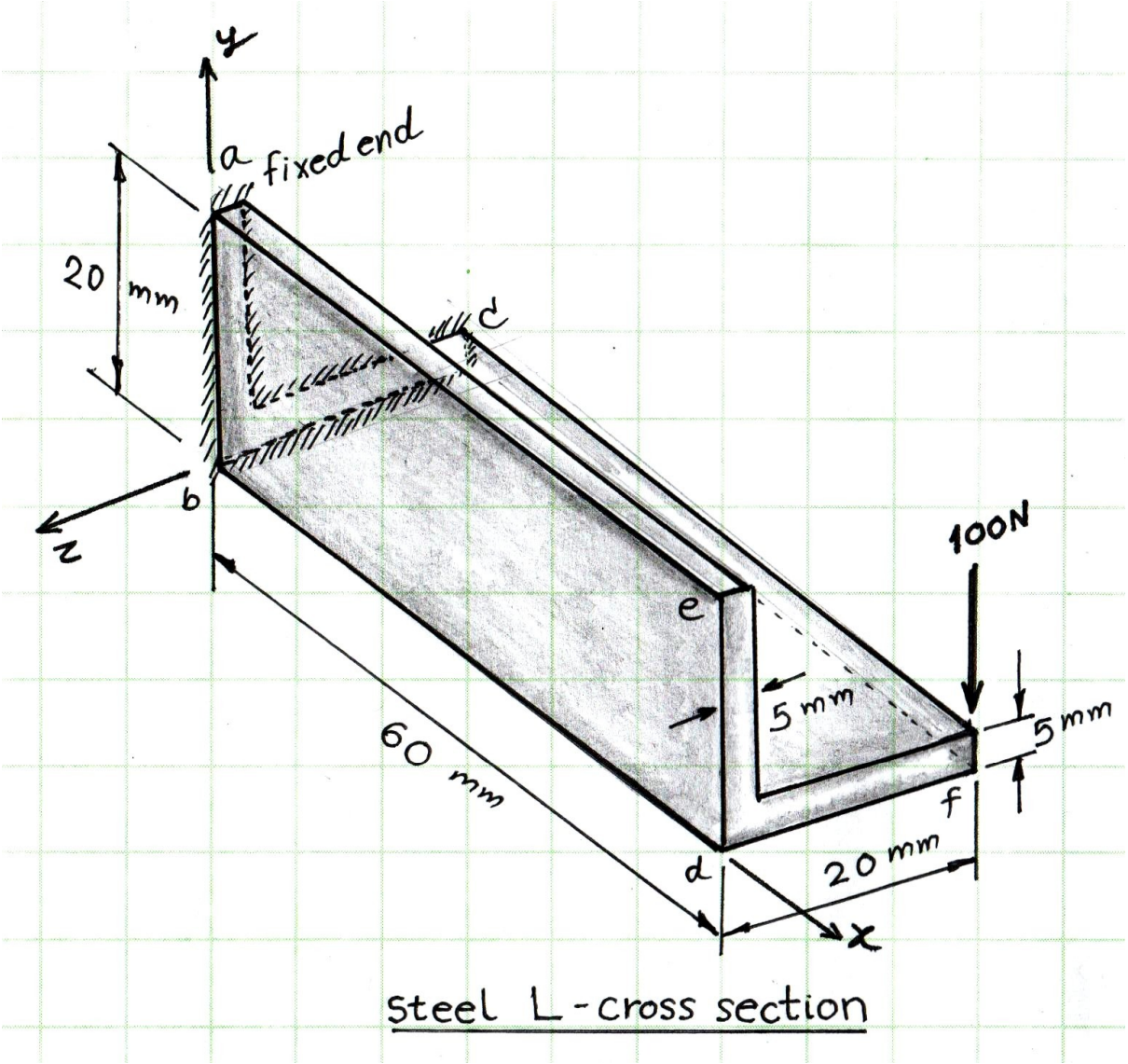
6.6 แบบฝึกหัดบทที่ 6

6.1) รูปที่ P 6.1 คือ เอลิเมนต์แบบ C3D4 จำนวน 1 เอลิเมนต์ ถ้าระบบพิกัดฉากมีหน่วยระยะคือ mm จงเขียน inp file เพื่อแสดงผลลัพธ์ของความเค้นที่เกิดขึ้นในเอลิเมนต์นี้



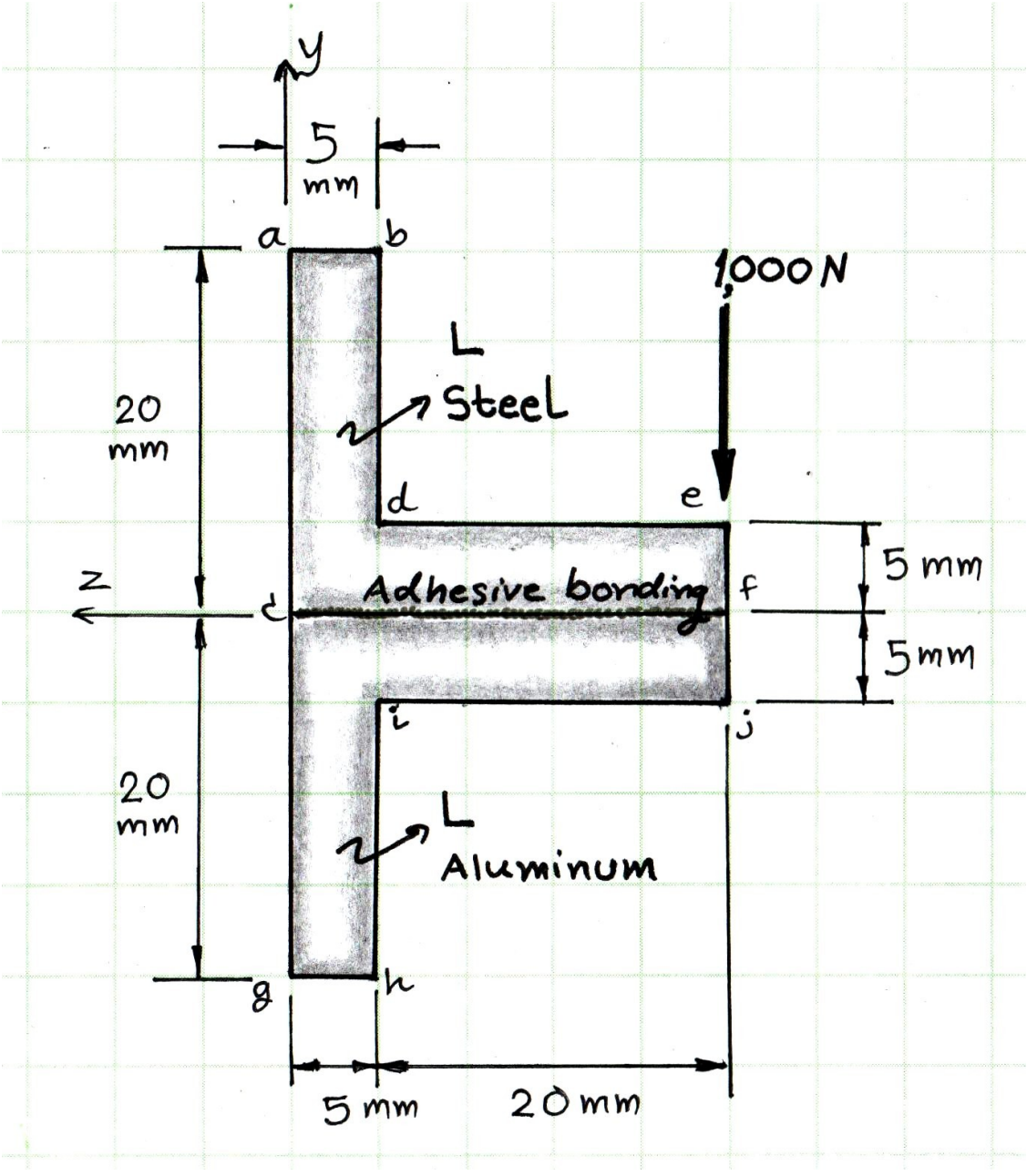
รูปที่ P 6.1

6.2) รูปที่ P 6.2 เหล็กฉากรูปตัว L นำมาติดตั้งเป็นคานแบบฝังปลายยื่นอิสระ จงเขียน inp file เพื่อหาระยะโก่งและความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นกับเหล็กฉาก



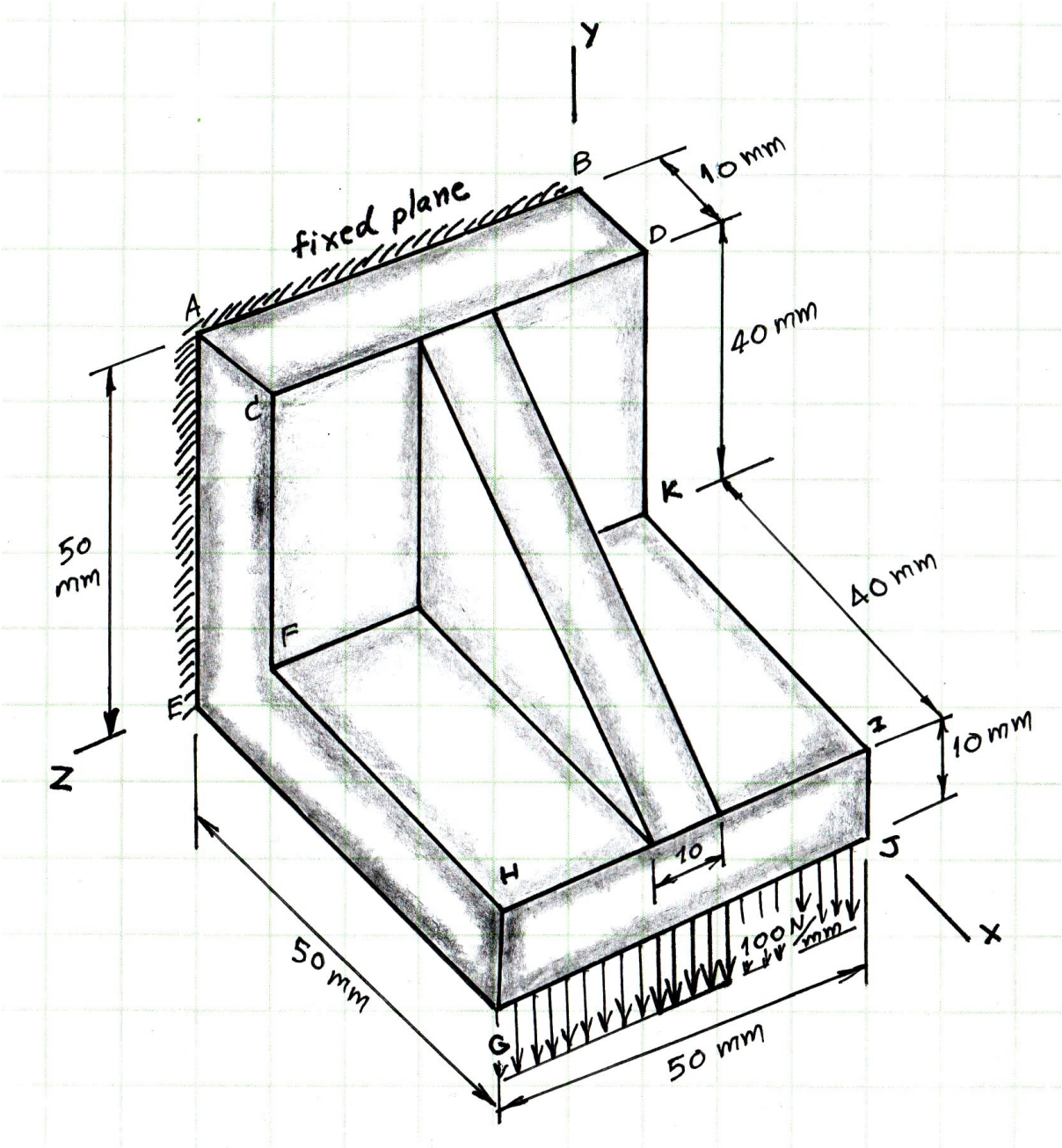
รูปที่ P 6.2

6.3) รูปที่ P 6.3 ชิ้นงานหน้าตัด T ประกอบจากเหล็กฉาก L และอลูมินัมฉาก L มาทากาวความแข็งแรงสูง (high strength adhesive bonding) ติดกันตามแนว cf ตลอดความยาวถ้าชิ้นงานติดตั้งเพื่อรับแรงตามข้อ 6.2 จงเขียน inp file เพื่อหา ระยะโก่งและความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นกับชิ้นงาน



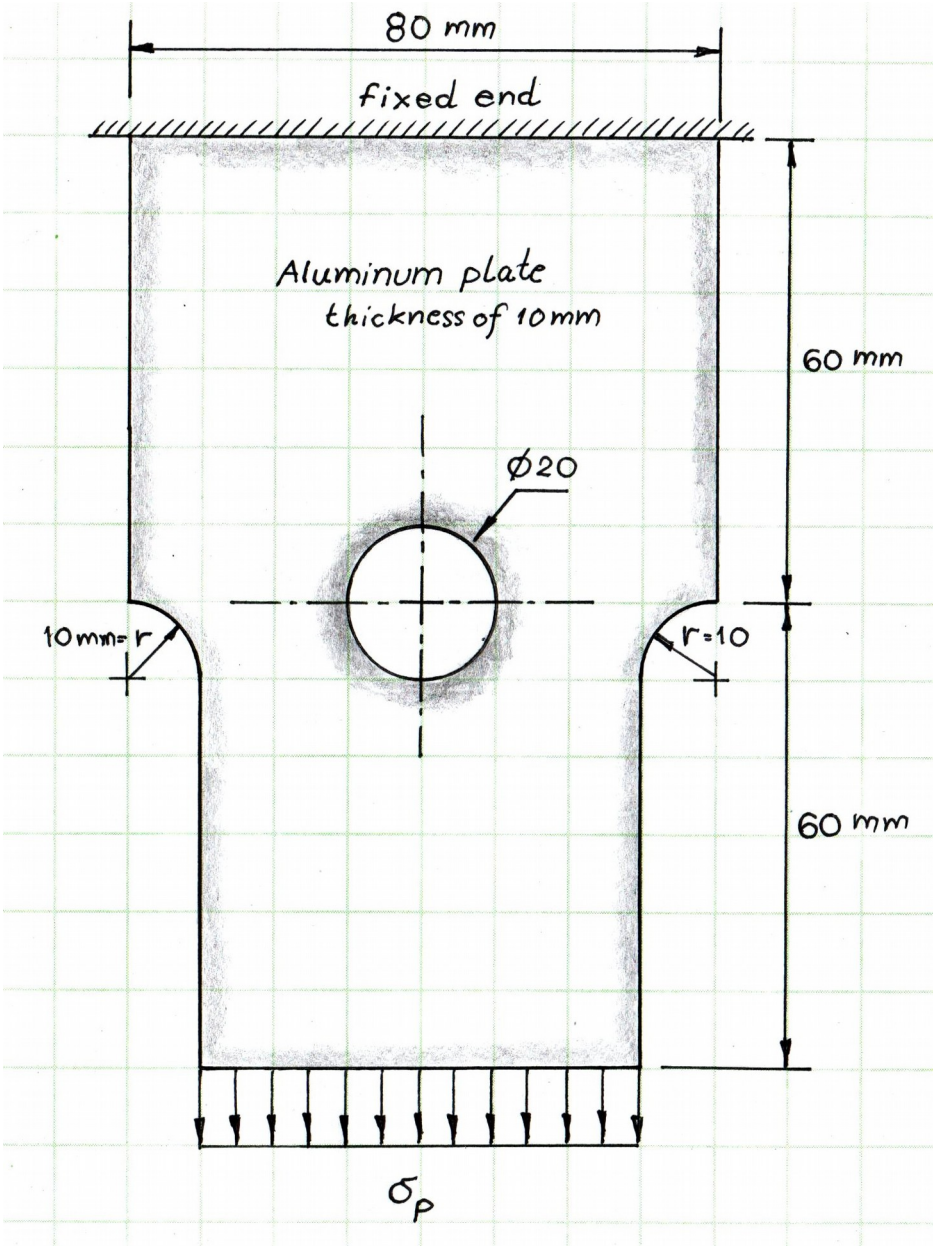
รูปที่ P 6.3

6.4) รูปที่ P 6.4 แสดงชิ้นงานทำจากอลูมินัมเพื่อรับแรงดึงกระจายตามความยาวตามขอบ GJ เท่ากับ 100 N/mm ถ้าผิวหลังทั้งหมดของชิ้นงานตามแนวระนาบ ABE ยึดติดแน่นกับผนัง จงเขียน inp file เพื่อหาระยะโก่งตัวและความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นกับชิ้นงาน



รูปที่ P 6.4

6.5) รูปที่ P 6.5 คือ อลูมินัมแผ่นหนาเท่ากันตลอดทั้งแผ่นมีรูเจาะและบ่า จงหาใช้เอลิเมนต์แบบสามมิติคำนวณหาค่า σ_o (ความเค้นดึงที่กระทำต่อแผ่น) และกำหนดให้ความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุไม่เกิน 350 MPa



รูปที่ P 6.5

บทที่ 7 ปัญหาการถ่ายเทความร้อน

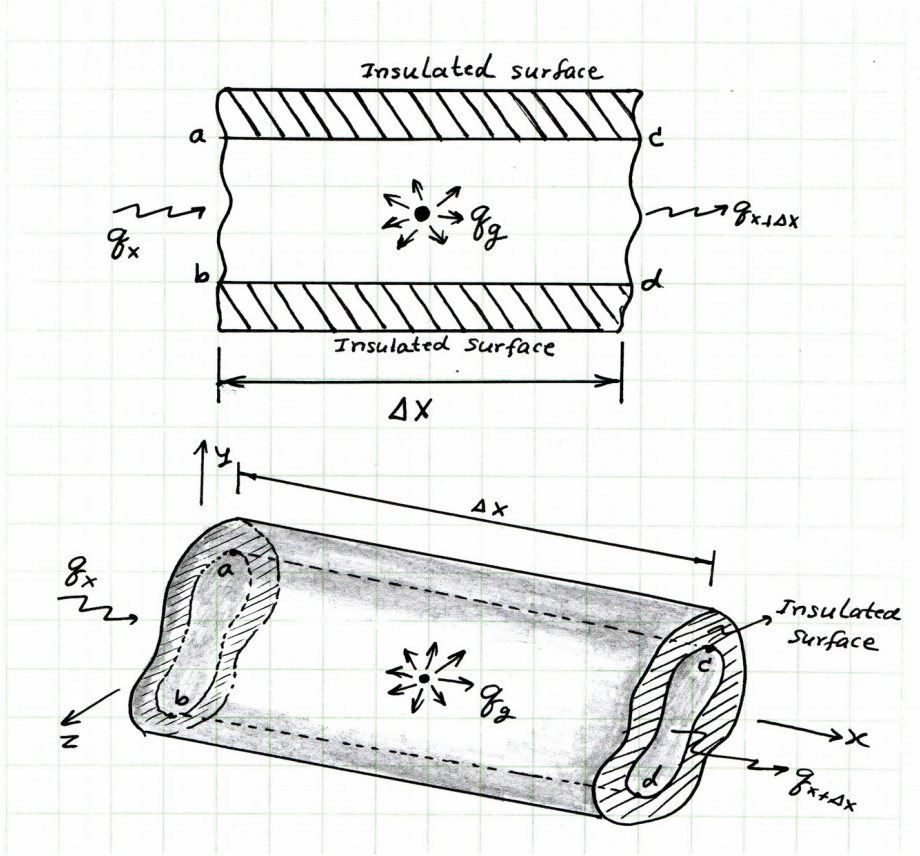
7.1 บทนำ

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในชิ้นงานมีความสำคัญในงานทางวิศวกรรมศาสตร์ โดยเฉพาะทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล ทั้งนี้เพื่อการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลให้เหมาะสมทนทานต่ออุณหภูมิที่เกิดขึ้น รวมถึงการออกแบบระบบอื่นเพื่อรองรับการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ในปัจจุบันวิธีทางไฟไนต์เอลเมนต์เป็นทางเลือกที่ดีเยี่ยมอย่างหนึ่งของวิศกรในการนำไปทำนายการเกิดและการกระจายของอุณหภูมิที่เกิดขึ้น ประโยชน์ของวิธีนี้คือให้ผลลัพธ์แม่นยำกับการคำนวณการกระจายอุณหภูมิของชิ้นงานที่มีรูปทรงสลับซับซ้อน

ในบทที่ผ่านมา เป็นการนำวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ไปทำนายหาผลลัพธ์การยืดขยายตัวรวมถึงความเค้นต่างๆ ที่เกิดขึ้นกับชิ้นงานของแข็ง หลักการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่นำมาใช้กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนนั้นไม่แตกต่างแถมยังมีความยุ่งยากน้อยกว่าปัญหาทางด้านของแข็งทั้งนี้เนื่องจากตัวแปรสำคัญที่สนใจคือ อุณหภูมิ (temperature) ทั้งนี้อุณหภูมิเป็นปริมาณสเกล่าร์ที่มีแต่ขนาดไม่ต้องกำหนดทิศทาง ดังนั้นที่โหนดจึงมีตัวแปรไม่ขึ้นกับทิศทางไม่ต้องกำหนดอุณหภูมิในทิศทาง x, y และ z ให้ยุ่งยาก อย่างไรก็ตามสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาทางด้านของแข็งหรือโครงสร้างก็พัฒนามาจากสมการเชิงอนุพันธ์ ปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อนก็ไม่ต่างกัน รูปแบบสมการและตัวแปรมีความสอดคล้องและให้ความหมายทางกายภาพที่ไปด้วยกันเช่น ค่าอุณหภูมิ (temperature) ก็คล้ายกับการเคลื่อนตัว (displacement) ในปัญหาของแข็ง ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) ก็คล้ายกับค่ามอดุลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity) ในปัญหาของแข็ง ค่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิต่อหน่วยความยาว (temperature gradient) ก็คล้ายกับความเครียด (strain) ในปัญหาของแข็ง ค่าความร้อนไหลผ่านผิวชิ้นงาน (heat flow across surface) ก็คล้ายค่าแรงกระทำที่ผิว (surface traction) ในปัญหาของแข็ง ค่าความร้อนที่เกิดความร้อนภายใน (internal heat generation) ก็คล้ายค่าแรงกระทำในรูปทรง (body force) ในปัญหาของแข็ง ดังนั้นปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อนและของแข็งจึงมีความสอดคล้องกันในหลักการมีประโยชน์ต่อการเรียนไปด้วยกันได้

จุดประสงค์ของบทนี้เพื่อแนะนำการวิเคราะห์การกระจายตัวของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นบนรูปร่างของแข็ง สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการคำนวณหาการยืดหดตัว ความเครียดและความเค้นได้ต่อไป แต่การวิเคราะห์พร้อมกันทั้งการกระจายอุณหภูมิและการยืดหดตัวนั้นค่อนข้างจะซับซ้อนจึงไม่ขอกล่าวในที่นี้ เฉพาะในบทนี้จึงขอแนะนำเฉพาะเพียงการใช้วิเคราะห์อุณหภูมิแบบ 1-D และ 2-D ในขั้นต้น โดยการแนะนำการใช้โปรแกรม CalculiX หาผลลัพธ์คือการกระจายตัวของอุณหภูมิบนชิ้นงานของแข็ง เนื้อหาเริ่มจากการแนะนำสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการถ่ายเทความร้อน จากนั้นแนะนำการพัฒนาเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้งาน รวมถึงการแนะนำคำสั่งของโปรแกรม CalculiX ที่จำเป็นสำหรับการวิเคราะห์หาอุณหภูมิที่สภาวะคงตัว (steady state) ต่อไป

7.2 สมการการถ่ายเทความร้อนเบื้องต้น



รูปที่ 7.1 การนำความร้อนและการเกิดความร้อนในแนวแกนตามยาวของชิ้นงาน

จากรูปที่ 7.1 คือชิ้นงานหน้าตัดคงรูปตลอดความยาว กำหนดให้หน้าตัด ab และ cd มีค่าคงที่เท่ากับ A และปริมาตรควบคุมของชิ้นงานในช่วง Δx คือ $\Delta V = A\Delta x$ มีการหุ้มฉนวนจากหน้าตัด ab ถึงหน้าตัด cd เพื่อไม่ให้มีการถ่ายเทความร้อนเข้าออกที่ผิวชิ้นงาน กำหนดให้อุณหภูมิ (T) เกิดการเปลี่ยนแปลงในชิ้นงานตามแกน x เท่านั้น ดังนั้น

q_x คืออัตราการนำความร้อนที่เคลื่อนเข้าสู่ปริมาตรควบคุมที่ตำแหน่ง x ใดๆ (ผ่านหน้าตัด ab) มีหน่วยคือ power/area โดย $q_x = -k\frac{\Delta T}{\Delta x}$ ตามกฎของฟูเรียร์

และ k คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (coefficient of thermal conductivity) มีหน่วยคือ power/(length x degree of temperature)

$q_{x+\Delta x}$ คืออัตราการนำความร้อนที่เคลื่อนออกจากปริมาตรควบคุม (ผ่านหน้าตัด cd) มีหน่วยคือ power/area

q_g คืออัตราความร้อนที่ผลิตขึ้นเองในปริมาตรควบคุมเนื่องจากปฏิกิริยาภายในต่างๆ เช่น ปฏิกิริยาทางเคมี นิวเคลียร์ และจากความต้านทานไฟฟ้า มีหน่วยคือ power/volume

จากสมดุลความร้อนของปริมาตรควบคุม ΔV ในช่วงเวลา Δt คือ

ความร้อนที่ไหลเข้าสู่ปริมาตรควบคุม- ความร้อนที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุม
+ ความร้อนที่ผลิตขึ้นในปริมาตร ΔV = พลังงานใน ΔV ที่เปลี่ยนแปลง

ความร้อนที่ไหลเข้าสู่ปริมาตรควบคุม = $q_x \cdot A \cdot \Delta t$
ความร้อนที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุม = $q_{x+\Delta x} \cdot A \cdot \Delta t$
ความร้อนที่ผลิตขึ้นในปริมาตร ΔV = $q_g \cdot \Delta V \cdot \Delta t$
พลังงานใน ΔV ที่เปลี่ยนแปลง = $\Delta U = \Delta m c_p \Delta T$

เมื่อ $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$ และ ρ คือความหนาแน่นของเนื้อวัตถุชิ้นงาน
ดังนั้นสมดุลความร้อนจึงอยู่ในรูปสมการดังนี้

$$q_x \cdot A \cdot \Delta t - q_{x+\Delta x} \cdot A \cdot \Delta t + q_g \cdot \Delta V \cdot \Delta t = \Delta m c_p \Delta T$$

แทน $\Delta V = A \Delta x$ จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\frac{(q_x - q_{x+\Delta x})}{\Delta x} + q_g = \rho c_p \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

เมื่อ $(q_x - q_{x+\Delta x}) = -\Delta q_x$ และ $q_x = -k \frac{\Delta T}{\Delta x}$ จะได้

$$k \frac{\Delta(\Delta T)}{\Delta x \cdot \Delta x} + q_g = \rho c_p \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

หรือสามารถเขียนในรูปสมการอนุพันธ์ได้ดังนี้เมื่อ $\Delta x \to 0$ และ $\Delta t \to 0$

$$k \frac{d^2 T}{d x^2} + q_g = \rho c_p \frac{d T}{d t} \tag{7.1}$$

สมการ (7.1) คือ สมการการนำความร้อนใน 1 มิติที่ไม่มีความร้อนเข้าออกที่ผิวรวมถึงไม่มีการพาความร้อน (heat convection) สมการนำความร้อนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ค่า T หรืออุณหภูมิคือตัวแปรที่ต้องแก้ สมการหาจากเงื่อนไขต่างๆ โดยทั่วไปใน 1 มิติค่าของอุณหภูมิคือ $T(x,t) = T$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตำแหน่ง x และเวลา t ในสภาวะอุณหภูมิคงตัว (steady state) คือไม่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิตามเวลา ค่าของ $\frac{dT}{dt} = 0$ ดังนั้นที่สภาวะคงตัว สมการ (7.1) คือ

$$k \frac{d^2 T}{d x^2} + q_g = 0 \tag{7.2}$$

7.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อน

จากสมการ (7.2) คือรูปแบบสมการนำความร้อนซึ่งเกิดขึ้นที่สภาวะคงตัวใน 1 มิติ เราสามารถพัฒนาเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยใช้หลักการถ่วงเศษตกค้าง (weight residual method) หลักการโดยย่อมีดังนี้ สมมติ $\widetilde{T}(x)=\widetilde{T}$ คือคำตอบโดยประมาณของสมการ (7.2) ถ้านำไปแทนในสมการ จะเกิดฟังก์ชันเศษตกค้าง $R(x)$ คือ

$$k\frac{d^2}{dx^2}(\widetilde{T})+q_g=R(x) \tag{7.3}$$

ถ้าพิจารณาบนโดเมนค่า $R(x)$ นี้ควรมีค่าต่ำที่สุดเพราะถ้าเป็นคำตอบที่ถูกต้องค่านี้ควรจะเป็นศูนย์ดังนั้นการนำฟังก์ชันอีกตัวคือ $W(x)$ หรือเรียกว่าฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) มาคูณกับ $R(x)$ ตลอดช่วงโดเมนสมมุติบนปริมาตรทั้งหมดแล้วนำมารวมกันควรมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\int_0^V R(x)W(x)\,dV=0 \tag{7.4}$$

เนื่องจากใน 1 มิติ $dV=A\,dx$ เมื่อ A คือค่าหน้าตัดที่คงที่ตลอดแกนความยาว(x) ดังนั้นถ้าโดเมนคือความยาวของชิ้นงานตั้ง x=0 ถึง x=L สมการ (7.3) และ (7.4) จะได้ว่า

$$\int_0^L W(x)\cdot(k\frac{d^2}{dx^2}(\widetilde{T})+q_g)\cdot A\,dx=0 \tag{7.5}$$

จากสมการ (7.5) สมมมติ $\widetilde{T}(x)=a_1x+a_2$ ซึ่งถือว่าเป็นคำตอบโดยประมาณที่มีดีกรีต่ำสุดจะพบว่าตรงส่วนของเทอม $k\frac{d^2}{dx^2}(\widetilde{T})=0$ ซึ่งจะไม่มีความหมายหรือประโยชน์อะไรจากการใช้วิธีนี้ จึงมีความจำเป็นต้องลดดีกรีของสมการอนุพันธ์โดยการอินทิเกรทแยกส่วนดังนี้

$$\int_0^L W(x)\cdot A\cdot(k\frac{d^2}{dx^2}(\widetilde{T}))\,dx+\int_0^L W(x)\cdot q_g\cdot A\,dx=0 \tag{7.6}$$

จากสมการที่ (7.6) จะเห็นได้ว่ามีอยู่สองพจน์ใหญ่ได้แก่

พจน์แรก $\int_0^L W(x)\cdot A\cdot(k\frac{d^2}{dx^2}(\widetilde{T}))\,dx$ สามารถทำการอินทิเกรทแยกส่วนได้ดังนี้

$\int_0^L W(x)\cdot A\cdot(k\frac{d^2}{dx^2}(\widetilde{T}))\,dx=W(x)\cdot A\cdot k\frac{d\widetilde{T}}{dx}\ \vdots_0^L-\int_0^L\frac{d}{dx}(W(x))\cdot A\cdot k\cdot\frac{d\widetilde{T}}{dx}dx$ นำไปแทนในสมการ (7.6)

จะได้

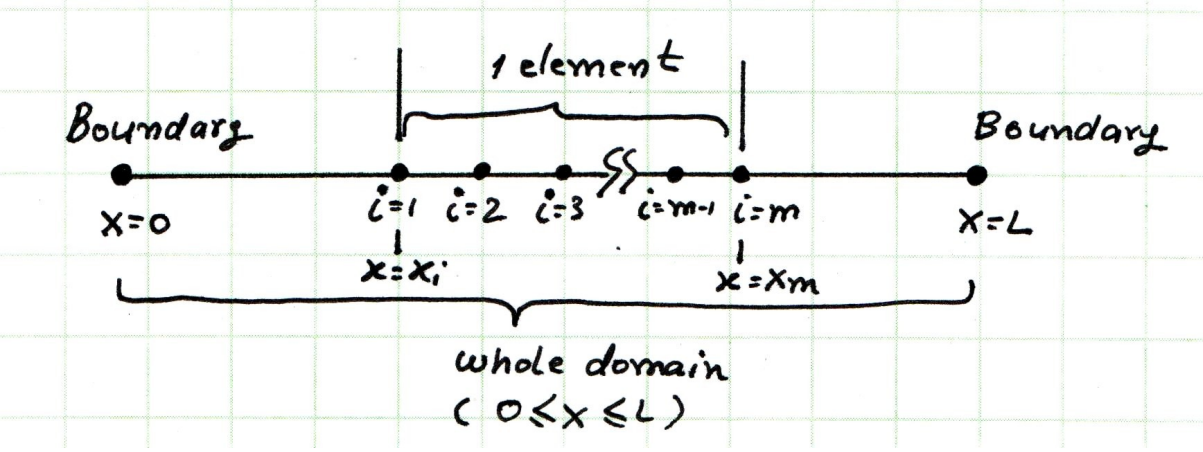
$$\int_0^L \frac{d}{dx} W(x)\cdot A\cdot k\cdot \frac{d\tilde{T}}{dx}\,dx = W(x)\cdot A\cdot k\cdot \left(\frac{d\tilde{T}}{dx}\right)\Big|_0^L + \int_0^L W(x)\cdot q_g\cdot A\,dx \qquad (7.7)$$

จากสมการที่ (7.7) สามารถประยุกต์ไปสู่สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยการแบ่งโดเมนย่อย ซึ่งก็คือการแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยหลายเอลิเมนต์ โดยแต่ละเอลิเมนต์มีโดเมนย่อยคือ $x_i \le x \le x_m$ และมีโหนดของแต่ละเอลิเมนต์เท่ากับ m ดังแสดงในรูปที่ 7.2 สมมติให้ค่าฟังก์ชันการกระจายตัวของอุณหภูมิที่โหนด i ถึง m บนหนึ่งเอลิเมนต์คือ $\tilde{T}(x)$ ที่อยู่ในรูปแบบ trial function ดังนี้

$$\tilde{T}(x) = [N_i(x)]\{T_i\} = N_1(x)T_1 + N_2(x)T_2 + N_3(x)T_3 + ... + N_m(x)T_m \qquad (7.8)$$

กำหนดให้

$[N_i(x)]$ คือฟังก์ชันรูปร่างเขียนในรูปเมตริกซ์
$\{T_i\}$ คือค่าอุณหภูมิที่โหนดเขียนในรูปเวคเตอร์



รูปที่ 7.2 โหนดและเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติ

เมื่อนำสมการ (7.8) แทนใน (7.7) สิ่งที่ยังเป็นปัญหาคือ $W(x)$ จะเลือกฟังก์ชันอะไรมาใช้ จากวิธีการของกาเลอร์คิน (Galerkin) แบบบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) [1] เลือกใช้ $W(x) = \{N_i(x)\}$ ดังนั้นจากสมการที่ (7.7) พบว่า

$\frac{d}{dx}W(x) = \frac{d}{dx}\{N_i(x)\}$ และ $\frac{d\tilde{T}}{dx} = \frac{d}{dx}[N_i(x)]\cdot\{T_i\}$ ดังนั้น

$$\int_0^L \frac{d}{dx}\{N_i(x)\}\cdot A\cdot k\cdot\frac{d}{dx}[N_i(x)]\cdot\{T_i\}\,dx=\{N_i(x)\}\cdot A\cdot k\cdot\frac{d\widetilde{T}}{dx}\ \vdots_0^L+\int_0^L\{N_i(x)\}\cdot q_g\cdot A\,dx \tag{7.9}$$

สมการ (7.9) เป็นสมการที่แสดงบนโดเมนทั้งหมด ในกรณีนี้เมื่อต้องการพิจารณาในแต่ละเอลิเมนต์ (e) มีโดเมนย่อย $x_i\le x\le x_m$ จะได้ว่า เมตริกซ์สทีฟเนสของการนำความร้อนแต่ละเอลิเมนต์ย่อย คือ

$$[K_c]_e=\int_{x_i}^{x_m}\frac{d}{dx}\{N_i(x)\}\cdot A\cdot k\cdot\frac{d}{dx}[N_i(x)]\cdot dx \tag{7.10}$$

มีเวคเตอร์ความร้อนที่ผลิตขึ้นเองเกิดขึ้นที่โหนดของแต่ละเอลิเมนต์คือ

$$\{Q_g\}_e=\int_{x_i}^{x_m}\{N_i(x)\}\cdot q_g\cdot A\,dx \tag{7.11}$$

และเวคเตอร์ความร้อนจากการนำที่ขอบของแต่ละเอลิเมนต์คือ

$$\{Q_c\}_e=\{N_i(x)\}\cdot A\cdot k\cdot\frac{d\widetilde{T}}{dx}\ \vdots_{x_i}^{x_m} \tag{7.12}$$

สมการที่ (7.10)-(7.12) คือสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์ย่อย (e)

$$[K_c]_e\cdot\{T_i\}=\{Q_g\}_e+\{Q_c\}_e \tag{7.13}$$

ถ้าเราแบ่งโดเมนทั้งหมด $(0\le x\le L)$ ออกเป็นโดเมนย่อยตามเอลิเมนต์ย่อย (e) ทั้งหมดจำนวน N_e เอลิเมนต์เมื่อ $\int_0^L\ldots=\sum_{e=1}^{e=N_e}\ldots$ ดังนั้นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของชิ้นงานหรือของทั้งระบบคือ

$$(\sum_{e=1}^{e=N_e}[K_c]_e)\cdot\{\mathrm{T}\}=\sum_{e=1}^{e=N_e}\{Q_g\}_e+\sum_{e=1}^{e=N_e}\{Q_c\}_e$$

หรือ

$$[\mathrm{K_C}]\cdot\{\mathrm{T}\}=\{\mathrm{Q_C}\}+\{\mathrm{Q_G}\} \tag{7.14}$$

เมื่อ

$[\mathrm{K_C}]=\sum_{e=1}^{e=N_e}[K_c]_e$ คือค่าการนำความร้อนของทั้งระบบในรูปเมตริกซ์จตุรัส

$\{T\}$ คือค่าอุณหภูมิที่ทุกโหนดในรูปเมตริกซ์สดมภ์

$\{Q_C\}=\sum_{e=1}^{e=N_e}\{Q_c\}_e$ คือค่าการนำความร้อนที่ขอบเขตในรูปเมตริกซ์สดมภ์

$\{Q_G\}=\sum_{e=1}^{e=N_e}\{Q_g\}_e$ คือค่าความร้อนที่ผลิตขึ้นที่โหนดในรูปเมตริกซ์สสดมภ์

จากสมการ (7.14) คือสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับกรณีที่ผิวชิ้นงานไม่มีการหุ้มฉนวนและที่ผิวมีการพาความร้อน q_h (heat convection) เกิดขึ้น ดังนั้นสมการที่ (7.2)-(7.3) จะเปลี่ยนเป็น

$k\frac{d^2T}{dx^2}+q_g+q_h=0$ และ

$$k\frac{d^2}{dx^2}(\widetilde{T})+q_g+q_h=R(x) \tag{7.15}$$

เมื่อ

$q_h=-\frac{h}{A}S(T-T_\infty)$

โดยที่

h คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน มีหน่วยคือ power/(area x degree of temperature)

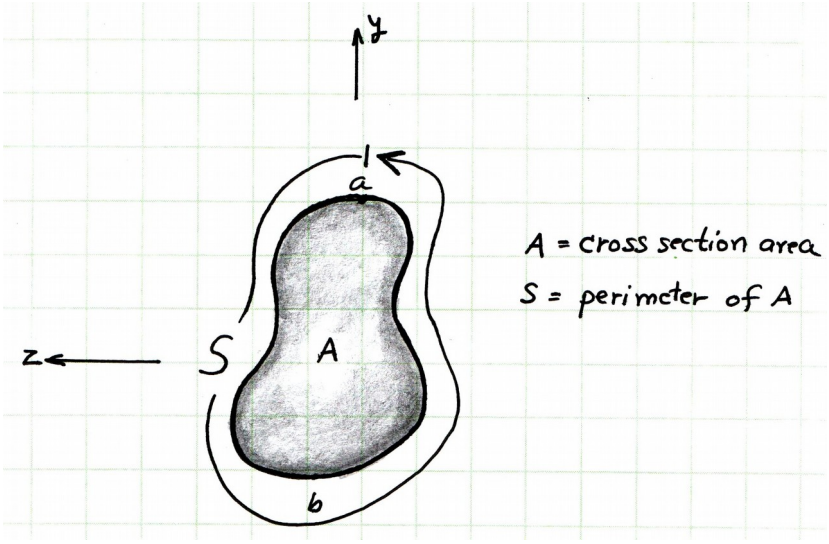
T คือ อุณหภูมิที่ผิวของชิ้นงาน

T_∞ คือ อุณหภูมิของไหลที่พาความร้อนไป ทั่วไปแล้ว $T_\infty<T$

A คือ พื้นที่หน้าตัดของชิ้นงาน

S คือ ความยาวรอบรูปที่ล้อมปิดพื้นที่ A ดังแสดงในรูปที่ 7.3

ดังนั้นหน่วยของ q_h คือ power/volume



รูปที่ 7.3 ความยาวรอบรูปที่ล้อมปิดพื้นที่

ประยุกต์สมการ (7.15) ด้วยวิธีถ่วงเศษตกค้างจะได้

$$\int_0^L W(x)\cdot A\cdot(k\frac{d^2}{dx^2}(\widetilde{T}))\,dx+\int_0^L W(x)\cdot q_g\cdot A\,dx-\int_0^L W(x)\cdot h(\frac{S}{A})(T-T_\infty)\cdot A\,dx=0$$

ทำการอินทิเกรทแยกส่วนกับพจน์แรกและแทน $W(x)=\{N_i(x)\}$ จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{d}{dx}\{N_i(x)\}\cdot A\cdot k\cdot\frac{d}{dx}[N_i(x)]\cdot\{T_i\}\,dx+\int_0^L \{N_i(x)\}\cdot h\cdot S\cdot[N_i(x)]\cdot\{T_i\}\,dx=\\ \{N_i(x)\}\cdot A\cdot k\cdot\frac{d\widetilde{T}}{dx}\ \vdots\ {}_0^L+\int_0^L \{N_i(x)\}\cdot q_g\cdot A\,dx+\int_0^L \{N_i(x)\}\cdot h\cdot S\cdot T_\infty\,dx\end{aligned} \tag{7.16}$$

ถ้าพิจารณาเฉพาะบนโดเมนของเอลิเมนต์ย่อย (e) $x_i\le x\le x_m$ จะมี เมตริกซ์การพาความร้อนของแต่ละเอลิเมนต์ย่อยเพิ่มขึ้นอีก 1 เมตริกซ์นอกเหนือจากสมการ (7.10) คือ

$$[K_h]_e=\int_{x_i}^{x_m}\{N_i(x)\}\cdot[N_i(x)]\cdot h\cdot s\,dx \tag{7.17}$$

มีเวคเตอร์ความร้อนที่เกิดจากการพาที่โหนดของแต่ละเอลิเมนต์เพิ่มขึ้นอีก 1 เวคเตอร์คือ

$$\{Q_h\}_e = \int_{x_i}^{x_m} \{N_i(x)\} \cdot h \cdot S \cdot T_\infty \, dx \tag{7.18}$$

ดังนั้นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์ย่อย (e) คือ

$$[[K_c]_e + [K_h]_e]\{T_i\} = \{Q_g\}_e + \{Q_c\}_e + \{Q_h\}_e \tag{7.19}$$

ดังนั้นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของชิ้นงานหรือของทั้งระบบคือ

$$\left(\sum_{e=1}^{e=N_e} [[K_c]_e + [K_h]_e]\right) \cdot \{\mathrm{T}\} = \sum_{e=1}^{e=N_e} \{Q_g\}_e + \sum_{e=1}^{e=N_e} \{Q_c\}_e + \sum_{e=1}^{e=N_e} \{Q_h\}_e$$

หรือ

$$[[\mathrm{K_C}] + [\mathrm{K_H}]] \cdot \{\mathrm{T}\} = \{\mathrm{Q_C}\} + \{\mathrm{Q_G}\} + \{\mathrm{Q_H}\} \tag{7.20}$$

เมื่อ

$[\mathrm{K_H}] = \sum_{e=1}^{e=N_e} [K_h]_e$ คือค่าการพาความร้อนของทั้งระบบในรูปเมตริกซ์จตุรัส

$\{\mathrm{Q_H}\} = \sum_{e=1}^{e=N_e} \{Q_g\}_e$ คือค่าความร้อนที่เกิดจากการพาที่โหนดในรูปเมตริกซ์สดมภ์

ในกรณีที่มีการกำหนดให้ความร้อนเข้าออกที่ผิวของเอลิเมนต์สมมติคือ

$$\{Q_s\}_e = \int_{A_s} \{N_i(x)\} \cdot q_s \, d\, A_s$$

เมื่อ

q_s คือ ความร้อนต่อพื้นที่ มีหน่วยเป็น power/area

A_s คือ พื้นที่ผิวของเอลิเมนต์

ดังนั้นเมื่อรวมเอลิเมนต์ทั้งหมดก็จะมี

$\{\mathrm{Q_S}\} = \sum_{e=1}^{e=N_e} \{Q_s\}_e$ คือค่าความร้อนที่กำหนดให้เกิดที่ผิวชิ้นงานกระจายที่โหนดในรูปเมตริกซ์สดมภ์

ดังนั้นสรุปสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการถ่ายเทความร้อนไม่รวมกรณีการแผ่รังสีคือ

$$[[K_C]+[K_H]]\cdot\{T\}=\{Q_C\}+\{Q_G\}+\{Q_H\}+\{Q_S\} \tag{7.21}$$

เมื่อ

$[K_C]$ คือ เมตริกซ์การนำความร้อน

$[K_H]$ คือ เมตริกซ์การพาความร้อน

$\{T\}$ คือ ค่าเวคเตอร์ที่โหนดแสดงการกระจายอุณหภูมิ

$\{Q_C\}$ คือ ค่าเวคเตอร์ที่โหนดแสดงการนำความร้อน

$\{Q_G\}$ คือ ค่าเวคเตอร์ที่โหนดแสดงค่าความร้อนผลิตขึ้น

$\{Q_H\}$ คือ ค่าเวคเตอร์ที่โหนดแสดงการพาความร้อน

$\{Q_S\}$ คือ ค่าเวคเตอร์ที่โหนดแสดงความร้อนที่กำหนดขึ้น

สมการที่ (7.21) คือรูปแบบของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่ครอบคลุมหลักการตั้งแต่ 1 มิติ ถึง 3 มิติ เพียงแต่ใน 2 มิติและ 3 มิติ สมการของเอลิเมนต์ย่อยจะแตกต่างกันไปเนื่องจากต้องมีการคำนึงถึงค่าการนำความร้อน สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวนำมาเสนอเพื่อให้รู้จักปัจจัยหรือตัวแปรหลักที่เกี่ยวข้องกับปัญหา ทำให้สามารถกำหนดคำสั่งต่างๆ เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อน ทั้งนี้เพื่อความถูกต้องของผลลัพธ์ที่จะได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมต่อไป

7.4 คำสั่งของ CalculiX เพื่อแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน

7.3.1 คำสั่งที่กำหนดประเภทของการวิเคราะห์ (Analysis Types)

คำสั่งที่ใช้คือ *HEAT TRANSFER (ใช้แทน *STATIC ซึ่งใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาประเภทสมดุลสถิตย์ของปัญหาด้านโครงสร้างก่อนหน้านี้) คำสั่งนี้ใช้เพื่อกำหนดให้โปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาประเภทการถ่ายเทความร้อน คำสั่งนี้มีรูปแบบการใช้งานดังนี้

*HEAT TRANSFER, (parameters)
initial time increment, total time step

parameters คือตัวแปรสำหรับกำหนดเงื่อนไขการคำนวณ มีหลายตัวแปรที่เตรียมไว้สำหรับใช้งานสำหรับในขั้นต้นขอเลือกเฉพาะที่สำคัญ เช่น

-เมื่อต้องการระบุให้โปรแกรมคำนวณที่สภาวะคงตัว (steady state) สามารถใช้ STEADY ในกรณีที่ไม่ระบุโปรแกรมจะกำหนดการคำนวณให้เป็นแบบที่สภาวะไม่คงตัวหรือสภาวะที่อุณหภูมิยังเปลี่ยนแปลงตามเวลา (transient) ในกรณีผู้เขียนโปรแกรมต้องกำหนดค่าความร้อนจำเพาะของวัสดุของแข็ง (solid) ลงไปร่วมด้วย โดยใช้คำสั่ง *SPECIFIC HEAT ซึ่งเป็นการกำหนดสมบัติของวัสดุ

-เมื่อต้องการไม่ให้แบ่งย่อยในขั้นการคำนวณแบบอัตโนมัติให้กำหนด DIRECT ซึ่งเป็นการกำหนดให้คำนวณตามขั้นที่กำหนดในบรรทัดที่สอง ตัวอย่างการใช้คำสั่ง

*HEAT TRANSFER,STEADY STATE,DIRECT
0.1,1.0

หมายความว่า กำหนดให้ประเภทวิเคราะห์ปัญหานี้เป็นแบบการถ่ายเทความร้อน โดยคำนวณที่สภาวะคงตัวของอุณหภูมิ และกำหนดให้แบ่งช่วงเวลาการคำนวณย่อยออกเป็นช่วงละ 0.1 (initial time increment = 0.1) และกำหนดให้ใช้เวลาทั้งหมดคือ 1.0 (total time step = 1.0) ดังนั้นเราเรียกใช้ DIRECT โปรแกรมจะทำการแบ่งย่อยช่วงคำนวณ increment = 1.0/0.1 =10 increments เมื่อคำนวณจบ แต่ถ้าไม่ระบุ DIRECT โปรแกรมจะแบ่งอัตโนมัติ

7.3.2 คำสั่งที่กำหนดอุณหภูมิที่โหนด

คำสั่งที่ใช้คือ *BOUNDARY คำสั่งนี้ใช้เพื่อกำหนดอุณหภูมิที่โหนดหรือที่กลุ่มของโหนดให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของอุณหภูมิที่ขอบเขต ซึ่งสำหรับอุณหภูมิโปรแกรมกำหนดให้ใช้ 11 คือหมายเลขดีกรีองศาอิสระสำหรับรูปแบบทั่วไปของคำสั่งนี้เหมือนกับที่ใช้ในบทที่ผ่านมา ตัวอย่างการใช้คำสั่ง

*BOUNDARY
12,11,11,100

หมายความว่า กำหนดให้โหนดหมายเลข 12 มีอุณหภูมิ 100 องศา (อาจเป็นเซลเซียสหรือฟาร์เรนไฮต์ ขึ้นกับปัญหา)

7.3.3 คำสั่งที่กำหนดค่าความร้อนที่โหนด

คำสั่งที่ใช้คือ *CFLUX คำสั่งนี้ใช้เพื่อกำหนดค่าความร้อนที่โหนดหรือที่กลุ่มของโหนด (NSET) คำสั่งนี้มีรูปแบบคล้ายกับคำสั่ง *CLOAD (ที่ใช้กำหนดแรงกระทำที่จุดก่อนหน้านี้) ตัวอย่างการใช้คำสั่ง

*CFLUX
12,11,100

หมายความว่า กำหนดให้โหนดหมายเลข 12 มีค่าความร้อนเท่ากับ 100 (มีหน่วยเป็นกำลัง , power) สำหรับ 11 คือ ดีกรีองศาอิสระที่โหนด

7.3.4 คำสั่งที่กำหนดค่าความร้อนที่ผิวและที่ปริมาตรชิ้นงาน

คำสั่งที่ใช้คือ *DFLUX คำสั่งนี้ใช้เพื่อกำหนดค่าความร้อนที่ผิวและที่ปริมาตรของเอลิเมนต์หรือหรือกลุ่มของเอลิเมนต์ (ELSET) คำสั่งนี้มีรูปแบบคล้ายกับคำสั่ง *DLOAD (ที่ใช้กำหนดแรงกระทำที่กระจายก่อนหน้านี้) เมื่อใช้กำหนดการกระจายความร้อนที่ผิวมีหน่วยคือ กำลัง/พื้นที่ ถ้าใช้กับปริมาตรมีหน่วยคือ กำลัง/ปริมาตร 5 ถ้าไม่มีการกำหนด *DFLUX บนเอลิเมนต์แสดงว่าไม่มีการกำหนดความร้อนที่เอลิเมนต์ รูปแบบการใช้คำสั่ง

*DFLUX, (parameters)
element no. or element set (ELSET) ,distributed flux type label, actual magnitude of the load

-สำหรับกรณีกำหนดความร้อนกระจายที่ผิวคงที่ (uniform surface heat flux) เลือกใช้ Sx เพื่อระบุ distributed flux type label โดย x คือ หมายเลขผิวเอลิเมนต์ (สามารถดูจากคู่มือ CCX MANUAL [2]) สำหรับ actual magnitude of the load คือค่าความร้อนที่ระบุมีหน่วยเป็น กำลัง/พื้นที่

-สำหรับกรณีกำหนดความร้อนแบบกระจายทั่วปริมาตร (uniform volume flux) เลือกใช้ BF เพื่อระบุ distributed flux type label สำหรับ actual magnitude of the load คือค่าความร้อนที่ระบุมีหน่วยเป็น กำลัง/ปริมาตร

ตัวอย่างการใช้คำสั่ง

*DFLUX
12,S1,100

หมายความว่า กำหนดให้มีค่าความร้อนกระจายที่ผิวเท่ากับ 100 (มีหน่วยเป็น กำลัง/พื้นที่) ที่ผิวหมายเลข 2 ของเอลิเมนต์หมายเลข 12

7.3.5 คำสั่งที่กำหนดค่าการพาความร้อนที่ผิวชิ้นงาน (convection flux)

คำสั่งที่ใช้คือ *FILM คำสั่งนี้ใช้เพื่อกำหนดการพาความร้อนที่ผิวของเอลิเมนต์หรือผิวของกลุ่มของเอลิเมนต์ (ELSET) มีรูปแบบการใช้งานดังนี้

*FILM, (parameters)

element no. or element set (ELSET) ,film flux type label, sink temperature, film coefficient

ค่าความร้อนที่เกิดจากการพาเรียกว่า film flux ซึ่งขึ้นกับค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (film coefficient) ถ้าค่า film coefficient คงที่ เลือกระบุ Fx เป็นค่า film flux type label โดย x คือ หมายเลขผิวเอลิเมนต์เหมือนคำสั่ง *DFLUX

ตัวอย่างการใช้คำสั่ง

*FILM

12,F1,30,0.1

หมายความว่า กำหนดให้มีการพาความร้อนกระจายที่ผิวหมายเลข 1 (F1) ของเอลิเมนต์หมายเลข 12 โดยอุณหภูมิของไหลที่เป็นสื่อพาความร้อน (T_∞) คือ 30 องศา (ขึ้นกับหน่วยที่ใช้) และมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h) คงที่เท่ากับ 0.1 (ขึ้นกับหน่วยที่ใช้)

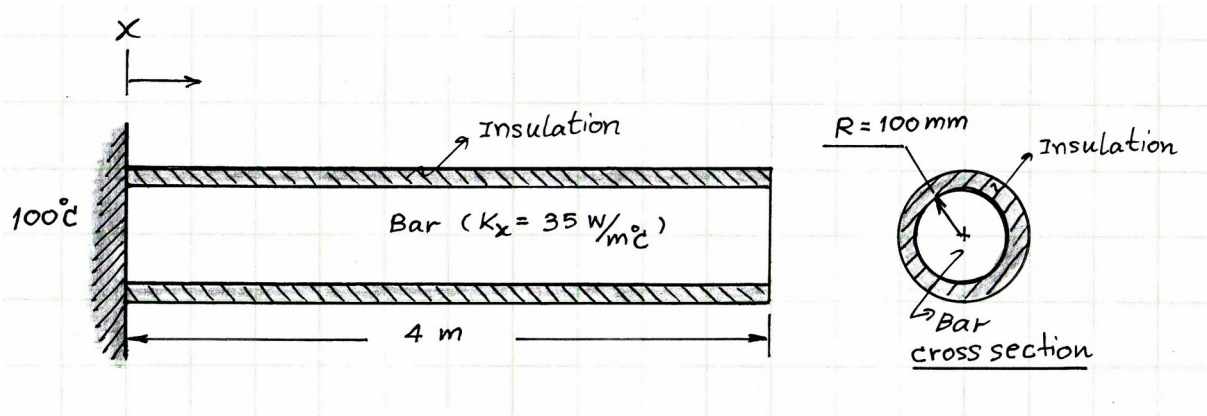
7.3.6 คำสั่งที่กำหนดค่าผลลัพธ์

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ สามารถรายงานออกมาทาง dat file และ frd file ซึ่งเป็นตัวแปรที่ใช้ในคำสั่ง *NODE PRINT *NODE FILE *EL PRINT และ *EL FILE ดังที่เคยใช้ในบทที่ผ่านมา สำหรับตัวแปรที่ใช้กำหนดผลลัพธ์คือ

- NT หมายถึงค่าอุณหภูมิที่โหนดของชิ้นงาน ใช้ในคำสั่ง*NODE PRINT และ *NODE FILE
- RFL หมายถึงค่าความร้อนที่โหนด (external concentrated heat source) ใช้ในคำสั่ง*NODE PRINT และ *NODE FILE
- HFL หมายถึงค่าความร้อนที่เอลิเมนต์ (heat flux) ใช้ในคำสั่ง *EL PRINT และ *EL FILE

7.5 ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน

<u>ตัวอย่างที่</u> 7.1 [3] จงหาการกระจายของอุณหภูมิตลอดความยาวของแท่งกลม (bar) เมื่อตลอดความยาวของแท่งที่มีฉนวนหุ้มภายนอกทั้งความยาวและมีอุณหภูมิที่ปลายด้านซ้ายสุดเท่ากับ 100 ^{o}C ดังรูปที่ 7.4 ปลายด้านขวาสุดของแท่งมีของไหลไหลผ่านที่อุณหภูมิเท่ากับ 10 ^{o}C โดยกำหนดให้ h=100 W/m^{2} ^{o}C และ K_X = 35 W/m ^{o}C



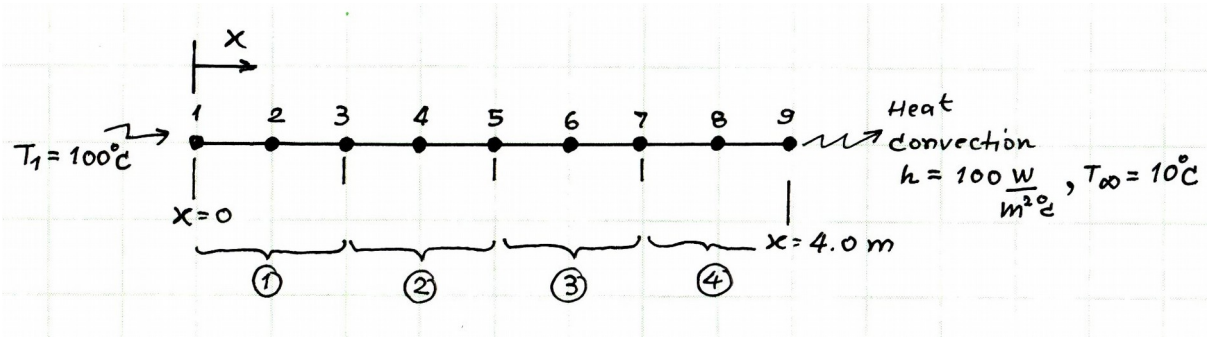
รูปที่ 7.4 แท่งกลม (bar) มีฉนวนหุ้มภายนอกตลอดความยาว

<u>แนวคิด</u>

- โจทย์เป็นปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่สภาวะอุณหภูมิคงตัว มีแหล่งความร้อนทำให้เกิดอุณหภูมิและควบคุมให้คงที่ที่ปลายขวาของแท่ง ตลอดความยาวของแท่งเกิดการนำความร้อนจากปลายซ้ายสุดไปยังปลายขวาสุด ในแนวรัศมีของแท่งไม่มีการนำความร้อนและมีการหุ้มฉนวนเพื่อไม่ให้มีการถ่ายเทความร้อนเข้าหรือออกจากผิวตลอดความยาว เฉพาะที่ปลายขวาสุดของแท่งมีการพาความร้อนออกไป ในขั้นต้นปัญหานี้สามารถใช้เอลิเมนต์แบบ 1-D เอลิเมนต์คือ B32 หรือเอลิเมนต์แบบคานมาใช้แก้ปัญหา

<u>การเขียน inp file (inp file)โดยใช้เอลิเมนต์แบบคาน (B32)</u>

-สร้าง Mesh (Meshing) ในแบบ 1-D ตามแกน x โดยกำหนดให้ปลายซ้ายสุดคือ x=0 แบ่งเอลิเมนต์ออกจำนวน 4 เอลิเมนต์ยาวเท่ากันตลอดความยาว ถ้าเลือกใช้เอลิเมนต์แบบคาน (B32) จะมีโหนดทั้งหมด 9 จุด และแต่ละเอลิเมนต์จะมี 3 โหนดเชื่อมต่อกันดังรูปที่ 7.5 ที่โหนดหมายเลข 1 มีอุณหภูมิคงที่ตลอดเวลาเท่ากับ 100°C และที่ปลายซ้ายหรือที่เอลิเมนต์ที่ 4 ผิวเอลิเมนต์ปลายสุดมีการพาความร้อนเกิดขึ้น



รูปที่ 7.5 โหนดและเอลิเมนต์

1. เริ่มต้นเขียนอินพุตกำหนดหัวเรื่องคือ `ch71.inp 1-D model of heat transfer in bar`

```
*HEADING
ch71.inp 1-D model of heat transfer in bar
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดและตำแหน่งที่ (x,y,z) จำนวนโหนดทั้งหมด 9 โหนดห่างเท่ากันตามแกน x กำหนดโหนดทั้งหมดมีกลุ่มชื่อว่า Nall

```
*NODE, NSET=Nall
1,0.0,0.0,0.0
2,0.5,0.0,0.0
3,1.0,0.0,0.0
4,1.5,0.0,0.0
5,2.0,0.0,0.0
6,2.5,0.0,0.0
7,3.0,0.0,0.0
8,3.5,0.0,0.0
9,4.0,0.0,0.0
```

3. กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ หมายเลขเอลิเมนต์ และโหนดต่างๆ ที่ประกอบกันเป็นแต่ละเอลิเมนต์ สำหรับปัญหานี้ กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์คือ B32 มีทั้งหมดจำนวน 4 เอลิเมนต์ เรียงจากเอลิเมนต์หมายเลข 1 ถึงหมายเลข 4 ตั้งชื่อกลุ่มของเอลิเมนต์ทั้งหมดว่า Eall

```
*ELEMENT, TYPE=B32, ELSET=Eall
1,1,2,3
2,3,4,5
3,5,6,7
4,7,8,9
```

4. กำหนดชื่อวัสดุว่า EL ให้มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแนวแกน x เท่ากับ 35 W/m °C

```
*MATERIAL,NAME=EL
*CONDUCTIVITY
35.,0.
```

5.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ Eall ให้เป็นหน้าตัดแบบคานรูปวงกลมรัศมี 100 mm หรือ 0.1 m มีค่าสมบัติวัสดุตามชื่อ EL ที่ได้กำหนดในข้อ 4

```
*BEAM SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=EL,SECTION=CIRC
0.1,0.1
```

6 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบการถ่ายเทความร้อนที่เงื่อนไขสภาวะอุณหภูมิคงตัวและเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis) โดยกำหนดแบ่งช่วงคำนวณย่อยทั้งหมดออกเป็น 10 ช่วงเท่าๆ กัน

```
*STEP
*HEAT TRANSFER,DIRECT,STEADY STATE
0.1,1.0
```

7. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)
-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้โหนดหมายเลข 1 คือที่ตำแหน่ง x=0 มีอุณหภูมิตามที่โจทย์กำหนดคือ 100°C

```
*BOUNDARY
1,11,11,100.
```

8. และกำหนดเงื่อนไขภาระความร้อน (load conditions)
เนื่องจากไม่มีความร้อนใดๆ เข้าออกผิวด้านข้างในแนวรัศมีจึงไม่จำเป็นต้องกำหนด *DFLUX ลงไปในไฟล์ อย่างไรก็ตามมีการพาความร้อนออกที่ปลายขวาสุดซึ่งก็คือเอลิเมนต์หมายเลข 4 ดังนั้นสิ่งที่ต้องคำนึงก็คือที่เอลิเมนต์หมายเลข 4 นี้คือผิวหมายเลขอะไรที่มีการพาความร้อนออกไป เนื่องจากเอลิเมนต์ B32 แม้จะเป็นเอลิเมนต์ใน 1-D จริงแต่ได้จำลองมาจาก 3-D เอลิเมนต์ดังที่ได้เคยกล่าวไปแล้วในหัวข้อ 3.1 เอลิเมนต์แบบนี้เปรียบเหมือนเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมหกหน้าซึ่งถ้าตรวจสอบหมายเลขพบว่าหน้าของเอลิเมนต์ที่ 4 ด้านขวาคือหน้าของเอลิเมนต์ที่จึงต้องระบุหมายเลขหน้าคือ F4 ในคำสั่ง *FILM ที่ระบุการพาความร้อนด้วยค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเท่ากับ 100 W/m^2 °C และมีค่าอุณหภูมิของของไหลที่พาความร้อนเท่ากับ 10 °C ดังนั้นคำสั่งสำหรับกำหนดการพาความร้อนออกที่ปลายเอลิเมนต์ที่ 4 คือ

```
*FILM
4,F4,10.0,100
```

9. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file และแสดงผลใน frd file โดยกำหนดให้รายงานค่าอุณหภูมิ (NT) และความร้อนที่โหนด (RFL) ทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความร้อน (HFL) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด

```
*NODE PRINT,NSET=Nall
NT,RFL
*EL PRINT,ELSET=Eall
HFL
*NODE FILE
NT,RFL
```

```
*EL FILE
HFL
```

10. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

11. ประกอบคำสั่งทั้งหมดเข้ากันได้เป็น inp file ดังนี้

```
*HEADING
ch71.inp 1-D model of heat transfer in bar
*NODE, NSET=Nall
1,0.0,0.0,0.0
2,0.5,0.0,0.0
3,1.0,0.0,0.0
4,1.5,0.0,0.0
5,2.0,0.0,0.0
6,2.5,0.0,0.0
7,3.0,0.0,0.0
8,3.5,0.0,0.0
9,4.0,0.0,0.0
*ELEMENT, TYPE=B32, ELSET=Eall
1,1,2,3
2,3,4,5
3,5,6,7
4,7,8,9
*MATERIAL,NAME=EL
*CONDUCTIVITY
35.,0.
*BEAM SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=EL,SECTION=CIRC
0.1,0.1
*STEP
*HEAT TRANSFER,DIRECT,STEADY STATE
0.1,1.0
*BOUNDARY
1,11,11,100.
*FILM
4,F4,10.0,100
*NODE PRINT,NSET=Nall
NT,RFL
*EL PRINT,ELSET=Eall
HFL
*NODE FILE
NT,RFL
*EL FILE
HFL
*END STEP
```

12. การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

ลองตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยตรงกับผลที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมดังนี้

12.1 การคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิโดยตรงจากสมการที่ 7.2

ที่สภาวะคงตัวเมื่อความร้อนที่ผลิตขึ้นเองเท่ากับศูนย์ $(q_g=0)$ มีแค่เพียงการนำความร้อนในแท่ง ดังนั้น

$$k\frac{d^2T}{dx^2}=0 \tag{a}$$

ทำการอินทิเกรทสมการ (a) โดยตรงจะได้ว่า

$$T(x)=ax+b \tag{b}$$

เมื่อ a,b คือค่าคงที่ ที่ต้องหาจากการเงื่อนไขขอบเขตและจากสมการดังนี้

-ที่ $x=0;T(0)=100\ ^oC$ ประยุกต์เงื่อนไขนี้เข้ากับสมการ (b) ดังนั้นจะได้ $b=100$

-ที่ $x=4\ \text{m};\quad k\frac{dT}{dx}=h(T_\infty-T)$ เพราะค่าการพาความร้อนที่ปลายเท่ากับการนำความร้อน

$$35\left(\frac{dT}{dx}\right)=100(10-T) \tag{c}$$

จากสมการ (b) เมื่อ $\frac{dT}{dx}=a$ นำไปแทนใน (c) ดังนั้น จะได้

$4.35a=-90$ ดังนั้น $a=-20.69$

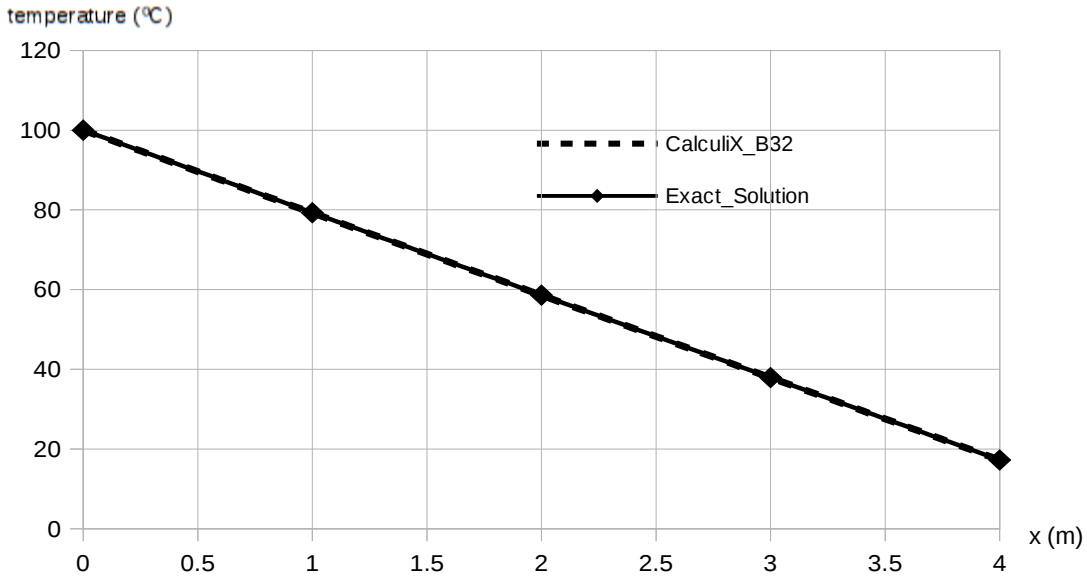
ดังนั้นค่าคำตอบของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง x ใดๆ ในช่วง $0\le x\le 4\ \text{m}$ คือ

$$T(x)=-20.69x+100\ \ ^oC \tag{d}$$

12.2 จาก dat file ที่ขั้นคำนวณสุดท้ายพบผลคำนวณของค่าอุณหภูมิ (มีหน่วยเป็น °C) ของที่โหนดต่างๆ ดังนี้

```
temperatures for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  1.000000E+02
         2  8.962398E+01
         3  7.924796E+01
         4  6.892025E+01
         5  5.859255E+01
         6  4.825185E+01
         7  3.791114E+01
         8  2.757415E+01
         9  1.723716E+01
```

นำผลการคำนวณจากโปรแกรมที่ได้เปรียบเทียบกับสมการ (d) ดังแสดงในรูปที่ 7.6 ได้ดังนี้



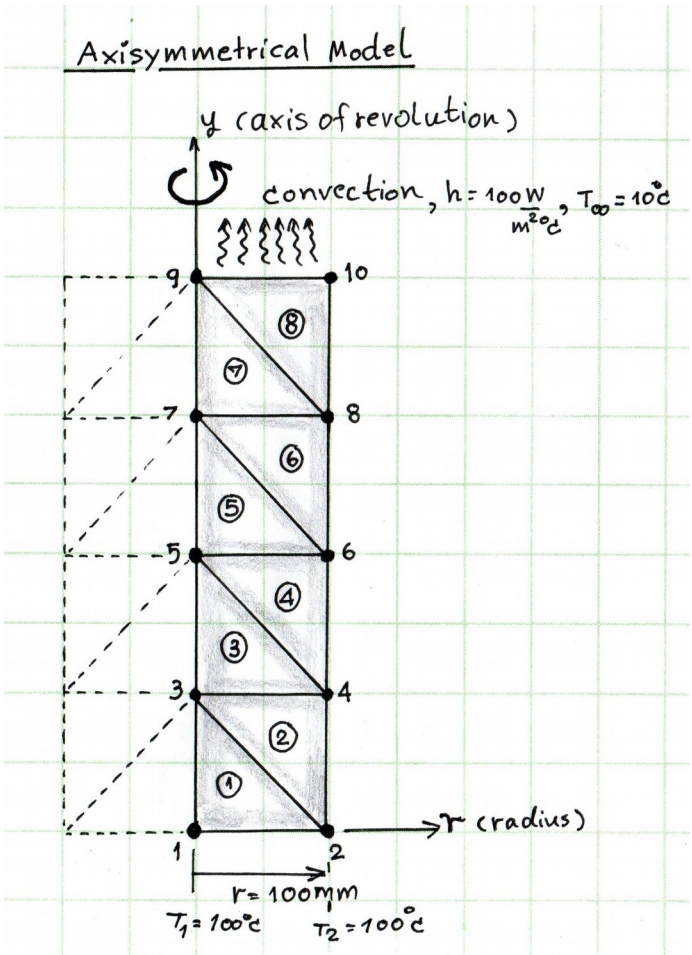
รูปที่ 7.6 กราฟแสดงอุณหภูมิเปรียบเทียบผลการคำนวณตลอดความยาวของชิ้นงาน

ซึ่งจากผลการคำนวณทั้งสองวิธีได้ผลที่เหมือนกันคืออุณหภูมิมีการเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้นจากปลายซ้ายโดยลดลงแบบเชิงเส้นและจะมีอุณหภูมิน้อยสุดที่ปลายขวา ภายในแท่งจะมีการนำความร้อนไม่มีการสูญเสียความร้อนที่ผิวด้านข้าง การลดลงของอุณหภูมิอุณหภูมิตลอดความยาวเกิดจากการพาความร้อนเฉพาะที่ผิวของปลายขวาสุดเป็นหลัก

<u>ตัวอย่างที่</u> 7.2 [3] จากตัวอย่างที่ 7.2 จงใช้เอลิเมนต์แบบสมมาตรรอบแกนหมุนหาการกระจายของอุณหภูมิตลอดความยาวของแท่งกลม (bar)

<u>การเขียน inp file (inp file)โดยใช้เอลิเมนต์แบบสมมาตรรอบแกนหมุน (CAX3)</u>

-หลักการของแบบสมมาตรรอบแกนหมุนคือ สร้างแบบเพียงครึ่งหนึ่ง ส่วนที่เหลือเกิดจากการหมุนรอบแกน วิธีการเริ่มจากสร้าง Mesh (Meshing) ในแบบ 2-D โดยกำหนดให้อยู่บนระนาบและโหนดถูกกำหนดโดยคู่ลำดับ (r,y) แนวรัศมีคือแกน r และแนวตามยาวของชิ้นงานคือแกน y ที่ปลายสุดคือ y=4 m คือปลายที่มีการพาความร้อนออกไป และที่ y=0 m คือปลายที่มีอุณหภูมิ 10^0C จากนั้นแบ่งเอลิเมนต์ออกจำนวน 8 เอลิเมนต์ยาวเท่ากันตลอดความยาว ถ้าเลือกใช้เอลิเมนต์แบบ CAX3 จะมีโหนดทั้งหมด 10 จุด และแต่ละเอลิเมนต์จะมี 3 โหนดเชื่อมต่อกันดังรูปที่ 7.7 ที่โหนดหมายเลข 1 และ 2 มีอุณหภูมิคงที่ตลอดเวลาเท่ากับ 100°C และที่ปลายซ้ายหรือที่เอลิเมนต์ที่ 8 ผิวเอลิเมนต์ปลายสุดมีการพาความร้อนเกิดขึ้น ในขณะเดียวกันที่ขอบผิวเอลิเมนต์หมายเลข 8 – 6 – 4 -2 ซึ่งเป็นผิวรอบชิ้นงานตามแนวยาวนั้นไม่มีการพาความร้อนออก



รูปที่ 7.7 ต้นแบบชิ้นงานสมมาตรรอบแกนหมุน

1. เริ่มต้นเขียนอินพุตกำหนดหัวเรื่องคือ

```
ch71_cax 3.inp  axisymmetrical model of heat transfer in bar
```

```
*HEADING
ch71_cax 3.inp  axisymmetrical model of heat transfer in bar
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดและตำแหน่งที่ (r,y) จำนวนโหนดทั้งหมด 10 จุด กำหนดกลุ่มโหนดนี้ชื่อว่า Nall

```
*NODE, NSET=Nall
1,0.0,0.0,0.0
2,0.1,0.0,0.0
3,0.0,1.0,0.0
4,0.1,1.0,0.0
5,0.0,2.0,0.0
6,0.1,2.0,0.0
7,0.0,3.0,0.0
8,0.1,3.0,0.0
9,0.0,4.0,0.0
10,0.1,4.0,0.0
```

3. กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ หมายเลขเอลิเมนต์ และโหนดต่างๆ ที่ประกอบกันเป็นแต่ละเอลิเมนต์ สำหรับปัญหานี้ กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์คือ CAX3 มีทั้งหมดจำนวน 8 เอลิเมนต์ เรียงจากเอลิเมนต์หมายเลข 1 ถึงหมายเลข 8 ตั้งชื่อกลุ่มของเอลิเมนต์ทั้งหมดว่า Eall

```
*ELEMENT, TYPE=CAX3, ELSET=Eall
1,1,2,3
2,2,4,3
3,3,4,5
4,4,6,5
5,5,6,7
6,6,8,7
7,7,8,9
8,8,10,9
```

4. กำหนดชื่อวัสดุว่า EL ให้มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแนวแกน x เท่ากับ 35 W/m °C

```
*MATERIAL,NAME=EL
*CONDUCTIVITY
35.,0.
```

5.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ Eall ให้เป็นหน้าตัดแบบของแข็ง มีสมบัติวัสดุตามชื่อ EL ที่ได้กำหนดในข้อ 4 คือ

```
*SOLID SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=EL
1.0
```

6 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบการถ่ายเทความร้อนที่เงื่อนไขสภาวะอุณหภูมิคงตัวและเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis) โดยกำหนดแบ่งช่วงคำนวณย่อยทั้งหมดออกเป็น 10 ช่วง

เท่าๆ กัน

```
*STEP
*HEAT TRANSFER,DIRECT,STEADY STATE
0.1,1.0
```

7. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)
-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้โหนดหมายเลข 1 และ 2 คือที่ตำแหน่ง y=0 มีอุณหภูมิตามที่โจทย์กำหนด คือ 100°C

```
*BOUNDARY
1,11,11,100.
2,11,11,100.
```

8. และกำหนดเงื่อนไขภาระความร้อน (load conditions)
เนื่องจากไม่มีความร้อนใดๆ เข้าออกผิวด้านข้างในแนวรัศมีจึงไม่จำเป็นต้องกำหนด *DFLUX ลงไปในไฟล์ อย่างไรก็ตามมีการพาความร้อนออกที่ปลายขวาสุดซึ่งก็คือเอลิเมนต์หมายเลข 8 ดังนั้นสิ่งที่ต้องคำนึงก็คือที่เอลิเมนต์หมายเลข 8 นี้คือผิวหมายเลขอะไรที่มีการพาความร้อนออกไป จากตรวจสอบหมายเลขพบว่าหน้าของเอลิเมนต์ที่ 8 หมายเลข 2 หรือ F2 คือผิวที่มีการพาความร้อนด้วยค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเท่ากับ 100 W/m^2 °C และมีค่าอุณหภูมิของของไหลที่พาความร้อนเท่ากับ 10 °C ดังนั้นคำสั่งสำหรับกำหนดการพาความร้อนออกของเอลิเมนต์ที่ 8 คือ

```
*FILM
8,F2,10.0,100
```

ในกรณีนี้ที่ขอบผิวเอลิเมนต์หมายเลข 8 – 6 – 4 - 2 ซึ่งมีหมายเลขผิว F1 เป็นผิวรอบชิ้นงานตามแนวยาวนั้นไม่มีการพาความร้อนออกจึงไม่จำเป็นต้องระบุ *FILM และในโจทย์กำหนดให้มีการหุ้มฉนวนดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องระบุ *DFLUX ใดๆ ลงไปใน inp file

9. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file และแสดงผลใน frd file โดยกำหนดให้รายงานค่าอุณหภูมิ (NT) และความร้อนที่โหนด (RFL) ทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความร้อน (HFL) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด

```
*NODE PRINT,NSET=Nall
NT,RFL
*EL PRINT,ELSET=Eall
HFL
*NODE FILE
NT,RFL
*EL FILE
HFL
```

10. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

11. รวบรวมทุกคำสั่งประกอบเป็น inp file ได้ดังนี้

```
*HEADING
ch71_cax 3.inp  axisymmetrical model of heat transfer in bar
*NODE, NSET=Nall
1,0.0,0.0,0.0
2,0.1,0.0,0.0
3,0.0,1.0,0.0
4,0.1,1.0,0.0
5,0.0,2.0,0.0
6,0.1,2.0,0.0
7,0.0,3.0,0.0
8,0.1,3.0,0.0
9,0.0,4.0,0.0
10,0.1,4.0,0.0
*ELEMENT, TYPE=CAX3, ELSET=Eall
1,1,2,3
2,2,4,3
3,3,4,5
4,4,6,5
5,5,6,7
6,6,8,7
7,7,8,9
8,8,10,9
*MATERIAL,NAME=EL
*CONDUCTIVITY
35.,0.
*SOLID SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=EL
1.0
*STEP
*HEAT TRANSFER,DIRECT,STEADY STATE
0.1,1.0
*BOUNDARY
1,11,11,100.
2,11,11,100.
*FILM
8,F2,10.0,100
*NODE PRINT,NSET=Nall
NT,RFL
*EL PRINT,ELSET=Eall
HFL
*NODE FILE
NT,RFL
*EL FILE
HFL
*END STEP
```

12. การตรวจสอบผลลัพธ์

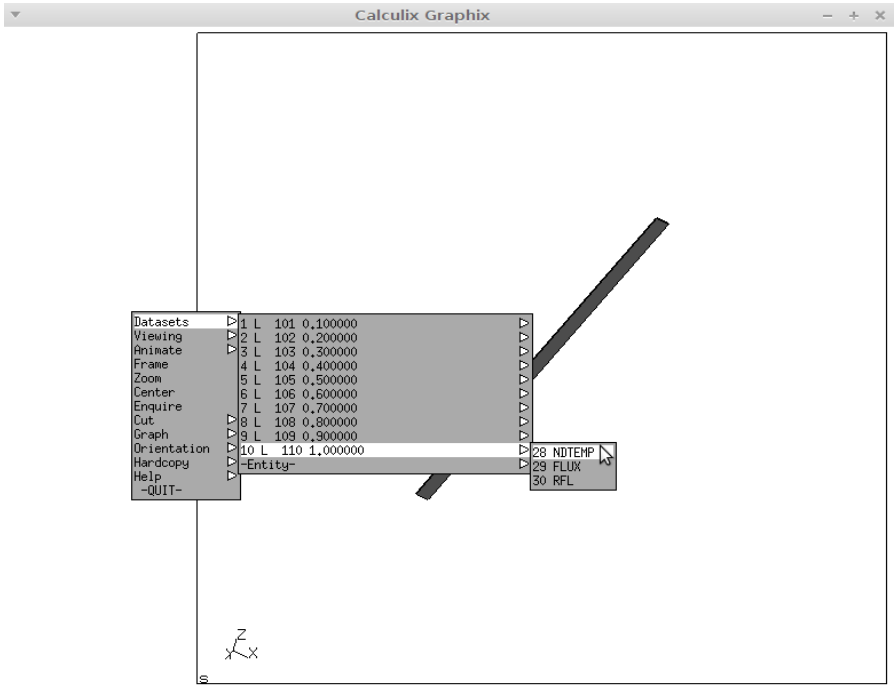
จาก dat file ที่ขั้นคำนวณสุดท้ายพบผลคำนวณของค่าอุณหภูมิ (มีหน่วยเป็น °C) ของที่โหนดต่างๆ ดังนี้

```
temperatures for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  1.000000E+02
         2  1.000000E+02
         3  7.931232E+01
         4  7.931232E+01
         5  5.862464E+01
         6  5.862464E+01
         7  3.793688E+01
         8  3.793700E+01
         9  1.721492E+01
        10  1.726645E+01
```

จากผลข้างต้นพบว่าทุกโหนดตำแหน่ง y เดียวกันจะมีอุณหภูมิเท่ากัน ดังนั้นเราสามารถนำเฉพาะค่าอุณหภูมิที่ตำแหน่ง y ที่โหนด 1, 3, 5, 7 และ 9 มาเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณด้วยการใช้เอลิเมนต์ B32 พบว่าค่าอุณหภูมิที่กระจายตามตำแหน่งต่างๆ นั้นใกล้เคียงกันมาก

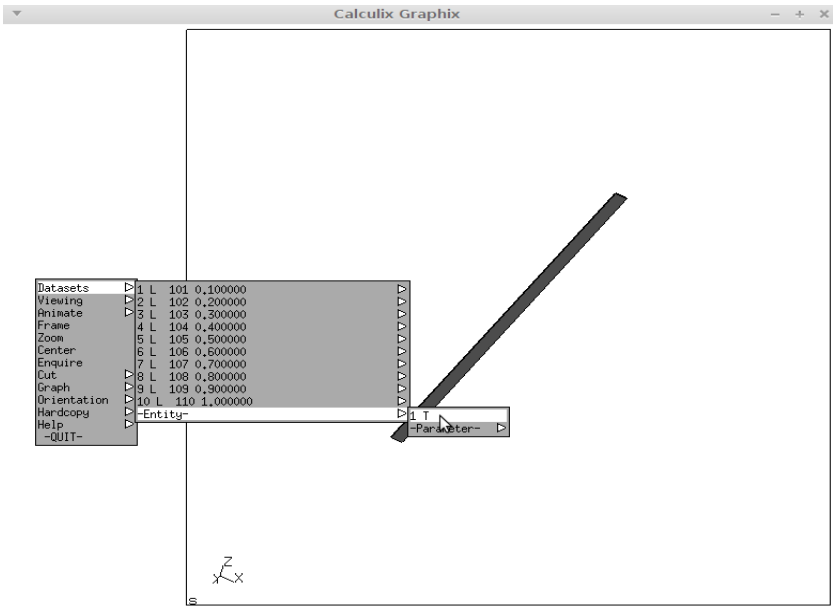
สำหรับการแสดงผลทางคอมพิวเตอร์กราฟิก เราสามารถใช้ CGX (CalculiX Graphix) เรียก frd file เพื่อดูการกระจายของอุณหภูมิ สามารถทำได้ดังนี้

-ขั้นแรก เปิด frd file ผ่าน launcher จากนั้นไปที่ Datasets ระบุผลการคำนวณขั้นสุดท้าย จากนั้นเลือก NDTEMP เพื่อให้แสดงอุณหภูมิ ดังแสดงในรูป 7.8



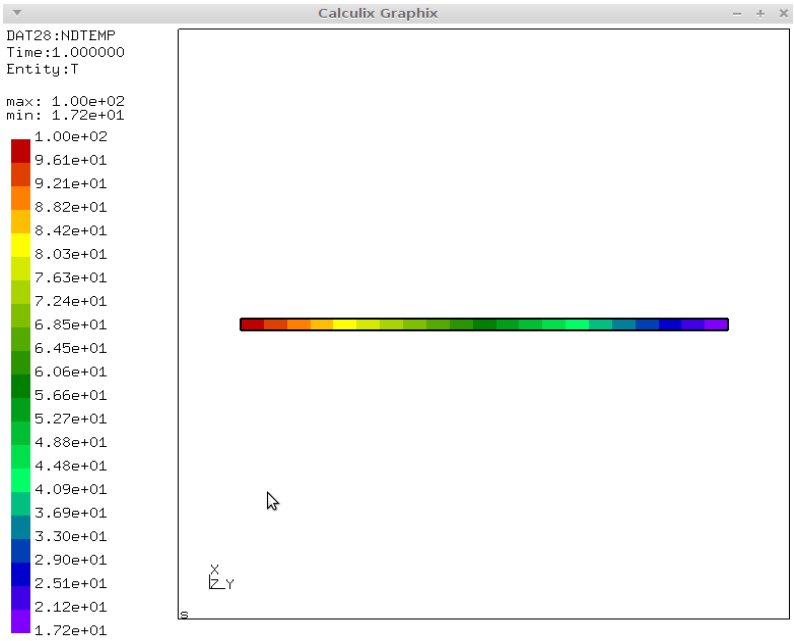
รูปที่ 7.8 หน้าต่างเมนูของ CGX เพื่อให้แสดงตัวแปรอุณหภูมิ

-ขั้นต่อไปเข้ามาที่ Datasets อีกครั้งไปที่ Entities เลือก T ดังรูปที่ 7.9



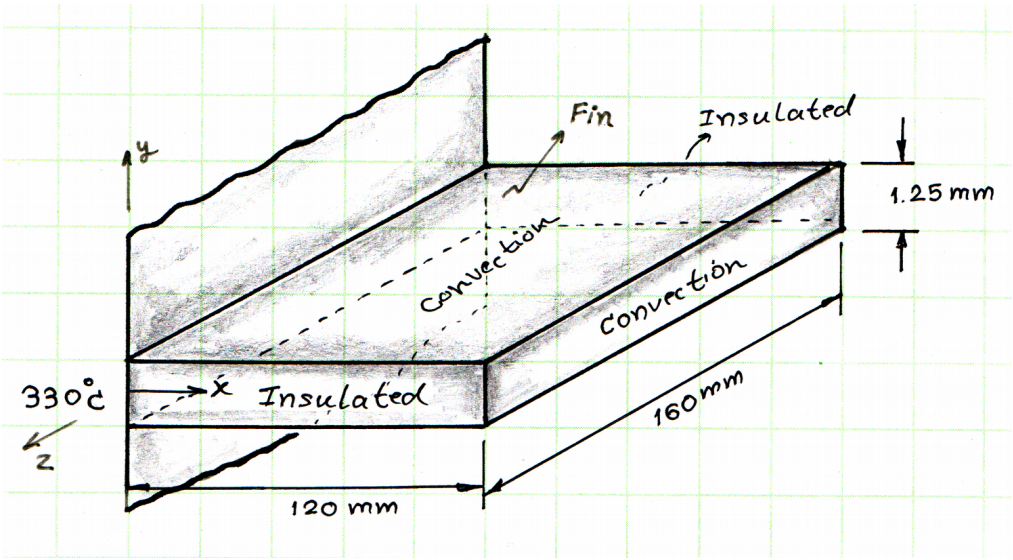
รูปที่ 7.9 น้ำต่างเมนูของ CGX เพื่อให้แสดงอุณหภูมิ

-ผลการกระจายของอุณหภูมิตลอดความยาวจะปรากฏขึ้นมาดังรูปที่ 7.10



รูปที่ 7.10 การกระจายของอุณหภูมิตลอดความยาวแสดงด้วย CGX

<u>ตัวอย่างที่</u> 7.3 [4] จงหาการกระจายของอุณหภูมิที่สภาวะคงตัวตลอดความยาวของครีบ (fin) ที่มีรูปทรงเป็นสี่เหลี่ยมกว้าง 120 mm ยาว 160 mm และหนา 1.25 mm กำหนดให้อุณหภูมิที่ผนังซ้ายสุดมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 330 $^{\circ}$C ดังรูปที่ 7.11 ในการระบายความร้อนออกทางครีบกำหนดให้มีการพาความร้อนเกิดขึ้นที่ผิวบนล่างและปลายขวาสุดของครีบ ส่วนด้านหน้าและหลังไม่มีการระบายความร้อน กำหนดให้ครีบมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (k) เท่ากับ 0.2 W/(mm $^{\circ}$C) มีการพาความร้อนโดยของไหลไหลผ่านที่อุณหภูมิเท่ากับ 30 $^{\circ}$C และค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h) เท่ากับ 0.0002 W/(mm^2 $^{\circ}$C)



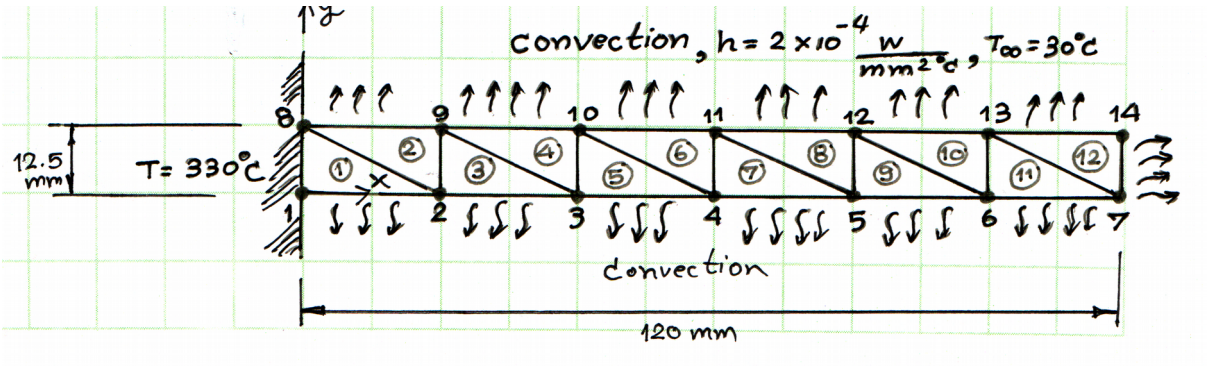
รูปที่ 7.11 ครีบ (fin) ที่มีรูปทรงเป็นสี่เหลี่ยมมีการพาความร้อนรอบรูป

<u>แนวคิด</u>

ปัญหานี้สามารถนำมาคิดในแบบ 2-D โดยเลือกใช้เอลิเมนต์แบบ CPE3 ทั้งนี้เนื่องจากการนำและการพาความร้อนในแนวแกน z มีค่าเท่ากันตลอดแกน มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตลอดความยาวครีบหรือตามแนวแกน x เท่านั้น ซึ่งการเปลี่ยนแปลงเกิดจากการเปลี่ยนแปลงของการพาและนำความร้อนตลอดแกน x นั้นเอง

<u>การเขียน inp file (inp file)โดยใช้เอลิเมนต์แบบความเครียดในระนาบ (CPE3)</u>

-รูปที่ 7.12 คือแบบ 2-D ในระนาบ xy ของครีบระบายความร้อน ทำการแบ่งครีบออกเป็น 12 เอลิเมนต์ โดยเลือกใช้เอลิเมนต์แบบความเครียดในระนาบ CPE3 แต่เอลิเมนต์มี 3 โหนด มีโหนดทั้งหมด 14 โหนด ที่โหนดหมายเลข 1 และ 8 คือผนังที่มีอุณหภูมิคงที่ตลอดเวลาเท่ากับ 330°C และที่ปลายซ้ายคือเอลิเมนต์ที่ 12 ผิวเอลิเมนต์ปลายสุดมีการพาความร้อน ในขณะเดียวกันที่ขอบผิวบนของเอลิเมนต์หมายเลข 2-4-6-8-10-12 และที่ขอบผิวล่างของเอลิเมนต์หมายเลข 1-3-5-7-9-11 มีการพาความร้อนออกไปโดยเงื่อนไขการพาความร้อนนั้นเหมือนกันทั้งหมด ในกรณีไม่มีสูญเสียความร้อนในตั้งฉากกับระนาบ



รูปที่ 7.12 ต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของครีบความร้อนในสองมิติ

1. เริ่มต้นเขียนอินพุตกำหนดหัวเรื่องคือ

```
ch72_CPE3.inp heatransfer in thin fin
```

```
*HEADING
ch72_CPE3.inp heatransfer in thin fin
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดและตำแหน่ง (x,y) จำนวนโหนดทั้งหมด 14 จุด กำหนดกลุ่มโหนดนี้ชื่อว่า Nall

```
*NODE, NSET=Nall
1,0.0,0.0,0.0
2,20.0,0.0,0.0
3,40.0,0.0,0.0
4,60.0,0.0,0.0
5,80.0,0.0,0.0
6,100.0,0.0,0.0
7,120.0,0.0,0.0
8,0.0,1.25,0.0
9,20.0,1.25,0.0
10,40.0,1.25,0.0
11,60.0,1.25,0.0
12,80.0,1.25,0.0
13,100.0,1.25,0.0
14,120.0,1.25,0.0
```

3. กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ หมายเลขเอลิเมนต์ และโหนดต่างๆ ที่ประกอบกันเป็นแต่ละเอลิเมนต์ สำหรับปัญหานี้ กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์คือ CPE3 มีทั้งหมดจำนวน 12 เอลิเมนต์ เรียงจากเอลิเมนต์หมายเลข 1 ถึงหมายเลข 12 ตั้งชื่อกลุ่มของเอลิเมนต์ทั้งหมดว่า Eall

```
*ELEMENT, TYPE=CPE3, ELSET=Eall
1,1,2,8
2,2,9,8
3,2,3,9
4,3,10,9
5,3,4,10
6,4,11,10
7,4,5,11
```

```
8,5,12,11
9,5,6,12
10,6,13,12
11,6,7,13
12,7,14,13
```

4. กำหนดชื่อวัสดุว่า EL ให้มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแนวแกน x เท่ากับ 0.2 W/(mm °C)

```
*MATERIAL,NAME=EL
*CONDUCTIVITY
0.2,0.
```

5.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ Eall ให้เป็นหน้าตัดแบบของแข็ง มีสมบัติวัสดุตามชื่อ EL ที่ได้กำหนดในข้อ 4 คือ

```
*SOLID SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=EL
160.0
```

6 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบการถ่ายเทความร้อนที่เงื่อนไขสภาวะอุณหภูมิคงตัวและเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis) โดยกำหนดแบ่งช่วงคำนวณย่อยทั้งหมดออกเป็น 10 ช่วงเท่าๆ กัน

```
*STEP
*HEAT TRANSFER,DIRECT,STEADY STATE
0.1,1.0
```

7. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)
-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้โหนดหมายเลข 1 และ 8 คือที่ตำแหน่ง x=0 มีอุณหภูมิตามที่โจทย์กำหนดคือ 330°C

```
*BOUNDARY
1,11,11,330.0
8,11,11,330.0
```

8. และกำหนดเงื่อนไขภาระความร้อน (load conditions)
เนื่องจากมีการพาความร้อนที่ผิวบนล่างและปลายขวาสุด

-ทำการกำหนดกลุ่มเอลิเมนต์ที่มีการพาความร้อนที่ผิวบนตั้งชื่อกลุ่มเอลิเมนต์ว่า top ดังนี้

```
*ELSET,ELSET=top
2,4,6,8,10,12
```

-ทำการกำหนดกลุ่มเอลิเมนต์ที่มีการพาความร้อนที่ผิวล่างตั้งชื่อกลุ่มเอลิเมนต์ว่า bottom ดังนี้

```
*ELSET,ELSET=bottom
1,3,5,7,9,11
```

กำหนดการพาความร้อนจากตรวจสอบหมายเลขพบว่า

-กลุ่มเอลิเมนต์ top มีผิวหมายเลข 2 หรือ F2 คือผิวบนที่มีการพาความร้อน
-กลุ่มเอลิเมนต์ bottom มีผิวหมายเลข 1 หรือ F1 คือผิวล่างที่มีการพาความร้อน
-เอลิเมนต์หมายเลข 12 มีผิวหมายเลข 1 หรือ F1 คือผิวข้างปลายขวาสุดที่มีการพาความร้อน

ดังนั้นคำสั่งสำหรับกำหนดการพาความร้อนที่อุณหภูมิเท่ากับ 30 ^{o}C และค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h) เท่ากับ 0.0002 W/(mm^{2} ^{o}C) ของผิว คือ

```
*FILM
12,F1,30,0.0002
top,F2,30,0.0002
bottom,F1,30,0.0002
```

ในโจทย์กำหนดให้มีการหุ้มฉนวนในแนวตั้งฉากกับระนาบดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องระบุ *DFLUX ใดๆ ลงไปใน inp file

9. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file และแสดงผลใน frd file โดยกำหนดให้รายงานค่าอุณหภูมิ (NT) และความร้อนที่โหนด (RFL) ทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความร้อน (HFL) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด

```
*NODE PRINT,NSET=Nall
NT,RFL
*EL PRINT,ELSET=Eall
HFL
*NODE FILE
NT,RFL
*EL FILE
HFL
```

10. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

11. รวบรวมทุกคำสั่งประกอบเป็น inp file ได้ดังนี้

```
*HEADING
ch72_CPE3.inp heatransfer in thin fin
*NODE, NSET=Nall
1,0.0,0.0,0.0
2,20.0,0.0,0.0
3,40.0,0.0,0.0
```

```
4,60.0,0.0,0.0
5,80.0,0.0,0.0
6,100.0,0.0,0.0
7,120.0,0.0,0.0
8,0.0,1.25,0.0
9,20.0,1.25,0.0
10,40.0,1.25,0.0
11,60.0,1.25,0.0
12,80.0,1.25,0.0
13,100.0,1.25,0.0
14,120.0,1.25,0.0
*ELEMENT, TYPE=CPE3, ELSET=Eall
1,1,2,8
2,2,9,8
3,2,3,9
4,3,10,9
5,3,4,10
6,4,11,10
7,4,5,11
8,5,12,11
9,5,6,12
10,6,13,12
11,6,7,13
12,7,14,13
*MATERIAL,NAME=EL
*CONDUCTIVITY
0.2,0.
*SOLID SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=EL
160.0
*STEP
*HEAT TRANSFER,DIRECT,STEADY STATE
0.1,1.0
*BOUNDARY
1,11,11,330.0
8,11,11,330.0
*ELSET,ELSET=top
2,4,6,8,10,12
*ELSET,ELSET=bottom
1,3,5,7,9,11
*FILM
12,F1,30,0.0002
top,F2,30,0.0002
bottom,F1,30,0.0002
*NODE PRINT,NSET=Nall
NT,RFL
*EL PRINT,ELSET=Eall
HFL
*NODE FILE
NT,RFL
*EL FILE
HFL
*END STEP
```

-จาก dat file ที่ขั้นคำนวณสุดท้ายพบผลคำนวณของค่าอุณหภูมิ (มีหน่วยเป็น °C) ของที่โหนดต่างๆ ดังนี้

```
temperatures for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  3.300000E+02
         2  1.585923E+02
         3  8.515968E+01
         4  5.375348E+01
         5  4.044518E+01
         6  3.509511E+01
         7  3.362703E+01
         8  3.300000E+02
         9  1.585923E+02
        10  8.515968E+01
        11  5.375348E+01
        12  4.044518E+01
        13  3.509511E+01
        14  3.362703E+01
```

จากผลข้างต้นพบว่าที่โหนดของผิวล่าง (โหนดหมายเลข 1-7) และผิวบน (โหนดหมายเลข 8-14) มีการกระจายอุณหภูมิตลอดความยาวครีบในรูปแบบเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 7.13 จะเห็นว่าในช่วงแต่ละเอลิเมนต์อุณหภูมิจะลดลงเชิงเส้นแต่เมื่อพิจารณาตลอดทุกเอลิเมนต์จะลดลงแบบไม่เชิงเส้นมีแนวโน้มแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลซึ่งเป็นผลจากการพาความร้อนตลอดความยาว

-การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์การกระจายอุณหภูมิตลอดความยาวครีบสามารถตรวจสอบได้จากคำตอบแม่นตรงในกรณีนี้เป็นกรณีมีการพาและการนำความร้อนที่ปลายครีบซึ่งมีผลเฉลยแม่นตรงคือ [5]

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_o-T_\infty}=\frac{\cosh m(L-x)+(h/mk)\sinh m(L-x)}{\cosh mL+(h/mk)\sinh mL} \qquad \text{(a)}$$

$T(x)$ คือค่าอุณหภูมิที่จุด x ใดๆ
T_∞ คือค่าอุณหภูมิของไหลที่พาความร้อนออกไปมีค่าเท่ากับ 30°C
T_o คือค่าอุณหภูมิของครีบที่ต้องการระบายออกไปมีค่าเท่ากับ 330°C
L คือความยาวของครีบมีค่าเท่ากับ 120 mm

$m^2=\frac{Sh}{Ak}$ เมื่อ

S คือความยาวรอบรูปหน้าตัดของครีบ
A คือพื้นที่หน้าตัดของครีบ
h คือสัมประสิทธิ์การพาความร้อน
k คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อน

จากความสัมพันธ์ข้างต้นเราจะได้

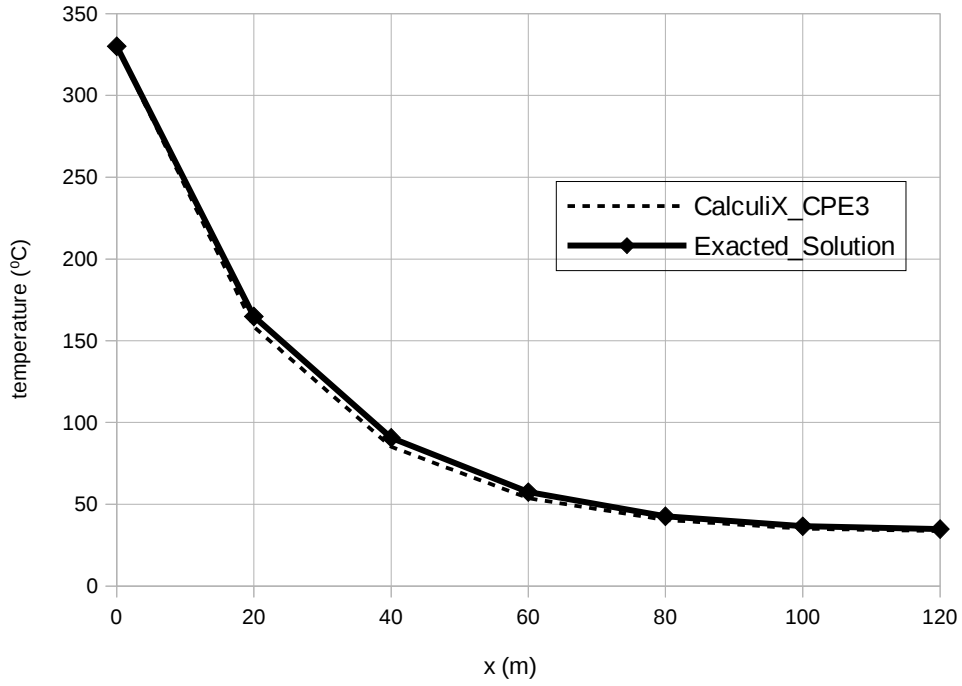
$$m^2=\frac{(1.25*2+160*2)*0.0002}{1.25*160*0.2}=1.6125*10^{-3}$$ หรือ

$$m=0.04$$

ดังนั้นจากสมการ (a) อุณหภูมิที่กระจายในครีบคือ

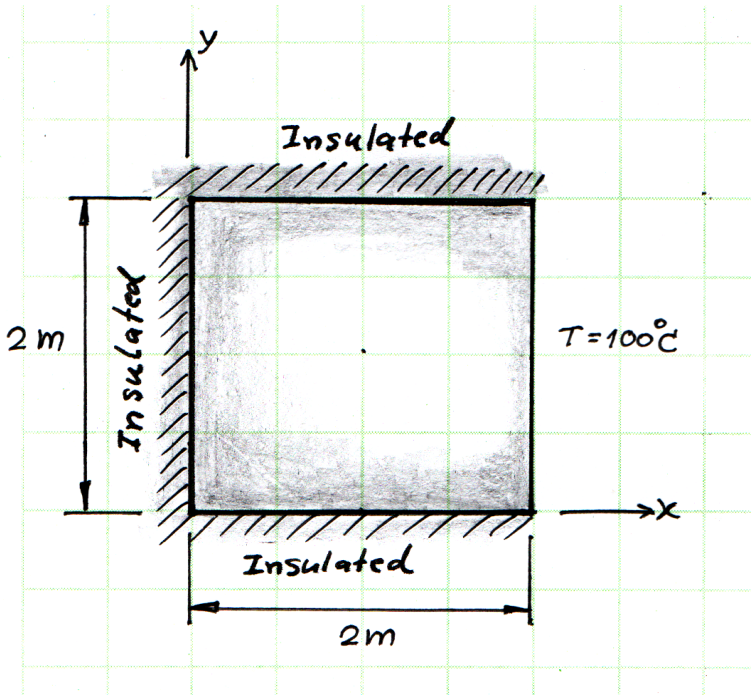
$$T(x)=(\frac{\cosh 0.04(120-x)+(0.025)\sinh 0.04(120-x)}{62.269})*300^oC+30^oC \qquad \text{(b)}$$

ดังนั้นเมื่อนำผลจาก dat file มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงนั้นใกล้เคียงกันมากดังแสดงในรูปที่ 7.13 จึงพอสรุปได้ว่า inp file ที่เขียนมีความถูกต้องน่าเชื่อถือได้



รูปที่ 7.13 เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของอุณหภูมิกับผลจากโปรแกรม

<u>ตัวอย่างที่</u> 7.4 [3] จงหาการกระจายของอุณหภูมิที่สภาวะคงตัวของชิ้นงานที่มีรูปทรงเป็นสี่เหลี่ยมกว้าง 2 m ยาว 2 mm และหนา 0.1 m ดังรูปที่ 7.14 กำหนดให้มีการหุ้มฉนวนที่ผิวของขอบด้านซ้าย ขอบด้านบน และขอบด้านล่าง ที่ขอบด้านขวามีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 100 $^{\circ}$C กำหนดให้มีความร้อนที่เกิดขึ้นตลอดแผ่น (q_g) เท่ากับ 1000 W/m^3 มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (k) เท่ากันในแนว x และ y คือ 25 W/(m $^{\circ}$C)



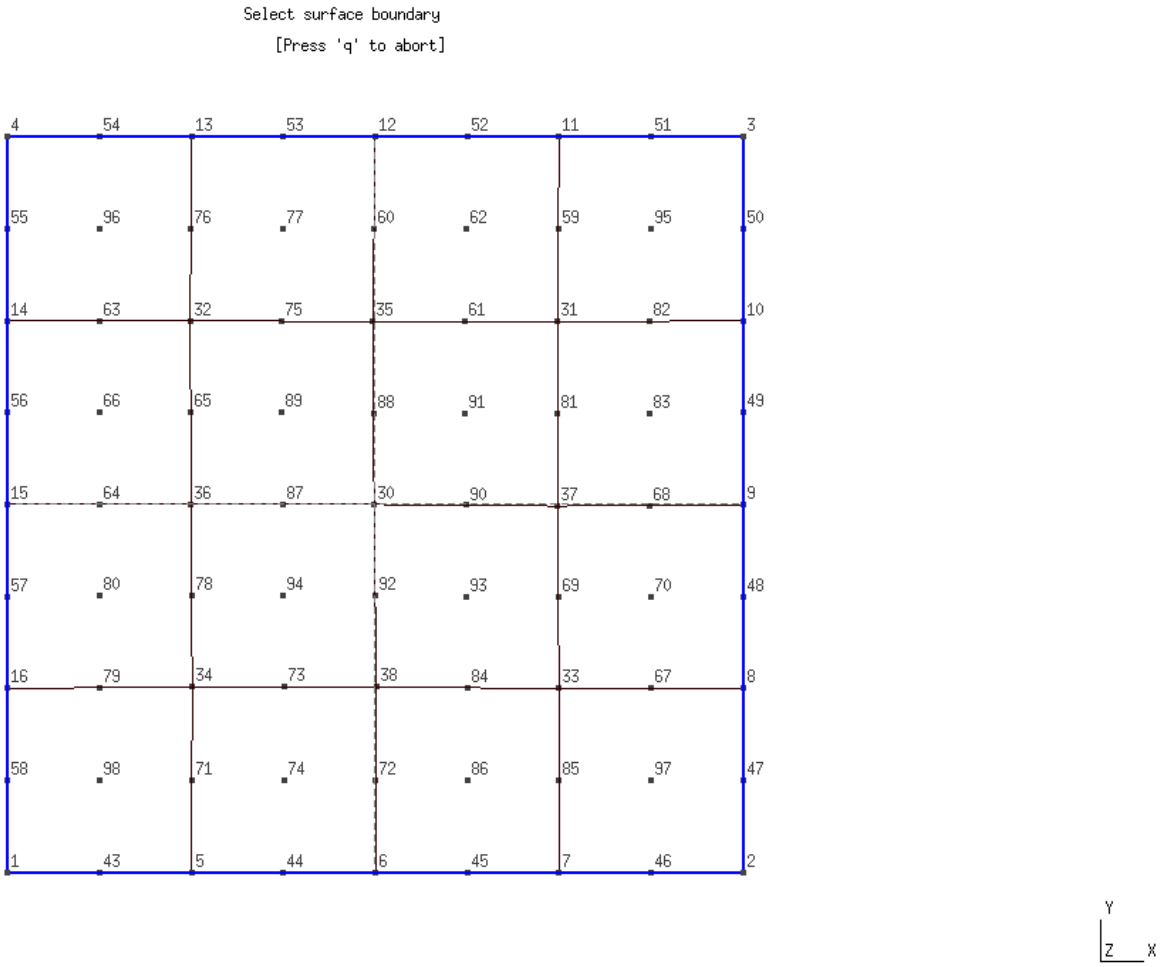
รูปที่ 7.14 ชิ้นงานในระนาบรูปทรงสี่เหลี่ยมหุ้มฉนวนสามด้าน

<u>แนวคิด</u>

- จากโจทย์ เป็นปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่สภาวะอุณหภูมิคงตัว มีแหล่งความร้อนที่ผิวด้านขวาและตลอดทั้งแผ่นมีการผลิตความร้อนคงที่เกิดขึ้นตลอดแผ่น (q_g) เท่ากับ 1000 W/m^3 เมื่อพิจารณาจากผิวด้านบนล่างและซ้ายมีการหุ้มฉนวนดังนั้นจึงไม่มีการนำความร้อนในแนวแกน y จะมีแต่เฉพาะในแนวแกน x เท่านั้นที่มีการนำความร้อน อย่างไรก็ตามที่ผิวด้านซ้ายมีการหุ้มฉนวน ดังนั้นที่ผิวนี้ไม่มีความร้อนเข้าออกและการนำความร้อนเป็นศูนย์ ($\frac{dT}{dx}=0$) เนื่องจากไม่มีการนำความร้อนในแนวแกน y ตัวอย่างจึงสามารถนำเสนอในรูปแบบ 1-D ก็ได้หรือ 2-D ก็ได้ แต่ในที่นี้จะนำเสนอแบบ 2-D โดยใช้เอลิเมนต์แบบ CPS8 ทั้งนี้เพราะชิ้นงานเป็นแผ่นบางและอีกอย่างเพื่อเป็นการสาธิตการใช้เอลิเมนต์แบบนี้ในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในรูปแบบ 2-D

<u>การเขียน inp file (inp file)โดยใช้เอลิเมนต์แบบความเค้นในระนาบ (CPS8)</u>

-สร้าง Mesh (Meshing) ในแบบ 2-D โดยใช้โปรแกรม GMSH แสดงรูปต้นแบบ ดังแสดงในรูปที่ 7.15 โดยกำหนดให้มีทั้งหมด 16 เอลิเมนต์ แต่ละเอลิเมนต์เป็นแบบสี่เหลี่ยม 8 โหนด สามารถกำหนดใน Tool และ option ของคำสั่ง Mesh วิธีการสร้าง Mesh เหมือนกับที่ได้อธิบายไว้แล้วในบทที่5 (รายละเอียดขั้นตอนในการแปลงไฟล์ต่างๆ รวมถึงการดัดแปลงมีหลักการเหมือนกันกับที่กล่าวในบทที่5 จึงไม่ขอลงรายละเอียดในการสร้างต้นแบบ) ขอบด้านล่างกำหนดให้ชื่อ Line1 ขอบด้านขวากำหนดให้ชื่อ Line2 ขอบด้านบนกำหนดให้ชื่อ Line3 ขอบด้านซ้ายให้ชื่อ Line 4 ดังนั้นที่ Line2 จะต้องมีการกำหนดให้อุณหภูมิคงที่เท่ากับ 100°C สำหรับขอบอื่นๆ ไม่มีการกำหนดเงื่อนไขใดๆ ทั้งนี้โปรแกรมจะถือว่าไม่มีความร้อนใดๆ เข้าออก ต้นแบบที่ได้จากการแปลง inp file จาก Launcher นำมาดัดแปลงให้เป็นดังนี้



รูปที่ 7.15 ต้นแบบสร้างด้วย GMSH

1. เริ่มต้นเขียนอินพุตกำหนดหัวเรื่องคือ ch74.inp heat plate in 2-D (CPS8)

```
*Heading
ch74.inp heat plate in 2-D (CPS8)
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดและตำแหน่งที่ (x,y,z) ตามที่ได้มาจาก GMSH กำหนดโหนดทั้งหมดมีกลุ่มชื่อว่า Nall

```
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,2.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,2.000000000000e+00,2.000000000000e+00,0.000000000000e+00
4,0.000000000000e+00,2.000000000000e+00,0.000000000000e+0
……
……
76,1.248705148697e+00,7.497010827065e-01,0.000000000000e+00
77,7.498980760574e-01,7.519962787628e-01,0.000000000000e+00
78,1.748986244202e+00,1.749300241470e+00,0.000000000000e+00
79,2.490794509649e-01,1.750144362450e+00,0.000000000000e+00
80,1.749971985817e+00,2.498884052038e-01,0.000000000000e+00
81,2.503878176212e-01,2.507705092430e-01,0.000000000000e+00
```

3. กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ หมายเลขเอลิเมนต์ และโหนดต่างๆ ที่ประกอบกันเป็นแต่ละเอลิเมนต์ สำหรับปัญหานี้ กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์คือ CPS8 มีทั้งหมดจำนวน 16 เอลิเมนต์ เรียงจากเอลิเมนต์หมายเลขตามที่ GMSH สร้างให้ ตั้งชื่อกลุ่มของเอลิเมนต์ทั้งหมดว่า Eall

```
*Element, type=CPS8, ELSET=Eall
462, 34, 19, 20, 38, 42, 23, 43, 44, 45
464, 35, 26, 27, 39, 46, 30, 47, 48, 49
466, 36, 12, 13, 40, 50, 16, 51, 52, 53
468, 37, 5, 6, 41, 54, 9, 55, 56, 57
470, 35, 38, 20, 21, 58, 43, 24, 59, 60
472, 37, 39, 27, 28, 61, 47, 31, 62, 63
474, 34, 40, 13, 14, 64, 51, 17, 65, 66
476, 36, 41, 6, 7, 67, 55, 10, 68, 69
478, 38, 35, 39, 33, 58, 48, 70, 71, 72
480, 38, 33, 40, 34, 71, 73, 64, 44, 74
482, 40, 33, 41, 36, 73, 75, 67, 52, 76
484, 39, 37, 41, 33, 61, 56, 75, 70, 77
486, 3, 19, 34, 14, 22, 42, 65, 18, 78
488, 4, 26, 35, 21, 29, 46, 59, 25, 79
490, 36, 7, 2, 12, 68, 11, 15, 50, 80
492, 37, 28, 1, 5, 62, 32, 8, 54, 81
```

4. กำหนดชื่อวัสดุว่า EL ให้มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแนวแกน x เท่ากับ 35 W/m °C

```
*MATERIAL,NAME=EL
*CONDUCTIVITY
25.,0.
```

5.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ Eall ให้เป็นหน้าตัดของแข็งมีความหนา 0.1 m มีค่าสมบัติวัสดุตามชื่อ EL ที่ได้กำหนดในข้อ 4

```
*SOLID SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=EL
0.1
```

6 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์แบบการถ่ายเทความร้อนที่เงื่อนไขสภาวะอุณหภูมิคงตัวและเริ่มต้นการคำนวณ (analysis type and starting analysis) โดยกำหนดแบ่งช่วงคำนวณย่อยทั้งหมดออกเป็น 10 ช่วงเท่าๆ กัน

```
*STEP
*HEAT TRANSFER,DIRECT,STEADY STATE
0.1,1.0
```

7. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)
-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้ผิวด้านขวาหรือ Line 2 คือที่ตำแหน่ง x=2 m มีอุณหภูมิตามที่โจทย์กำหนดคือ 100°C เริ่มด้วยการกำหนดกลุ่มโหนดชื่อ Line2 ขึ้นมา (ปกติ GMSH และ Launcher Converter ได้สร้างไว้ให้แล้ว)

```
*NSET,NSET=Line2
2
15
12
16
13
17
14
18
3
*BOUNDARY
Line2,11,11,100
```

8. และกำหนดเงื่อนไขภาระความร้อน (load conditions)
เนื่องจากไม่มีความร้อนใดๆ เข้าออกผิวด้านล่าง บน และด้านซ้าย จึงไม่จำเป็นต้องกำหนด *DFLUX ลงไปในไฟล์ อย่างไรก็ตามมีการผลิตความร้อนขึ้นมาเองคงที่ที่ทุกเอลิเมนต์ (กลุ่มเอลิเมนต์ทั้งหมดของแผ่นชิ้นงานชื่อ Eall) ดังนั้น *DLOAD ที่นำมาใช้เพื่อกำหนดความร้อนที่ผลิตขึ้นเองคือ BF (body flux) มีค่าเท่ากับ 1000 W/m^3 ดังนี้

```
*DFLUX
Eall,BF,1000
```

9. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file และแสดงผลใน frd file โดยกำหนดให้รายงานค่าอุณหภูมิ (NT) และความร้อนที่โหนด (RFL) ทั้งหมดที่ชื่อว่า Nall รวมถึงความร้อน (HFL) ที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ทั้งหมด

```
*NODE PRINT,NSET=Nall
NT,RFL
*EL PRINT,ELSET=Eall
HFL
*NODE FILE
NT,RFL
*EL FILE
HFL
```

10. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

11. ประกอบคำสั่งทั้งหมดเข้ากันได้เป็น inp file ดังนี้

```
*Heading
ch74.inp heat plate in 2-D (CPS8)
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,2.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,2.000000000000e+00,2.000000000000e+00,0.000000000000e+00
4,0.000000000000e+00,2.000000000000e+00,0.000000000000e+0
.....
.....
76,1.248705148697e+00,7.497010827065e-01,0.000000000000e+00
77,7.498980760574e-01,7.519962787628e-01,0.000000000000e+00
78,1.748986244202e+00,1.749300241470e+00,0.000000000000e+00
79,2.490794509649e-01,1.750144362450e+00,0.000000000000e+00
80,1.749971985817e+00,2.498884052038e-01,0.000000000000e+00
81,2.503878176212e-01,2.507705092430e-01,0.000000000000e+00
*Element, type=CPS8, ELSET=Eall
462, 34, 19, 20, 38, 42, 23, 43, 44, 45
464, 35, 26, 27, 39, 46, 30, 47, 48, 49
466, 36, 12, 13, 40, 50, 16, 51, 52, 53
468, 37, 5, 6, 41, 54, 9, 55, 56, 57
470, 35, 38, 20, 21, 58, 43, 24, 59, 60
472, 37, 39, 27, 28, 61, 47, 31, 62, 63
474, 34, 40, 13, 14, 64, 51, 17, 65, 66
476, 36, 41, 6, 7, 67, 55, 10, 68, 69
478, 38, 35, 39, 33, 58, 48, 70, 71, 72
480, 38, 33, 40, 34, 71, 73, 64, 44, 74
482, 40, 33, 41, 36, 73, 75, 67, 52, 76
484, 39, 37, 41, 33, 61, 56, 75, 70, 77
486, 3, 19, 34, 14, 22, 42, 65, 18, 78
488, 4, 26, 35, 21, 29, 46, 59, 25, 79
490, 36, 7, 2, 12, 68, 11, 15, 50, 80
492, 37, 28, 1, 5, 62, 32, 8, 54, 81
*MATERIAL,NAME=EL
*CONDUCTIVITY
25.,0.
```

```
*SOLID SECTION,ELSET=Eall,MATERIAL=EL
0.1
*STEP
*HEAT TRANSFER,DIRECT,STEADY STATE
0.1,1.0
*NSET,NSET=Line2
2
15
12
16
13
17
14
18
3
*BOUNDARY
Line2,11,11,100
*DFLUX
Eall,BF,1000
*NODE PRINT,NSET=Nall
NT,RFL
*EL PRINT,ELSET=Eall
HFL
*NODE FILE
NT,RFL
*EL FILE
HFL
*END STEP
```

12. การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

เนื่องจากมีการหุ้มฉนวนที่ขอบทั้งสามโดยเฉพาะด้านบนและล่าง ดังนั้นจึงไม่มีการนำความร้อนในแนวแกน y จึงสมมติปัญหาให้มีการนำความร้อนเฉพาะแกน x (1-D) ทั้งนี้เพื่อหาคำตอบแบบแม่นตรงไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมที่เป็นแบบ 2-D ดังนี้

12.1 การคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิโดยตรงจากสมการที่ 7.2 ที่สภาวะคงตัวเมื่อความร้อนที่ผลิตขึ้นเองไม่เท่ากับศูนย์ $(q_g = 1000\,\mathrm{W}/m^3)$ ดังนั้น

$$k\frac{d^2T}{dx^2} + 1000 = 0 \qquad \text{(a)}$$

เมื่อ k คือ 25 W/(m °C) ทำการอินทิเกรทสมการ (a) โดยตรงจะได้ว่า

$$T(x) = -20x^2 + bx + c \qquad \text{(b)}$$

เมื่อ b, c คือค่าคงที่ ที่ต้องหาจากการเงื่อนไขขอบเขตและจากสมการดังนี้

-ที่ $x = 0$ m; $k\frac{dT}{dx} = 0$ ประยุกต์เงื่อนไขนี้เข้ากับสมการ (b) ดังนั้นจะได้ $b = 0$

-ที่ $x=2\ \text{m};\ T(2)=100\ {}^{o}C$ เมื่อ $b=0$ จากเงื่อนไขนี้จะได้ $c=180$

ดังนั้นค่าคำตอบของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง x ใดๆ ในช่วง $0\le x\le 2\text{m}$ คือ

$$T(x)=-20x^{2}+180\ {}^{o}C \qquad \text{(c)}$$

12.2 ผลลัพธ์จาก CCX สามารถศึกษาได้จาก dat file และ frd file

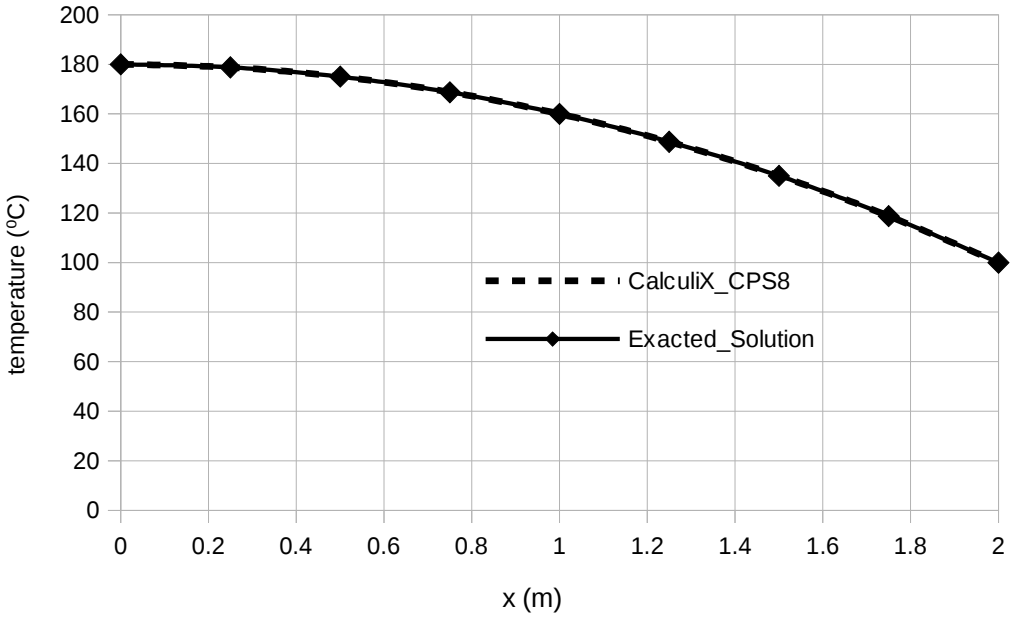
-ถ้าจะศึกษาจาก dat file ต้องรู้โหนดตามแกน x ที่ y เดียวกัน ในที่นี้เรากำหนดให้รายงานออกมาที่ทุกโหนด ดังนั้นเพื่อความสะดวกเราสามารถกำหนดกลุ่มโหนด สมมติชื่อ Line1 ซึ่งเป็นกลุ่มโหนดที่เรียงตัวในแนวแกน x และ y=0 จากซ้ายไปขวา การเรียกหมายเลขโหนดมาดูเพื่อกำหนดชื่อกลุ่มให้เรียกดูจาก CGX เท่านั้น (ไม่แนะนำให้ดูจาก GMSH) ดังนี้

```
*NSET,NSET=Line1
1,8,5,9,6,10,7,11,2
*NODE PRINT,NSET=Line1
NT,RFL
```

เพิ่มคำสั่งดังกล่าวลงใน inp file แล้วประมวลผลอีกครั้ง

จากการประมวลผลอีกครั้งใน dat file ที่กลุ่มโหนด Line1 ที่ขั้นคำนวณสุดท้ายพบผลคำนวณของค่าอุณหภูมิ (มีหน่วยเป็น °C) ของที่โหนดต่างๆ ดังนี้

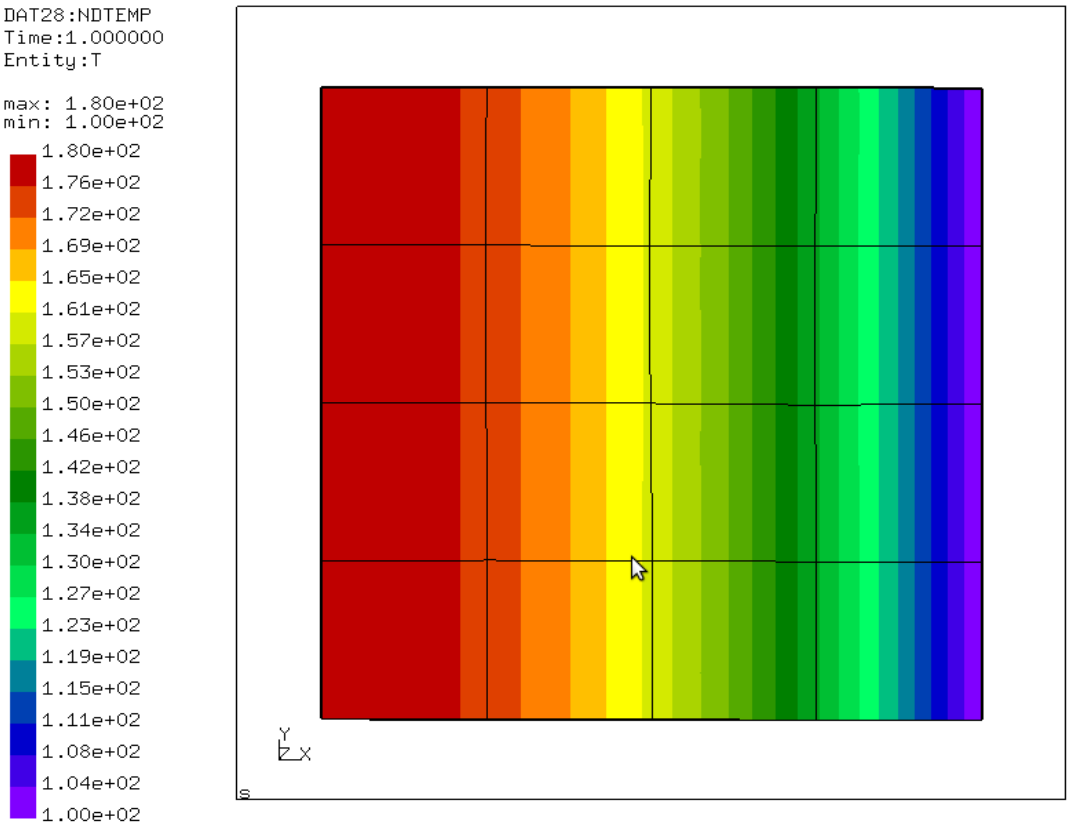
```
temperatures for set LINE1 and time  0.1000000E+01

         1  1.800000E+02
         8  1.787500E+02
         5  1.750000E+02
         9  1.687500E+02
         6  1.600000E+02
        10  1.487500E+02
         7  1.350000E+02
        11  1.187500E+02
         2  1.000000E+02
```



รูปที่ 7.16 เปรียบเทียบอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลจากโปรแกรม

นำผลการคำนวณจากโปรแกรมที่ได้เปรียบเทียบกับสมการ (c) ดังแสดงในรูปที่ 7.16 ซึ่งจากผลการคำนวณทั้งสองวิธีได้ผลที่เหมือนกันคืออุณหภูมิมีการเปลี่ยนแปลงแบบไม่เชิงเส้น อุณหภูมิสูงสุดที่ผิวด้านซ้ายและเนื่องจากไม่มีการนำความร้อนออกไปที่ผิวนี้จะสังเกตเห็นความชันเป็นศูนย์ จากนั้นอุณหภูมิจะค่อยๆ ลดลงจากผิวด้านซ้ายและจะมีอุณหภูมิตามเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวด้านขวาซึ่งเท่ากับ 100°C เมื่อเปรียบเทียบกันระหว่างผลการคำนวณแบบแม่นตรงกับผลที่ใช้จากการการใช้โปรแกรม CalculiX ผลออกมาเหมือนกันโดยสังเกตจากกราฟจะทับเหมือนจะเป็นเส้นเดียวกัน

สำหรับการศึกษาผลลัพธ์จาก frd file สามารถทำได้เช่นกันโดยการใช้ Launcher เรียก Calculix GraphiX มาใช้งาน และเรียกให้แสดงผลลัพธ์การกระจายอุณหภูมิ



รูปที่ 7.17 แสดงการกระจายอุณหภูมิด้วย CGX

7.6 เอกสารอ้างอิงบทที่7

[1] ปราโมทย์ เดชะอำไพ, “ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม”,ฉบับปรับปรุงแก้ไขครั้งที่ 5, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร, 2555

[2] Guido Dhondt, “CalculiX CrunchiX USER'S MANUAL”, version 2.8p2, March 19, 2015, www.calculix.de

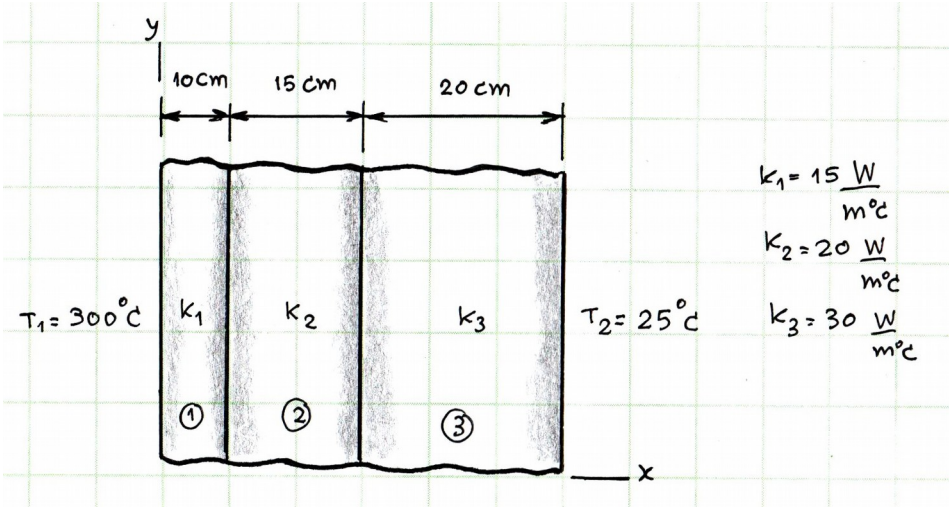
[3] ธงชัย ฟองสมุทร, “วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เบื้องต้น", ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่ม 2554

[4] Nam-Ho Kim, Bhavani V. Sankar, “Introduction to Finite Element Analysis and Design”,John Wiley & Sons, NJ, 2009

[5] M. Necati Ozisik, “Heat Transfer: A Basic Approach”, McGraw-Hill”, New York, 1984

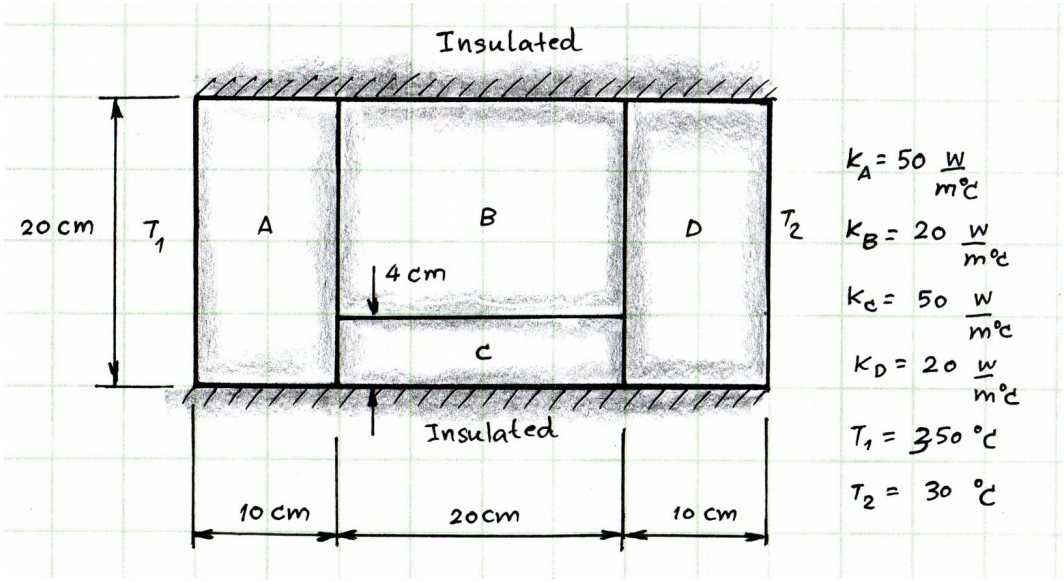
7.7 แบบฝึกหัดบทที่ 7

7.1) ผนังหนา 45 cm ประกอบจากวัสดุต่างชนิดกันสามชนิด (composite wall) สมมติที่ทุกผิวของรอยต่อมีการนำความร้อนได้อย่างสมบูรณ์ ดังแสดงในรูปที่ P 7.1 ให้เขียน inp file เพื่อหาอุณหภูมิและปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นในผนังที่สภาวะคงตัวของอุณหภูมิ



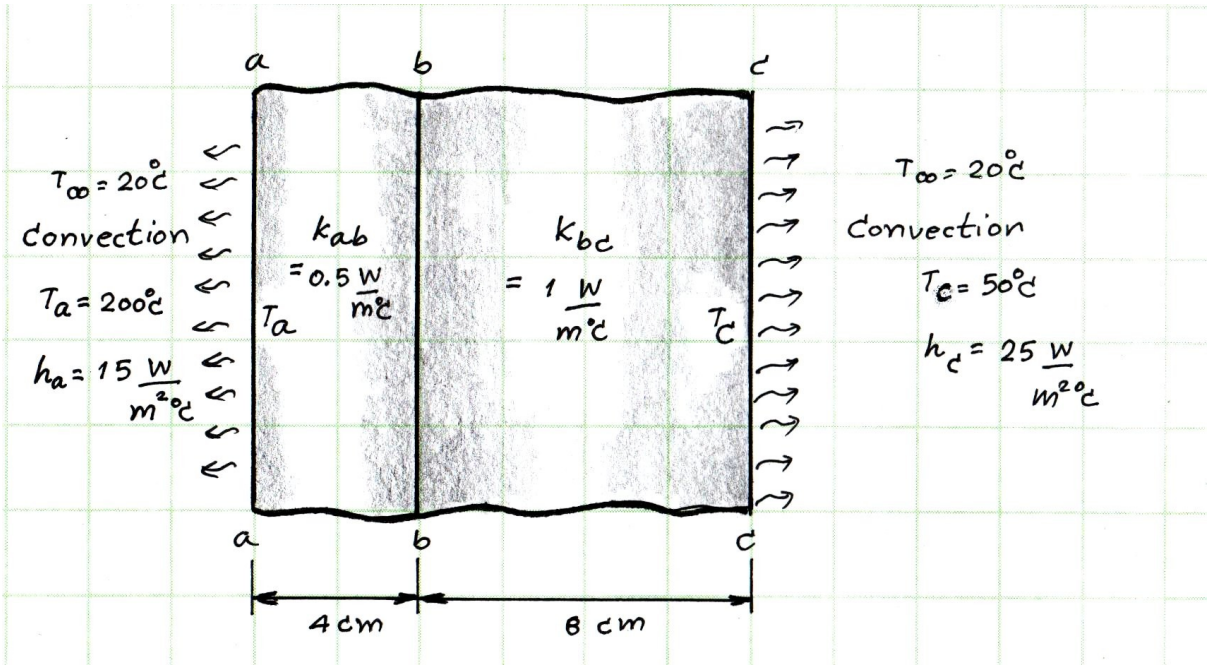
รูปที่ P 7.1

7.2) ผนังหนา 40 cm ประกอบจากชิ้น A, B, C และ D สมมติที่ทุกผิวของรอยต่อมีการนำความร้อนได้อย่างสมบูรณ์ ดังแสดงในรูปที่ P 7.2 ให้เขียน inp file เพื่อหาอุณหภูมิและปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นในผนังที่สภาวะคงตัวของอุณหภูมิ



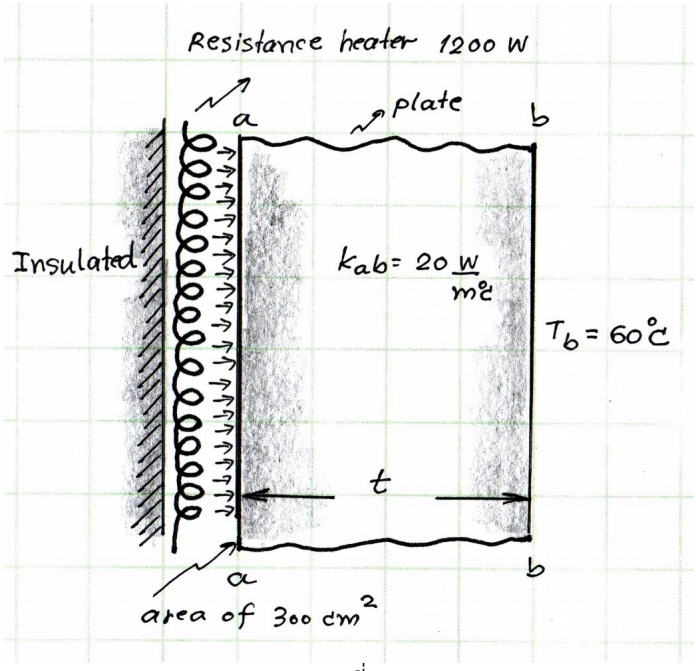
รูปที่ P 7.2

7.3) ผนัง abc ประกอบจากชิ้นงาน ab และ bc ที่มีค่าการนำความร้อนที่ต่างกัน ที่ผิว a และ c มีอุณหภูมิ 200 °C และ 50 °C ตามลำดับ ถ้ามีการนำความร้อนภายใน ab และ bc และมีการพาความร้อนสู่สิ่งแวดล้อมที่อุณหภูมิสิ่งแวดล้อม 20 °C จงหาเขียน inp file เพื่อหาอุณหภูมิที่เกิดขึ้นภายในชิ้นงานเมื่อไม่มีการนำความร้อนในแนวตั้ง



รูปที่ P 7.3

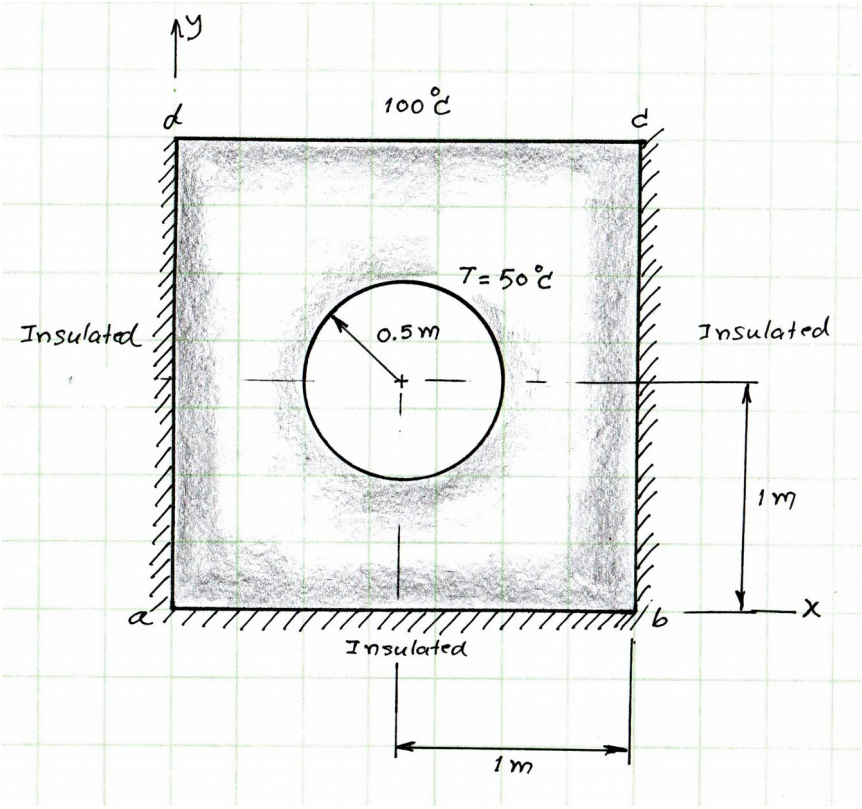
7.4)



รูปที่ P 7.4

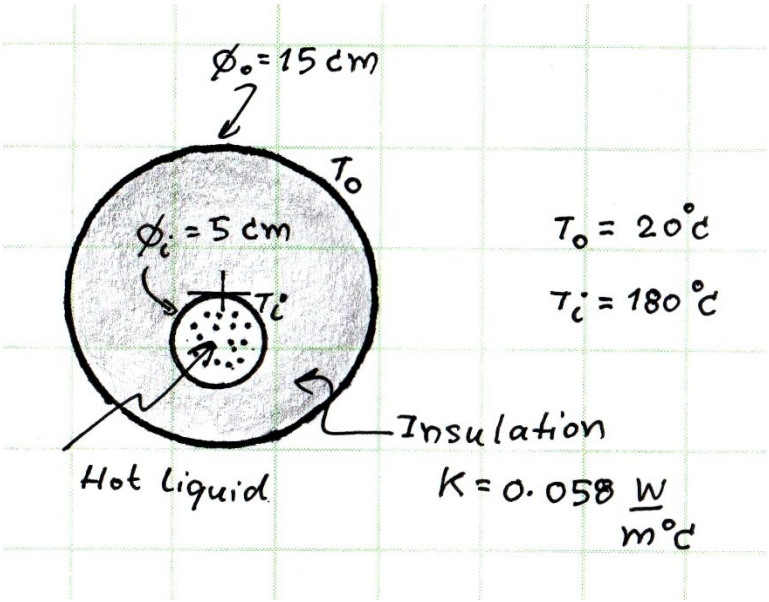
แผ่น ab (plate) ถูกนำมาให้ความร้อนที่ผิว a ที่มีพื้นที่ผิวสัมผัส 300 cm^2 โดยขดลวดความร้อนที่กำลัง 1200 W ดังแสดงในรูปที่ P7.4 ที่สภาวะคงตัวของอุณหภูมิ จงใช้วิธีการเขียน inp file เพื่อหาความหนาของแผ่น (t) ว่าควรมีค่าเท่าไรเพื่อให้อุณหภูมิที่ผิว b มีค่าเท่ากับ 60°C สมมุติให้ไม่มีการพาความร้อนเกิดขึ้นที่ผิวใดๆ

7.5) รูปที่ P7.5 เหล็กแท่งหน้าตัดจตุรัสขนาด 2m x 2m มีรูกลวงตรงกลาง ที่ผิวซ้ายขวาและล่างมีการหุ้มฉนวน ผิวบนมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 100°C และผิวในบริเวณรูกลวงคงที่เท่ากับ 50°C ถ้าค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของเหล็กเท่ากับ 50 W/mK จงเขียน inp file .โดยใช้รูปแบบเอลิเมนต์ 2-D หาการกระจายอุณหภูมิบนหน้าตัดของเหล็กแท่ง



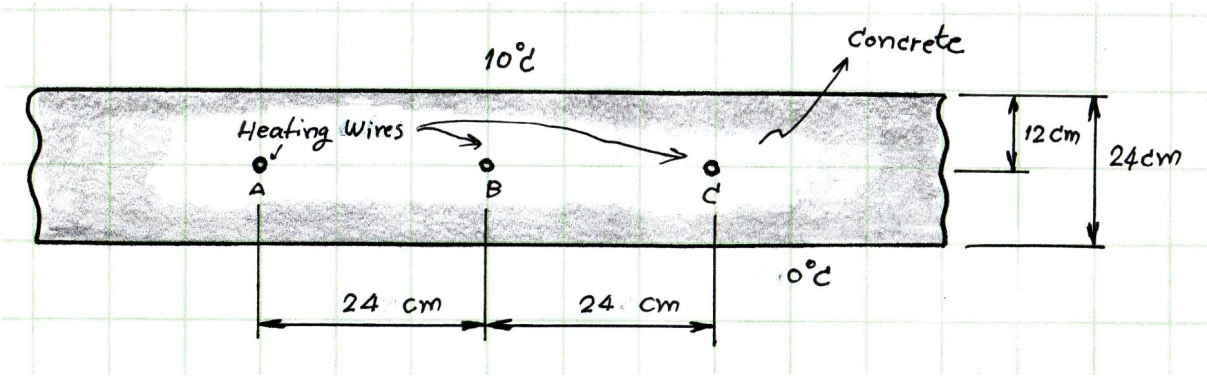
รูปที่ P 7.5

7.6) รูปที่ P 7.6 แสดงหน้าตัดของท่อที่บรรจุของเหลวร้อนภายในและมีการหุ้มฉนวนกันความร้อน ถ้าค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของฉนวนเท่ากับ 0.058 W/m°C จงเขียน inp file โดยใช้เอลิเมนต์แบบ 2-D เพื่อหาการกระจายตัวของอุณหภูมิและค่าความร้อนที่ถ่ายเทจากท่อผ่านฉนวนสู่ผิวนอก



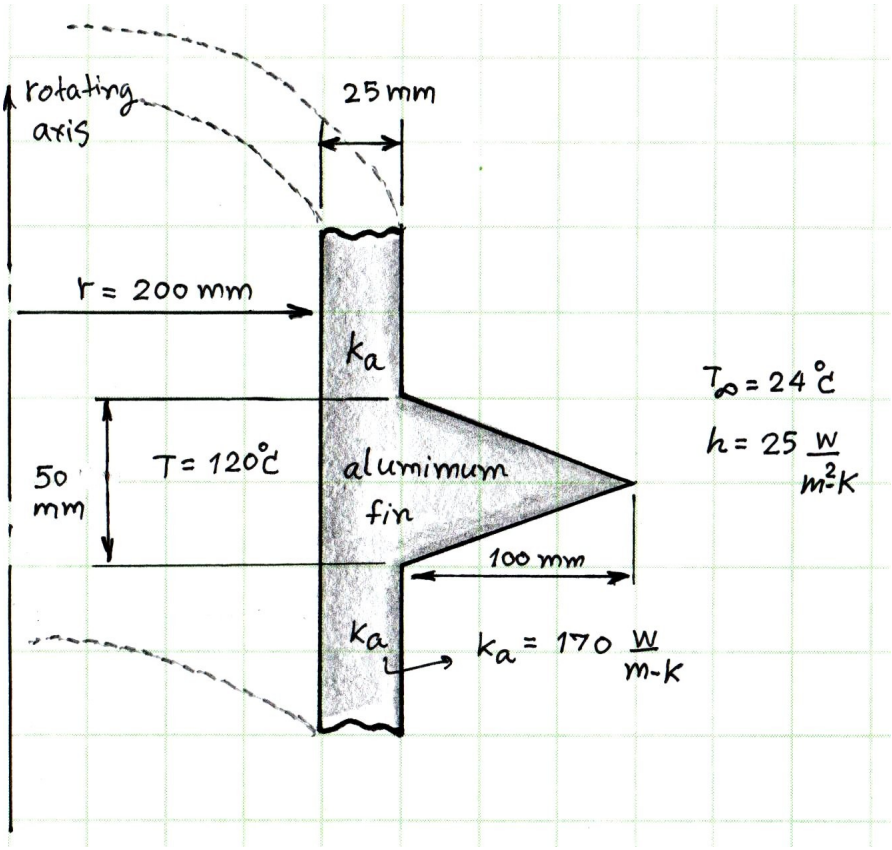
รูปที่ P 7.6

7.7) รูปที่ P7.7 ผนังคอนกรีตหนา 24 cm ฝังลวดความร้อน A B และ C ตามแนวกึ่งกลางความหนาเพื่อควบคุมอุณหภูมิที่จะนำไปสู่ผิวบนให้คงที่ไว้ที่ 10°C เมื่อกำหนดให้ลวดความร้อน A, B และ C สามารถให้ความร้อนที่จุดนั้นๆ เท่ากับ 60 W/m ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของคอนกรีตเท่ากับ 1.5 W/(m °C) จงเขียน inp file ในแบบ 2-D เพื่อหาการกระจายตัวของอุณหภูมิในผนังคอนกรีตที่สภาวะอุณหภูมิคงตัว



รูปที่ P 7.7

7.8) กระบอกและครีบอลูมินัมหล่อเป็นชิ้นเดียวกันภายในมีอุณหภูมิคงที่ เท่ากับ 120 °C ครีบหน้าตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมดังรูปที่ P 7.8 เพื่อระบายความร้อนออกจากกระบอก เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของอลูมินัมเท่ากับ 170 W/mK และอุณหภูมิสิ่งแวดล้อมที่พาความร้อนที่ผิวนอกของครีบเท่ากับ 24 °C ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของครีบเท่ากับ 25 W/m^2K จงเขียน inp file โดยใช้รูปแบบของเอลิเมนต์สมมาตรรอบแกนหมุนหา การกระจายอุณหภูมิและความร้อนที่ผ่านครีบ

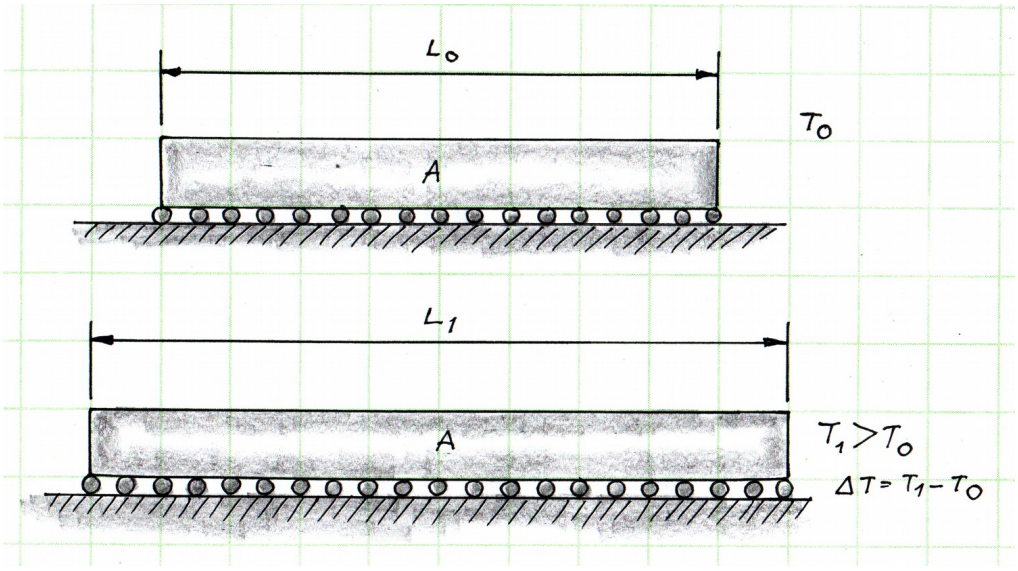


รูปที่ P 7.8

บทที่ 8 ปัญหาความเค้นและความเครียดจากความร้อน

จากบทที่ 7 ได้นำเสนอปัญหาการถ่ายเทความร้อนในชิ้นงาน ในการถ่ายเทความร้อนนั้นส่งผลให้ชิ้นงานที่ใช้งานทางกลมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเกิดขึ้นได้ ในกระบวนการทำความร้อนและทำความเย็นอุปกรณ์และชิ้นส่วนต่างๆ ล้วนอยู่ภายใต้การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ เช่น ท่อที่ใช้ในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน (heat exchanger) ชิ้นส่วนอุปกรณ์เหล่านี้เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจะมีความเค้นเกิดขึ้น ถ้าออกแบบใช้งานโดยไม่คำนึงถึงผลของความเค้นที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิอาจส่งผลต่อความเสียหายของชิ้นส่วนอุปกรณ์ได้ ดังนั้นความเค้นและความเครียดที่เกิดจากความร้อนมีความสำคัญกับงานทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล ทั้งนี้เพื่อการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลให้เหมาะสมทนทานต่ออุณหภูมิที่เกิดขึ้น รวมถึงการออกแบบระบบอื่นเพื่อรองรับการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ จากบทที่ 7 วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นทางเลือกอย่างหนึ่งที่นำมาศึกษาการกระจายอุณหภูมิและนำมาศึกษาความเค้นที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ

จุดประสงค์ของบทนี้เพื่อการใช้โปรแกรม CalculiX วิเคราะห์ความเค้นและความเครียดในชิ้นงานของแข็งอันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ โดยจะเริ่มจากการแนะนำให้รู้จักความเค้นและความเครียดที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ จากนั้นนำเสนอการพัฒนาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยหลักการพลังงานต่ำสุด เมื่อทราบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สำคัญ ต่อไปแนะนำคำสั่งของโปรแกรม CalculiX ที่จำเป็นสำหรับการการเขียน inp file เพื่อวิเคราะห์หาความเค้นและความเครียดในชิ้นงานเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ซึ่งในขั้นต้นนี้จะเสนอการใช้เอลิเมนต์แบบ 1-D และ 2-D เท่านั้น



รูปที่ 8.1 ความยาวชิ้นงาน A เปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ

8.1 ความเครียดและความเค้นที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

เมื่อชิ้นงานได้รับความร้อนจากภายนอกหรือเมื่อมีความร้อนเกิดขึ้นภายในชิ้นงาน เกิดการนำความร้อนในเนื้อวัสดุของชิ้นงาน ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและพลังงานในเนื้อวัสดุ ส่งผลให้มีการเปลี่ยนแปลงเชิงปริมาตรของชิ้นงาน ถ้า ΔT คือค่าของอุณหภูมิของชิ้นงานที่เปลี่ยนแปลง $\Delta T>0$ หมายถึงอุณหภูมิชิ้นงานเพิ่มขึ้นชิ้นงานจะมีการขยายตัวเชิงปริมาตร และ $\Delta T<0$ หมายถึงอุณหภูมิชิ้นงานลดลงชิ้นงานจะมีการหดตัวเชิงปริมาตร ยกตัวอย่างจากรูปที่ 8.1 สมมติชิ้นงาน A ทำจากวัสดุชนิดหนึ่งหน้าตัดเล็กมากเมื่อเทียบกับความยาว ตั้งอยู่บนพื้นและอิสระที่จะขยายตัวหรือหดตัวโดยไม่มีปัจจัยอะไรจากภายนอกมาเกี่ยวข้อง หรือกล่าวอีกทางหนึ่งว่ามีอิสระในการเปลี่ยนความยาว เริ่มต้นชิ้นงานมีอุณภูมิเท่ากันหมดในชิ้นงานเท่ากับ T_o และชิ้นงานมีความยาวเท่ากับ L_o เมื่อมีการให้ความร้อนกับชิ้นงานจนมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเป็น T_1 ชิ้นงานมีการขยายตัวตามความยาวเป็น L_1 (สมมติเปอร์เซนต์การขยายตัวของหน้าตัดน้อยเมื่อเทียบกับเปอร์เซนต์การขยายตัวของความยาว)

จากกรณีนี้พบว่าชิ้นงาน A มีการเปลี่ยนแปลงความยาวคือ $\Delta L=L_1-L_o$ แสดงว่าชิ้นงาน A มีความเครียดในแนวแกนตามยาวเท่ากับ $\Delta L/L_0$ โดยไม่มีความเค้นเกิดขึ้นเนื่องจากไม่มีแรงภายในใดๆ เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุของชิ้นงานกรณีอย่างนี้เราสามารถกล่าวได้ว่ามีความเครียดเกิดขึ้นแต่ไม่มีความเค้น และความเครียดที่เกิดขึ้นนั้นเกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ (ΔT) ของชิ้นงาน A เป็นความเครียดตั้งฉาก (normal strain) ส่วนความเครียดเฉือนนั้นไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ ค่าความเครียดตั้งฉากที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ คือ

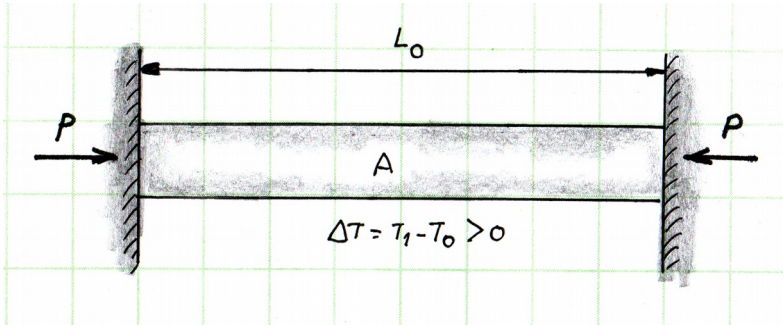
$$\epsilon_{\text{temp}}=\alpha\,\Delta T \tag{8.1}$$

เมื่อ α คือสัมประสิทธิ์การขยายตัวของวัสดุ ซึ่งขึ้นกับชนิดของวัสดุ

สมการ 8.1 สมการความเครียดที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ซึ่งไม่มีความเค้นในแนวแกนเกิดขึ้น สำหรับการศึกษาความเค้นของชิ้นงานที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมินั้นเกิดขึ้นได้จาก 2 เงื่อนไขคือ

-เงื่อนไขที่มีการบังคับจากภายนอก (external constraints)

-เงื่อนไขที่มีการบังคับจากภายใน (internal constraints) [1]



รูปที่ 8.2 เงื่อนไขที่มีการบังคับจากภายนอก

จากกรณีแบบแรกเงื่อนไขที่มีการบังคับจากภายนอก ขอยกตัวอย่างจากรูปที่ 8.1 ถ้านำชิ้นงาน A ซึ่งยาวเริ่มต้นเท่ากับ L_0 และมีอุณภูมิเริ่มต้นเท่ากับ T_0 มาสร้างเงื่อนไขที่มีการบังคับจากภายนอกโดยบังคับไม่ให้ชิ้นงานยืดตัวออกได้ด้วยการยึดชิ้นงานไว้ระหว่างผนังที่มีความแข็งแรงมากดังแสดงในรูปที่ 8.2 จากนั้นให้ความร้อนจนชิ้นงานมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น $(\Delta T>0)$ พบว่าที่ความยาวของชิ้นงานคงที่เท่ากับ L_0 ถ้าไม่มีการกำหนดเงื่อนไขบังคับชิ้นงานไว้ ชิ้นงานก็จะยืดตัวออกอิสระดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 8.1 แต่ในกรณีนี้การบังคับไม่ให้ยืดตัวออกส่งผลให้มีแรงภายนอกจากผนังกระทำต่อชิ้นงานในแนวแกนคือแรงอัด P เกิดความเค้นตั้งฉากในแนวแกนชิ้นงานคือ

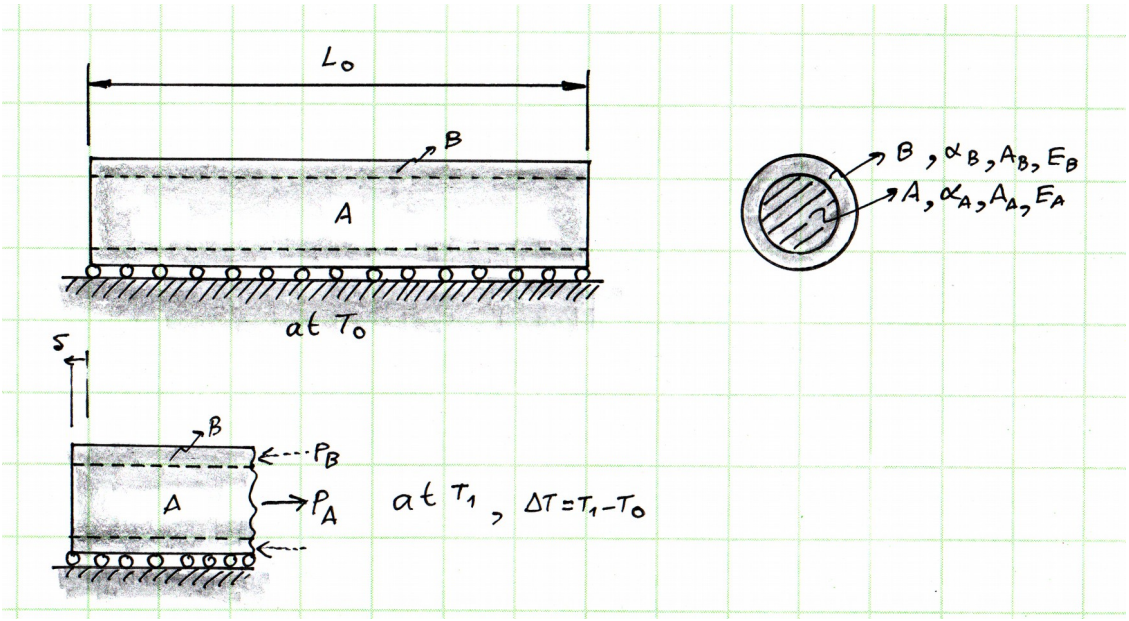
$$\sigma=\frac{P}{A} \tag{8.2}$$

เมื่อ A คือหน้าตัดของชิ้นงาน เราสามารถหาแรง P ได้โดยพิจารณาว่าความเครียดทั้งหมด $(\epsilon_{\text{total}})$ คือผลรวมของความเครียดจากแรง $(\epsilon_{\text{force}})$ กับความเครียดที่เกิดจากอุณหภูมิ (ϵ_{temp})

$$\epsilon_{\text{total}}=\epsilon_{\text{temp}}+\epsilon_{\text{force}} \tag{8.3}$$

ในกรณีนี้ $\epsilon_{\text{total}}=0$ เพราะไม่มีการยืดตัว และ $\epsilon_{\text{force}}=\frac{\sigma}{E}$ ซึ่งเป็นไปตามกฎของฮุค จากสมการ 8.1-8.3 จะได้ว่าแรงกระทำ P ในแนวแกนมีค่าเท่ากับ

$$P=-AE\alpha\Delta T \tag{8.4}$$



รูปที่ 8.3 ชิ้นงานประกอบ A และ B เงื่อนไขที่มีการบังคับจากภายใน

กรณีเงื่อนไขที่มีการบังคับจากภายใน ขอยกตัวอย่างจากรูปที่ 8.3 ถ้านำชิ้นงานประกอบ A และ B มีความยาวเท่ากันแต่มีขนาดหน้าตัดและทำจากวัสดุต่างกันมาประกอบติดกันยาวเท่ากับ L_0 มีอุณภูมิเริ่มต้นเท่ากับ T_0 จากนั้นให้ความร้อนจนชิ้นงานมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น $(\Delta T>0)$ พบว่าถ้าไม่มีการกำหนดเงื่อนไขบังคับชิ้นงานไว้ ชิ้นงาน A และ B ก็จะยืดตัวออกไปด้วยกันแต่ไม่สามารถยืดได้อิสระแยกจากกันเพราะประกอบติดกันจึงเกิดแรงกระทำกันระหว่าง P_A และ P_B โดยแรงดังกล่าวเป็นแรงภายในที่เกิดขึ้นตั้งฉากกับหน้าตัดของ A และ B ที่มีค่าเท่ากันและมีทิศตรงกันข้าม เนื่องจากชิ้นงานทั้งสองยืดไปด้วยกันเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิดังนั้นความเครียดรวมของชิ้นงาน A และ B เท่ากันคือ

$$\epsilon^{A}_{\text{total}}=\epsilon^{B}_{\text{total}} \tag{8.5}$$

จากสมการ (8.3) ความเครียดรวมของแต่ละชิ้นเกิดจากความเครียดจากการเปลี่ยนแปลงอุหณภูมิและความเครียดจากความเค้นดังนั้น

$$\epsilon^{A}_{\text{temp}}+\epsilon^{A}_{\text{force}}=\epsilon^{B}_{\text{temp}}+\epsilon^{B}_{\text{force}} \tag{8.6}$$

สมมติ $\alpha_B>\alpha_A$ จากรูปที่ 8.3 จะได้ว่า

$$\alpha_A \Delta T+\frac{P_A}{A_A E_A}=\alpha_B \Delta T-\frac{P_B}{A_B E_B} \tag{8.7}$$

เมื่อแรงภายในแต่ละชิ้นเท่ากันเพราะไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำดังนั้น

$$P_A=P_B=P \tag{8.8}$$

จากสมการ (8.7)-(8.8) ถ้าพิจารณาจากรูปที่ 8.3 จะได้แรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้น A คือแรงดึงและแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้น B คือแรงอัดซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$P=(\alpha_B-\alpha_A)\left(\frac{A_A E_A A_B E_B}{A_A E_A+A_B E_B}\right)\Delta T \tag{8.9}$$

จากตัวอย่างทั้งสองกรณีข้างต้นสมการ (8.4) และ (8.9) คือค่าแรงที่ทำให้เกิดความเค้นในกรณีที่มีการบังคับจากภายนอกและภายใน ซึ่งไม่ว่ากรณีใดๆ เราสามารถใช้วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์หาทั้งระยะยืดที่เกิดขึ้นรวมถึงแรงกระทำในชิ้นงานอันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ โดยการพัฒนาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุดซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

8.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาความเครียดและความเค้นจากความร้อน

จากสมการที่ (8.3) ทราบว่าความเครียดทั้งหมดที่เกิดกับชิ้นงานคือผลรวมของความเครียดจากแรง (ϵ_{force}) กับความเครียดที่เกิดจากอุณหภูมิ (ϵ_{temp})

$$\epsilon_{\text{total}} = \epsilon_{\text{temp}} + \epsilon_{\text{force}}$$

จากสมการ (5.16)-(5.17) ในรูปเมตริกซ์

$$\{\epsilon_{\text{force}}\} = [D]^{-1}\{\sigma\}$$

$$\{\epsilon_{\text{total}}\} = [B]\{d\}$$

ดังนั้น

$$[B]\{d\} = \{\epsilon_{temp}\} + [D]^{-1}\{\sigma\}$$

$$[B]\{d\} = \{\epsilon_{temp}\} + [D]^{-1}\{\sigma\}$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} - [D]\{\epsilon_{temp}\} \tag{8.10}$$

ดังนั้นพลังงานความเครียดในชิ้นงานคือ

$$U = \iiint \frac{1}{2}\{\epsilon_{\text{total}}\}^T\{\sigma\}\,dV$$

$$U = \iiint \frac{1}{2}\{d\}^T[B]^T([D][B]\{d\} - [D]\{\epsilon_{temp}\})\,dV \tag{8.11}$$

จากหลักพลังงานศักย์ต่ำสุด

$$\frac{\partial U}{\partial \{d\}} = 0$$

ซึ่งจะได้

$$[k]\cdot\{d\} = \{f_{\text{temp}}\}$$

$$[k] = \iiint [B]^T[D][B]\,dV$$

$$\{f_{\text{temp}}\}=\iiint [B]^T[D]\{\epsilon_{\text{temp}}\}dV$$

เมื่อ $\{\epsilon_{\text{temp}}\}=\{\alpha \Delta T\}$

$$\{f_{\text{temp}}\}=\iiint [B]^T[D]\{\alpha \Delta T\}dV \tag{8.12}$$

ซึ่ง $\{f_{\text{temp}}\}$ คือแรงที่โหนดเกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ถ้าในกรณี 1-D รูปแบบสมการแรงก็จะคล้ายที่แสดงไปแล้วในสมการ (8.4) หรือ (8.9) ถ้าเอลิเมนต์มีแรงที่กระทำแบบอื่นร่วมด้วยซึ่งเคยเสนอไปแล้วในบทที่ 5 หรืออาจเรียกว่า $\{f_{\text{force}}\}$ ซึ่งเป็นแรงที่โหนดเช่นกัน ทั้ง $\{f_{\text{force}}\}$ และ $\{f_{\text{temp}}\}$ รวมกันก็คือแรงที่กระทำที่โหนด ดังนั้นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาความเค้นและความเครียดที่เกิดจากความร้อนโดยทั่วไปเขียนได้ดังนี้

$$[k]\cdot\{d\}=\{f_{\text{force}}\}+\{f_{\text{temp}}\} \tag{8.13}$$

สมการที่ (8.13) คือสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาความเค้นและความเครียดที่เกิดจากความร้อนโดยค่า $[k]$ ก็คือค่าความแข็งสปริงของแต่ละเอลิเมนต์ซึ่งเหมือนกับที่ได้อธิบายไปแล้วในบทที่ 5 ส่วน $\{f_{\text{temp}}\}$ เป็นไปตามสมการที่ (8.12) ลักษณะของสมการจะแตกต่างออกไปตามรูปแบบเอลิเมนต์ที่ใช้ ซึ่งต่อไปเราจะเรียนรู้การใช้คำสั่งพื้นฐานสำคัญของ CalculiX ที่เกี่ยวข้องกับการเขียน inp file เพื่อปัญหาดังกล่าว

8.3 คำสั่งพื้นฐานสำคัญของ CalculiX ที่ใช้กับปัญหาความเค้นจากความร้อน

จากสมการที่ (8.12) – (8.13) ตัวแปร $\alpha\Delta T$ คือสิ่งที่แตกต่างจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาความเค้นความเครียด ดังนั้นคำสั่งของ CalculiX ที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาจากความร้อนโดยส่วนมากจะเกี่ยวข้องกับการระบุที่โหนดทั้งนี้เนื่องจากสมการในเรื่องนี้เกี่ยวข้องกับ $\{f_{\text{temp}}\}$ ซึ่งเป็นค่าแรงที่โหนดโดยตรง คำสั่งที่สำคัญคือ

*EXPANSION, TYPE= (ชนิดวัสดุ), ZERO=(อุณหภูมิตั้งต้น)
ค่า α

คำสั่งนี้ใช้ระบุค่าของสัมประสิทธิ์การขยายตัวแบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิซึ่งค่านี้จะคงที่ ถ้าต้องการศึกษาเพิ่มเติมในกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวขึ้นกับอุณหภูมิให้ศึกษาคำสั่งเพิ่มเติมได้จาก CCX manual [2] สำหรับ TYPE เอาไว้ระบุชนิดวัสดุ ถ้าไม่ระบุแสดงว่าวัสดุเป็นแบบ isotropic ถ้าระบุ TYPE=ANISO แสดงว่าวัสดุเป็นแบบ anisotropic ถ้าระบุ TYPE=ORTHO แสดงว่าวัสดุเป็นแบบ orthotropic

*INITIAL CONDITIONS, TYPE= TEMPERATURE
โหนดหรือกลุ่มโหนด, อุณหภูมิที่เงื่อนไขเริ่มต้น

คำสั่งนี้ใช้ระบุอุณหภูมิที่เงื่อนไขเริ่มต้นของโหนดหรือกลุ่มโหนดจากสมการคือการระบุค่าของ T_0 นั้นเอง

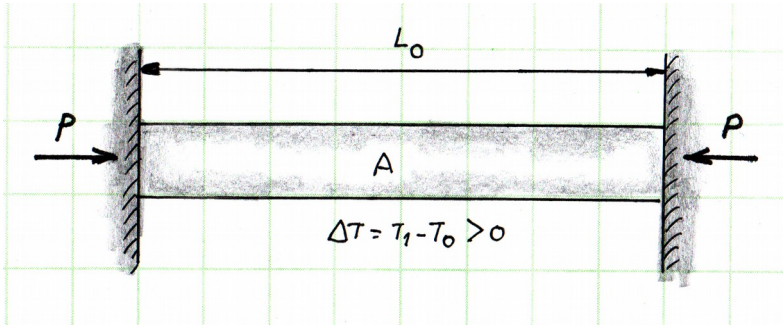
*TEMPERATURE
โหนดหรือกลุ่มโหนด, อุณหภูมิที่สภาวะสุดท้าย

คำสั่งนี้ใช้ระบุอุณหภูมิที่ภาวะสุดท้ายของโหนดหรือกลุ่มโหนดจากสมการคือการระบุค่าของ T_1 นั้นเอง

สำหรับรายละเอียดการใช้คำสั่งเพื่อแก้ปัญหานั้นมีรายละเอียดที่ค่อนข้างมากสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก CCX manual [2] .ในขั้นนี้ขอนำเสนอการใช้คำสั่งเท่าที่จำเป็นกับปัญหาที่ไม่ยากและไม่มีเงื่อนไขซับซ้อนมากนัก ตัวอย่างต่อไปจะนำเสนอการเขียน inp file เพื่อวิเคราะห์ปัญหาความเค้นความเครียดจากความร้อนโดยใช้เอลิเมนต์แบบ 1-D และ 2-D ซึ่งเป็นปัญหาความเค้นความเครียดในระนาบที่เกิดกับชิ้นงานของแข็งเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

8.4 ตัวอย่างปัญหาความเค้นจากความร้อน

<u>ตัวอย่างที่</u> 8.1 [3] แท่งวัสดุ A ยาว (L_o) 2 m มีพื้นที่หน้าตัดจตุรัสขนาด 0.2 m x 0.2 m ดังรูปที่ 8.4 ทำจากเหล็กกล้าสมมติเป็น isotropic material มีค่ามอดุลัส (E) เท่ากับ 200 GPa และค่าสัมประสิทธิ์ขยายตัว (α) เท่ากับ $12x10^{-6}\,\mathrm{m/m^oC}$ ติดตั้งอยู่ระหว่างผนังแข็งเกร็งเพื่อป้องกันการยืดตัวและหดตัว เมื่อชิ้นงานมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจากเริ่มต้น 20°C จากนั้นให้ความร้อนจนชิ้นงานมีอุณหภูมิเท่ากับ 70°C จงเขียน inp file เพื่อหาแรงที่ผนังกระทำต่อวัสดุและความเค้นในชิ้นงาน



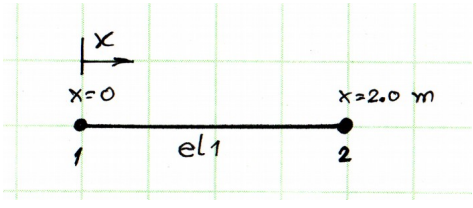
รูปที่ 8.4 ชิ้นงาน A ระหว่างผนังแข็งเกร็ง

<u>แนวคิด</u>

- จากโจทย์ เป็นปัญหาความเค้นเกิดจากความร้อน ลักษณะเงื่อนไขการบังคับจากภายนอก เมื่อชิ้นงานมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจะขยายตัวแต่ขยายไม่ได้เนื่องจากถูกบังคับไว้จึงเกิดแรง P จากภายนอกกระทำทำให้เกิดความเค้นในแนวแกน ในกรณีนี้สามารถใช้เอลิเมนต์แบบคาน B31 (two nodes beam element) หรือเอลิเมนต์แบบคานมาใช้แก้ปัญหาสำหรับปัญหานี้แท่งชิ้นงาน A

<u>การเขียน inp file (inp file)โดยใช้เอลิเมนต์แบบคาน (B32)</u>

-เพื่อความสะดวกและรวดเร็วลองใช้เอลิเมนต์ B31 จำนวน 1 เอลิเมนต์แทนชิ้นงาน โดยเริ่มจากสร้าง Mesh (Meshing) ในแบบ 1-D ตามแกน x โดยกำหนดให้ปลายซ้ายสุดคือ x=0 ถ้าเลือกใช้เอลิเมนต์แบบคาน (B32) เพียง 1 เอลิเมนต์จะมีโหนดแค่ 2 จุดดังรูปที่ 8.5 ที่โหนดหมายเลข 1 และ 2 ถูกบังคับไม่ให้เคลื่อนที่ในแนวแกน x



รูปที่ 8.5 เอลิเมนต์ B31

1. เริ่มต้นเขียนอินพุตกำหนดหัวเรื่องคือ ch81.inp fixed ends of heated bar

```
*HEADING
ch81.inp fixed ends of heated bar
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดและตำแหน่งที่ (x,y,z) จำนวนโหนดทั้งหมด 2 โหนด ให้กลุ่มโหนดชื่อว่า Nall

```
*NODE,NSET=NALL
1,0.0,0.0,0.0
2,2.0,0.0,0.0
```

3. กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ หมายเลขเอลิเมนต์ และโหนดต่างๆ ที่ประกอบกันเป็นแต่ละเอลิเมนต์ สำหรับปัญหานี้ กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์คือ B31 มีทั้งหมดจำนวน 1 เอลิเมนต์ ให้ชื่อว่า el1

```
*ELEMENT,TYPE=B31, ELSET=el1
1,1,2
```

4. กำหนดชื่อวัสดุว่า STEEL ให้มีค่ามอดุลัสเชิงเส้นเท่ากับ 200 GPa ที่ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเท่ากับ $12\,x10^{-6}\,\mathrm{m/m}^{o}\mathrm{C}$ ที่อุณหภูมิเริ่มต้น 20°C

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+09,.3
*EXPANSION,ZERO=20.
12.E-6
```

5.กำหนดหน้าตัดของเอลิเมนต์ el1 ให้เป็นหน้าตัดแบบคานรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสขนาด 0.2 m x 0.2 m มีค่าสมบัติวัสดุตามชื่อ STEEL ที่ได้กำหนดในข้อ 4

```
*BEAM SECTION,ELSET=el1,MATERIAL=EL,SECTION=CIRC
0.2,0.2
```

6 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์ตามสมดุลของหลักสถิตยศาสตร์

```
*STEP
*STATIC
```

7. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)
-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้โหนดหมายเลข 1 และ 2 คือที่ตำแหน่ง x=0 และ x=2.0 m หรือที่ตำแหน่งปลายทั้งสองของชิ้นงานไม่มีการเคลื่อนที่

```
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
2,1,3,0.0
```

8. และกำหนดเงื่อนไขภาระความร้อน (load conditions)
กำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของทุกโหนดทั้งชิ้นงานคือ $T_o = 20^o C$

```
*INITIAL CONDITIONS,TYPE=TEMPERATURE
NALL,20.
```

กำหนดอุณหภูมิสุดท้ายของทุกโหนดทั้งชิ้นงานคือ $T_1 = 70^o C$

```
*TEMPERATURE
NALL,70.
```

9. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file คือค่าเคลื่อนตัว (U) ค่าแรงปฏิกิริยา (RF) ของที่โหนดที่ชื่อ Nall และให้รายงานค่าความความเค้นของเอลิเมนต์ el1 ที่จุดอินทิเกรชั่น (S) และแสดงผลใน frd file ด้วยเช่นกัน

```
*NODE PRINT,NSET=NALL
U
RF
*EL PRINT,ELSET=el1
S
*NODE FILE,NSET=NALL
U
RF
*EL FILE,ELSET=el1
S
```

10. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

11. ประกอบคำสั่งทั้งหมดเข้ากันได้เป็น inp file ดังนี้

```
*HEADING
ch81.inp fixed ends of heated bar
*NODE,NSET=NALL
1,0.0,0.0,0.0
2,2.0,0.0,0.0
*ELEMENT,TYPE=B31, ELSET=el1
1,1,2
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+09,.3
*EXPANSION,ZERO=20.
12.E-6
*BEAM SECTION,ELSET=el1,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
0.2,0.2
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
1,1,3,0.0
2,1,3,0.0
```

```
*INITIAL CONDITIONS,TYPE=TEMPERATURE
NALL,20.
*TEMPERATURE
NALL,70.
*NODE PRINT,NSET=NALL
U
RF
*EL PRINT,ELSET=el1
S
*NODE FILE,NSET=NALL
U
RF
*EL FILE,ELSET=el1
S
*END STEP
```

12. การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

12.1 ลองตรวจสอบผลลัพธ์ค่าการเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยาของโหนดต่างๆ โดยตรงจาก dat file คือ

```
 displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  0.000000E+00  0.000000E+00  3.388132E-21

 forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  4.800000E+06  1.106926E-11  5.917121E-12
         2 -4.800000E+06 -1.106926E-11 -5.917121E-12
```

จากข้อมูลของ dat file พบว่าค่าการเคลื่อนตัว (vx,vy,vz)ที่โหนดหมายเลข 1 และ 2 มีค่าเท่ากับศูนย์ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขการยึดของผนังแข็งเกร็ง และเมื่อตรวจสอบค่าแรงปฏิกิริยา(fx,fy,fz)ที่โหนดทั้งสองพบว่ามีค่าเท่ากับ 4.800000E+06 N ที่โหนดหมายเลข 1 และมีค่า -4.800000E+06 N ที่โหนดหมายเลข 2 หมายถึงแรงปฏิกิริยาทั้งสองเป็นแรงอัด สามารถตรวจสอบความถูกต้องของแรงดังกล่าวกับสมการที่ (8.4) ดังนี้

$$P = -AE\alpha\Delta T = -(0.04)(200x10^{9})(12x10^{-6})(70-20) = -4.8x10^{6}\ \text{N}$$

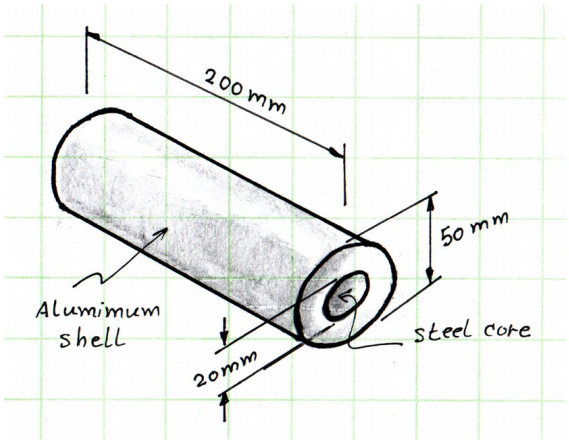
จากผลการคำนวณพบว่าค่าแรงปฏิกิริยาที่ได้จากการคำนวณด้วย CalculiX มีความถูกต้องสอดคล้องกันกับผลเฉลยแม่นตรง ดังนั้นการเขียน inp file น่าจะถูกต้อง

12.2 ลองตรวจสอบผลลัพธ์ค่าการความเค้นของ el1 โดยตรงจาก dat file คือ

```
 stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set EL1 and time  0.1000000E+01

1   1 -1.200000E+08 -5.215406E-08 -8.940697E-08 -1.957549E-08  1.959753E-08  8.340017E-09
1   2 -1.200000E+08 -4.470348E-08 -1.490116E-08 -1.895199E-08  1.963660E-08  8.340017E-09
1   3 -1.200000E+08 -1.490116E-08  3.725290E-08 -1.967629E-08 -1.972429E-08  8.340017E-09
1   4 -1.200000E+08 -4.470348E-08  7.450581E-09 -1.905279E-08 -2.045281E-08  0.000000E+00
1   5 -1.200000E+08  4.470348E-08 -3.725290E-08  1.888312E-08  1.823384E-08  1.668003E-08
1   6 -1.200000E+08  3.725290E-08  3.725290E-08  1.873902E-08  1.827292E-08 -8.340017E-09
1   7 -1.200000E+08  9.685755E-08  9.685755E-08  1.878233E-08 -1.800934E-08  1.668003E-08
1   8 -1.200000E+08  2.235174E-08  4.470348E-08  1.863823E-08 -1.873786E-08 -1.668003E-08
```

จากข้อมูล dat file พบว่า sxx หรือความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x (σ_x) เกิดขึ้นเป็นหลัก ความเค้นในแนวแกนอื่นเกิดขึ้นน้อยมาก เมื่อตรวจสอบทุกจุด integration points พบว่าค่าความเค้นเท่ากับ-**1.200000E+08** N/m^2 ซึ่งเกิดจากแรง P กระจายอยู่บนหน้าขนาด 0.04 m^2

<u>ตัวอย่างที่</u> 8.2 [4] รูปที่ 8.6 แสดงแท่งชิ้นงานประกอบจากปลอกอลูมินัม (aluminum shell,) และยึดติดกันกับแกนเหล็ก (steel core,) ที่อุณหภูมิเริ่มต้น 20°C ชิ้นงานอยู่ในสภาพที่ไม่มีความเค้นใดๆ เมื่อให้ความร้อนจนชิ้นงานมีอุณหภูมิเท่ากับ 180°C จงเขียน inp file เพื่อหาระยะยืดตัวของชิ้นงาน เมื่อสมบัติของเหล็กและอลูมินัมมีค่าดังนี้ $E_s = 200\,\text{GPa}, \alpha_s = 11.7\,x\,10^{-6}/^o\text{C}$ $E_a = 70\,\text{GPa}, \alpha_a = 23.6\,x\,10^{-6}/^o\text{C}$



รูปที่ 8.6 ชิ้นงานประกอบจากเหล็กและอลูมินัม

<u>แนวคิด</u>

- จากโจทย์ ความเครียดเกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของชิ้นงาน และมีลักษณะเงื่อนไขการบังคับจากภายในเนื่องจากวัสดุประกอบที่ให้มามีสมบัติคือค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้นและสัมประสิทธิ์การขยายตัวต่างกัน เมื่อชิ้นงานมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นชิ้นงานจะมีความเค้นภายในเกิดขึ้น ในกรณีนี้สามารถใช้เอลิเมนต์แบบ 2-D คือ CAX3 เนื่องจากชิ้นงานมีสมมาตรรอบแกนหมุน แกนหมุนในกรณีนี้คือแกนตามยาวของชิ้นงาน ซึ่งจะลดความยุ่งยากในการสร้างต้นแบบแทนที่จะใช้ต้นแบบ 3-D และในการสร้างต้นแบบอาจไม่จำเป็นต้องสร้างตามความยาวทั้งหมดเนื่องจากชิ้นงานมีความสมมาตรตามแนวยาวด้วยขณะมีการยืดตัวจึงอาจสร้างต้นแบบความยาวแค่ครึ่งเดียว (half-length axisymmetrical) คือ 100 mm ดังแสดงในรูปที่ 8.7

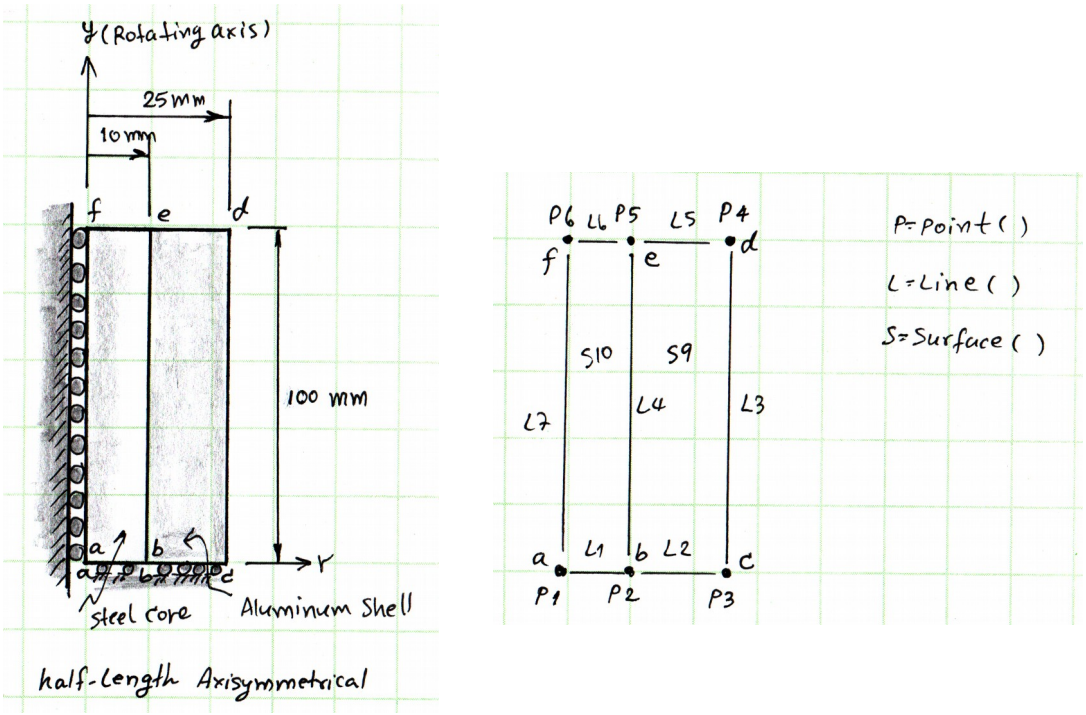
<u>การเขียน inp file (inp file)โดยใช้เอลิเมนต์แบบ 2-D สมมาตรรอบแกนหมุน (CAX3)</u>

- กรณีนี้เลือกใช้ GMSH ในการสร้างต้นแบบและ meshing โดยกำหนดให้แกน y คือแกนที่ใช้สำหรับการสมมาตรรอบแกนหมุน จากนั้นกำหนดขนาดของต้นแบบเพียง 1 ใน 4 (ครึ่งขวาและครึ่งบน) ของชิ้นงานจริงดังแสดงในรูปที่ 8.7 ตามจุด abcdef โดยกำหนดให้ a คือจุด (0,0,0) ส่วน abef คือ steel core ส่วน bcde คือ aluminum shell ในการสร้างต้นแบบด้วย GMSH และแปลงเป็น inp file สามารถเรียนรู้ได้จากบทที่ 5 ซึ่งไม่ขอกล่าวรายละเอียดขั้นตอนในการสร้าง แต่ขอยก geo file เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างต้นแบบ ดังนี้

```
Point(1) = {0, 0, 0, 5.0};
Point(2) = {10, 0, 0, 5.0};
Point(3) = {25, 0, 0, 5.0};
Point(4) = {25, 100, 0, 5.0};
Point(5) = {10, 100, 0, 5.0};
Point(6) = {0, 100, 0, 5.0};
```

```
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {2, 5};
Line(5) = {4, 5};
Line(6) = {5, 6};
Line(7) = {6, 1};
Line Loop(8) = {2, 3, 5, -4};
Plane Surface(9) = {8};
Line Loop(10) = {1, 4, 6, 7};
Plane Surface(11) = {10};
Transfinite Surface {11};
Transfinite Surface {9};
```

สำหรับ geo file ที่ยกมาคือ geo file ของต้นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน ข้อมูลจาก geo file จะมีประโยชน์ต่อการกำหนดชื่อของขอบหรือพื้นที่เพื่อใช้เป็นข้อมูลในการเขียน inp file จากต้นแบบนี้ทำให้ทราบว่า L7 หรือ Line7 คือเส้นแกนที่สมมาตรการหมุนและเส้นนี้จะไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน r ซึ่งจะนำไปใช้ในการกำหนดใน *BOUNDARY หรือเงื่อนไขขอบเขตต่อไป และกำหนดให้ L1, L2 หรือ Line1 และ Line2 ซึ่งเป็นเส้นแบ่งครึ่งตามยาวไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน y



รูปที่ 8.7 ต้นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน

1. เริ่มต้นเขียนอินพุตกำหนดหัวเรื่องคือ `ch82.inp half-length axisymmetrical model of composite bar`

```
*Heading
ch82.inp half-length axisymmetrical model of composite bar
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดและตำแหน่งที่ (x,y,z) โดยในขั้นตอนนี้ได้จากการ meshing ด้วย GMSH ให้กลุ่มโหนดชื่อว่า Nall

```
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,1.000000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,2.500000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
4,2.500000000000e+01,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
5,1.000000000000e+01,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
6,0.000000000000e+00,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
….....................................................
….....................................................
….....................................................
444,7.500000000000e+00,8.000000000000e+01,0.000000000000e+00
445,7.500000000000e+00,8.250000000000e+01,0.000000000000e+00
446,7.500000000000e+00,8.500000000000e+01,0.000000000000e+00
447,7.500000000000e+00,8.750000000000e+01,0.000000000000e+00
448,7.500000000000e+00,9.000000000000e+01,0.000000000000e+00
449,7.500000000000e+00,9.250000000000e+01,0.000000000000e+00
450,7.500000000000e+00,9.500000000000e+01,0.000000000000e+00
451,7.500000000000e+00,9.750000000000e+01,0.000000000000e+00
```

3. กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ หมายเลขเอลิเมนต์ และโหนดต่างๆ ที่ประกอบกันเป็นแต่ละเอลิเมนต์ให้กับ

3.1 ส่วนที่เป็นปลอกอลูมินัมให้ชื่อว่า Alu_shell รูปแบบเอลิเมนต์ที่ใช้คือคือ CAX3 หมายเลขเอลิเมนต์รวมถึงโหนดนั้น GMSH ได้กำหนดมาให้ตั้งแต่ตอนสร้าง geo inp file เราแค่มาดัดแปลงในส่วน `type=CAX3` และ `ELSET=Alu_shell` ดังนี้

```
*Element, type=CAX3, ELSET=Alu_shell
957, 2, 10, 54
958, 10, 178, 54
959, 10, 11, 178
960, 54, 178, 55
961, 55, 178, 180
….................
….................
1433, 94, 334, 93
1434, 334, 53, 93
1435, 334, 52, 53
1436, 93, 53, 4
```

3.2 ส่วนที่เป็นแกนเหล็กให้ชื่อว่า Steel_core รูปแบบเอลิเมนต์ที่ใช้คือคือ CAX3 หมายเลขเอลิเมนต์รวมถึงโหนดนั้น GMSH ได้กำหนดมาให้ตั้งแต่ตอนสร้าง geo inp file เราแค่มาดัดแปลงในส่วน `type=CAX3` และ `ELSET=Steel_core` ดังนี้

```
*Element, type=CAX3, ELSET=Steel_core
1437, 1, 7, 139
1438, 7, 354, 139
1439, 7, 8, 354
1440, 139, 354, 138
1441, 138, 354, 356
1442, 354, 355, 356
….................
….................
1751, 450, 91, 451
1752, 412, 451, 99
1753, 99, 451, 98
1754, 451, 92, 98
1755, 451, 91, 92
1756, 98, 92, 58
```

4. -กำหนดชื่อวัสดุว่า STEEL ให้มีค่ามอดุลัสเชิงเส้นเท่ากับ 200x10^3 MPa (ใช้ค่านี้เนื่องจากมิติเป็น mm) สัมประสิทธิ์การขยายตัวเท่ากับ $11.7x10^{-6}/\ ^oC$ ที่อุณหภูมิเริ่มต้น 20°C

-กำหนดชื่อวัสดุว่า ALUMINUM ให้มีค่ามอดุลัสเชิงเส้นเท่ากับ 70x10^3 MPa (ใช้ค่านี้เนื่องจากมิติเป็นที่ค่า mm) ที่ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเท่ากับ $23.6x10^{-6}/\ ^oC$ ที่อุณหภูมิเริ่มต้น 20°C

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,.3
*EXPANSION,ZERO=20.
11.7E-6
*MATERIAL,NAME=ALUMINUM
*ELASTIC
70E+03,.3
*EXPANSION,ZERO=20.
23.6E-6
```

5.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ `Alu_shell` มีค่าสมบัติวัสดุคือ `MATERIAL=ALUMINUM` และกลุ่มเอลิเมนต์ `Steel_core` มีค่าสมบัติวัสดุคือ `MATERIAL=STEEL` ตามที่ได้กำหนดในข้อ 4 และกำหนดให้เป็นหน้าตัดแบบของแข็งหนา 1 หน่วย

```
*SOLID SECTION,ELSET=Alu_shell,MATERIAL=ALUMINUM
1.0
*SOLID SECTION,ELSET=Steel_core,MATERIAL=STEEL
1.0
```

6 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์ตามสมดุลของหลักสถิตยศาสตร์

```
*STEP
*STATIC
```

7. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)

-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้ `*NSET,NSET=Line7` ซึ่งคือโหนดตามเส้น `Line7` ซึ่งเป็นเส้นของแกนหมุนไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน `r`

```
*NSET,NSET=Line7
6
101
102
103
104
….
….
135
136
137
138
139
1
*BOUNDARY
Line7,1,1,0.0
```

-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้ *NSET,NSET=Line1 ซึ่งคือโหนดตามเส้น Line1 และ *NSET,NSET=Line2 ซึ่งคือโหนดตามเส้นฐานไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน y

```
*NSET,NSET=Line1
1
7
8
9
2
*NSET,NSET=Line2
2
10
11
12
13
14
3
*BOUNDARY
Line1,2,2,0.0
Line2,2,2,0.0
```

8. และกำหนดเงื่อนไขภาระความร้อน (load conditions)
กำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของทุกโหนดทั้งชิ้นงานคือ $T_o = 20^o C$

```
*INITIAL CONDITIONS,TYPE=TEMPERATURE
NALL,20.
```

กำหนดอุณหภูมิสุดท้ายของทุกโหนดทั้งชิ้นงานคือ $T_1 = 180^o C$

```
*TEMPERATURE
NALL,180.
```

9. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file คือค่าเคลื่อนตัว (U) ของที่โหนดที่ Line 5 และ Line6 และให้รายงานค่าความความเค้นของกลุ่มเอลิเมนต์ Alu_shell และ Steel_core ที่จุดอินทิเกรชั่น และแสดงผลใน

ค่าการเคลื่อนตัวของทุกโหนดและแสดงค่าความเค้นของทุกเอลิเมนต์ใน frd file ด้วย

```
*NODE PRINT,NSET=Line5
U
*NODE PRINT,NSET=Line6
U
*EL PRINT,ELSET=Alu_shell
S
*EL PRINT,ELSET=Steel_core
S
*NODE FILE,NSET=NALL
U
RF
*EL FILE,ELSET=Alu_shell
S
*EL FILE,ELSET=Steel_core
S
```

10. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

11. ประกอบคำสั่งทั้งหมดเข้ากันได้เป็น inp file ดังนี้

```
*Heading
ch82 half-length axisymmetrical model of composite bar
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,1.000000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,2.500000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
4,2.500000000000e+01,1.000000000000e+02,0.000000000000e+00
….....................................................
….....................................................
….....................................................
450,7.500000000000e+00,9.500000000000e+01,0.000000000000e+00
451,7.500000000000e+00,9.750000000000e+01,0.000000000000e+00
*NSET,NSET=Line1
1
7
8
9
2
*NSET,NSET=Line2
2
10
11
12
13
14
3
*NSET,NSET=Line3
3
15
16
```

```
17
…
…

50
51
52
53
4
*NSET,NSET=Line4
2
54
55
56
…
…
89
90
91
92
5
*NSET,NSET=Line5
4
93
94
95
96
97
5
*NSET,NSET=Line6
5
98
99
100
6
*NSET,NSET=Line7
6
101
102
…
….
….
138
139
1
*Element, type=CAX3, ELSET=Alu_shell
957, 2, 10, 54
….............
….............
….............

1089, 87, 226, 228
1090, 226, 227, 228
….................
…....................
1435, 334, 52, 53
1436, 93, 53, 4
*Element, type=CAX3, ELSET=Steel_core
```

```
1437, 1, 7, 139
1438, 7, 354, 139
….................
….................
1754, 451, 92, 98
1755, 451, 91, 92
1756, 98, 92, 5
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,.3
*EXPANSION,ZERO=20.
11.7E-6
*MATERIAL,NAME=ALUMINUM
*ELASTIC
70E+03,.3
*EXPANSION,ZERO=20.
23.6E-6
*SOLID SECTION,ELSET=Alu_shell,MATERIAL=ALUMINUM
1.0
*SOLID SECTION,ELSET=Steel_core,MATERIAL=STEEL
1.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
Line7,1,1,0.0
Line1,2,2,0.0
Line2,2,2,0.0
*INITIAL CONDITIONS,TYPE=TEMPERATURE
NALL,20.
*TEMPERATURE
NALL,180.
*NODE PRINT,NSET=Line5
U
*NODE PRINT,NSET=Line6
U
*EL PRINT,ELSET=Alu_shell
S
*EL PRINT,ELSET=Steel_core
S
*NODE FILE,NSET=NALL
U
RF
*EL FILE,ELSET=Alu_shell
S
*EL FILE,ELSET=Steel_core
S
*END STEP
```

12. การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

12.1 ลองตรวจสอบผลลัพธ์ค่าการเคลื่อนตัวของชิ้นงานโดยตรงจาก dat file จากรูปที่ 8.7 เนื่องจากเรารู้ว่าโหนดของ Line5 และ Line6 คือเส้นที่อยู่ปลายบนชิ้นงานซึ่งต้องมีการยึดตัวเพราะที่ฐาน Line 1 และ Line 2 ยึดไว้ไม่ให้เคลื่อนตัวในแนวแกน y เราสามารถดูการเคลื่อนตัวที่โหนดของ Line 5 และ Line 6 ได้จาก dat file โดยดูจากค่าของ **vy** เพราะในต้นแบบเราให้แนวแกนตามยาวของชิ้นงานคือแนวแกน y ค่า dat file ที่ได้ผลลัพธ์ออกมาคือ

```
displacements (vx,vy,vz) for set LINE5 and time  0.1000000E+01

         4  7.875135E-02  3.284449E-01  0.000000E+00
        93  6.876182E-02  3.262147E-01  0.000000E+00
        94  5.832723E-02  3.237960E-01  0.000000E+00
        95  4.738137E-02  3.207786E-01  0.000000E+00
        96  3.591390E-02  3.166182E-01  0.000000E+00
        97  2.407902E-02  3.103363E-01  0.000000E+00
         5  1.301644E-02  2.985742E-01  0.000000E+00

displacements (vx,vy,vz) for set LINE6 and time  0.1000000E+01

         5  1.301644E-02  2.985742E-01  0.000000E+00
        98  9.799508E-03  2.924342E-01  0.000000E+00
        99  6.317387E-03  2.892237E-01  0.000000E+00
       100  2.905578E-03  2.873512E-01  0.000000E+00
         6  0.000000E+00  2.861715E-01  0.000000E+00
```

จากข้อมูลของ dat file พบว่าค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนชิ้นงานสูงสุดคือ 0.328 x 2 = 0.656 mm เหตุที่ต้องคูณสองเนื่องจากเราสร้างต้นแบบจากความยาวครึ่งเดียวของชิ้นงานจริงดังนั้นต้องคูณด้วย 2 ในกรณีนี้โจทย์มีเงื่อนไขบังคับภายในดังแสดงในรูปที่ 8.3 ดังนั้นจากสมการที่ (8.5)-(8.9)

$$\epsilon_s^{\text{total}} = \epsilon_a^{\text{total}} \tag{a}$$

เมื่อ a คือ aluminum shell และ s คือ steel core
และจาก (8.7)

$$\alpha_s \Delta T + \frac{P_s}{A_s E_s} = \alpha_a \Delta T - \frac{P_a}{A_a E_a} \tag{b}$$

เมื่อแรงภายในแต่ละชิ้นเท่ากันเพราะไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำดังนั้น

$$P_s = P_a = P \tag{c}$$

ดังนั้นแรงภายในชิ้นงานที่เกิดขึ้นคือ

$$P = (\alpha_a - \alpha_s)\left(\frac{A_a E_a A_a E_a}{A_s E_s + A_a E_a}\right)\Delta T \tag{d}$$

เมื่อแทนค่าต่างๆ ลงในสมการ (d)

$\alpha_s = 11.7\, x\, 10^{-6} \;\; 1/^o C$

$\alpha_a = 23.6\, x\, 10^{-6} \;\; 1/^o C$

$A_a = 1651.65 \ \ mm^2$

$A_s = 314.6 \ \ mm^2$

$E_a = 70{,}000 \ \ MPa$

$E_s = 200{,}000 \ \ MPa$

$\Delta T = 60 \ \ ^oC$

จะได้ว่าแรงที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุแต่ละชนิดคือ

$P = 77{,}580 \ \ N$

ซึ่งแรงนี้คือแรงดึงในหน้าตัดของ steel core และเป็นแรงอัด aluminum shell ซึ่งสามารถนำไปคำนวณเป็นความเค้นในแนวแกนของแต่ละหน้าตัดได้ดังนี้

$$\sigma_s = \frac{77580 \ N}{314.6 mm^2} = \ 246.59 \ \ MPa$$

$$\sigma_a = \frac{-77580 \ N}{1651.65 mm^2} = \ -46.97 \ \ MPa$$

จากความเค้นที่ได้สามารถนำไปหาความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นงานได้ดังนี้ เนื่องจากความเครียดในแกนเหล็กกับปลอกอลูมินัมมีค่าเท่ากันดังนั้น

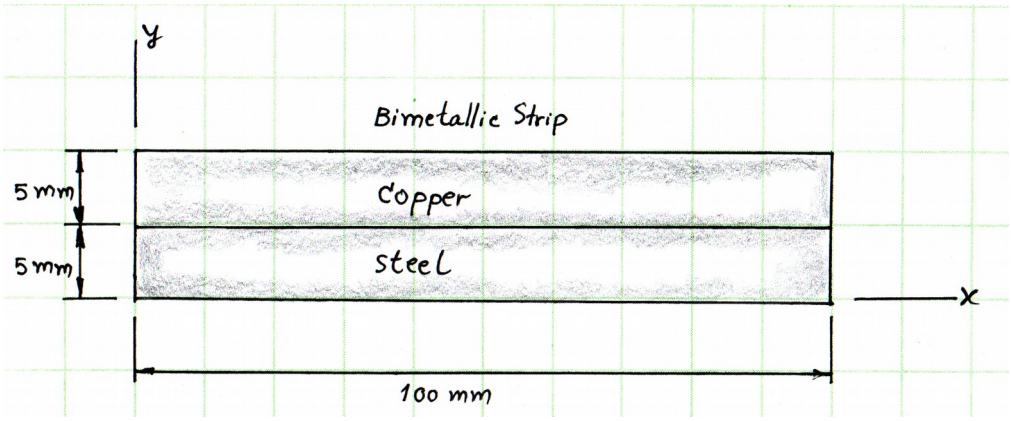
$$\epsilon_s^{\text{total}} = \sigma_s / E + \Delta T = 246.9/(200 \ x \ 10^3) + 11.7 \ x \ 10^{-6} \ x \ 160 = 3.107 \ x \ 10^{-3}$$

สรุปว่าความเครียดของชิ้นงานมีค่าเท่ากับ 0.00312 ซึ่งเป็นความเครียดในเหล็กและอลูมินัมด้วยเช่นกัน จากค่าความเครียดนี้เราสามารถนำไปคำนวณหาระยะยืดได้คือ

$$\delta = \epsilon L = 0.00312 \ x \ 200 mm = 0.624 \ mm$$

ซึ่งถ้านำผลลัพธ์ของระยะยืดของชิ้นงานมาเปรียบกันระหว่าง Calculix ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.656 mm กับการคำนวณโดยตรงก็คือ 0.624 mm พบว่ามีความใกล้เคียงกันมาก

<u>ตัวอย่างที่</u> 8.3 แท่งชิ้นงานประกอบที่ทำจากวัสดุต่างชนิดกัน (Bimetallic strip) เป็นชิ้นงานที่นำไปใช้อุปกรณ์ทางกลคือสวิตช์ความร้อน (thermal switch) ซึ่งทำจากแผ่นทองแดงและเหล็กที่มยาว 100 mm กว้าง 10 mm และหนา 5 mm เท่ากัน แผ่นบนคือทองแดง ($E_c = 120\,\text{GPa}, \alpha_c = 23\,x\,10^{-6}/^o\text{C}$) และแผ่นล่างคือเหล็กกล้า ($E_s = 200\,\text{GPa}, \alpha_c = 12\,x\,10^{-6}/^o\text{C}$) ดังแสดงในรูปที่ 8.8 สมมติแผ่นทั้งสองยึดติดกันอย่างสมบูรณ์แบบระหว่างผิวสัมผัส จงเขียน inp file เพื่อหาระยะโก่งของชิ้นงานเมื่อให้ความร้อนจนชิ้นงานมีอุณหภูมิทั่วทั้งแผ่นเท่ากับ 300°C สมมติแผ่นทั้งสองมีอุณหภูมิเริ่มต้นทั่วทั้งแผ่นเท่ากับ 20°C



รูปที่ 8.8 bimetallic strip

<u>แนวคิด</u>

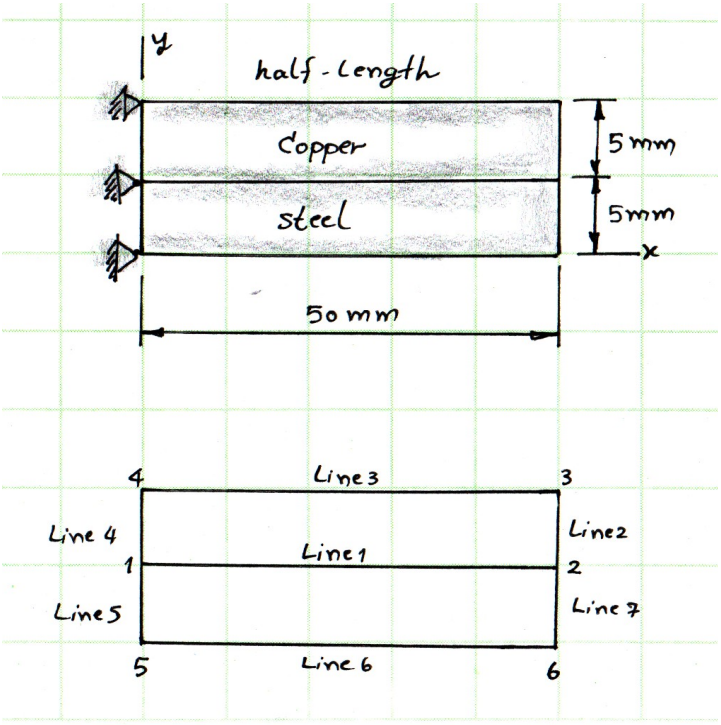
- จากโจทย์อย่างนี้ ชิ้นงานดังกล่าวคือสวิตช์ที่ใช้ควบคุมอุณหภูมิ สวิตช์นี้จะมีการโก่งตัวต่างกันไปเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ต่างกัน แผ่นทองแดงและเหล็กกล้าเมื่อรับอุณหภูมิต่างกันจะมีการยืดตัวไปด้วยกันแต่เนื่องด้วยสัมประสิทธิ์ความร้อนที่ต่างกัน แผ่นทองแดงที่อยู่ด้านบนต้องการยืดตัวออกมากกว่าแผ่นเหล็กที่อยู่ด้านล่างแต่เนื่องจากยึดไว้ติดกันระหว่างผิวสัมผัส แผ่นทองแดงจึงถูกดึงไว้ในขณะที่แผ่นเหล็กถูกดึงออกและเนื่องจากไม่มีแรงภายนอกจึงเกิดแรงภายในที่เท่ากันแต่มีทิศตรงข้าม และแรงภายในที่เกิดขึ้นในแต่ละแผ่นเยื้องแกนกันจึงเกิดโมเมนต์ดัดภายในทำให้แผ่นทั้งสองเกิดการดัดขึ้นมีการโก่งตัวในแนวขวางชิ้นงาน ในกรณีนี้สามารถใช้เอลิเมนต์แบบ 2-D คือ CPS4 โดยสมมติว่าไม่มีการโก่งตัวบนระนาบ yz มีเฉพาะการโก่งตัวบนระนาบ xy และการโก่งตัวนี้มีความสมมาตรซ้ายขวาตามแนวกึ่งกลางตามยาวของชิ้นงาน คล้ายกับคานยื่นแบบฝัง (cantilever beam) จากเงื่อนไขดังกล่าวสามารถลดความยุ่งยากในการสร้างต้นแบบ 2-D แทนที่การใช้ต้นแบบ 3-D โดยจะสร้างต้นแบบความยาวแค่ครึ่งเดียว (half-length) คือ 50 mm ดังแสดงในรูปที่ 8.9

<u>การเขียน inp file โดยใช้เอลิเมนต์แบบ 2-D CPS4</u>

- กรณีนี้เลือกใช้ GMSH ในการสร้างต้นแบบและ meshing ในการสร้างต้นแบบด้วย GMSH และแปลงเป็น inp file สามารถเรียนรู้ได้จากบทที่ 5 ซึ่งไม่ขอกล่าวรายละเอียดขั้นตอนในการสร้าง แต่ขอยก geo file เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างต้นแบบ ดังแสดงตำแหน่งจุดและชื่อของเส้นต่างในรูปที่ 8.9 สำหรับ geo file มีรายละเอียดดังนี้

```
Point(1) = {0.0, 0.0, 0, 1.0};
Point(2) = {50.0, 0.0, 0, 1.0};
Point(3) = {50.0, 5.0, 0, 1.0};
Point(4) = {0.0, 5.0, 0, 1.0};
Point(5) = {0.0, -5.0, 0, 1.0};
Point(6) = {50.0, -5.0, 0, 1.0};
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 1};
Line(5) = {1, 5};
Line(6) = {5, 6};
Line(7) = {6, 2};
Line Loop(8) = {1, 2, 3, 4};
Plane Surface(9) = {8};
Line Loop(10) = {6, 7, -1, 5};
Plane Surface(11) = {10};
```

สำหรับ geo file ที่ยกมาคือ geo file ของต้นแบบที่มีความยาวครึ่งหนึ่งของชิ้นงาน ข้อมูลจาก geo file จะมีประโยชน์ต่อการกำหนดชื่อของขอบหรือพื้นที่เพื่อใช้เป็นข้อมูลในการเขียน inp file จากต้นแบบนี้ทำให้ทราบว่า Line4 และ Line5 คือเส้นที่แบ่งชิ้นงานเส้นนี้จะไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x, y และ z ซึ่งจะนำไปใช้ในการกำหนดใน *BOUNDARY หรือเงื่อนไขขอบเขตต่อไป



รูปที่ 8.9 ต้นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน

1. เริ่มต้นเขียนอินพุตกำหนดหัวเรื่องคือ ch83.inp bimetallic strip

```
*Heading
ch83.inp  bimetallic strip
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดและตำแหน่งที่ (x,y,z) โดยในขั้นตอนนี้ได้จากการ meshing ด้วย GMSH ให้กลุ่มโหนดชื่อว่า Nall

```
*Node,NSET=Nall
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,5.000000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,5.000000000000e+01,5.000000000000e+00,0.000000000000e+00
4,0.000000000000e+00,5.000000000000e+00,0.000000000000e+00
5,0.000000000000e+00,-5.000000000000e+00,0.000000000000e+00
6,5.000000000000e+01,-5.000000000000e+00,0.000000000000e+000
….....................................................
….....................................................
….....................................................
555,4.800000000000e+01,-3.000000000000e+00,0.000000000000e+00
556,4.800000000000e+01,-2.000000000000e+00,0.000000000000e+00
557,4.800000000000e+01,-1.000000000000e+00,0.000000000000e+00
558,4.900000000000e+01,-4.000000000000e+00,0.000000000000e+00
559,4.900000000000e+01,-3.000000000000e+00,0.000000000000e+00
560,4.900000000000e+01,-2.000000000000e+00,0.000000000000e+00
561,4.900000000000e+01,-1.000000000000e+00,0.000000000000e+00e+00
```

3. กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ หมายเลขเอลิเมนต์ และโหนดต่างๆ ที่ประกอบกันเป็นแต่ละเอลิเมนต์ให้กับ

3.1 ส่วนที่เป็นแผ่นทองแดงให้ชื่อว่า copper รูปแบบเอลิเมนต์ที่ใช้คือ CPS4 หมายเลขเอลิเมนต์รวมถึงโหนดนั้น GMSH ได้กำหนดมาให้ตั้งแต่ตอนสร้าง geo inp file เราแค่มาดัดแปลงในส่วน type=CPS4 และ ELSET=copper ดังนี้

```
*Element, type=CPS4, ELSET=copper
2356, 1, 7, 170, 112
2359, 112, 170, 171, 111
2363, 111, 171, 172, 110
2366, 110, 172, 173, 109
….................
….................
2843, 362, 56, 57, 363
2844, 363, 57, 58, 364
2845, 364, 58, 59, 365
2846, 365, 59, 3, 60
```

3.2 ส่วนที่เป็นแผ่นเหล็กให้ชื่อว่า steel รูปแบบเอลิเมนต์ที่ใช้คือ CPS4 หมายเลขเอลิเมนต์รวมถึงโหนดนั้น GMSH ได้กำหนดมาให้ตั้งแต่ตอนสร้าง geo inp file เราแค่มาดัดแปลงในส่วน type=CPS4 และ ELSET=steel ดังนี้

```
*Element, type=CPS4, ELSET=steel
2347, 5, 117, 366, 116
```

```
2348, 116, 366, 367, 115
2349, 115, 367, 368, 114
2350, 114, 368,
….................
….................
2833, 165, 6, 166, 558
2835, 558, 166, 167, 559
2837, 559, 167, 168, 560
2839, 560, 168, 169, 561
2841, 561, 169, 2, 55
```

4. -กำหนดชื่อวัสดุว่า copper ให้มีค่ามอดุลัสเชิงเส้นเท่ากับ 120x10^3 MPa (ใช้ค่านี้เนื่องจากมิติเป็น mm) สัมประสิทธิ์การขยายตัวเท่ากับ $23.3\,x10^{-6}/\ ^{o}\mathrm{C}$ ที่อุณหภูมิเริ่มต้น 20°C

-กำหนดชื่อวัสดุว่า steel ให้มีค่ามอดุลัสเชิงเส้นเท่ากับ 200x10^3 MPa (ใช้ค่านี้เนื่องจากมิติเป็นค่า mm) และค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเท่ากับ $12.0\,x10^{-6}/\ ^{o}\mathrm{C}$ ที่อุณหภูมิเริ่มต้น 20°C

```
*MATERIAL,NAME=copper
*ELASTIC
120E+03,0.3
*EXPANSION,ZERO=20.
23.3E-6
*MATERIAL,NAME=steel
*ELASTIC
200E+03,0.3
*EXPANSION,ZERO=20.
12.0E-6
```

5.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ `copper` มีค่าสมบัติวัสดุคือ `MATERIAL=copper` และกลุ่มเอลิเมนต์ `steel` มีค่าสมบัติวัสดุคือ `MATERIAL=steel` ตามที่ได้กำหนดในข้อ 4 และกำหนดให้เป็นหน้าตัดแบบของแข็งหนา 1 หน่วย

```
*SOLID SECTION,ELSET=copper,MATERIAL=copper
1.0
*SOLID SECTION,ELSET=steel,MATERIAL=steel
1.0
```

6 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์ตามสมดุลของหลักสถิตยศาสตร์

```
*STEP
*STATIC
```

7. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)

-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการให้กลุ่มโหนดตามแนวกึ่งกลางชิ้นงานคือ `*NSET,NSET=Line4` และ `*NSET,NSET=Line5` ไม่มีการเคลื่อนตัวในแกน `x` และ `Z` อนุญาตให้เคลื่อนตัวอิสระได้เฉพาะในแนวแกน `y` และกำหนดให้โหนดหมายเลข `1` ซึ่งอยู่กึ่งกลางระหว่างความหนาทั้งหมดของชิ้นงานไม่มีการเคลื่อนตัวในทุกแกน

```
*NSET,NSET=Line4
```

```
4
109
110
111
112
1
*NSET,NSET=Line5
1
113
114
115
116
5
*BOUNDARY
Line4,1,1,0
Line4,3,3,0
Line5,1,1,0
Line5,3,3,0
1,1,3,0.0
```

8. และกำหนดเงื่อนไขภาระความร้อน (load conditions)
กำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของทุกโหนดทั้งชิ้นงานคือ $T_o = 20^o C$

```
*INITIAL CONDITIONS,TYPE=TEMPERATURE
Nall,20.
```

กำหนดอุณหภูมิสุดท้ายของทุกโหนดทั้งชิ้นงานคือ $T_1 = 300^o C$

```
*TEMPERATURE
Nall,300.
```

9. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file คือความเค้นของ copper และ steel รวมถึงค่าการเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยาของทุกโหนด และแสดงผลใน frd file ด้วยดังนี้

```
*EL PRINT,ELSET=copper
S
*EL PRINT,ELSET=steel
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U,RF
*EL FILE
S
```

10. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

11. ประกอบคำสั่งทั้งหมดเข้ากันได้เป็น inp file ดังนี้

```
*Heading
ch83.inp  bimetallic strip
*Node,NSET=Nall
*Node,NSET=Nall
1,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
2,5.000000000000e+01,0.000000000000e+00,0.000000000000e+00
3,5.000000000000e+01,5.000000000000e+00,0.000000000000e+00
4,0.000000000000e+00,5.000000000000e+00,0.000000000000e+00
5,0.000000000000e+00,-5.000000000000e+00,0.000000000000e+00
6,5.000000000000e+01,-5.000000000000e+00,0.000000000000e+000
….....................................................
….....................................................
….....................................................
555,4.800000000000e+01,-3.000000000000e+00,0.000000000000e+00
556,4.800000000000e+01,-2.000000000000e+00,0.000000000000e+00
557,4.800000000000e+01,-1.000000000000e+00,0.000000000000e+00
558,4.900000000000e+01,-4.000000000000e+00,0.000000000000e+00
559,4.900000000000e+01,-3.000000000000e+00,0.000000000000e+00
560,4.900000000000e+01,-2.000000000000e+00,0.000000000000e+00
561,4.900000000000e+01,-1.000000000000e+00,0.000000000000e+00e+00
*NSET,NSET=Line1
1
7
8
9
…
…
…

51
52
53
54
55
2
*NSET,NSET=Line2
2
56
57
58
59
3
*NSET,NSET=Line3
3
60
61
62
63
…
…
…

105
106
107
```

```
108
4
*NSET,NSET=Line4
4
109
110
111
112
1
*NSET,NSET=Line5
1
113
114
115
116
5
*NSET,NSET=Line6
5
117
118
119
….
…

161
162
163
164
165
6
*NSET,NSET=Line7
6
166
167
168
169
2
*Element, type=CPS4, ELSET=copper
2356, 1, 7, 170, 112
2359, 112, 170, 171, 111
2363, 111, 171, 172, 110
2366, 110, 172, 173, 109
….....................
….....................
….....................
2842, 55, 2, 56, 362
2843, 362, 56, 57, 363
2844, 363, 57, 58, 364
2845, 364, 58, 59, 365
2846, 365, 59, 3, 60
*Element, type=CPS4, ELSET=steel
2347, 5, 117, 366, 116
2348, 116, 366, 367, 115
2349, 115, 367, 368, 114
2350, 114, 368, 369, 113
….....................
….....................
….....................
```

```
2833, 165, 6, 166, 558
2835, 558, 166, 167, 559
2837, 559, 167, 168, 560
2839, 560, 168, 169, 561
2841, 561, 169, 2, 55
*MATERIAL,NAME=copper
*ELASTIC
120E+03,0.3
*EXPANSION,ZERO=20.
23.0E-6
*MATERIAL,NAME=steel
*ELASTIC
200E+03,0.3
*EXPANSION,ZERO=20.
12.0E-6
*SOLID SECTION,ELSET=copper,MATERIAL=copper
1.0
*SOLID SECTION,ELSET=steel,MATERIAL=steel
1.0
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
Line4,1,1,0
Line4,3,3,0
Line5,1,1,0
Line5,3,3,0
1,1,3,0.0
*INITIAL CONDITIONS,TYPE=TEMPERATURE
Nall,20.
*TEMPERATURE
Nall,300.
*EL PRINT,ELSET=copper
S
*EL PRINT,ELSET=steel
S
*NODE PRINT,NSET=Nall
U,RF
*NODE FILE
U,RF
*EL FILE
S
*END STEP
```

12. การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

ตรวจสอบผลลัพธ์ค่าการเคลื่อนตัวของปลายชิ้นงานโดยตรงจาก dat file จากรูปที่ 8.9 เราทราบว่าโหนดหมายเลข 2 , 3 และ 6 อยู่ที่ปลายชิ้นงานจาก dat file พบว่า

```
 displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  2.410124E-01 -5.800354E-01  0.000000E+00
         3  3.566186E-01 -5.449878E-01  0.000000E+00
         4  0.000000E+00  3.381169E-02  0.000000E+00
         5  0.000000E+00 -1.608499E-02  0.000000E+00
         6  1.283600E-01 -5.941182E-01  0.000000E+00
```

จากข้อมูลของ dat file พบว่าที่ปลายชิ้นงานมีการเคลื่อนตัวเกิดทั้งในแกน x และแกน y แต่การเคลื่อนตัวในแนวแกน y เกิดขึ้นมากกว่าสำหรับค่าการเคลื่อนตัวในแนว y เกิดขึ้นในช่วง `-0.580 mm` ถึง`-0.594 mm` สำหรับค่านี้เราสามารถตรวจสอบว่าผลการคำนวณด้วย CalculiX มีความน่าเชื่อถือระดับไหนได้โดยการเปรียบเทียบกับค่าคำตอบจากทฤษฎีอ้างอิงจาก Roark's formulas for Stress and Strain [5] ระยะโก่งตัวสูงสุดของแผ่นโลหะในกรณีที่ทั้งสองแผ่นมีความหนาเท่ากันคือ

$$\delta_y^{max} = \frac{6(\alpha_s - \alpha_c)(T - T_o)L^2}{t\,K_1} \tag{a}$$

เมื่อ $K_1 = 14 + \frac{E_s}{E_c} + \frac{E_c}{E_s} = 14 + \frac{200}{120} + \frac{120}{200} = 16.267$

เมื่อ t คือความหนาของแต่ละแผ่นซึ่งเท่ากันคือ 5 mm

$(T - T_0) = \Delta T = 280\ ^oC$

$L = 500\ \text{mm}$

$(\alpha_s - \alpha_c) = -11\,x\,10^{-6}\ \ 1/^oC$

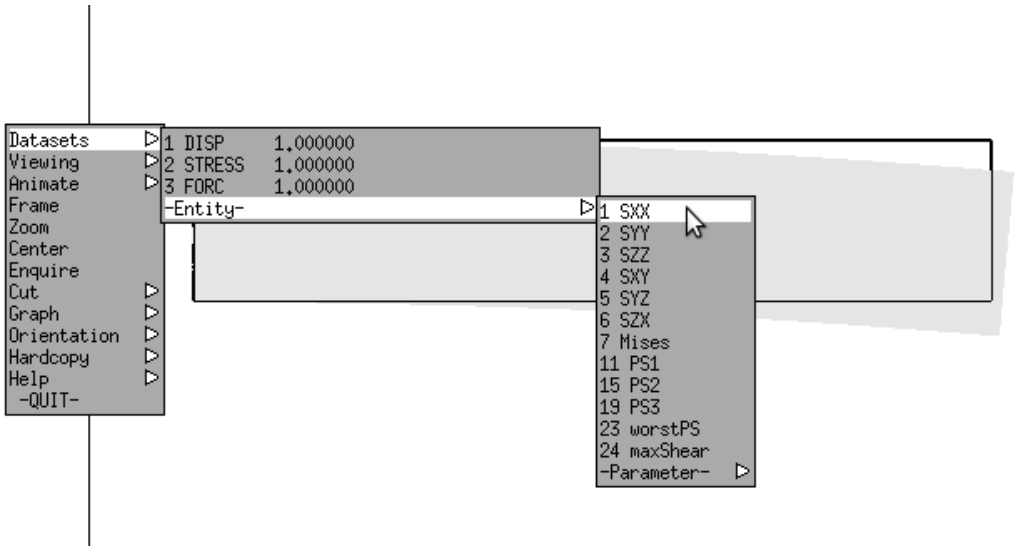
จากค่าดังกล่าวนำไปแทนในสมการ (a) จะได้

$$\delta_y^{max} = -0.568\ \ \text{mm} \tag{b}$$

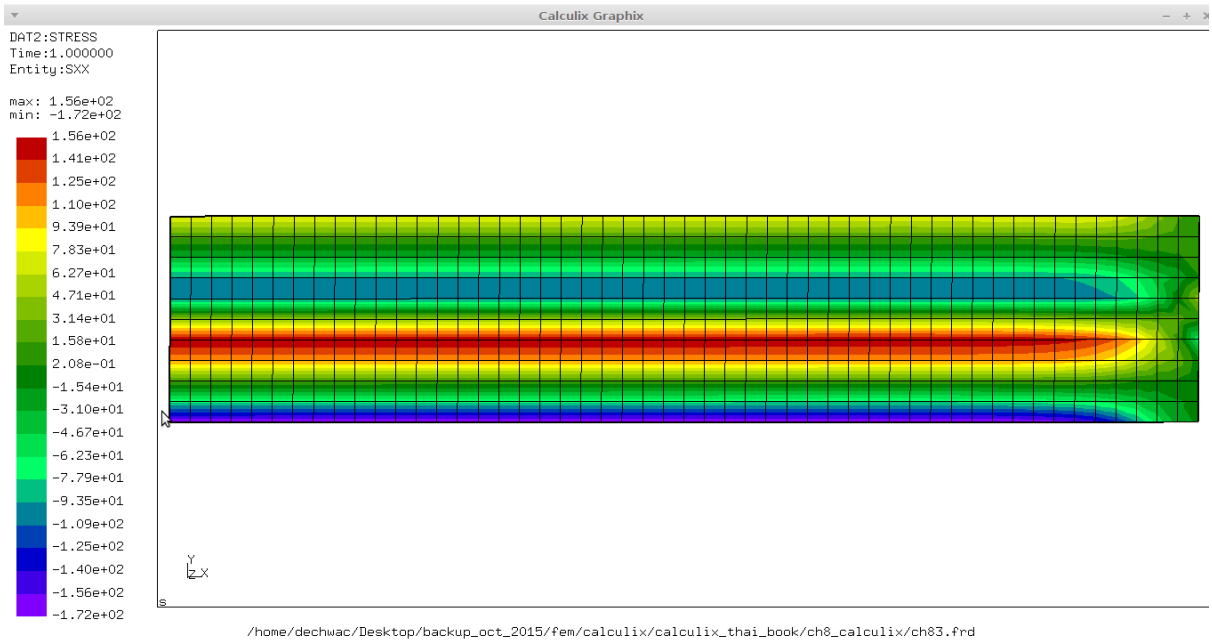
ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวสูงสุดในแนว y ที่ได้จากการทฤษฎีโดยตรง (b) คือ -0.568 mm กับค่าที่ได้จาก CalculiX ที่โหนด 2 คือ -0.58 mm ถือว่ามีค่าใกล้เคียงกันมากแตกต่างกันแค่ 2%

13. การศึกษาผลจาก frd file

frd file ที่ได้เราสามารถนำมา plot โดยใช้ CalculiX GraphiX (CGX) ในส่วนนี้เราสามารถเรียกค่าความเค้นในแนวแกน x หรือค่าความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนแผ่นทั้งสองมาศึกษาโดยไปที่ Datasets>Stress>Entity>SXX ดังแสดงในรูปที่ 8.10 และแสดงผลของความเค้นในแนวแกน x ตลอดความหนาของแผ่นทั้งสองในรูปที่ 8.11

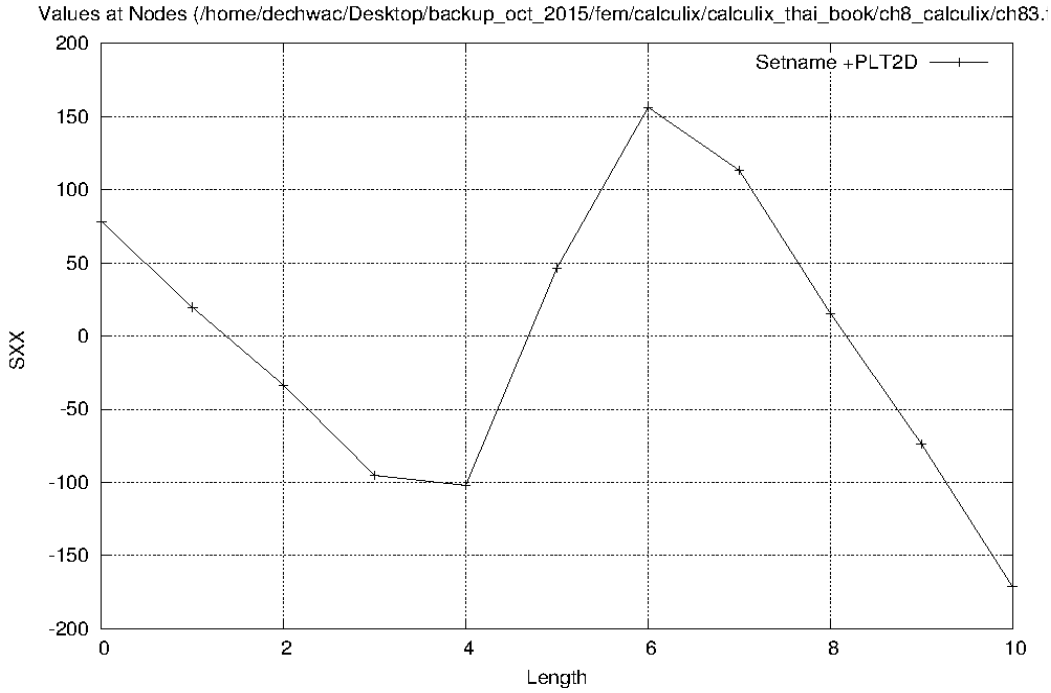


รูปที่ 8.10 การใช้ MENU ใน CGX แสดงผล SXX (ความเค้นในแกน x)



รูปที่ 8.11 ผล SXX (ความเค้นในแกน x) ตลอดความหนา

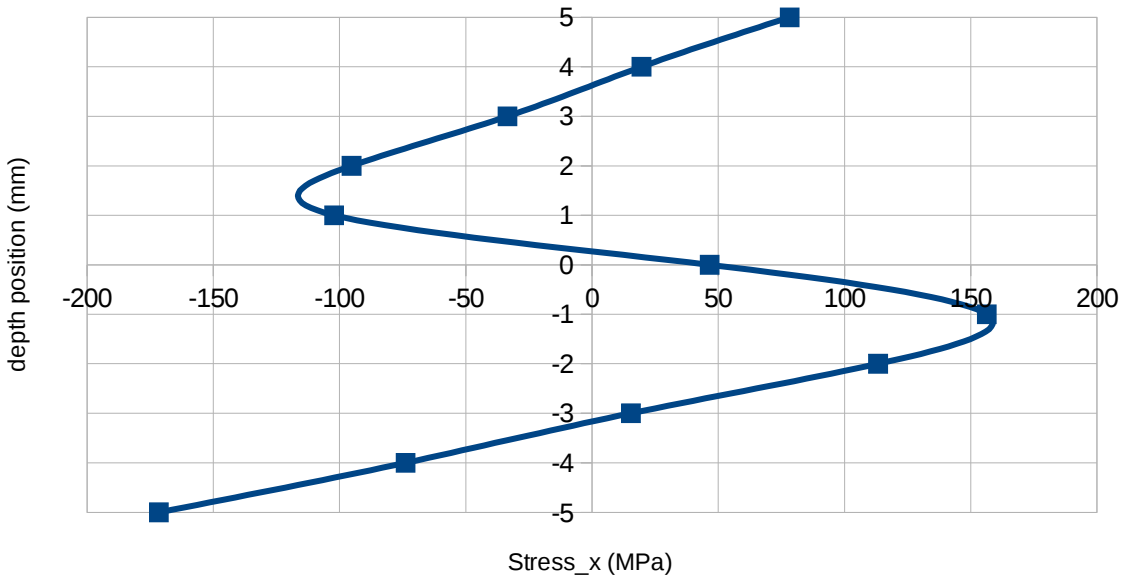
จากรูป 8.11 คือความเค้นในแนวแกน x ที่เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ เราจะเห็นค่าสีต่างๆ ที่แสดงค่าสัมพันธ์กับค่าของความเค้นในแนวแกน x ในกรณีถ้าเราอยากศึกษาการเปลี่ยนแปลงความเค้นตลอดความหนาเราสามารถใช้เมนูบน CGX คือ Graph>Length จากนั้นใช้เมาส์คลิกปุ่มซ้ายตามความหนาจากผิวบนสุดลงมาเมื่อสิ้นสุดคลิกเมาส์ปุ่มขวาเพื่อออกจากคำสั่งเราจะได้ผลการ plot เป็น fil.ps หรือ postscript file นั้นเองดังรูปที่ 8.12



รูปที่ 8.12 ผลการ plot ค่า SXX (ความเค้นในแกน x) ตลอดความหนาในรูปแบบ post script file

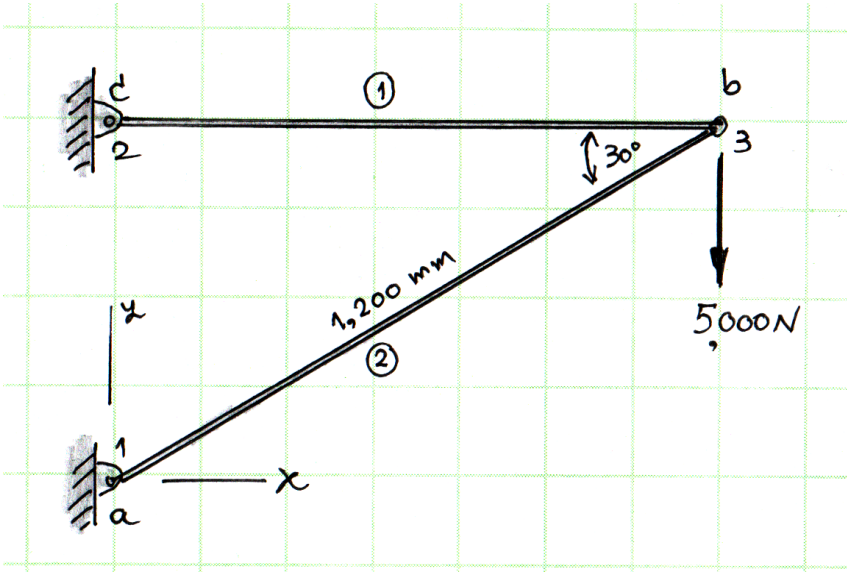
จากรูปที่ 8.12 คือผลที่ CGX plot ให้ซึ่งบางครั้งอาจทำความเข้าใจยาก เราสามารถนำข้อมูลค่า SXX ที่ตำแหน่งต่างๆ มา plot เองใหม่ได้ โดยปกติเมื่อเราคลิกที่ตำแหน่งต่างๆ แล้วค่า SXX และตำแหน่งจะถูกบันทึกไว้ใน file.out ซึ่งอยู่ในรูปแบบ text file เราสามารถนำข้อมูลจาก file.out มาทำการ plot ใหม่ได้ด้วย spread sheet ตามแต่ต้องการ ดังแสดงการ plot ใหม่ด้วย spread sheet จาก file.out ในรูปที่ 8.13

จากรูปที่ 8.13 เมื่อแกน y คือค่าตำแหน่งโดยให้ y=0 ที่ตำแหน่งกึ่งกลาง แผ่นทองแดงจะอยู่ในช่วงความหนา 5 ถึง 0 mm และแผ่นเหล็กอยู่ในช่วงความหนา 0 ถึง -5 mm ผิวบนสุดของแผ่นทองแดงเกิดความเค้นดึงและเมื่อลึกลงจะเปลี่ยนเป็นความเค้นอัดจากนั้นจะเป็นความเค้นดึงอีกครั้งใกล้บริเวณรอยต่อ สำหรับแผ่นเหล็กใกล้บริเวณรอยต่อจะเกิดความเค้นดึงและจะเกิดความเค้นดึงสูงสุดใกล้บริเวณรอยต่อระหว่างแผ่นทองแดงและแผ่นเหล็กจากนั้นจะเปลี่ยนเป็นความเค้นอัดสูงสุดที่บริเวณผิวใต้สุดของแผ่นเหล็ก ซึ่งสรุปได้ว่าแผ่นทั้งสองมีความเค้นในแกน x เปลี่ยนแปลงตลอดความหนาของแต่ละชิ้น โดยความเค้นที่เกิดขึ้นจะเกิดความเค้นดึงบนผิวบนสุดและเกิดความเค้นอัดที่ผิวล่างสุดของแผ่น บริเวณรอยต่อเป็นบริเวณที่มีการเปลี่ยนความเค้นจากอัดเป็นดึงอย่างฉับพลัน ซึ่งถ้าสังเกตจากลักษณะของความเค้นในแนวแกน x จะพบว่าแผ่นสวิตช์ทั้งหมดโก่งตัวลงซึ่งสอดคล้องกับความเค้นที่เกิดขึ้น



รูปที่ 8.13 ผลการ plot ค่าความเค้นที่บันทึกได้จาก file.out โดย spread sheet

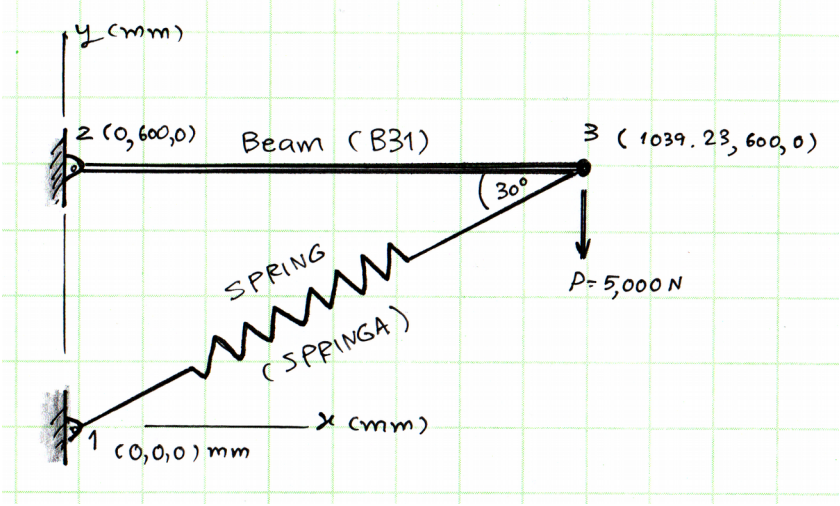
<u>ตัวอย่างที่</u> 8.4 [1] รูปที่ 8.14 แสดงโครงสร้างข้อหมุนในระนาบ (pin-connected truss in plane structure) มีแรงกระทำในแนวดิ่งที่จุด b ขนาด 5000 N ดังรูป โครงสร้างประกอบด้วยชิ้นส่วนสองชิ้นคือชิ้นหมายเลข 1 มีหน้าตัดขนาด 60 mm^2 และชิ้นส่วนหมายเลข 2 มีหน้าตัดขนาด 300 mm^2 ยาว 1200 mm สมมติชิ้นส่วนทั้งสองทำจากเหล็กกล้า (steel, $E_s = 200\,\text{GPa}, \alpha_c = 11\,x\,10^{-6}/^{o}\text{C}$) เมื่อเฉพาะชิ้นหมายเลข 1 มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเพิ่มขึ้น 70°C ส่วนชิ้นหมายเลข 2 ไม่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ จงเขียน inp file เพื่อหาระยะการเคลื่อนตัวของรอยต่อ



รูปที่ 8.14 โครงสร้างข้อหมุน

<u>แนวคิด</u>

จากโจทย์ตัวอย่างนี้โครงหมุนประกอบด้วย ชิ้นงานหมายเลข 1 (cb) และชิ้นงานหมายเลข 2 (ab) เนื่องจากชิ้นงานหมายเลข 1 รับแรงในแนวแกนและมีการเปลี่ยนแปลงความเครียดตามอุณหภูมิจึงเลือกใช้เอลิเมนต์สำหรับชิ้นงานหมายเลข 1 คือเอลิเมนต์แบบคาน B31 ซึ่งเป็นเอลิเมนต์แบบคานที่ประกอบด้วย 2 โหนด เนื่องจากชิ้นงานหมายเลข 2 ไม่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิดังนั้น เราสามารถใช้สปริงเอลิเมนต์ (SPRINGA) กับชิ้นงานหมายเลข 2 แทนการเลือกใช้เอลิเมนต์แบบคาน (B31) แต่ถ้าชิ้นงานหมายเลข 2 มีความเครียดเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิเราอาจเลือกใช้เอลิเมนต์แบบคาน (B31) ได้ ต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงในรูปที่ 8.15



รูปที่ 8.15 ต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์แบบ SPRINGA และ B31

การเขียน inp file

1. เริ่มต้นเขียนอินพุตกำหนดหัวเรื่องคือ `ch84.inp Plane truss for thermal expansion`

```
*HEADING
ch84.inp Plane truss for thermal expansion
```

2. กำหนดหมายเลขโหนดและตำแหน่งที่ (x,y,z) โดยให้กลุ่มโหนดชื่อว่า Nall

```
*NODE,NSET=NALL
1,0.,0.,0.
2,0.,600.,0.
3,1039.23,600.,0.0e+00
```

3. กำหนดรูปแบบเอลิเมนต์ หมายเลขเอลิเมนต์ และโหนดต่างๆ ที่ประกอบกันเป็นแต่ละเอลิเมนต์

```
*ELEMENT,TYPE=B31, ELSET=el1
1,2,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA, ELSET=el2
2,1,3
```

4. กำหนดชื่อวัสดุว่า STEEL ให้มีค่ามอดุลัสเชิงเส้นเท่ากับ 200x10^3 MPa (ใช้ค่านี้เนื่องจากมิติเป็นค่า mm) และค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเท่ากับ $11.0 \times 10^{-6}/\ ^{o}\mathrm{C}$ ที่อุณหภูมิเริ่มต้น 20°C

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
*EXPANSION,ZERO=20.
11E-06
```

5.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ el1 หรือชิ้นงานหมายเลข 1 เป็นหน้าตัดคานมีค่าสมบัติวัสดุคือ MATERIAL=STEEL สมมติหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมจตุรัสที่มีด้านเท่ากันคือ 7.746 x 7.746 = 60 mm^2

```
*BEAM SECTION,ELSET=el1,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
7.746,7.746
```

6.กำหนดหน้าตัดของกลุ่มเอลิเมนต์ el2 หรือชิ้นงานหมายเลข 2 เป็นหน้าตัดแบบสปริงที่มีค่าความแข็งเท่ากับ (200 x10^3x300/1200)=5000 N/mm

```
*SPRING,ELSET=el2
50000
```

7 กำหนดรูปแบบการคำนวณวิเคราะห์ตามสมดุลของหลักสถิตยศาสตร์

```
*STEP
*STATIC
```

8. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)

-กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยให้ไม่ให้มีการเคลื่อนตัวของทุกโหนดในแนวแกน z

-ที่โหนดหมายเลข 1 และ 2 ไม่ให้มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x และ y

-กำหนดให้มีแรงกระทำที่โหนดหมายเลข 3 ในทิศลงมีขนาด 5000 N

```
*BOUNDARY
Nall,3,3,0.0
1,1,2,0.0
2,1,2,0.0
*CLOAD
3,2,-5000
```

9. กำหนดเงื่อนไขภาระอุณหภูมิ (temperature conditions)

-กำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของทุกโหนดชิ้นงานชิ้นงานหมายเลข 1 ซึ่งเป็นอุณหภูมิที่โหนดหมายเลข 2 และ 3 คือ $T_o = 20^oC$

```
*INITIAL CONDITIONS,TYPE=TEMPERATURE
2,20.
3,20.
```

-กำหนดอุณหภูมิสุดท้ายของโหนด 2 และ 3 คือ $T_1 = 300^oC$

```
*TEMPERATURE
2,80.
3,80.
.
```

10. กำหนดผลลัพธ์ (results definitions)
จากโจทย์นี้กำหนดให้พิมพ์ผลใน dat file คือค่าการเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยาของทุกโหนดและความเค้นของชิ้นงานหมายเลข 1 และแสดงผลใน frd file ด้วยดังนี้

```
*NODE PRINT,NSET=NALL
U
RF
*EL PRINT,ELSET=el1
S
*NODE FILE,NSET=NALL
U
RF
*EL FILE,ELSET=el1
S
```

11. กำหนดการสิ้นสุดการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง

```
*END STEP
```

12. ประกอบคำสั่งทั้งหมดเข้ากันได้เป็น inp file ดังนี้

```
*HEADING
ch84.inp Plane truss for thermal expansion
*NODE,NSET=NALL
1,0.,0.,0.
2,0.,600.,0.
3,1039.23,600.,0.
*ELEMENT,TYPE=B31, ELSET=el1
1,2,3
*ELEMENT,TYPE=SPRINGA, ELSET=el2
2,1,3
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
200E+03,0.3
*EXPANSION,ZERO=20.
11E-06
*BEAM SECTION,ELSET=el1,MATERIAL=STEEL,SECTION=RECT
7.746,7.746
*SPRING,ELSET=el2
50000
*STEP
*STATIC
*BOUNDARY
Nall,3,3,0.0
1,1,2,0.0
2,1,2,0.0
*CLOAD
3,2,-5000
*INITIAL CONDITIONS,TYPE=TEMPERATURE
2,20.
3,20.
*TEMPERATURE
2,80.
```

```
3,80.
*NODE PRINT,NSET=NALL
U
RF
*EL PRINT,ELSET=el1
S
*NODE FILE,NSET=NALL
U
RF
*EL FILE,ELSET=el1
S
*END STEP
```

12. การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

ตรวจสอบผลลัพธ์ค่าการเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างโดยตรงจาก dat file คือ

```
 displacements (vx,vy,vz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         2  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
         3  1.435885E+00 -2.887024E+00  5.551115E-17

 forces (fx,fy,fz) for set NALL and time  0.1000000E+01

         1  8.486453E+03  4.869355E+03  0.000000E+00
         2 -8.660250E+03 -1.671354E-10  7.050242E-11
         3  8.660250E+03  1.671354E-10 -7.050242E-11

 stresses (elem, integ.pnt.,sxx,syy,szz,sxy,sxz,syz) for set EL1 and time  0.1000000E+01

1   1  1.443363E+02 -4.887113E-11 -4.733636E-11 -1.579165E-09  1.581659E-09  4.270089E-11
1   2  1.443363E+02  3.424105E-11  3.871037E-11 -1.579099E-09  1.581066E-09 -7.686159E-11
1   3  1.443363E+02 -3.899459E-11 -1.148237E-11 -1.579165E-09 -1.587293E-09  5.978124E-11
1   4  1.443363E+02  5.890399E-12 -1.463007E-11 -1.579099E-09 -1.578070E-09 -7.686159E-11
1   5  1.443363E+02 -1.503508E-11 -1.799805E-11  1.581000E-09  1.581645E-09 -8.540177E-11
1   6  1.443363E+02  1.321609E-12  3.678480E-11  1.588340E-09  1.580540E-09  3.416071E-11
1   7  1.443363E+02 -2.856382E-12  2.336265E-11  1.581067E-09 -1.588362E-09 -5.978124E-11
1   8  1.443363E+02 -2.333422E-11 -7.780443E-12  1.588406E-09 -1.580588E-09  4.270089E-11
```

จากข้อมูลของ dat file พบว่าที่ปลายโครงสร้างหรือที่โหนดหมายเลข 3 มีการเคลื่อนตัวเกิดขึ้นทั้งในแกน x และแกน y เท่ากับ **1.435 mm** และ **-2.887 mm** ตามลำดับ อย่างไรก็ตามค่าที่ได้จากการคำนวณด้วย Calculix จะมีความน่าเชื่อถือได้หรือไม่ต้องมีการตรวจสอบกันต่อไป เราสามารถทำการตรวจสอบคำตอบค่านี้โดยการนำหลักการพลังงานและใช้ทฤษฎี Castigliano วิเคราะห์หาผลลัพธ์ของการเคลื่อนตัวที่โหนดหมายเลข 3 โดยสมมติแรงที่กระทำจากภายนอกที่โหนด 3 เป็นตัวแปรขึ้นมาก่อนคือสมมติ P คือแรงกระทำในแนวแกน y และ Q คือแรงที่กระทำในแนวแกนจากนั้นหาพลังงานความเครียดภายในที่เกิดขึ้นในแต่ละชิ้นส่วนรวมถึงรวมพลังงานความเครียดที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ [1] ของแต่ละชิ้นงานเข้าไปด้วย ดังสมการพลังงานความเครียดรวมคือ

$$U=\sum_j F_j \alpha_j \Delta T_j L_j+\sum_j \frac{F_j^2 L_j}{2 A_j E_j} \qquad \text{(a)}$$

เมื่อ

j คือชิ้นงานแต่ละชิ้น

F_j คือแรงภายในแต่ละชิ้น

α_j คือสัมประสิทธิ์การขยายตัวของวัสดุ

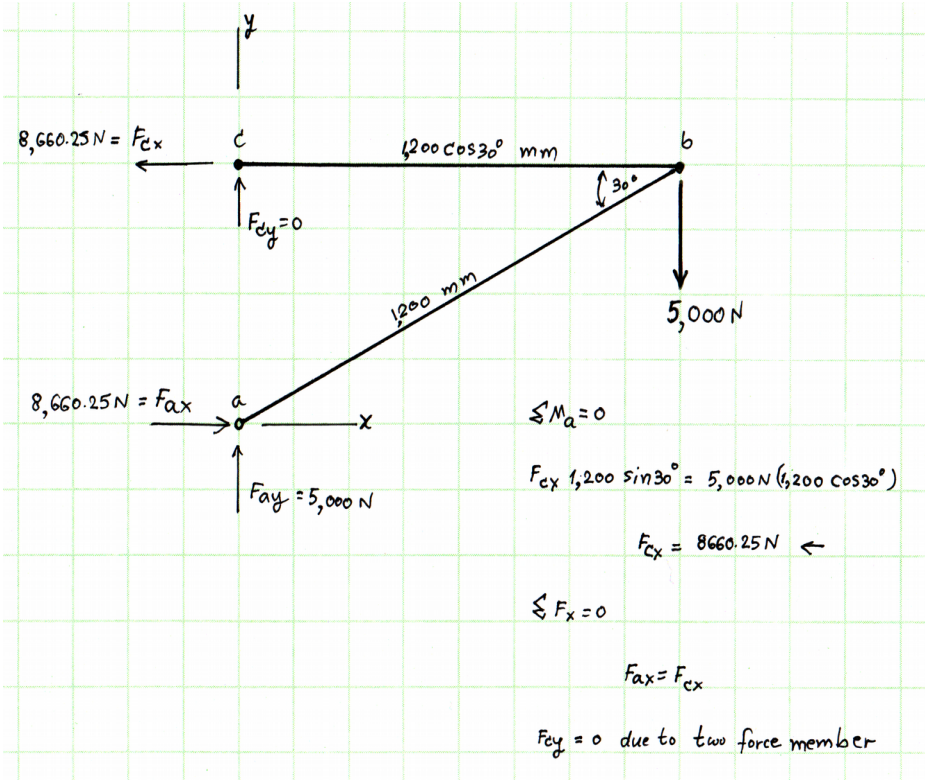
ΔT_j คือค่าอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงของแต่ละชิ้น

L_j คือความยาวของแต่ละชิ้น

A_j คือพื้นที่หน้าตัดของแต่ละชิ้น

E_j คือค่ามอดุลัสยืดหยุ่นของวัสดุแต่ละชิ้น

เมื่อได้ผลรวมของค่า U นำไปประยุกต์ใช้กับทฤษฎี Castigliano โดยให้ P=-5000 N และ Q=0 N พบว่าผลการคำนวณทางทฤษฎีให้ผลค่าการเคลื่อนตัวที่จุด b หรือที่โหนดหมายเลข 3 คือ `1.436 mm` และ `-2.886 mm` ตามลำดับ ซึ่งถือว่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการคำนวณด้วย CalculiX อย่างมาก และเมื่อเปรียบเทียบผลของแรงปฏิกิริยาที่จุด a และ b ที่ได้จาก dat file กับการคำนวณด้วยหลักสมดุลแรงพบว่ามีค่าใกล้เคียงกันมากดังแสดงในรูป 8.16 และเมื่อศึกษาความเค้นพบว่าที่ชิ้นส่วนหมายเลข 1 (cb) มีความเค้นดึงเกิดขึ้นเท่ากับ 8660.25 N/60 mm^2= 144.34 MPa ซึ่งสอดคล้องกับค่า Sxx ของ el1 ที่ได้จาก dat file



รูปที่ 8.16 แรงปฏิกิริยาจากภายนอกที่จุดรองรับโครงสร้าง

8.5 เอกสารอ้างอิงบทที่8

[1] Radall F. Barron, Brian R. Barron, “Design for Thermal Stresses”, John Wiley & Sons Inc., London, 2012

[2] Guido Dhondt, “CalculiX CrunchiX USER'S MANUAL”, version 2.8p2, March 19, 2015, www.calculix.de

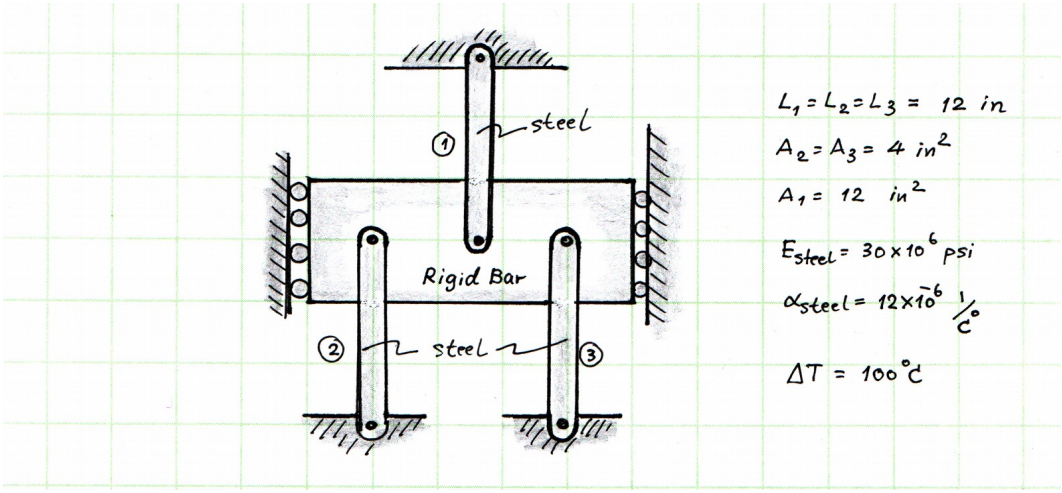
[3] ธงชัย ฟองสมุทร, “วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เบื้องต้น", ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่ม 2554

[4] Ferdinand Beer, E. Russel Johnston, Jr. John Dewolf, David Mazurek, “Mechanics of Materials”, 7th Edition, McGrawHill, New York, 2015

[5] Warren C. Young, Richard G. Budynas, “Roark’s Formulas for Stress and Strain”, Edition 7th McGrawHill, New York, 2002

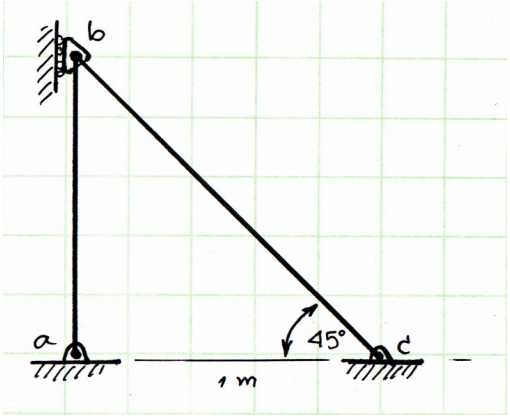
8.6 แบบฝึกหัดบทที่ 8

8.1 จากรูปที่ P8.1 ชิ้นงานแข็งเกร็ง (rigid body) สามารถเคลื่อนที่ได้อิสระเฉพาะในแนวตั้ง ยึดติดกับแท่งเหล็กหมายเลข 1 , 2 และ 3 โดยรอยต่อสลัก (pin connection) จงเขียน inp file เพื่อหาระยะเคลื่อนตัวของชิ้นงานและความเค้นในชิ้นงาน 1 2 และ 3 เมื่อมีการเปลี่ยนอุณหภูมิจาก 20°C เป็น 80°C



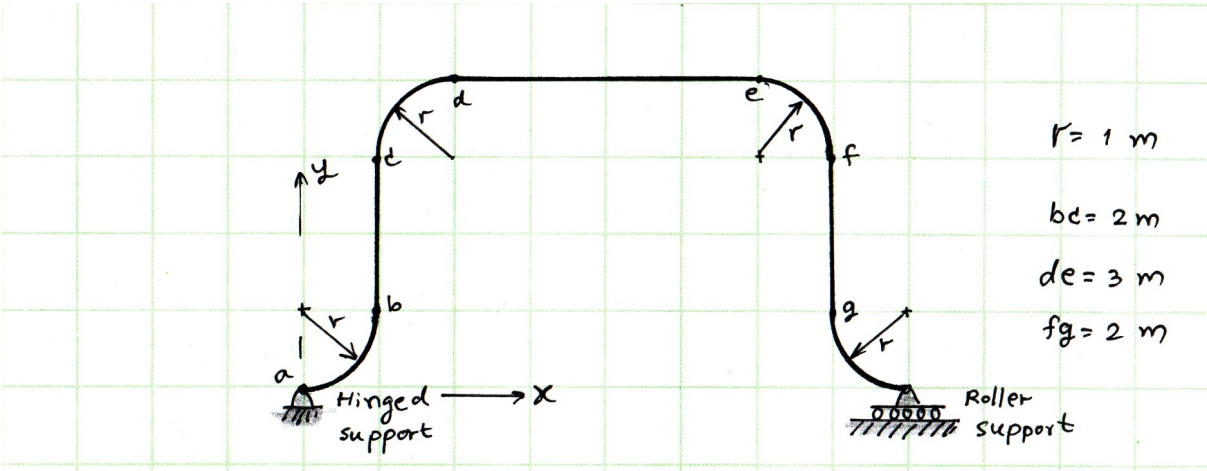
รูปที่ P8.1

8.2 จากรูปที่ P 8.2 คือโครงสร้างข้อหมุนในระนาบประกอบด้วยชิ้นส่วน ab และ cb ทำจากเหล็กกล้าที่มีค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 30×10^6 psi และมีค่าสัมประสิทธิ์การขยายทางความร้อนเท่ากับ 7×10^6 1/°F เมื่อชิ้นงานมีหน้าตัดคงที่เท่ากับ 2 in^2 และเฉพาะชิ้นส่วน bc มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเท่ากับ 100°F จงเขียน inp file เพื่อหาระยะเคลื่อนตัวของจุด b และความเค้นในชิ้นส่วน ab และ bc



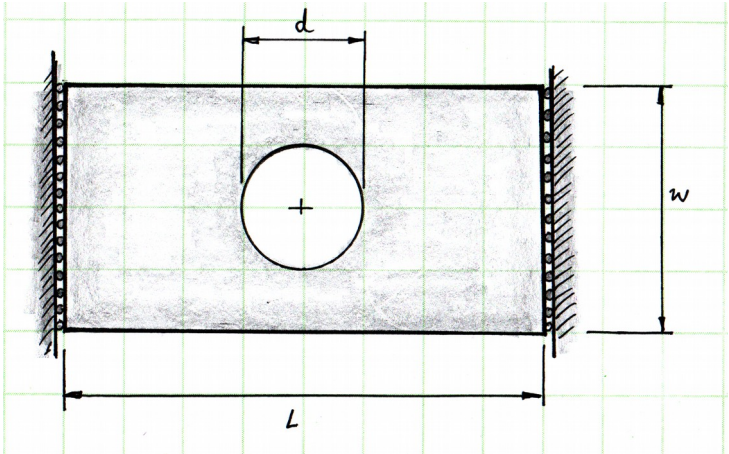
รูปที่ P8.2

8.3 รูปที่ P 8.3 คือ วงท่ออลูมินัมที่สามารถขยายตัวได้ (expansion loop) ในระนาบ สมมติท่อหนา 5 mm เส้นผ่านศูนย์กลางนอกเท่ากับ 100 mm กำหนดค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 70 GPa ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อนเท่ากับ $23.6x10^{-6}/\ ^{o}\mathrm{F}$ จงเขียน inp file เพื่อวิเคราะห์หาการเคลื่อนที่ของ roller support เมื่อวงท่อมีอุณหภูมิเปลี่ยนไป 60°F



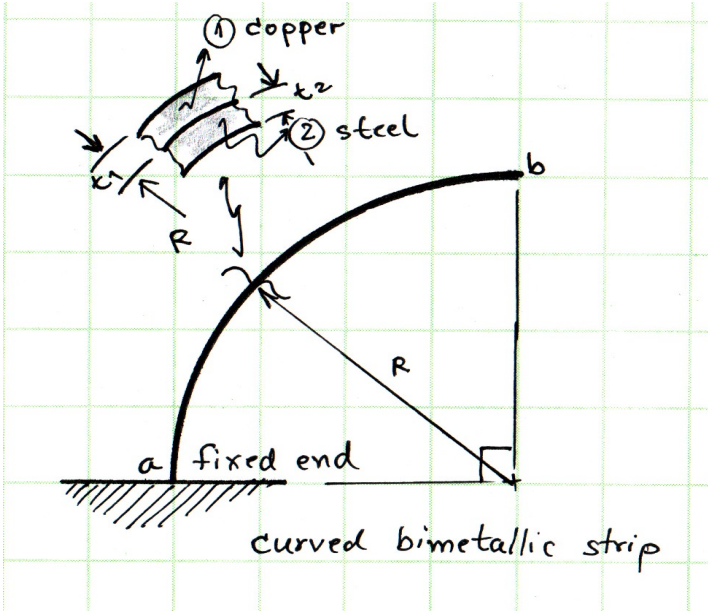
รูปที่ P8.3

8.4 รูปที่ P 8.4 คือแผ่นเหล็ก (steel, $E_s = 200\,\mathrm{GPa}, \alpha_c = 11x10^{-6}/^{o}\mathrm{C}$) มีรูเจาะตรงกลางแผ่น ทำการยึดให้ขอบซ้ายและขวาของแผ่นไม่สามารถเคลื่อนที่ในแนวแกนตามยาวแต่อนุญาตให้ขยายตัวในแนวกว้างได้ ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางของรูเจาะ (d) มีขนาดเท่ากับ 1cm กว้าง (w) เท่ากับ 5 cm ยาว(L) เท่ากับ 10 cm และหนาเท่ากับ 0 2 mm เมื่ออุณหภูมิเปลี่ยนแปลงจาก 25°C เป็น 75°C จงเขียน inp file เพื่อหาการเปลี่ยนรูปของรูเจาะและความเค้นที่เกิดขึ้นที่รูเจาะ



รูปที่ P8.4

8.5 แผ่นโค้ง ab มีรัศมี R=64 mm ประกอบจากวัสดุต่างชนิดกัน (Bimetallic strip) เป็นชิ้นงานที่นำไปใช้อุปกรณ์ทางกลคือ สวิตช์ความร้อน (thermal switch) ซึ่งทำจากแผ่นทองแดงและเหล็กแผ่นบนคือทองแดง (copper, $E_c=120\,\text{GPa}, \alpha_c=23x10^{-6}/^oC$) มีความหนา $t_1=5$ mm และแผ่นล่างคือเหล็กกล้า (steel, $E_s=200\,\text{GPa}, \alpha_c=12x10^{-6}/^oC$) มีความหนา $t_2=2.5$ mm สมมติแผ่นทั้งสองยึดติดกันอย่างสมบูรณ์แบบระหว่างผิวสัมผัส จงเขียน inp file เพื่อหาระยะโก่งงอของจุด b และหาความเค้นตลอดความหนาของแผ่นชิ้นโค้งเมื่อให้ความร้อนจนมีอุณหภูมิทั่วทั้งแผ่นเท่ากับ 300°C สมมติแผ่นทั้งสองมีอุณหภูมิเริ่มต้นทั่วทั้งแผ่นเท่ากับ 20°C



รูปที่ P8.5

ดัชนีค้นคำ

หน้า

CCX....1, 11,27, 34, 43,118, 128, 137, 145,
CGX....1, 3, 13, 18, 90, 104, 113,
displacements....13, 88, 96, 1289, 293, 371, 381, 391, 400
FACE....222
frd file....3, 13, 100, 104, 106, 110, 113, 303, 325, 328
GMSH....232, 234, 254, 257, 270, 284, 290,
inp file....1, 14, 295, 300, 306 389, 396, 399, 404
Launcher....3, 6, 14, 18, 90
Loads and Boundary....5
Materials....5, 19, 73, 121, 170, 261, 403
Mesh....4, 215, 217, 227, 346, 368
NONLINEAR....22
Von Mises stress....5, 169
ความเค้น....1, 23, 29, 36., 135, 144, 146., 288, 388,
ความเครียด....2, 5, 9, 17, 23, 29,338, 361, 373, 382, 396, 400
ความเครียดจากความร้อน....2, 361, 367
ความร้อน....2, 5, 7, 11, 183, 313, 318, 330
จุดอินทิเกรชั่น....88, 130, 155, 159, 166, 194, 196, 227, 231, 258, 304, 370, 377
ผิวขอบเอลิเมนต์....6, 214
พลังงานความเครียด....9, 17, 54, 71, 146, 183, 189, 365, 400
ฟังก์ชันรูปร่าง....180, 188, 206, 212, 242, 275, 277, 280, 317
สตีฟเนสเมตริกซ์....2, 275
สปริงเอลิเมนต์....1, 3, 10, 21, 28, 36, 39, 47, 55, 57
องศาอิสระการเคลื่อนที่....3, 12, 275
เอลิเมนต์ของแข็งในสามมิติ....2, 9, 269, 273
เอลิเมนต์ในระนาบรูปสามเหลี่ยม....2, 177, 203, 208, 215
เอลิเมนต์ในระนาบรูปสี่เหลี่ยม....2, 210
เอลิเมนต์แบบคาน....1, 4, 81, 83, 94, 97, 107, 114, 122
เอลิเมนต์สมมาตรรอบแกนหมุน....2, 235, 264, 359