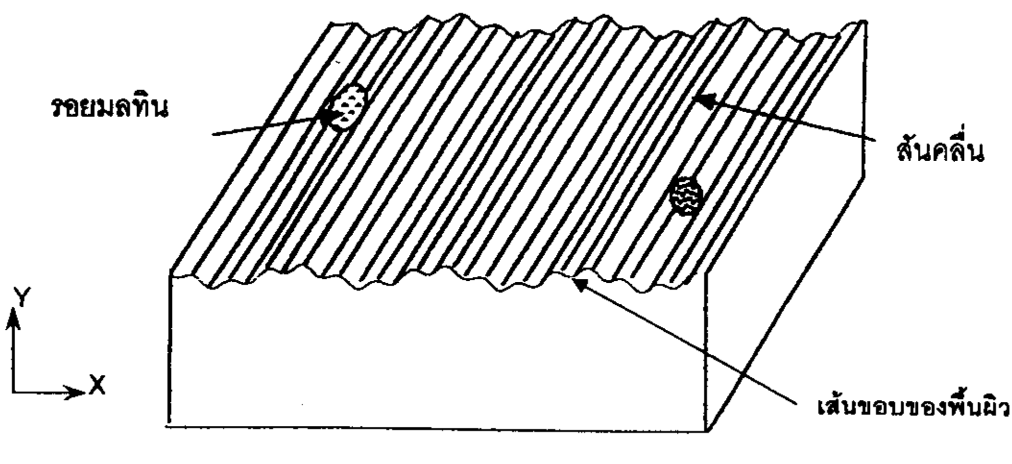
บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

ในการศึกษาเรื่องการกลึงไม้ยางพาราด้วยใบมีดเซรามิกนั้น จะศึกษาในเรื่องความขรุขระพื้นผิวชิ้นงานและความคลาดเคลื่อนขนาด ดังนั้นในการทดลองจะวัดและศึกษาความขรุขระของพื้นผิวชิ้นงาน และขนาดชิ้นงานก่อนและหลังการกลึง ซึ่งผ่านการกลึงในห้องทดลองที่มีการควบคุมสภาวะต่างๆที่เหมาะสม และในการทำวิจัยครั้งนี้ได้มีการศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

2.1 **ความขรุขระของพื้นผิว** (Surface Roughness)

พื้นผิว (Surface) **หมายถึงส่วนนอกสุดของเทห์วัตถุ** (Body) **ที่จะสัมผัสกับอากาศ** (Space) หรือสัมผัสเกี่ยวข้องกับเทห์วัตถุอื่น ผิวของวัตถุส่วนมากจะมีลักษณะเหมือนคลื่นที่มีความยาวคลื่น (Wavelength) ยาวผสมกับระลอกคลื่นที่มีความยาวคลื่นสั้น ส่วนความขรุขระ (Roughness) หมายถึงระลอกคลื่นที่มีช่วงคลื่นสั้น ความขรุขระอาจแสดงได้โดยขนาด (Amplitude) ของคลื่นและโดยค่าความยาวคลื่น



ภาพประกอบที่ 2.1 ตัวอย่างพื้นผิวสำเร็จ

ที่มา : ศุภโชค, 2543 : 202

2.2 การวัดค่าความขรุขระของพื้นผิว

โดยปกติแล้วในการวัด จะใช้เครื่องมือที่มีลักษณะคล้ายเข็มลากอย่างช้าๆ ผ่านไปบนแกนนอน (แกนX) ของพื้นผิวที่จะวัดค่าความขรุขระ การเคลื่อนที่ของปลายเข็มในแนวดิ่ง (Y) จะเป็นไปตามลักษณะเส้นขอบของพื้นผิว (Surface profile) ดังแสดงใน ภาพประกอบ 2.1 จากนั้นจะมีระบบบันทึกค่า และนำไปคำนวณต่อไปอีกเพื่อหาความขรุขระ ค่าความขรุขระแสดงได้ด้วยตัวแปรต่างๆ หลายตัวแปร ซึ่งจะได้นำมาพิจารณาดังต่อไปนี้

2.2.1 ค่าเฉลี่ยทางเลขคณิต (Arithmetic Average, R_a)

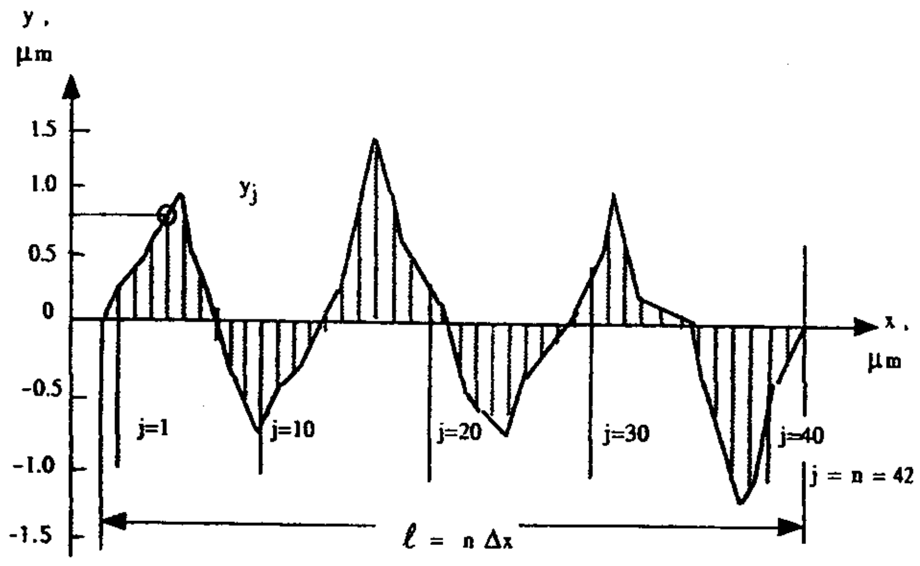
ถ้าลากเส้นในแนวนอนผ่านกึ่งกลางของเส้นขอบรูปที่ตัดค่าความเป็นคลื่นออกจนเหลือแต่ความขรุขระ ดังแสดงในภาพประกอบที่ 2.2 เส้นนี้เรียกว่าเส้นกึ่งกลาง (Central line) โดยแบ่งพื้นที่ระหว่างเส้นขอบรูปกับเส้นกึ่งกลางเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน ค่าในแกนดิ่งวัดจากเส้นกึ่งกลางจะเรียกว่าค่า y และค่าความสูงเฉลี่ยทางเลขคณิต R_a จะนำมาใช้เป็นค่าความขรุขระ นั่นคือ

$$R_a = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} |y|\,dx \qquad (2\text{-}1)$$

หรือ ถ้าแบ่งระยะทาง ℓ ออกเป็น n ส่วนโดยที่ n มีค่าสูงพอ จะพบว่า

$$R_a = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |y_j| \qquad (2\text{-}2)$$

ค่าเฉลี่ยทางเลขคณิต R_a เป็นค่าที่นิยมใช้ระบุความขรุขระของพื้นผิวมาแต่ดั้งเดิมก่อนค่าอื่นๆ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีและใช้กันมากจนกระทั่งปัจจุบัน แต่ต่อมามีการนำเอาตัวแปรอื่นๆ มาใช้ระบุค่าความขรุขระเพิ่มเติมอีก เพื่อให้การพิจารณาค่าความขรุขระมีหลายมุมมองยิ่งขึ้น



ภาพประกอบที่ 2.2 การแบ่งเส้นขอบของพื้นผิวเป็นอีลีเมนท์ย่อยๆ
ที่มา : ศุภโชค, 2543 : 204

2.2.2 **ค่าเฉลี่ยรูทมีนสแควร์** (Root Mean Square Average, R_q **หรือ** R_{rms})
การคำนวณหาค่าความขรุขระตามวิธีรูทมีนสแควร์ เป็นความพยายามที่จะนำเอาหลักการทางสถิติมาใช้ในการวัดค่าความขรุขระ โดยใช้สูตรการคำนวณโดยอาศัยหลักการยกกำลังสองของ y เพื่อให้ค่า y ที่มีค่าลบกลายเป็นค่าบวกของ y^2 จากนั้นหาค่าเฉลี่ยของ y^2 แล้วจึงถอดกรณฑ์ หรือ รูท (root)ฐานสอง เพื่อให้หน่วยของการวัดเป็นหน่วยยกกำลังหนึ่ง ซึ่งเป็นหน่วยตามปกติที่คุ้นเคยกัน

ค่าความขรุขระตามวิธีรูทมีนสแควร์ R_q หรือ R_{rms} หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$R_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} y^2} \qquad (2\text{-}3)$$

2.2.3 **ค่าระหว่างยอดสูงสุดกับก้นรองต่ำสุด** (Maximum Distance between Peak to Valley, R_{max} **หรือ** R_t)

ค่า R_{max} หรือ ค่าระหว่างยอดสูงสุดกับก้นร่องต่ำสุด เท่าที่วัดได้จากความยาว ℓ ที่วัดจากพื้นผิว ได้แสดงไว้ดังภาพประกอบ 2.3 ค่า R_{max} หาได้ดังนี้

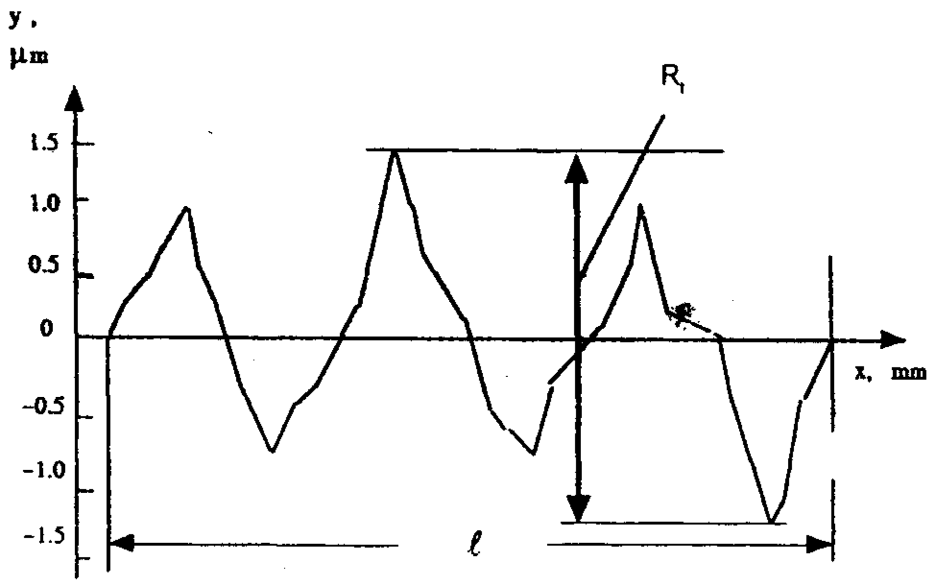
$$R_{max} = 1.5 + 1.2 = 2.7 \mu m \qquad (2\text{-}4)$$

ค่า R_{max} มีความหมายในการปฏิบัติงาน คือ เป็นค่าที่จะบอกได้ว่า ในการจะขจัดเนื้อผิวตัวอย่างนี้จะต้องขจัดเนื้อผิวออกเป็นความลึกไม่น้อยกว่าค่าของ R_{max} จึงจะทำลายผิวเดิมได้หมด แต่เนื่องจากค่า R_{max} วัดได้ไม่แน่นอนเพราะเป็นค่าสูงสุดค่าเดียวซึ่งจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของพื้นผิวที่วัด จึงนิยมวัดค่าเฉลี่ย R_z แทนค่า R_{max} โดยให้ R_z เป็นค่าเฉลี่ยของค่าความสูงระหว่างยอดสูงสุดกับก้นร่องต่ำสุด จากค่าสูงสุดที่วัดได้ 5 ค่าแรก

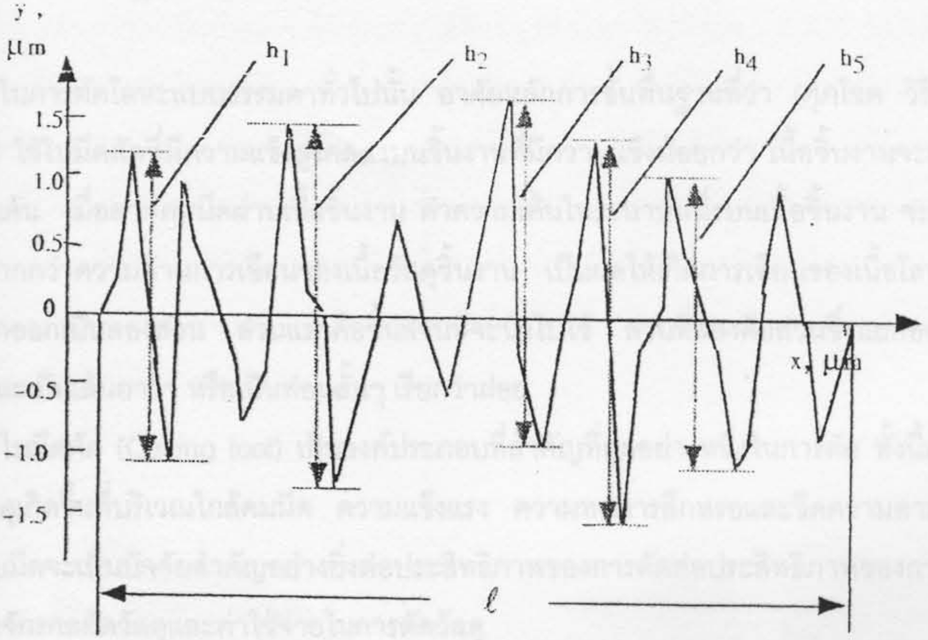
ถ้าค่า h_1 , h_2 , h_3 , h_4 และ h_5 เป็นค่าความสูงระหว่างยอดสูงสุดกับก้นร่องต่ำสุด โดยเป็นค่าสูงสุด 5 ค่าแรก เท่าที่วัดได้จากความยาว ℓ ที่วัดจากพื้นผิว ดังได้แสดงไว้โดยภาพประกอบ 2.4 ดังนั้นค่า R_z คำนวณได้จาก

$$R_z = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} hj = \frac{1}{5}\left[h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5\right] \qquad (2\text{-}5)$$

อย่างไรก็ตามยังมีวิธีวัดค่าความขรุขระวิธีอื่นอีกหลายวิธี แต่ไม่สู้จะเป็นที่นิยมมากนัก จึงจะไม่นำมาพิจารณา

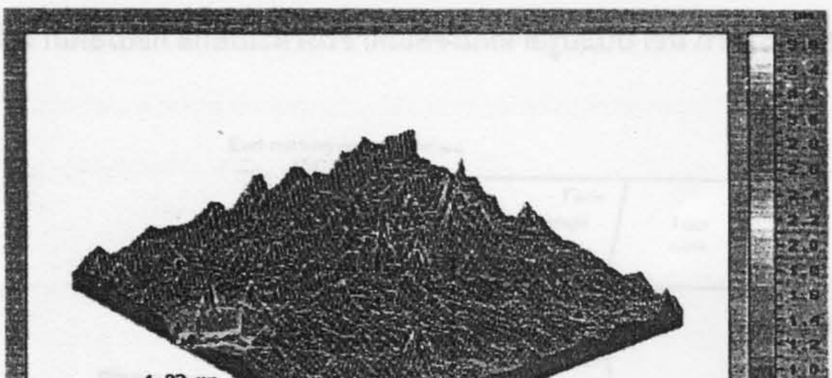


ภาพประกอบที่ 2.3 แสดงค่าระหว่างยอดสูงสุดกับก้นร่องต่ำสุด R_{max}
ที่มา : ศุภโชค, 2543 : 207



ภาพประกอบที่ 2.4 แสดงค่าระหว่างยอดสูงสุดกับก้นร่องต่ำสุดห้าค่าแรก R_z

ที่มา : ศุภโชค, 2543 : 207



ภาพประกอบที่ 2.5 แสดงความขรุขระพื้นผิวแบบ 3 มิติ

ที่มา : Francis E.H, 2002

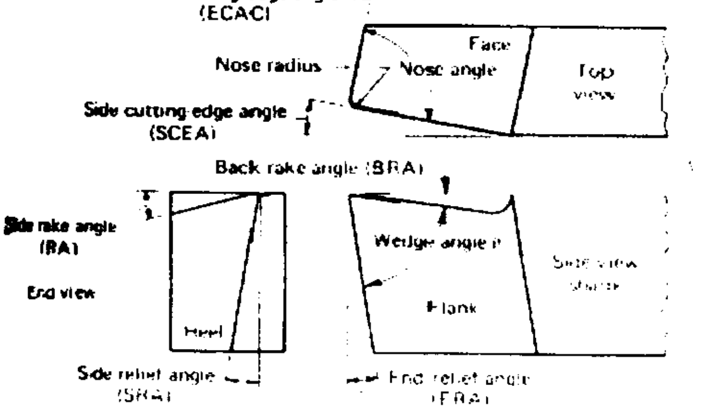
2.3 หลักการพื้นฐานของการตัดโดยใช้ใบมีด

ในการตัดโลหะแบบธรรมดาทั่วไปนั้น อาศัยหลักการขั้นพื้นฐานที่ว่า (ศุภโชค วิริยโกศล : 2543) ใช้ใบมีดตัดที่มีความแข็งสูงกดลงบนชิ้นงานที่มีความแข็งน้อยกว่า เนื้อชิ้นงานจะเกิดสนามความเค้น เมื่อลากคมมีดผ่านเนื้อชิ้นงาน ค่าความเค้นในระนาบหนึ่งบนเนื้อชิ้นงาน จะสูงเท่ากันหรือมากกว่าความต้านการเฉือนของเนื้อวัสดุชิ้นงาน เป็นผลให้เกิดการเฉือนของเนื้อโลหะชิ้นงานจึงแยกออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกคือชิ้นส่วนที่จะนำไปใช้ ส่วนที่สองคือส่วนซึ่งแยกออกมา มีลักษณะเป็นเส้นยาวๆ หรือเป็นท่อนสั้นๆ เรียกว่าฝอย

ใบมีดตัด (Cutting tool) เป็นองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่งในการตัด ทั้งนี้เพราะการตัดวัสดุเกิดขึ้นที่บริเวณใกล้คมมีด ความแข็งแรง ความทนการสึกหรอและขีดความสามารถอื่นๆ ของใบมีดจะเป็นปัจจัยสำคัญอย่างยิ่งต่อประสิทธิภาพของการตัดต่อประสิทธิภาพของการใช้เครื่องจักรกลตัดวัสดุและค่าใช้จ่ายในการตัดวัสดุ

2.3.1 เรขาคณิตของใบมีด (Cutting Tool Geometry)

เนื่องจากกรรมวิธีการผลิตมีมากมาย มีตัวแปรเชิงเรขาคณิตหลายต่อหลายตัวมาเกี่ยวข้อง ใบมีดตัดมีหลายชนิด เช่น ใบมีดกลึง ใบมีดไส ใบมีดกัด ดอกสว่าน ซึ่งแต่ละชนิดยังแบ่งย่อยตามลักษณะการใช้งานต่อไปอีก ลักษณะทางเรขาคณิตจึงมีหลายรูปแบบ เช่น ภาพประกอบที่ 2.6

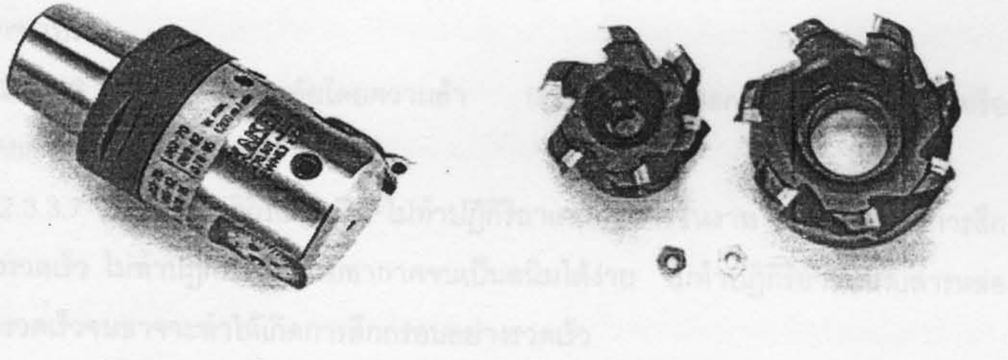


ภาพประกอบที่ 2.6 แสดงลักษณะทางเรขาคณิตของใบมีดกลึง

ที่มา http://www.mfg.mtu.edu/cyberman/machining/trad/turning/turn.html#turn_cutter

2.3.2 วัสดุใบมีดตัด (Cutting Tool Material)

การค้นคว้าหาวัสดุใหม่ ๆ ที่มีคุณสมบัติดีกว่า (ศุภโชค วิริยโกศล : 2543) วัสดุเดิมที่เคยใช้เป็นงานที่มีพัฒนาอย่างต่อเนื่อง ทั้งนี้เพราะวัสดุชิ้นงานใหม่ ๆ ที่มีคุณสมบัติแตกต่างไปจากวัสดุเดิมขึ้นตลอดเวลา นอกจากนี้เครื่องจักรกลที่ใช้ในการตัดวัสดุก็มีการพัฒนาให้มีกำลังมากขึ้น ทำงานด้วยความเร็วสูงทำงานที่มีความซับซ้อนมากขึ้น จึงจำเป็นต้องมีการค้นคว้าวัสดุใบมีดตัดใหม่ ๆ มาใช้ เพื่อให้สามารถตัดวัสดุชิ้นงานใหม่และใช้กับเครื่องจักรกลใหม่ ๆ ให้เต็มขีดความสามารถ สมบัติของวัสดุใบมีดตัดเป็นสิ่งที่จำเป็นที่จะต้องมีการค้นคว้าและพัฒนากันอย่างต่อเนื่อง ดังภาพประกอบที่ 2.7



ภาพประกอบที่ 2.7 แสดงใบมีดที่ทำมาจากวัสดุต่างชนิดกัน

ที่มา http://www.manufacturingcenter.com/tooling/archives/1104/1104 tooling_cuttingtools.asp

2.3.3 สมบัติของวัสดุใบมีด (Cutting Tool Performance)

หลักการขั้นพื้นฐานของการตัดวัสดุโดยใช้ใบมีดตัด "วัสดุที่แข็งกว่าย่อมขูดวัสดุที่อ่อนกว่าให้เป็นรอยได้" ดังนั้นใบมีดตัดจะต้องทำจากวัสดุที่ความแข็งสูงกว่าชิ้นงานเสมอ วัสดุที่เหมาะในการนำมาทำใบมีดตัด ควรจะมีคุณสมบัติดังนี้

2.3.3.1 มีความแข็งสูง (High hardness) คือ ในอุณหภูมิปกติของห้อง ความแข็งของสารชิ้นงานต้องมีความแข็งของสารชิ้นงานมากกว่า จึงจะสามารถผ่าเนื้อสารชิ้นงานออกเป็นสองส่วนได้ โดยทั่วไปการวัดค่าความแข็งของใบมีดตัดและชิ้นงานในการตัดโลหะ นิยมระบุเป็นค่าความแข็งในระบบรอคเวลล์ สเกลบี และสเกลซี

2.3.3.2 คงความแข็งไว้ได้ที่อุณหภูมิสูง (Hot hardness) คือ ขณะที่ใบมีกำลังทำหน้า ที่ตัดชิ้นงานอยู่นั้น ทั้งชิ้นงานและใบมีดตัดจะมีอุณหภูมิสูงขึ้น โดยทั่วไปสารทุก ๆ ชนิดจะอ่อนตัวลง คือความแข็งลดลงเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น ถ้าความแข็งของสารใบมีดตัดลดลงจนมีค่าสูงกว่าสารชิ้นงานเพียงเล็กน้อย ใบมีดก็จะสึกหรออย่างรวดเร็วหรือไม่ก็แตกลงไปเลย

2.3.3.3 ต้านทานการสึกหรอได้ดี (High wear resistance) ที่ผิวหน้ามีดจะมีการเสียดสีระหว่างใบมีดตัดกับเนื้อฝอย และผิวหลังมีดใกล้บริเวณคมตัดจะมีการเสียดสีระหว่างมีดกับเนื้อชิ้นงานที่พึ่งถูกตัดจะทำให้สารใบมีดเกิดการสึกหรอเร็ว

2.3.3.4 มีความแข็งแรงสูง (High strength) ควรจะมีการต้านแรงดึงสูงและมีความต้านการกดสูงด้วย เพื่อให้ทนทานไม่แตกหักง่าย

2.3.3.5 ไม่เปราะ กระเทาะหรือร้าวง่ายเมื่อถูกกระทบกระแทกทั้งนี้เพราะสารที่มีความแข็งสูงมักจะเปราะ

2.3.3.6 ไม่ไวต่อการประลัยโดยความล้า (Fatique resistance) คือ แตกหักหรือประลัยโดยการล้าได้ยาก

2.3.3.7 ไม่ไวต่อปฏิกิริยาเคมี ไม่ทำปฏิกิริยาเคมีกับสารชิ้นงาน ซึ่งจะทำให้การสึกหรออย่างรวดเร็ว ไม่ทำปฏิกิริยาเคมีกับอากาศจนเป็นสนิมได้ง่าย ไม่ทำปฏิกิริยาเคมีกับสารหล่อเย็นอย่างรวดเร็วจนอาจจะทำให้เกิดการสึกกร่อนอย่างรวดเร็ว

2.3.3.8 ขึ้นรูปง่าย วัสดุใบมีดที่แข็งมากจะยากต่อการหลอม ยากต่อการตัดเจียระไน หรือการอัดหลอมขึ้นรูปเพื่อทำให้มีรูปร่างขนาดตรงตามความต้องการ

2.3.3.9 ราคาถูก เพื่อให้สามารถนำมาผลิตเป็นใบมีด และจำหน่ายให้ได้รับความนิยมในตลาด

2.3.3.10 หาซื้อได้ง่าย เพื่อความสะดวกในการจัดซื้อมาใช้ ไม่มีการขาดแคลนการรู้จักเลือกใช้ใบมีดให้เหมาะสมกับงานและสภาวะการตัดจะช่วยในการประหยัดค่าใช้จ่ายและเวลาได้

2.3.4 ชนิดของวัสดุใบมีด (Type of cutting tools)

ชนิดของวัสดุ ที่รู้จักกันอยู่ในปัจจุบันมีอยู่หลายชนิด เช่น

2.3.4.1 เหล็กกล้าไฮคาร์บอน (High Carbon Steels, HCS)

2.3.4.2 เหล็กกล้าไฮสปีด (High Speed Steels, HSS)

2.3.4.3 โลหะผสมนอกกลุ่มเหล็ก (Cast Nonferrous Alloys, CAN)

2.3.4.4 คาร์ไบด์ (Carbides, C)

2.3.4.5 **เซอร์เมท** (Cermets, CT)

2.3.4.6 **เซรามิก** (Ceramics, CC)

2.3.4.7 **เพชร** (Diamond, D)

2.3.4.8 **คิวบิก โบรอน ไนไตรด์ หรือซีบีเอ็น** (Cubic Boron Nitride, CBN)

2.3.4.9 **โคโรไนท์** (Coronite, CR)

2.3.4.10 **เหล็กกล้าไฮสปีดที่อัดหลอมขึ้นมาจากผงโลหะ** (SHSS)

2.4 ใบมีดเซรามิก (Ceramics, CC)

เซรามิกที่ใช้ทำในสมัยเริ่มแรกจะเป็นอลูมิเนียมออกไซด์ แต่ในยุคแรกๆไม่ได้รับการนำไปใช้มากนักเนื่องจากเปราะและแตกหักง่าย ปัจจุบันนี้มีการนำใบมีดเซรามิกมาใช้งานบ้าง แต่ก็ยังไม่แพร่หลาย และใช้เฉพาะในการตัดชิ้นงานเหล็กหล่อ เหล็กกล้าชนิดแข็ง และโลหะอัลลอยที่ทนความร้อนสูง ซึ่งเป็นวัสดุที่ตัดยากเท่านั้น คุณสมบัติที่เด่นของใบมีดเซรามิกก็คือ

1. มีความแข็งสูง
2. คงความแข็งไว้ดีที่อุณหภูมิสูง
3. ไม่ทำปฏิกิริยาเคมีกับวัสดุชิ้นงานส่วนมาก ยกเว้นเซรามิกบางชนิดกับเหล็กกล้าบางชนิด
4. สามารถตัดด้วยความเร็วสูงมาก โดยที่ใบมีดใช้งานได้ทนทาน
5. ในสภาวะการตัดที่เหมาะสม ใบมีดเซรามิกจะตัดชิ้นงานออกไปได้อย่างรวดเร็ว

คุณสมบัติอื่นๆที่น่าสนใจของเซรามิกได้แก่ ความหนาแน่นน้อยเมื่อเทียบกับโลหะ คือประมาณ 1/3 ของโลหะ มีความต้านทานการอัดสูงมากแต่ความต้านทานการดึงต่ำมาก คือ เป็นวัสดุเปราะที่ทนความเค้นของแรงดึงได้ไม่ดี โมดูลัสของเซรามิกบริสุทธิ์จะสูง คือมีความยืดหยุ่นสูงกว่าเหล็กกล้า 2 เท่า หมายความว่าเมื่อมีความเค้นมากระทำเท่าๆกัน เซรามิกจะยืดหรือหดตัวน้อยกว่าเหล็กกล้า และมีค่าความนำความร้อนต่ำกว่าเหล็กกล้ามาก คือ มีความเป็นฉนวนความร้อนดีกว่าเหล็กกล้า

ประเภทของเซรามิกที่ใช้ทำใบมีด เซรามิคที่ใช้ทำใบมีดมี 2 ประเภทใหญ่ คือ

2.4.1 **เซรามิกอลูมิเนียมออกไซด์เป็นหลัก** (Al_2O_3 based ceramics) หรือชนิด A ยังเป็นชนิดย่อย 3 ชนิดคือ

2.4.1.1 เซรามิกชนิดบริสุทธิ์ หรือชนิด A1 เป็นเซรามิกรุ่นดั้งเดิม ใช้อลูมิเนียมออกไซด์เพียงอย่างเดียว ไม่มีเซรามิกอย่างอื่นเจือปน มีความแข็งแรงต่ำ ความเหนียวน้อยหรือเปราะมาก มีค่าการนำความร้อนต่ำ ซึ่งทำให้ใบมีดแตกหักง่าย ไม่ทนทานต่องานตัดวัสดุ ต่อมามีผู้พบว่าถ้าเติมเซอร์โคเนียมออกไซด์ลงไปเพียงเล็กน้อย ก็จะเพิ่มคุณสมบัติของเซรามิกให้ดีขึ้น คือ เหนียวขึ้น

2.4.1.2 เซรามิกชนิดผสม หรือชนิด A2 ใช้อลูมิเนียมออกไซด์เป็นส่วนใหญ่แต่มีเซรามิกอย่างอื่น คือ ไทเทเนียมคาร์ไบด์ (TiC) ไทเทเนียมไนไตรด์ (TiN) เจือปนลงไป 20-40% เซรามิกชนิดผสมที่มีอลูมิเนียมออกไซด์เป็นส่วนผสมหลักนี้มีความแข็งแรงสูง ความเหนียวสูง และมีค่าการนำความร้อนสูงกว่าเซรามิกที่เป็นอลูมิเนียมออกไซด์บริสุทธิ์ ซึ่งจะทำให้ใบมีดทนทานขึ้น ใบมีดเซรามิกชนิดนี้เป็นใบมีดที่นิยมใช้กันมาก

2.4.1.3 เซรามิกชนิดเสริมแรง หรือชนิด A3 เป็นหลัก และใช้เส้นใยซิลิกอนคาร์ไบด์ผสมลงไปด้วยประมาณ 30 % เส้นใยนี้เป็นผลึกเดี่ยวซึ่งมีความยาวกว่า 0.020 mm. และเส้นผ่านศูนย์กลางประมาณ 0.001 mm. เส้นใยจะทำให้เกิดโครงสร้างเสริมแรงซึ่งส่งผลให้เพิ่มความแข็งแรง เพิ่มความเหนียว และเพิ่มความต้านการประลัยจากการกระทบกระแทกขึ้นมาก ใช้งานได้ดีในการตัดชิ้นงานที่ตัดยาก

2.4.2 เซรามิกที่มีซิลิกอนไนไตรด์เป็นหลัก (Si_3N_4 based ceramics) หรือ ชนิด B เซรามิกชนิด B นี้จะมีคุณสมบัติที่เยี่ยมในการคงความแข็งไว้ที่อุณหภูมิสูง คือดีกว่าชนิด A แต่จะมีปัญหาที่ว่า เซรามิกชนิด B อาจจะทำปฏิกริยาเคมีกับชิ้นงานเหล็กกล้า เซรามิกที่มีซิลิกอนไนไตรด์เป็นหลักนี้เหมาะกับการตัดเหล็กหล่อเทา (Gray cast iron) เพราะสามารถตัดด้วยความเร็วสูง คือสูงถึง 450 m/min หรือมากกว่า

2.5 เกณฑ์ในการตัดสินว่าคมมีดหมดอายุ (Tool Life Criterion)

กล่าวโดยทั่วไป หลักใหญ่ในการตัดสินว่าคมมีดหมดอายุแล้ว คือ การที่คมมีดไม่สามารถตัดชิ้นงานให้เป็นชิ้นส่วนที่มีคุณภาพตรงตามความต้องการ ซึ่งอาจหมายความอย่างใดอย่างหนึ่งดังต่อไปนี้

1. คมมีดแตกหักโดยสิ้นเชิง คือ ใช้งานต่อไปไม่ได้และอาจจะเป็นอันตราย
2. คมมีดเกิดการร้าว หรือ การกะเทาะใกล้จะแตกหัก ต้องเลิกการใช้งานก่อนที่จะแตกหักจริงจนเป็นอันตราย

3. คมมีดสึกหรอมาก หมดสภาพการใช้งาน หรือใกล้จะแตกหักแล้ว การวัดค่า " ขนาดการสึกหรอ " เป็นเรื่องยุ่งยาก เพราะใบมีดมีลักษณะการสึกหรอมากมายหลายรูปแบบจำเป็นต้องเลือกวิธีการวัดอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยมีวิธีที่ชัดเจน สามารถทำซ้ำหรือตรวจสอบได้
4. รอยแถบสึกที่ผิวด้านหลังมีดหรือผิวหลบของคมมีดมีขนาดสูงเกินค่าที่ยอมรับได้ ถ้าขืนใช้คมมีดต่อไปจะเสี่ยงต่อการที่คมมีดแตกหัก
5. ความลึกของหลุมรอยสึกหรือความกว้างของหลุมที่ผิวหน้ามีด มีขนาดสูงเกินค่าที่ยอมรับได้
6. ปริมาตร หรือ น้ำหนักของรอยสึก มีค่าสูงกว่าค่าที่ยอมรับได้
7. ชิ้นส่วนที่ผลิตออกมา มีขนาดผิดไปจากค่าที่กำหนดเกินกว่าจะยอมรับได้
8. ชิ้นส่วนที่ผลิตออกมา มีค่าความขรุขระของพื้นผิวสูงเกินค่าที่กำหนด เกินกว่าที่จะยอมรับได้

2.6 ประเภทของการตัดจำแนกตามความราบเรียบของพื้นผิวสำเร็จ

การตัดวัสดุเมื่อมองในแง่ของความประณีต ความละเอียดแม่นยำ หรือความราบเรียบของพื้นผิวสำเร็จนั่นคือพื้นผิวที่ได้จากกรรมวิธีการผลิต พอจะแบ่งการตัดวัสดุออกเป็น 4 ประเภท คือ

2.6.1 การตัดหยาบ (Rough cutting)

หมายถึงการตัดที่ต้องการให้งานเสร็จอย่างรวดเร็ว แต่ไม่เน้นเรื่องการทำให้ค่าความขรุขระต่ำ ไม่เน้นความแม่นยำหรือความละเอียดของพื้นผิวสำเร็จของชิ้นงาน งานส่วนมากในการตัดโดยใช้ใบมีดตัดมักจะเป็นการตัดหยาบ ใช้ความเร็วในการตัดค่อนข้างสูง อัตราป้อนสูง และความลึกในการตัดสูง เป็นผลให้ใช้แรงตัดสูง ใช้กำลังในการตัดสูง และอาจจะต้องฉีดน้ำยาหล่อเย็นที่มีคุณสมบัติของการหล่อลื่นหรือการลดแรงตัดได้ดี ทั้งนี้เพราะต้องการให้งานเสร็จเร็ว หลังจากงานตัดหยาบแล้ว อาจจะต้องมีการตัดละเอียด หรือการเจียระไน อีกครั้งหนึ่ง

2.6.2 การตัดปานกลาง (Medium cutting)

หมายถึงการตัดทั่วไป เป็นการตัดที่ประนีประนอมระหว่างการตัดหยาบและการตัดละเอียด คือ ต้องการให้งานเสร็จเร็ว โดยที่ต้องการให้พื้นผิวขรุขระน้อยด้วย ซึ่งอาจจะทำได้ในบางกรณีโดยการเลือกค่าความเร็วในการตัด อัตราป้อน และความลึกของการตัด ที่เหมาะสม

2.6.3 **การตัดละเอียด** (Fine cutting)

หมายถึงการตัดที่ต้องการให้ค่าความขรุขระต่ำ เน้นความแม่นยำและความละเอียดของพื้นผิวสำเร็จของชิ้นงาน ไม่เน้นให้งานเสร็จอย่างรวดเร็ว แต่ถ้าเสร็จรวดเร็วก็เป็นการดี งานในลักษณะนี้เกิดขึ้นเป็นงานในขั้นตอนต่อเนื่องจากการตัดหยาบ หรือเป็นการตัดครั้งสุดท้าย ใช้ความเร็วในการตัดสูงหรือต่ำก็ได้แล้วแต่ความเหมาะสม อัตราป้อนต่ำ และความลึกในการตัดต่ำหรือปานกลาง แรงและกำลังในการตัดมักจะมีค่าน้อย จนไม่ก่อให้เกิดปัญหา มักจะต้องฉีดน้ำยาหล่อเย็นเพื่อขจัดฝอยออกจากบริเวณของการตัดอย่างรวดเร็ว เพื่อลดความขรุขระของพื้นผิวสำเร็จ

2.6.4 **การตัดละเอียดยิ่ง** (Ultra – fine machining)

ในการตัดชิ้นงานบางอย่าง เช่น การกลึงเลนส์ การกลึงอลูมิเนียมให้พื้นผิวสำเร็จเป็นมันวาวคล้ายกระจก ค่าความขรุขระจะน้อยมากเป็นพิเศษ

การจำแนกประเภทของการตัด อาจจะจำแนกโดยค่าความขรุขระของพื้นผิวสำเร็จ ดังนี้

การตัดหยาบ R_a ตั้งแต่ 10 μm หรือ 0.010 mm ขึ้นไป

การตัดปานกลาง R_a ระหว่าง 1 – 10 μm หรือ 0.001 – 0.010 mm

การตัดละเอียด R_a ระหว่าง 0.1 – 1 μm หรือ 0.0001 – 0.001 mm

การตัดละเอียดยิ่ง R_a ตั้งแต่ 0.1 μm หรือ 0.0001 mm ลงไป

2.7 การออกแบบการทดลอง (Design of Experiments)

บุคคลที่ค้นคิดการใช้วิธีการทางสถิติสำหรับการออกแบบการทดลองขึ้นเป็นครั้งแรกคือ Sir Ronald A. Fisher เนื่องจากการที่ได้เข้าไปมีส่วนร่วมกับการรับผิดชอบทางสถิติและการวิเคราะห์ข้อมูลที่สถานีทดลองทางการเกษตรรอธทัมสเตด มหานครลอนดอน ประเทศอังกฤษเป็นเวลานานหลายปี Fisher เป็นทั้งผู้พัฒนาและเป็นบุคคลแรกที่นำเอาการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) มาใช้เป็นวิธีการเบื้องต้นในการวิเคราะห์ทางสถิติที่เกี่ยวกับการออกแบบการทดลอง ในปี ค.ศ. 1933 Fisher ก็ได้รับตำแหน่งศาสตราจารย์ของมหาวิทยาลัยลอนดอนและเป็นอาจารย์รับเชิญบรรยายให้แก่มหาวิทยาลัยทั่วโลก นอกจาก Fisher จะเป็นผู้บุกเบิกสาขาวิชาการออกแบบการทดลองแล้ว ยังเป็นบุคคลสำคัญอีกจำนวนมากที่มีส่วนในการให้การสนับสนุนสาขาวิชานี้ เช่น F. Yates, R. C.Bose, O. Kempthorne, W. G. Cochran, และ G. E. Box เป็นต้น

การนำการออกแบบการทดลองไปใช้ในยุคแรก ส่วนมากจะเกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์ทางการเกษตรและชีวภาพ ซึ่งทำให้คำศัพท์และคำนิยามส่วนมากที่ใช้กันอยู่ทางด้านนี้มีความเกี่ยวข้องโดยตรงกับสาขาทางการเกษตรและชีวภาพ อย่างไรก็ตามการนำการออกแบบการทดลองมาใช้งานในทางอุตสาหกรรมครั้งแรกเริ่มปรากฏประมาณช่วง ปี ค.ศ. 1930 ซึ่งอุตสาหกรรมที่เกี่ยวข้องคืออุตสาหกรรมสิ่งทอ หลังสงครามโลกครั้งที่ 2 ยุติลง วิธีการออกแบบการทดลองก็เริ่มได้รับความนิยมและถูกนำมาใช้ในอุตสาหกรรมเคมีและกระบวนการผลิตในสหรัฐอเมริกาและยุโรปตะวันตก กลุ่มอุตสาหกรรมเหล่านี้ได้รับประโยชน์อย่างมากมายในการใช้การออกแบบการทดลอง สำหรับงานพัฒนาผลิตภัณฑ์และกระบวนการผลิต นอกจากนี้แล้วอุตสาหกรรมที่เกี่ยวกับสารกึ่งตัวนำและอิเล็คทรอนิคส์ก็ยังได้มีการนำเอาวิธีการทดลองนี้ไปใช้งานและประสบความสำเร็จอย่างมากเช่นกัน หลายปีที่ผ่านมาได้มีการฟื้นฟูความสนใจเกี่ยวกับการออกแบบการทดลองขึ้นในสหรัฐอเมริกา เพราะอุตสาหกรรมในอเมริกาจำนวนมากพบว่าคู่แข่งทางการค้าอยู่ในทวีปอื่น ๆ ซึ่งได้ใช้การออกแบบการทดลองมาเป็นเวลานานแล้ว และวิธีการออกแบบการทดลองนี้เป็นปัจจัยสำคัญต่อความสำเร็จทางด้านการแข่งขัน

2.7.1 หลักการพื้นฐาน

การออกแบบการทดลองจะให้ประสิทธิภาพในการวิเคราะห์สูงสุด จะต้องนำวิธีการทางวิทยาศาสตร์เข้ามาช่วยในการวางแผนการทดลอง "การออกแบบการทดลองเชิงสถิติ" (Statistical Design of Experiment) คือ กระบวนการในการวางแผนการทดลองเพื่อที่จะให้ได้มาซึ่งข้อมูลที่เหมาะสมที่สามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์โดยวิธีการทางสถิติ ซึ่งจะทำให้สามารถสรุปข้อมูลที่สมเหตุสมผลได้ วิธีการออกแบบการทดลองเชิงสถิติจึงเป็นสิ่งที่จำเป็น ถ้าต้องการหาข้อสรุปที่มีความหมายจากข้อมูลที่เรามีอยู่ และถ้าปัญหาที่สนใจนั้นเกี่ยวข้องกับความผิดพลาดในการทดลอง (Experimental error) วิธีการทางสถิติเป็นวิธีการเดียวที่นำมาในการวิเคราะห์ผลการทดลองนั้นได้ ดังนั้นสิ่งสำคัญ 2 ประการสำหรับปัญหาที่เกี่ยวกับการทดลองก็คือการออกแบบการทดลอง และการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ ซึ่งศาสตร์ทั้งสองอย่างนี้มีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกันอย่างมาก ทั้งนี้เนื่องจากว่าวิธีการวิเคราะห์เชิงสถิติที่เหมาะสมนั้นขึ้นอยู่กับการออกแบบการทดลองที่จะนำมาใช้

หลักการพื้นฐาน 3 ประการสำหรับการออกแบบการทดลองคือ

1. **เรพลิเคชั่น** (Replication) หมายถึงการทดลองซ้ำ เรพลิเคชั่นมีคุณสมบัติที่สำคัญ 2 ประการคือ ประการแรกเรพลิเคชั่นทำให้ผู้ทดลองสามารถหาค่าประมาณของความผิดพลาดในการทดลองได้ ตัวประมาณค่าความผิดพลาดกลายเป็นหน่วยของการชี้วัดขั้นพื้นฐานสำหรับการพิจารณาว่า ความแตกต่างสำหรับข้อมูลที่ได้จากการทดลองนั้นมีความแตกต่างกันในเชิงสถิติหรือไม่ ประการที่สอง ถ้าค่าเฉลี่ยถูกนำมาใช้เพื่อประมวลผลที่เกิดจากปัจจัยหนึ่งในการทดลอง ดังนั้นเรพลิเคชั่นทำให้ผู้ทดลองสามารถหาตัวประมาณที่ถูกต้องยิ่งขึ้นในการประมวลผลกระทบนี้

2. **แรนดอมไมเซชัน** (Randomization) เป็นหลักพื้นฐานสำหรับการใช้วิธีการเชิงสถิติในการออกแบบการทดลองและลำดับของการออกแบบการทดลองแต่ละครั้งเป็นแบบสุ่ม (Random) วิธีการทางสถิติกำหนดว่าข้อมูล (หรือความผิดพลาด) จะต้องเป็นตัวแปรแบบสุ่มที่มีการกระจายแบบอิสระ แรนดอมไมเซชันจะทำให้สมมุติฐานนี้เป็นจริง การที่ทำแรนดอมไมซ์การทดลอง ทำให้เราสามารถลดผลของปัจจัยภายนอกที่อาจจะปรากฏในการทดลองได้

3. **บล็อกกิ้ง** (Blocking) เป็นเทคนิคที่ใช้สำหรับเพิ่มความเที่ยงตรง (Precision) ให้แก่การทดลอง บล็อกอันหนึ่งอาจจะหมายถึงส่วนหนึ่งของวัสดุที่ใช้ในการทดลองที่ควรจะมีความเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันมากกว่าเซ็ตทั้งหมดของวัสดุ การเปรียบเทียบเงื่อนไขที่น่าสนใจ ต่าง ๆ ภายในแต่ละบล็อกจะเกิดขึ้นได้จากการทำ บล็อกกิ้ง

2.7.2 แนวทางในการออกแบบการทดลอง

การใช้วิธีการเชิงสถิติในการออกแบบการทดลองและวิเคราะห์ผลการทดลอง มีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้ที่เกี่ยวข้องในการทดลองต้องมีความเข้าใจอย่างถ่องแท้ล่วงหน้า ว่ากำลังศึกษาอะไรอยู่ จะเก็บข้อมูลอย่างไร และจะวิเคราะห์ข้อมูลที่เก็บนั้นอย่างไร ขั้นตอนในการดำเนินการอาจจะทำได้ดังต่อไปนี้

2.7.2.1 ทำความเข้าใจถึงปัญหา จะต้องพยายามพัฒนาแนวคิดเกี่ยวกับวัตถุประสงค์ของการทดลอง และบางครั้งจะต้องหาอินพุตจากบุคคลหรือหน่วยงานต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องการเข้าใจปัญหาอย่างชัดเจนเป็นผลอย่างมากต่อการหาคำตอบสุดท้ายของปัญหานั้น

2.7.2.2 การเลือกปัจจัย ระดับและขอบเขต ผู้ทดลองต้องเลือกปัจจัยที่จะนำมาเปลี่ยนแปลงในระหว่างทำการทดลอง กำหนดขอบเขตที่ปัจจัยเหล่านี้จะเปลี่ยนแปลง และกำหนดระดับ (Level) ที่จะเกิดขึ้นในการทดลอง ดังนั้นผู้ทำการทดลองต้องมีความรู้เกี่ยวกับกระบวนการ

นั้นอย่างมาก ซึ่งอาจจะมาจากประสบการณ์หรือจากทฤษฎี มีความจำเป็นที่จะต้องตรวจสอบดูว่าปัจจัยที่กำหนดขึ้นมาทั้งหมดมีความสำคัญหรือไม่ และเมื่อวัตถุประสงค์ของการทดลองคือการกรองปัจจัย (Screening) เราควรจะกำหนดให้ระดับต่าง ๆ ที่ใช้ในการทดลองให้มีจำนวนน้อย ๆ การเลือกขอบเขตของการทดลองก็มีความสำคัญเช่นกัน ในการทดลองเพื่อกรองปัจจัยเราควรจะเลือกขอบเขตให้กว้างมาก ๆ หมายถึงว่าขอบเขตของปัจจัยแต่ละตัวจะเปลี่ยนแปลงได้ควรมีค่ากว้าง ๆ และเมื่อเราทราบว่าตัวแปรใดมีความสำคัญและระดับใดทำให้เกิดผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ก็อาจจะลดขอบเขตลงมาให้แคบลงได้

2.7.2.3 เลือกตัวแปรผลตอบ ในการเลือกตัวแปรผลตอบนี้ ผู้ทำการทดลองควรแน่ใจว่าตัวแปรนี้จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับกระบวนการที่กำลังศึกษาอยู่ หลายครั้งที่ค่าเฉลี่ยหรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานหรือทั้งคู่ ของกระบวนการผลิตเป็นตัวแปรผลตอบ ซึ่งในการทดลองหนึ่งอาจจะมีผลตอบหลายตัว และมีความจำเป็นอย่างมากที่จะต้องกำหนดให้ได้ว่า อะไรคือตัวแปรผลตอบและจะวัดค่าตัวแปรนั้นอย่างไร

2.7.2.4 เลือกการออกแบบการทดลอง การเลือกการออกแบบการทดลองเกี่ยวข้องกับการพิจารณาขนาดตัวอย่าง (จำนวนเรพลิเคต) การเลือกลำดับที่เหมาะสมของการทดลองที่จะใช้ในการเก็บข้อมูลและการตัดสินใจว่าควรจะใช้วิธีบล็อกหรือการใช้การแรนดอมไมเซชัน ในการเลือกทางวิศวกรรมศาสตร์ส่วนมาก เราจะทราบตั้งแต่เริ่มแล้วว่า ปัจจัยบางตัวมีผลต่อผลตอบที่จะเกิดขึ้น ดังนั้นเราจะหาว่าปัจจัยตัวใดที่ทำให้เกิดความแตกต่าง และประมาณขนาดของความแตกต่างที่จะเกิดขึ้น

2.7.2.5 ทำการทดลอง เมื่อทำการทดลองจะต้องติดตามดูกระบวนการทำงานอย่างระมัดระวัง เพื่อให้แน่ใจว่าการดำเนินการทุกอย่างเป็นไปตามแผน หากมีอะไรผิดพลาดเกิดขึ้นเกี่ยวกับวิธีการทดลอง ถือว่าการทดลองที่ทำนั้นใช้ไม่ได้ ดังนั้นการวางแผนการทดลองในขั้นตอนแรกจะมีความสำคัญอย่างมากต่อความสำเร็จที่จะเกิดขึ้น

2.7.2.6 วิเคราะห์ข้อมูลเชิงสถิติ ควรนำเอาวิธีการทางสถิติมาใช้ในการทดลอง เพื่อผลลัพธ์และข้อสรุปที่เกิดขึ้นจะเป็นไปตามวัตถุประสงค์ของการทดลอง ถ้าการทดลองได้ถูกออกแบบมาเป็นอย่างดี และทำการทดลองตามที่ได้ออกแบบไว้ วิธีการทางสถิติที่จะนำมานั้นจะเป็นวิธีการที่ไม่ซับซ้อน ข้อได้เปรียบของวิธีการทดลองทางสถิติคือ การทำให้ผู้ที่มีอำนาจในการตัดสินใจมีเครื่องมือช่วยวัดที่มีประสิทธิภาพ และถ้านำเอาวิธีการทางสถิติมาผนวกกับความรู้ทาง

วิศวกรรมศาสตร์ ความรู้เกี่ยวกับกระบวนการ จะทำให้ข้อสรุปที่ได้ออกแบบมานั้นมีเหตุผลสนับสนุนและมีความน่าเชื่อถือ

2.7.2.7 สรุปและข้อเสนอแนะ เมื่อได้มีการวิเคราะห์ข้อมูลเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้ทดลองจะต้องหาข้อสรุปในทางปฏิบัติและนำเสนอแนะแนวทางของกิจกรรมที่จะเกิดขึ้น ในขั้นตอนนี้จะนำเอาวิธีการทางกราฟเข้ามาช่วย โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเราต้องการนำเสนอผลงานนี้ให้ผู้อื่นฟัง นอกจากนี้แล้วการทำการทดลองเพื่อยืนยันผล (Confirmation testing) ควรจะทำขึ้นเพื่อที่จะทำการตรวจสอบความถูกต้องของข้อสรุปที่เกิดขึ้นอีกด้วย

2.7.3 การทดลองปัจจัยเดียว (Single Factor Experiment)

การทดลองปัจจัยเดียวเป็นการทดลองที่มีปัจจัยเดียว คือมี a ระดับของปัจจัย (a เงื่อนไข) โดยการทดลองเป็นแบบการสุ่มสมบูรณ์ ลำดับการทดลองแบบสุ่มเป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับการหลีกเลี่ยงผลของตัวแปรรบกวนที่ไม่ทราบค่า ซึ่งบางครั้งอาจจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าไปหรือไม่สามารถควบคุมได้ในขณะทำการทดลอง

2.7.3.1 การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance)

หากมีค่าระดับซึ่งแตกต่างของปัจจัยเดียวที่ต้องการศึกษาเปรียบเทียบและค่าตอบสนองที่ได้จากการสังเกตในแต่ละระดับเป็นตัวแปรสุ่ม เราสามารถที่จะอธิบายค่าสังเกตต่าง ๆ นี้ด้วยแบบจำลองทางสถิติเชิงเส้นตรง คือ

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1,2\ldots, a \\ j = 1,2\ldots, a \end{cases} \qquad (2\text{-}6)$$

โดยที่ค่า Y_{ij} เป็นค่าสังเกตที่ ij และ μ คือค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ร่วมกันทุกระดับซึ่งเรียกกันว่า "มัชฌิมรวม (Overall mean)" τ_i คือค่าพารามิเตอร์สำหรับระดับที่ i หรือผลกระทบจากระดับที่ i และ ε_{ij} คือองค์ประกอบของความผิดพลาดแบบสุ่ม (Random error) จุดประสงค์ก็เพื่อที่จะตรวจสอบสมมุติฐานที่เหมาะสมเกี่ยวกับผลกระทบต่อระดับต่าง ๆ และทำการประเมินค่ามันสำหรับการทดสอบสมมุติฐาน ความผิดพลาดของแบบจำลองให้เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบปกติและอิสระต่อกัน ด้วยมัชฌิมเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2

ตารางที่ 2.1 ตารางแสดงข้อมูลสำหรับการทดลองปัจจัยเดียว

Treatment (Level)	Observations				Total	Averages
1	Y_{11}	Y_{12}	. . .	Y_{1n}	$Y_{1.}$	$\overline{Y}_{1.}$
2	Y_{22}	Y_{22}	. . .	Y_{2n}	$Y_{2.}$	$\overline{Y}_{2.}$
.	.	.	. . .	.	.	.
.	.	.	. . .	.	.	.
a	Y_{a1}	Y_{a2}	. . .	Y_{an}	Y_{a1}	$\overline{Y}_{a.}$
					$Y_{..}$	$Y_{..}$

แบบจำลองนี้เรียกว่า "การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปัจจัยเดียว" เพราะมีเพียงแค่ปัจจัยเดียวที่นำมาพิจารณา ยิ่งกว่านั้นลำดับในการทดลองจะต้องเป็นแบบสุ่มเพื่อที่จะสิ่งแวดล้อมทำการทดลองในต่าง ๆ จะมีความเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันมากที่สุด ดังนั้นการออกแบบการทดลองแบบนี้จึงเป็นการทดลองที่เรียกว่า การออกแบบสุ่มสมบูรณ์ (Completely randomized design) นอกจากนี้อาจจะต้องมีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง ซึ่งเรียกกันว่า "แบบจำลองผลกระทบคงที่ (Fixed effects model)"

2.7.3.2 การวิเคราะห์ทางสถิติ

การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปัจจัยเดียวของแบบจำลองแบบผลกระทบคงที่ ผลกระทบของระดับ (τ_i) มีนิยามเหมือนกับส่วนเบี่ยงเบนจากมัชฌิมรวม

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$$

มัชฌิมของระดับ i คือ $E(Y_{ij}) \equiv \mu_i = \mu + \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, a$ ซึ่งในการทดสอบความเท่ากันของมัชฌิม a ระดับ คือ

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$$

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ อย่างน้อยหนึ่งคู่ของ (i,j)

ถ้าหาก H_0 เป็นจริง ทุกระดับจะมีมัชฌิมที่เท่ากันคือ μ ซึ่งอาจจะเขียนในรูปสมมุติฐานใหม่ในรูปของผลกระทบของระดับ τ_i ได้ดังนี้

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$$

$H_1 : \tau_i \neq 0$ อย่างน้อยหนึ่ง i

จากการคาดหมายกำลังสองเฉลี่ย พบว่า โดยทั่วไป MS_E จะเป็นค่าประมาณที่ไม่ลำเอียงของ σ^2 ภายใต้สมมุติฐานหลัก $MS_{treatment}$ จะเป็นค่าประมาณที่ไม่ลำเอียงของ σ^2 เช่นกัน อย่างไรก็ตาม ถ้าสมมุติฐานหลักเป็นเท็จ ค่าคาดหมายของ $MS_{treatment}$ จะมากกว่า σ^2 ดังนั้นภายในสมมุติฐานรอง ค่าคาดหมายของตัวตั้งของสถิติทดสอบ จะมากกว่าค่าคาดหมายตัวหาร และจะปฏิเสธ H_0 ถ้าค่าสถิติทดสอบมีค่ามากกว่า หรือค่าตกอยู่ในช่วงวิกฤตซึ่งหมายถึงพื้นที่ด้านขวาของค่าวิกฤต ($F_{\alpha, a-1, N-a}$) ดังนั้นก็จะปฏิเสธ H_0 และสรุปว่า มีความแตกต่างระหว่างมัชฌิมของระดับถ้า

$$F_0 > F_{\alpha, a-1, N-a}$$

เมื่อ

$$F_0 = \frac{SS_{treament}/(a-1)}{SS_E/(N-a)} = \frac{MS_{treament}}{MS_E}$$

ซึ่งค่า F_0 สามารถคำนวณโดยการใช้ค่า P – Value ในการตัดสินใจก็ได้ สูตรสำหรับการคำนวณผลรวมกำลังสองสามารถหาได้จากการลดรูปของ $MS_{treatment}$ และ SS_T ซึ่งจะได้

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N} \qquad (2\text{-}7)$$

และ

$$SS_{treatment} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} Y_{i.}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N} \qquad (2\text{-}8)$$

ค่าผิดพลาดของผลรวมกำลังสองสามารถหาได้ดังนี้

$$SS_E = SS_T - MS_{treatment} \tag{2-9}$$

ซึ่งขั้นตอนการทดสอบสามารถสรุปได้ดังตารางที่ 2.2 ซึ่งเรียกว่า "ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance Table)"

ตารางที่ 2.2 ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน สำหรับ Fix Effect Model ตัวแปรเดียว

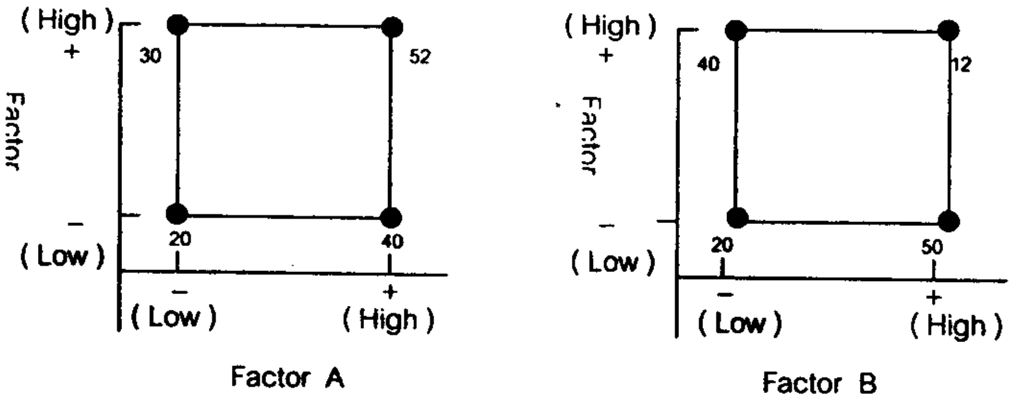
Source of Variance	Sum of Squares	Degree of Freedom	Mean Squares	F_0
Between treatment	$SS_{treatment}$	$a-1$	$MS_{treatment}$	$F_0 = \dfrac{SS_{treatment}}{SS_E}$
Error	SS_E	$N-a$	MS_E	
Total	SS_1	$N-1$		

2.7.4 การออกแบบการทดลองเชิงแฟกทอเรียล (Factorial Design)

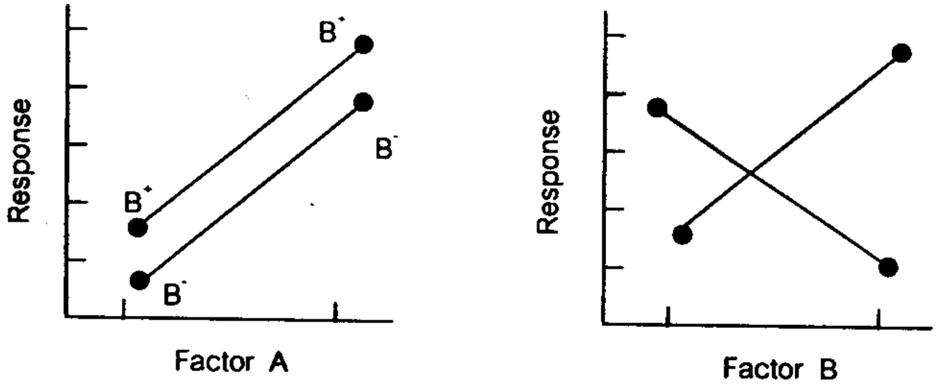
การทดลองส่วนมากในทางปฏิบัติจะเกี่ยวข้องกับการศึกษาถึงผลของปัจจัย (Factor) ตั้งแต่ 2 ปัจจัยขึ้นไป ในกรณีเช่นนี้ การออกแบบเชิงแฟกทอเรียล จะเป็นวิธีการทดลองที่มีประสิทธิภาพสูงสุด การออกแบบเชิงแฟกทอเรียล หมายถึง การทดลองที่พิจารณาถึงผลที่เกิดขึ้นจากการรวมตัวกันของระดับ (Level) ของปัจจัยทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการทดลองนั้น เช่น กรณี 2 ปัจจัยคือ ปัจจัย A ประกอบด้วย a ระดับ และปัจจัย B มี b ระดับ ในการทดลอง 1 เรพลิเคต จะประกอบด้วยการทดลองทั้งหมด ab การทดลอง และเมื่อปัจจัยที่เกี่ยวข้องถูกนำมาจัดให้อยู่ในรูปแบบของการออกแบบเชิงแฟกทอเรียล นั้นคือปัจจัยเหล่านั้นมีการไขว้ (Crossed) ซึ่งกันและกัน

ผลที่เกิดจากปัจจัยหนึ่ง หมายถึง การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับผลตอบ (Response) ที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงระดับของปัจจัยนั้น ๆ ซึ่งเรียกว่า ผลหลัก (Main Effect) เนื่องมาจากว่ามันเกี่ยวข้องกับปัจจัยเบื้องต้นของการทดลอง ในการทดลองบางอย่าง อาจจะพบว่าความแตกต่างของผลตอบที่เกิดขึ้นบนระดับต่าง ๆ ของปัจจัยหนึ่งมีค่าไม่เท่ากันที่ระดับอื่น ๆ ทั้งหมดของปัจจัย

อื่น ซึ่งหมายถึงว่า ผลตอบของปัจจัยหนึ่งจะเกิดขึ้นกับระดับของปัจจัยอื่น เรียกเหตุการณ์นี้ว่า การมีปฏิสัมพันธ์ (Interaction) ต่อกันระหว่างปัจจัยที่เกี่ยวข้อง



ภาพประกอบที่ 2.8 การออกแบบเชิงแฟกทอเรียล 2 ปัจจัย



การออกแบบเชิงแฟกทอเรียล 2 ปัจจัย (ไม่มี Interaction)

การออกแบบเชิงแฟกทอเรียล (มี Interaction)

ภาพประกอบที่ 2.9 แสดงการออกแบบเชิงแฟกทอเรียล

2.7.4.2 การออกแบบการทดลองเชิงแฟกทอเรียลแบบ 2^k

การออกแบบเชิงแฟกทอเรียลใช้งานมากในการทดลองที่เกี่ยวกับปัจจัยหลายปัจจัย ซึ่งต้องการที่จะศึกษาถึงผลร่วมที่มีผลต่อผลตอบที่เกิดขึ้นจากปัจจัยเหล่านั้น การออกแบบเชิงแฟกทอเรียลที่มีความสำคัญที่สุดคือ กรณีที่มีปัจจัย k ปัจจัยซึ่งแต่ละปัจจัยประกอบด้วย 2 ระดับ ระดับเหล่านี้อาจจะเกิดจากข้อมูลเชิงปริมาณ เช่น อุณหภูมิ ความดันหรือเวลา หรืออาจจะเกิดจากข้อมูลเชิงคุณภาพ เช่น เครื่องจักรหรือคนงาน เป็นต้น และใน 2 ระดับที่กล่าวมานั้นจะแทนระดับ "สูง" หรือ "ต่ำ" ของปัจจัยหนึ่ง ๆ หรือการ "มี" หรือ "ไม่มี" ของปัจจัยนั้น ๆ ก็ได้ ใน 1 เรพลิเคตที่บริบูรณ์สำหรับการออกแบบเช่นนี้จะประกอบด้วยข้อมูลทั้งสิ้น $2 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots \times 2 = 2^K$ ข้อมูล และเรียกการออกแบบลักษณะนี้ว่า "การออกแบบการทดลองเชิงแฟกทอเรียลแบบ 2^K "

2.7.4.3 การออกแบบการทดลองเชิงแฟกทอเรียลแบบ 2^3

เป็นการทดลองที่มีปัจจัย 3 ปัจจัย แต่ละปัจจัยมี 2 ระดับ ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์การออกแบบ (Design matrix) ได้ดังนี้

ตารางที่ 2.3 เมทริกซ์การออกแบบ (Design matrix)

Run	Factor			Peplicate		
	A	B	C	1	2	3
1	-	-	-			
2	+	-	-			
3	-	+	-			
4	+	+	-			
5	-	-	+			
6	+	-	+			
7	-	+	+			
8	+	+	+			

ค่าเฉลี่ยของผลของตัวแปรหลักสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$A = \frac{1}{4n}\,[a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc] \qquad (2\text{-}9)$$

$$B = \frac{1}{4n}\,[b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac] \qquad (2\text{-}10)$$

$$C = \frac{1}{4n}\,[c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab] \qquad (2\text{-}11)$$

$$AB = \frac{[abc - bc + ab - b - ac + c - a + (1)]}{4n} \qquad (2\text{-}12)$$

$$AC = \frac{1}{4n}\,[(1) - a + b - ab - c + ac - bc - abc] \qquad (2\text{-}13)$$

$$BC = \frac{1}{4n}\,[(1) + a - b - ab - c + ac + bc + abc] \qquad (2\text{-}14)$$

$$ABC = \frac{1}{4n}\,[abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)] \qquad (2\text{-}15)$$

ตารางที่ 2.4 **ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนของการออกแบบ** 2^K

Source of Variation	Sum of Square	degree of Freedom
k main effect		
A	SS_A	1

Source of Variation	Sum of Square	degree of Freedom
B	SS_B	1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
K	SS_K	1
$\binom{k}{2}$ Two – factor interactions		
AB	SS_{AB}	1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
JK	SS_{JK}	1
$\binom{k}{3}$ Three - factor interactions		
ABC	SS_{ABC}	1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
IJK	SS_{IJK}	1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$\binom{k}{k}$ = 1 k - factor interactions		
ABC…K	$SS_{ABC...K}$	1
Error	SS_E	$2^k(n-1)$
Total	SS_T	$n2^k - 1$

การออกแบบการทดลองเชิงแฟกทอเรียลแบบ 2^K มีประโยชน์มากต่อการทดลองในช่วงแรก เมื่อปัจจัยเป็นจำนวนมากที่ต้องการจะตรวจสอบ การออกแบบนี้จะทำให้การทดลองมีจำนวนน้อยที่สุดที่สามารถจะทำได้ เพื่อศึกษาผลของปัจจัยทั้ง k ชนิดได้อย่างบริบูรณ์โดยการใช้การออกแบบการออกแบบการทดลองเชิงแฟกทอเรียล ดังนั้นจึงจึงมีการนำการออกแบบการทดลองเชิงแฟกทอเรียลแบบ 2^K มาใช้กันอย่างกว้างขวาง เพื่อที่จะกรองปัจจัยที่มีอยู่จำนวนมากให้เหลือน้อยลง นอกจากนี้แล้วการออกแบบการทดลองเชิงแฟกทอเรียลยังมีประโยชน์อีกหลายประการ ทั้งยังเป็นการออกแบบทที่มีประสิทธิภาพเหนือกว่าการทดลองทีละปัจจัย ยิ่งกว่านั้นแล้วการออกแบบเชิงแฟกทอเรียลยังเป็นสิ่งจำเป็นเมื่อมีปฏิสัมพันธ์เกิดขึ้น ซึ่งกรณีเช่นนี้ทำให้สามารถหลีกเลี่ยงข้อสรุปที่ผิดพลาดได้ นอกจากนี้แล้วการออกแบบเชิงแฟกทอเรียลทำให้เราสามารถประมวลผลของปัจจัยหนึ่งที่ระดับต่าง ๆ ของปัจจัยอื่นได้ ทำให้สามารถที่จะสรุปผลได้สมเหตุสมผล (Valid) ตลอดเงื่อนไขของการทดลอง

2.7.4.4 การออกแบบการทดลองเชิงแฟกทอเรียลแบบทั่วไป (General factorial experiments)

ในกรณีที่ปัจจัย A มีจำนวนระดับเท่ากับ a ปัจจัย B มีจำนวนระดับเท่ากับ b ปัจจัย C มีจำนวนระดับเท่ากับ c ต่อไปเช่นนี้เรื่อยๆ และทั้งหมดนี้ถูกจัดให้อยู่ในลักษณะการทดลองเชิงแฟกทอเรียล ซึ่งมีจำนวนข้อมูลที่ได้จากการทดลองเท่ากับ abc...n และจะต้องมีเรพลิเคตอย่างน้อย 2 เรพลิเคต ($n \geq 2$) เพื่อที่จะทำให้หาผลรวมของกำลังสองที่เกิดจากความผิดพลาดได้ ถ้ามีปฏิสัมพันธ์ (Interaction) ทั้งหมดถูกนำเข้าไปพิจารณาในแบบจำลอง

สำหรับแบบจำลองแบบค่าตายตัว ตัวทดสอบเชิงสถิติที่ใช้ F – Test แบบทดสอบปลายด้านบนหนึ่งด้าน จำนวนชั้นความเสรีสำหรับผลหลักใด ๆ มีค่าเท่ากับจำนวนระดับของปัจจัยนั้นลบด้วย 1 และจำนวนระดับชั้นความเสรีของปฏิสัมพันธ์มีค่าเท่ากับผลคูณของระดับชั้นความเสรีของส่วนประกอบของปฏิสัมพันธ์นั้นๆ พิจารณาแบบจำลองการวิเคราะห์ความแปรปรวน 3 ปัจจัยได้ดังนี้

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk}$$

$$+ (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \quad \begin{cases} i = 1, 2..., a \\ j = 1, 2..., b \\ k = 1, 2..., c \\ l = 1, 2..., n \end{cases} \qquad (2\text{-}16)$$

การคำนวณค่าผลรวมทั้งหมดของกำลังสอง สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n} Y_{ijkl}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abcn} \quad (2\text{-}17)$$

ค่าผลรวมของกำลังสองของผลหลักหาได้ดังนี้

$$SS_A = \frac{1}{bcn}\sum_{i=1}^{a} Y_{i...}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abcn} \quad (2\text{-}18)$$

$$SS_B = \frac{1}{acn}\sum_{j=1}^{a} Y_{.j..}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abcn} \quad (2\text{-}19)$$

$$SS_C = \frac{1}{abn}\sum_{k=1}^{a} Y_{..k.}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abcn} \quad (2\text{-}20)$$

$$SS_{AB} = \frac{1}{cn}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij..}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abcn} - SS_A - SS_B$$

$$= SS_{Subtotals(AB)} - SS_A - SS_B \quad (2\text{-}21)$$

$$SS_{AB} = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{i.k.}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abcn} - SS_A - SS_C$$

$$= SS_{Subtotals(AC)} - SS_A - SS_C \quad (2\text{-}22)$$

$$SS_{BC} = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} Y_{.jk.}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abcn} - SS_B - SS_C$$

$$= SS_{Subtotals(BC)} - SS_B - SS_C \quad (2\text{-}23)$$

$$SS_{ABC} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n} Y_{ijkl}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abcn} - SS_A - SS_B -$$

$$SS_C - SS_{AB} - SS_{BC} - SS_{AC}$$

$$= SS_{Subtotals(ABC)} - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{BC} - SS_{AC} \quad (2\text{-}24)$$

และ

$$SS_E = SS_T - SS_{Subtotals(ABC)} \quad (2\text{-}25)$$

ตารางที่ 2.5 ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับแบบจำลอง 3 ปัจจัย แบบ Fixed Effect

Source of Variation	Sum of Square	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
A	SS_A	$a-1$	MS_A	$F_0 = \frac{MS_A}{MS_E}$
B	SS_B	$b-1$	MS_B	$F_0 = \frac{MS_B}{MS_E}$
C	SS_C	$c-1$	MS_C	$F_0 = \frac{MS_C}{MS_E}$
AB	SS_{AB}	$(a-1)-(b-1)$	MS_{AB}	$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$
AC	SS_{AC}	$(a-1)-(c-1)$	MS_{AC}	$F_0 = \frac{MS_{AC}}{MS_E}$
BC	SS_{BC}	$(b-1)-(c-1)$	MS_{BC}	$F_0 = \frac{MS_{BC}}{MS_E}$

Source of Variation	Sum of Square	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
ABC	SS_{ABC}	(a –1) – (b – 1) – (c – 1)	MS_{ABC}	$F_0 = \dfrac{MS_{ABC}}{MS_E}$
Error	SS_E	abc(n – 1)	MS_E	
Total	SS_T	abcn – 1		

2.7.5 การบล็อกในการออกแบบเชิงแฟกทอเรียล

ปกติการออกแบบเชิงแฟกทอเรียลจะเป็นแบบสุ่มบริบูรณ์ (Completely Randomized) แต่ในบางครั้งเราพบว่าการทดลองในบางครั้งให้ผลไม่คุ้มค่าในทางปฏิบัติ เช่นการปรากฏของสิ่งรบกวนในการทดลองอาจทำให้เราต้องทำการทดลองภายในขอบเขตจำกัดหรือบล็อค พิจารณาการทดลองเชิงแฟกทอเรียลแบบ 2 ปัจจัย (Aและ B) ซึ่งมี n เรพลิเคต แบบจำลองเชิงเส้นทางสถิติของการทดลองนี้สามารถเขียนเป็น

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2..., a \\ j = 1, 2..., b \\ k = 1, 2..., n \end{cases} \tag{2-26}$$

โดยที่ τ_i , β_j และ $(\tau\beta)_{ij}$ แทนผลของปัจจัย A , B และปฏิสัมพันธ์ของ AB ตามลำดับ สมมติว่าในการดำเนินการทดลองนี้ เราต้องการวัตถุดิบเฉพาะอย่างหนึ่ง ซึ่งวัตถุดิบนี้มีขนาดรุ่นไม่พอเพียงที่จะทำการทดลองร่วมปัจจัยทั้งหมด abn การทดลองให้เกิดขึ้นจากวัตถุดิบรุ่นเดียวกัน อย่างไรก็ตาม ถ้าขนาดรุ่นมีวัตถุดิบเพียงพอสำหรับทำ ab การทดลอง ดังนั้นทางเลือกของการทดลองคือการออกแบบให้ n เรพลิเคตแยกออกจากกัน และการทดลองแบบ 1 เรพลิเคตของการทดลองเชิงแฟกทอเรียลจะถูกดำเนินการในแต่ละบล็อก และแบบจำลองสามารถเขียนได้ดังนี้

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2..., a \\ j = 1, 2..., b \\ k = 1, 2..., n \end{cases}$$

(2-27)

โดยที่ δ_k คือผลที่เกิดจากการบล็อกครั้งที่ k แน่นอนว่าภายในบล็อกลำดับของการทดลองร่วมปัจจัยที่เกิดขึ้นจะเป็นแบบ Completely Randomized Blocking

ซึ่งในการวิเคราะห์ความแปรปรวนกรณีนี้ จะคล้ายคลึงกับตารางการออกแบบเชิงแฟกทอเรียล โดยที่ผลรวมของกำลังสองของความผิดพลาดจะถูกทำให้ลดลงด้วยค่าผลรวมของกำลังสองของบล็อก เราจะหาค่าผลรวมของกำลังสองของบล็อกได้จากผลรวมของกำลังสองระหว่าง n ผลรวมของบล็อกทั้งหมด (Y_{ijk})

การคำนวณค่าผลรวมทั้งหมดของกำลังสอง สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$SS_T = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abn} \tag{2-28}$$

ค่าผลรวมของกำลังสองของผลหลักหาได้ดังนี้

$$SS_{Blocks} = \frac{1}{ab} \sum_k Y_{..k}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abn} \tag{2-29}$$

$$SS_A = \frac{1}{bn} \sum_i Y_{i..}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abn} \tag{2-30}$$

$$SS_B = \frac{1}{an} \sum_j^a Y_{.j.}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abn} \tag{2-31}$$

$$SS_{AB} = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j Y_{ij.}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abn} - SS_A - SS_B$$

$$= SS_{Subtotals(AB)} - SS_A - SS_B \tag{2-32}$$

และ

$$SS_E = SS_T - SS_{AB} - SS_A - SS_B - SS_{Blocks} \qquad (2\text{-}33)$$

ตารางที่ 2.6 **ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนของการออกแบบเชิงแฟกทอเรียล** 2 **ปัจจัยแบบบล็อกบริบูรณ์เชิงสุ่ม**

Source of Variation	Sum of Square	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
Blocks	SS_{Blocks}	$n-1$	MS_{Blocks}	
A	SS_A	$a-1$	MS_A	$\frac{MS_A}{MS_E}$
B	SS_B	$b-1$	MS_B	$\frac{MS_B}{MS_E}$
AB	SS_{AB}	$(a-1)\ (b-1)$	MS_{AB}	$\frac{MS_{AB}}{MS_E}$
Error	SS_E	$(ab-1)\ (n-1)$	MS_E	
Total	SS_T	$abn-1$		

การบล็อกอาจเกิดขึ้นในรุ่นของวัตถุดิบ หรือในทางปฏิบัติอาจจะมีเหตุการณ์อีกหลายอย่างที่จะทำให้เกิดข้อจำกัดขึ้นได้ เช่น เวลา คนงาน วัสดุ อุปกรณ์ เป็นต้น ตัวอย่างเช่น ถ้าเราไม่สามารถทำการทดลองเชิงแฟกทอเรียลทั้งหมดให้เสร็จภายในวันเดียวได้ ดังนั้นผู้ทำการทดลองอาจจะต้องทดลองเรพลิเคตแรกในวันที่ 1 เรพลิเคตที่ 2 ในวันที่ 2 และต่อๆ ไปเช่นนี้ดังนั้นในกรณีนี้การทดลองในแต่ละวันจะเป็นบล็อกของการทดลอง

2.8 การวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายตัวแปร (Multivariate Analysis of Variance)

สถิติที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูลในงานวิจัยที่ศึกษาตัวแปรหลายตัวเรียกว่า การวิเคราะห์หลายตัวแปร (Multivariate analysis) เทคนิคดังกล่าวสามารถใช้วิเคราะห์ข้อมูลจากงานวิจัยที่เป็นการทดลองที่มีการควบคุม ไปจนกระทั่งถึงงานวิจัยที่หาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์หลายตัวแปรเป็นเรื่องเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรหลายตัว ใช้เรียกกันใน 3 กรณีคือ ตัวแปรตามมากกว่า 1 ตัว ตัวแปรต้นมากกว่า 1 ตัว และ ตัวแปรตามและตัวแปรต้นมากกว่า 1 ตัว

ในกรณีการวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายตัวแปร (Multivariate Analysis of Variance – MANOVA) นั้นจะให้ผลดีเมื่อตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กันปานกลาง ถ้าความสัมพันธ์เหล่านั้นสูงมากไปทำให้มีความคลุมเคลือในผลการวิเคราะห์ได้ ส่วนตัวแปรตามที่มีความสัมพันธ์กันต่ำมากไปหรือไม่สัมพันธ์กันนั้น การวิเคราะห์หลายตัวแปรให้ผลพอ ๆ กับการวิเคราะห์หนึ่งตัวแปร

ข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายตัวแปร

ในการวิเคราะห์หลายตัวแปรต้องมีการตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นว่าเป็นไปได้หรือไม่ ซึ่งอาจส่งผลต่อการวิเคราะห์ได้ถ้าไม่เป็นจริง ข้อตกลงเบื้องต้นใน MANOVA มี 3 ประการคือ

1. ข้อมูลตัวแปรตามมีความเป็นอิสระ (Independence)
2. ข้อมูลตัวแปรตามทุกตัวตัวแปรตามทุกตัวที่ศึกษามีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate normal distribution)
3. เมทริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม ของตัวแปรตามที่ศึกษาในแต่ละกลุ่มเท่ากัน (Homogeneity of variance-covariance matrices)

2.8.1 ความเป็นอิสระ (Independence)

ข้อมูลแต่ละตัวต้องมีความเป็นอิสระแก่กัน ผู้วิจัยต้องตรวจสอบความเป็นอิสระในแง่มุมต่างๆ ซึ่งความบกพร่องในเรื่องนี้เพียงเล็กน้อยสามารถมีผลกระทบต่อทั้งระดับนัยสำคัญและพาวเวอร์ของสถิติ F ใน ANOVA ได้มาก (และมีผลกระทบในทำนองเดียวกับ MANOVA ด้วย) นั่นคือทำให้ระดับ α ที่ใช้จริงมีค่าสูงกว่าระดับ α ที่ระบุได้หลายเท่า ความ

$$R = \frac{MS_b - MS_w}{MS_b + (n-1)MS_w} \qquad (2.34)$$

ไม่เป็นอิสระของข้อมูลวัดได้ด้วยสหสัมพันธ์ภายในชั้น (Intraclass correlation – R) เมื่อ MS_b และ

MS_w เป็นตัวเศษและส่วนในการคำนวณสถิติ F และ n เป็นจำนวนข้อมูลใน 1 กลุ่ม

2.8.2 **การแจกแจงปกติหลายตัวแปร** (Multivariate normality)

ตัวแปรแต่ละตัวมีการแจกแจงปกติตามที่ใช้ใน ANOVA บวกกับคุณสมบัติอื่นๆดังนี้

1. การเชื่อมโยงตัวแปรเชิงเส้นตรงใดๆ จะมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร

2. ชุดย่อยทุกชุดของตัวแปรจะมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร ข้อนี้นำไปสู่การแจกแจงปกติสองตัวแปร (Bivariate normality) สำหรับตัวแปรทุกคู่

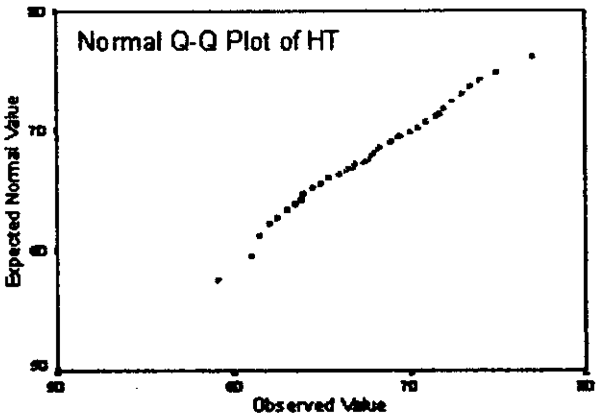
การแจกแจงปกติสองตัวแปรแสดงได้ด้วยการลงจุด (Scatterplots) ของตัวแปรแต่ละคู่ซึ่งจะเป็นรูปวงรี (Ellipse) ถ้าตัวแปรมีความสัมพันธ์กัน ยิ่งตัวแปรมีความสัมพันธ์กันสูงรูปวงรีจะผอมยิ่งขึ้นดังนั้นการลงจุดของตัวแปรแต่ละคู่ใช้เป็นหลักฐานส่วนหนึ่งในการตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นได้ เมื่อเวคเตอร์ y มีการแจกแจงเป็นปกติหลายตัวแปร (สมมติ 2 ตัวแปร) โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น μ และความแปรปรวน Σ นั่นคือ

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu 1 \\ \mu 2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \sum = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชั่นความหนาแน่นของการแจกแจงปกติสองตัวแปร (Bivariate normal density function) เมื่อ $\rho > 0$ แสดงเป็นรูปวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (μ_1, μ_2) ซึ่งเรียกว่าเซ็นทรอยด์ของการแจกแจง (Centroid of the distribution) อย่างไรก็ดีถ้าพบว่าข้อมูลไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น ผู้วิจัยสามารถแปลงข้อมูลให้มีการแจกแจงปกติได้ โดยวิธีต่างๆเช่น การยกกำลังสอง การถอดรากที่สอง การหาส่วนกลับ การหาค่าลอการิทึม เป็นต้น

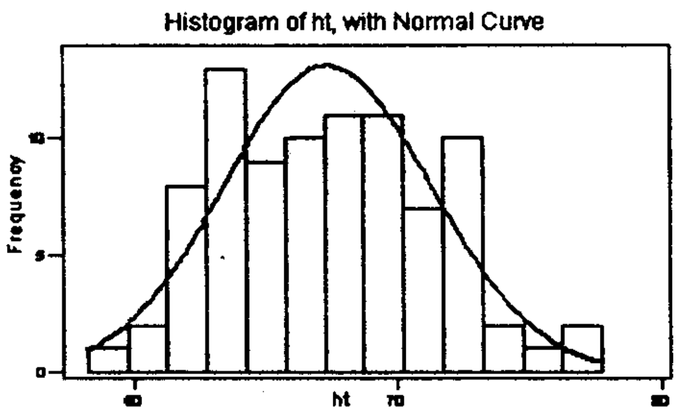
2.8.2.1 การตรวจสอบการแจกแจงปกติหนึ่งตัวแปร

มีวิธีมากมายทั้งวิธีใช้กราฟและไม่ใช้กราฟในการทดสอบการแจกแจงปกติสำหรับตัวแปรแต่ละตัว วิธีหนึ่งก็คือการลงจุด Q-Q (Q-Q plots) จุดเหล่านี้มาจากค่าควอนไทล์ (Quantile) ที่คำนวณจากกลุ่มตัวอย่างและค่าควอนไทล์ที่คาดหวังจากการแจกแจงปกติ ถ้าจุดเหล่านี้เรียงตัวเกือบเป็นเส้นตรง ข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับการแจกแจงปกติก็ยอมรับได้ และอีกวิธีหนึ่งที่เป็นการใช้กราฟคือ การตรวจสอบฮิสโตแกรมของตัวแปรตามในแต่ละตัวในแต่ละกลุ่ม



ภาพประกอบที่ 2.10 แสดง Normal Q-Q plot

ที่มา http://149.170.199.144/new_rd/contents/goodfit.htm



ภาพประกอบที่ 2.11 แสดง Histogram plot

ที่มา http://149.170.199.144/new_rd/contents/goodfit.htm

นอกจากนี้ยังดูได้จาก Stem and leaf plots และ Box plots ได้อีกด้วย สำหรับวิธีการที่ไม่ใช้กราฟมี สถิติไค-สแควร์ทดสอบความพอเหมาะ Komogorov-Smirnov และ Shapiro –Wlik นอกจากนี้ยังมี สัมประสิทธิ์ความเบ้ (Skewness) และความโด่ง (Kurtosis)

2.8.2.2 การตรวจสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร

วิธีการตรวจสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรสามารถกระทำได้ด้วยการคำนวณค่า Mahalanobis distances (D^2) สำหรับข้อมูลแต่ละตัวและลงจุดที่คำนวณได้นี้กับค่าเปอร์เซ็นไทล์ของ ไค-สแควร์ ถ้าประชากรมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปรและทั้ง n และ n-p มีค่าสูงกว่า 25 (โดยประมาณ) แต่ละค่าของ D^2 จะมีลักษณะเหมือน ไค-สแควร์

2.8.3 การเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวน – แปรปรวนร่วม

ในกรณีของ MANOVA ซึ่งมีตัวแปรตามหลายตัว ในแต่ละกลุ่มเราต้องหาเมทริกซ์ของความแปรปรวน – แปรปรวนร่วม S (S เป็นค่าประมาณของเมทริกซ์ ความแปรปรวน – แปรปรวนร่วมของประชากรซึ่งใช้สัญลักษณ์ Σ) ถ้าข้อตกลงเบื้องต้นนี้เป็นจริง เมทริกซ์ S ในแต่ละกลุ่มต้องเท่ากันหรือใกล้เคียงกันมาก ซึ่งสถิติที่ใช้ทดสอบคือ สถิติบ๊อกซ์ (Box test) ถ้าพบว่าไม่มีนัยสำคัญแสดงว่าดำเนินการทดสอบสมมติฐานได้ แต่ถ้าพบว่ามีนัยสำคัญ เมื่อขนาดกลุ่มตัวอย่างเท่ากันควรแปลงข้อมูลเพื่อให้ได้เมทริกซ์ของความแปรปรวน-แปรปรวนร่วมที่เท่ากัน ถ้าขนาดของกลุ่มต่างกันมากให้เปรียบเทียบค่า |S| ของกลุ่มต่างๆ ว่ามีขนาดสอดคล้องกับขนาดกลุ่มหรือไม่แล้วปรับค่าระดับ α ในกรณีที่ค่า |S| และขนาดกลุ่มตัวอย่างมีลักษณะผสมซึ่งไม่เป็นไปตามระบบผลกระทบที่มีต่อ α จะไม่รุนแรงเนื่องจากมีการตัดผลกระทบกันเอง

2.9 การวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายตัวแปรสำหรับกรณีหลายแฟคเตอร์

การวิเคราะห์ความแปรปรวนในแบบแผนที่มีสองแฟคเตอร์ ทำให้ผู้วิจัยสามารถศึกษาผลร่วมของสองแฟคเตอร์ที่มีต่อตัวแปรตาม ซึ่งเรียกว่าผลของปฏิสัมพันธ์ (Interaction effect) นอกจากนี้การทดสอบผลของทรีทเม้นยังมีพาวเวอร์สูงกว่าแบบแผนแฟคเตอร์เดียว ซึ่งแบบแผนการวิเคราะห์แบบ MCRF-IJ (Multivariate completely randomized factorial design) สามารถเขียนโมเดลการวิเคราะห์ดังนี้

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (2.35)$$

โดยที่ $\varepsilon_{ijk} \sim IN(0,\Sigma)$

ตารางที่ 2.7 แสดงรูปแบบข้อมูลการวิเคราะห์แบบ MCRF-IJ

$$
\begin{bmatrix} y'_{111} \\ y'_{112} \\ y'_{121} \\ y'_{122} \\ y'_{131} \\ y'_{132} \\ y'_{211} \\ y'_{212} \\ y'_{221} \\ y'_{222} \\ y'_{231} \\ y'_{232} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1p} \\
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2p} \\
\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\
\beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\
\beta_{31} & \beta_{32} & \dots & \beta_{3p} \\
\gamma_{111} & \gamma_{112} & \cdots & \gamma_{11p} \\
\gamma_{121} & \gamma_{122} & \cdots & \gamma_{12p} \\
\gamma_{131} & \gamma_{131} & \cdots & \gamma_{13p} \\
\gamma_{211} & \gamma_{212} & \cdots & \gamma_{21p} \\
\gamma_{221} & \gamma_{222} & \cdots & \gamma_{22p} \\
\gamma_{231} & \gamma_{232} & \cdots & \gamma_{23p}
\end{bmatrix}
+ E
$$

รูปโมเดล GLM (General linear model) ในกรณีทั่วไปคือ

$$\underset{N\times p}{Y} = \underset{N\times p}{X}\ \underset{q\times p}{B} + \underset{N\times p}{E} \tag{2-36}$$

สมาชิกในแต่ละแถวในเมทริกซ์ Y คือ y'_{ijk} เป็นข้อมูล p ตัวดังนี้

$$y'_{ijk} = \left[\, y^{(1)}_{ijk} \ \dots \ y^{(p)}_{ijk} \,\right] \tag{2-37}$$

สัญลักษณ์นอกนั้นยังเหมือนเดิมเมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้ให้กับโมเดล

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0 \tag{2-38}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\beta_j = 0 \quad (2\text{-}39)$$

$$\sum_{i=1}^{I}\gamma_{ij} = 0 \quad (2\text{-}40)$$

$$\sum_{j=1}^{J}\gamma_{ij} = 0 \quad (2\text{-}41)$$

(แต่ละเวคเตอร์มีขนาด pX1)

ดังนั้นพารามิเตอร์ในโมเดลสำหรับ MCRF-IJ สามารถประมาณได้ดังนี้

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} \quad (2\text{-}42)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \quad (2\text{-}43)$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \quad (2\text{-}44)$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..} \quad (2\text{-}45)$$

ตารางที่ 2.8 แสดง MANOVA Table สำหรับแบบแผน MCRF-IJ

Source	df	SSCP
A (Row)	I-1	$SSCP_A$
B (Column)	J-1	$SSCP_B$
AB (Interaction)	(I-1)(J-1)	$SSCP_{AB}$
W (with in)	N-IJ	$SSCP_w$
Total	N-1	$SSCP_{Total}$

โดยที่ค่าของเทอม SSCP ต่างๆคำนวณได้จากสูตรดังนี้

$$SSCP_A = Jn_{ij} \sum_{i=1}^{I}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})' \qquad (2\text{-}46)$$

$$SSCP_B = In_{ij} \sum_{j=1}^{J}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})' \qquad (2\text{-}47)$$

$$SSCP_{AB} = n_{ij} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J}(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})' \qquad (2\text{-}48)$$

$$SSCP_W = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{ij}}(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{ij})(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{ij})' \qquad (2\text{-}49)$$

$$SSCP_{Total} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{ij}}(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{..})(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{..})' \qquad (2\text{-}50)$$

เทอม SSCP เหล่านี้ใช้ทดสอบสมมติฐานได้ดังนี้

สมมติฐานเกี่ยวกับปฏิสัมพันธ์ (Interaction effect)

$H_{0(AB)}$: $\gamma_{ij} = 0$ สำหรับทุกคู่ (ij)

$H_{1(AB)}$: $\gamma_{ij} \neq 0$ อย่างน้อยหนึ่งตัว

สมมติฐานเกี่ยวกับผลของแฟคเตอร์ A

$H_{0(A)}$: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I = 0$

$H_{1(A)}$: $\alpha_i \neq 0$ อย่างน้อยหนึ่งตัว

สมมติฐานเกี่ยวกับผลของแฟคเตอร์ B

$H_{0(B)}$: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_J = 0$

$H_{1(B)}$: $\beta_j \neq 0$ อย่างน้อยหนึ่งตัว

2.9.1 สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน

สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐานมีทั้งหมดสี่ตัวคือ Wilk's lambda , Roy , Layley-Hotelling และ Pillai ซึ่งสถิติทุกตัวจะให้ผลเหมือนกัน

สำหรับสถิติ Wilks' Λ นั้นใช้ likelihood ratio ซึ่งมีสูตรในการคำนวณดังนี้

$$\Lambda = \frac{|SSCP_W|}{|SSCP_{AB} + SSCP_W|} \quad \text{ใช้ทดสอบ } H_{0(AB)} \qquad (2\text{-}51)$$

$$\Lambda = \frac{|SSCP_W|}{|SSCP_A + SSCP_W|} \quad \text{ใช้ทดสอบ } H_{0(A)} \qquad (2\text{-}52)$$

$$\Lambda = \frac{|SSCP_W|}{|SSCP_B + SSCP_W|} \quad \text{ใช้ทดสอบ } H_{0(B)} \qquad (2\text{-}53)$$

และ H_0 จะถูกปฏิเสธเมื่อ Λ มีค่าต่ำ การใช้การทดสอบ likelihood นี้มีเงื่อนไขว่า $p \le IJ\ (n-1)$ เพื่อให้ $SSCP_w$ เป็น positive definite ซึ่งค่าไอเกนของเมทริกซ์นี้ทุกค่าเป็นบวก

ในกรณีกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และในแต่ละเซลล์มี n เท่ากันสถิติ Wilk's lambda สามารถประมาณเป็น ไค-สแควร์ได้ H_0 ต่างๆจะถูกปฏิเสธด้วยเงื่อนไขดังนี้

$H_{0(AB)}$ จะถูกปฏิเสธที่ระดับ α ถ้า

$$-\left[IJ(n-1)-\frac{P+1-(I-1)(J-1)}{2}\right]\ln\Lambda > {}_{\alpha}\chi^2_{p(I-1)(J-1)} \qquad (2\text{-}54)$$

$H_{0(A)}$ จะถูกปฏิเสธที่ระดับ α ถ้า

$$-\left[IJ(n-1)-\frac{P+1-(I-1)}{2}\right]\ln\Lambda > {}_{\alpha}\chi^2_{p(I-1)} \qquad (2\text{-}55)$$

$H_{0(B)}$ จะถูกปฏิเสธที่ระดับ α ถ้า

$$-\left[IJ(n-1)-\frac{P+1-(J-1)}{2}\right]\ln\Lambda > {}_{\alpha}\chi^2_{p(J-1)} \qquad (2\text{-}56)$$

เมื่อ ${}_{\alpha}\chi^2_{df}$ เป็น α เปอร์เซ็นไทล์บนของการแจกแจงไค-สแควร์ที่มี df ที่กำหนด