

## บทที่ 2

### ทฤษฎี

#### 2.1 แบบคณิตศาสตร์ของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติก

แบบคณิตศาสตร์ที่อธิบายการเปลี่ยนรูปร่างแบ่งเป็นสองแบบใหญ่ๆ คือแบบอุณหภูมิตฤษฎีเชิงสถิติ (Statistical Thermodynamics Model) และแบบปรากฏ (Phenomenological Model) แบบแรกนำเอาทฤษฎีเชิงสถิติของโมเลกุลและหลักเทอร์โมไดนามิกส์มาทำนายพฤติกรรมของโมเลกุลบางส่วนแบบที่สองใช้ผลการทดสอบแรงและการยืดตัวมากำหนดความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์

พลังงานความเครียด (Strain Energy Function,  $U$ ) เป็นพลังงานที่สะสมในเนื้อเยื่อต่อหน่วยปริมาตรขณะมีแรงภายนอกกระทำทำให้วัสดุเปลี่ยนรูป โดยกำหนดให้เป็นฟังก์ชันของความเครียดเพื่อใช้กับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การกำหนดพลังงานความเครียดที่ใช้กันมีหลายแบบที่นิยมคือในรูปแบบของพหุนาม (Polynomial Form) การกำหนดพลังงานความเครียดในรูปแบบนี้คือ (ABAQUS V5.8, 1998)

$$U = \sum_{i+j+k=0}^N C_{ijk} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 1)^k + \sum_{i+j+k=1}^N \frac{1}{D_j} (J_d - 1)^{2j} \quad (2.1)$$

เมื่อ  $U$  คือ Strain Energy Function

โดยที่  $I$  คือ Three Invariants of the Green Deformation Tensor

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

เมื่อ  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  และ  $\lambda_3$  คือ อัตราการยืดตัว (Principle Extension Ratios)

$$\begin{aligned} \text{Extension Ratio } (\lambda) &= \frac{\text{Final Length}}{\text{Original Length}} \\ &= 1 + \text{Strain } (\epsilon) \end{aligned} \quad (2.3)$$

โดยที่

$$\text{Strain}(\varepsilon) = \frac{\text{Current Length} - \text{Original Length}}{\text{Original Length}} \quad (2.4)$$

$J_{el}$  คือ อัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงของปริมาตร (Elastic Volume Ratio)

$D_j$  คือคุณสมบัติการอัดตัวไม่ได้

$C_{ijk}$  คือสัมประสิทธิ์พลังงานความเครียด

$N$  คือดีกรีของสมการ โพลีโนเมียล

สำหรับงานในการศึกษานี้ให้มีสมบัติการอัดตัวไม่ได้สูง (Fully Incompressible Material) ดังนั้นปริมาตรของวัสดุไม่มีการเปลี่ยนแปลงเมื่อได้รับแรง  $J_{el} = 1$  และ  $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 0$  สามารถเขียนสมการพลังงานความเครียดในรูปของโพลีโนเมียลได้ดังนี้

$$U = \sum_{i+j=0}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.5)$$

สมการพลังงานความเครียดในรูปแบบของโพลีโนเมียลดีกรีหนึ่งและดีกรีสองเขียนได้ดังนี้

Polynomial Form,  $N=1$  (Mooney Material Model)

$$U = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (2.6)$$

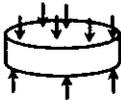
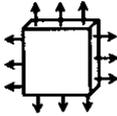
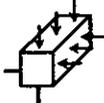
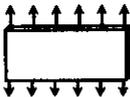
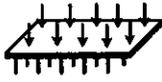
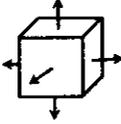
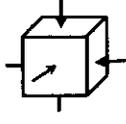
Polynomial Form,  $N=2$

$$U = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{11} (I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02} (I_2 - 3)^2 \quad (2.7)$$

## 2.2 การทดสอบสมบัติทางกลของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติก

การทดสอบสมบัติทางกลของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์พลังงานความเครียด ( $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{02}$ ) ซึ่งเป็นสมบัติเฉพาะของวัสดุแต่ละชนิด สามารถทำได้โดยนำชิ้นยางทดสอบมาทดสอบด้วยเครื่องทดสอบหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น (Stress) และอัตราการยืดตัว (Stretch Ratio) ของยางตามลักษณะการทดสอบแบบต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.1

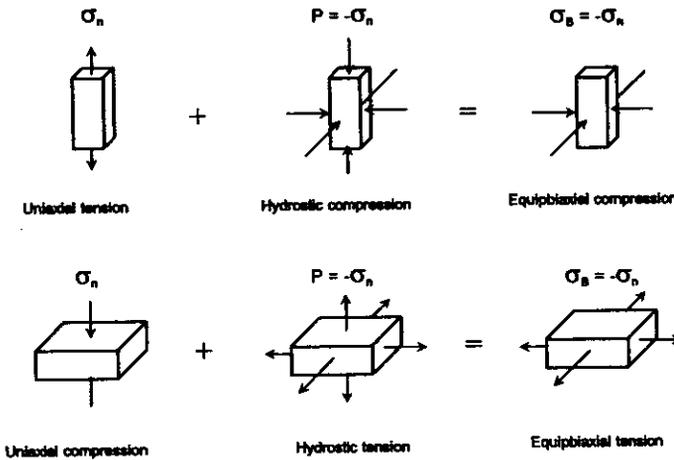
โดยความสัมพันธ์เหล่านี้นำไปกำหนดพฤติกรรมของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกในต้นแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ABAQUS V5.8, 1998)

	Tension	Compression
Uniaxial Test $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + \epsilon_U, \lambda_3 = 1/\sqrt{\lambda_U}$		
Biaxial Test $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_p = 1 + \epsilon_p, \lambda_3 = 1/\lambda_p^2$		
Planar Test $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + \epsilon_s, \lambda_3 = 1/\lambda_s$		
Volumetric Test $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_v, \frac{V}{V_0} = \lambda_v^3$		

รูปที่ 2.1 ภาพแสดงการทดสอบขางในลักษณะต่างๆ (ABAQUS V5.8, 1998)

เนื่องจากวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกส่วนใหญ่มีสมบัติการอัดตัวไม่ได้สูง (Fully Incompressible Material) ทำให้ไม่จำเป็นต้องทดสอบการอัดตัว (Volumetric Testing) และเมื่อชิ้นงานได้รับแรงในลักษณะแรงดันหรือความดัน (Hydrostatic Load) พบว่าไม่เกิดการเปลี่ยนรูป

เมื่อแรงหรือความเค้นเปลี่ยนไป ทำให้สามารถเทียบเท่าพฤติกรรมจากการทดสอบลักษณะต่างๆ ดังรูปที่ 2.2 ดังนั้นการทดสอบที่จำเป็นในการกำหนดพฤติกรรมของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกจึงประกอบด้วย การทดสอบแรงดึงในแนวแกน (Uniaxial Tension Test) การทดสอบแรงกดในแนวแกน (Uniaxial Compression Test) และ การทดสอบแรงดึงในแนวระนาบ (Planar Test)



รูปที่ 2.2 การเทียบการทดสอบเมื่อวัสดุมีสมบัติยืดตัวไม่ได้ (ABAQUS V5.8, 1998)

2.3 การหาสัมประสิทธิ์พลังงานความเครียดของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติก

จากสมการข้างต้นสามารถจัดให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ดังนี้

Uniaxial Test

$$U = U(I_1, I_2) \tag{2.8}$$

$$\sigma_U = \frac{\partial U}{\partial \lambda_U} \tag{2.9}$$

$$\sigma_U = \frac{\partial U}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_U} + \frac{\partial U}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_U} \tag{2.10}$$

เมื่อ

$$\sigma_U = \text{normal\_stress}$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2$$

และ  $\lambda_1 = \lambda_U = 1 + \varepsilon_U, \lambda_2 = \lambda_3 = 1/\sqrt{\lambda_U}$  สำหรับ Uniaxial Tension Test  
 ค้างนั้น

$$I_1 = \lambda_U^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_U}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_U}}\right)^2 \quad (2.11)$$

$$I_1 = \lambda_U^2 + \frac{2}{\lambda_U} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_U} = 2\lambda_U - \frac{2}{\lambda_U^2} \quad (2.13)$$

และ

$$I_2 = \lambda_U^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_U}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_U}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_U}}\right)^2 + \lambda_U^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_U}}\right)^2 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_U} = 2 - \frac{2}{\lambda_U^3} \quad (2.15)$$

จะนั้น

$$\sigma_U = \frac{\partial U}{\partial \lambda_U} = \frac{\partial U}{\partial I_1} \left(2\lambda_U - \frac{2}{\lambda_U^2}\right) + \frac{\partial U}{\partial I_2} \left(2 - \frac{2}{\lambda_U^3}\right) \quad (2.16)$$

$$\sigma_U = \lambda_U \frac{\partial U}{\partial I_1} \left(2 - \frac{2}{\lambda_U^3}\right) + \frac{\partial U}{\partial I_2} \left(2 - \frac{2}{\lambda_U^3}\right) \quad (2.17)$$

$$\sigma_U = 2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_U^3}\right) \left(\lambda_U \frac{\partial U}{\partial I_1} + \frac{\partial U}{\partial I_2}\right) \quad (2.18)$$

**Equipbiaxial Test**

$$2\sigma_B = \frac{\partial U}{\partial \lambda_B} \quad (2.19)$$

$$\sigma_B = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \lambda_B} = \frac{\partial U}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_B} + \frac{\partial U}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_B} \quad (2.20)$$

เมื่อ

$\sigma_B = \text{normal stress}$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2$$

และ  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_B, \lambda_3 = \lambda_B^{-2}, \lambda_B = 1 + \varepsilon_B$  สำหรับ Biaxial Tension Test  
ดังนั้น

$$I_1 = 2\lambda_B^2 + \lambda_B^{-4} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_B} = 4\lambda_B - 4\lambda_B^{-4} \quad (2.22)$$

และ

$$I_2 = 2\lambda_B^{-2} + \lambda_B^4 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_B} = -4\lambda_B^{-3} + 4\lambda_B^3 \quad (2.24)$$

ดังนั้น

$$\sigma_B = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \lambda_B} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial I_1} (4\lambda_B - \lambda_B^{-4}) + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial I_2} (-4\lambda_B^{-3} + 4\lambda_B^3) \quad (2.25)$$

$$\sigma_B = 2(\lambda_B - \lambda_B^{-5}) \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + \lambda_B^2 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) \quad (2.26)$$

**Planar Test**

$$\sigma_s = \frac{\partial U}{\partial \lambda_s} \quad (2.27)$$

$$\sigma_s = \frac{\partial U}{\partial \lambda_s} = \frac{\partial U}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_s} + \frac{\partial U}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_s} \quad (2.28)$$

เมื่อ

$$\sigma_s = \text{normal\_stress}$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2$$

และ  $\lambda_1 = \lambda_s, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_s^{-1}, \lambda_s = 1 + \varepsilon_s$  สำหรับ Planar Tension Test  
ดังนั้น

$$I_1 = I_2 = \lambda_s^2 + \lambda_s^{-2} + 1 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_s} = \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_s} = 2(\lambda_s - \lambda_s^{-3}) \quad (2.30)$$

ฉะนั้น

$$\sigma_s = \frac{\partial U}{\partial \lambda_s} = \frac{\partial U}{\partial I_1} (2\lambda_s - 2\lambda_s^{-3}) + \frac{\partial U}{\partial I_2} (2\lambda_s - 2\lambda_s^{-3}) \quad (2.31)$$

$$\sigma_s = 2(\lambda_s - \lambda_s^{-3}) \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) \quad (2.32)$$

จาก Polynomial form , N=1 (Mooney Material Model )

$$U = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (2.33)$$

พิจารณา

$$\frac{\partial U}{\partial I_1} \text{ และ } \frac{\partial U}{\partial I_2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial I_1} = \frac{\partial}{\partial I_1} [C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)] \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial U}{\partial I_1} = C_{10} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial U}{\partial I_2} = \frac{\partial}{\partial I_2} [C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)] \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial U}{\partial I_2} = C_{01} \quad (2.37)$$

**Uniaxial load**

แทน  $\frac{\partial U}{\partial I_1}$  และ  $\frac{\partial U}{\partial I_2}$  ในสมการ  $\sigma_U = 2(1 - \lambda_U^{-3}) \left( \lambda_U \frac{\partial U}{\partial I_1} + \frac{\partial U}{\partial I_2} \right)$

จะได้

$$\sigma_U = 2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda_U^3} \right) (\lambda_U C_{10} + C_{01}) \quad (2.38)$$

$$\sigma_U = 2 \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda_U} \right) \left( \lambda_U - \frac{1}{\lambda_U^2} \right) \quad (2.39)$$

**Equibiaxial load**

แทน  $\frac{\partial U}{\partial I_1}$  และ  $\frac{\partial U}{\partial I_2}$  ในสมการ  $\sigma_B = 2 \left( \lambda_B - \frac{1}{\lambda_B^3} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + \lambda_B^2 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right)$

จะได้

$$\sigma_B = 2 \left( \lambda_B - \frac{1}{\lambda_B^3} \right) (C_{10} + \lambda_B^2 C_{01}) \quad (2.40)$$

$$\sigma_B = 2(C_{10} + \lambda_B^2 C_{01}) \left( \lambda_B - \frac{1}{\lambda_B^3} \right) \quad (2.41)$$

**Planar (pure shear) load**

แทน  $\frac{\partial U}{\partial I_1}$  และ  $\frac{\partial U}{\partial I_2}$  ในสมการ  $\sigma_S = 2(\lambda_S - \lambda_S^{-3}) \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + \frac{\partial U}{\partial I_2} \right)$

จะได้

$$\sigma_S = 2(\lambda_S - \lambda_S^{-3})(C_{10} + C_{01}) \quad (2.42)$$

$$\sigma_S = 2(C_{10} + C_{01})(\lambda_S - \lambda_S^{-3}) \quad (2.43)$$

จาก Polynomial form , N=2

$$U = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 \quad (2.44)$$

พิจารณา  $\frac{\partial U}{\partial I_1}$  และ  $\frac{\partial U}{\partial I_2}$

$$\frac{\partial U}{\partial I_1} = \frac{\partial}{\partial I_1} [C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2] \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial U}{\partial I_1} = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + C_{11}(I_2 - 3) \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial U}{\partial I_2} = \frac{\partial}{\partial I_2} [C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2] \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial U}{\partial I_2} = C_{01} + C_{11}(I_1 - 3) + 2C_{02}(I_2 - 3) \quad (2.48)$$

**Uniaxial load**

แทน  $\frac{\partial U}{\partial I_1}$  และ  $\frac{\partial U}{\partial I_2}$  ในสมการ 
$$\sigma_U = 2(1 - \lambda_U^{-3}) \left( \lambda_U \frac{\partial U}{\partial I_1} + \frac{\partial U}{\partial I_2} \right)$$

จะได้

$$\sigma_U = 2(1 - \lambda_U^{-3}) [C_{10} \lambda_U + C_{01} + 2C_{20} \lambda_U (I_1 - 3) + C_{11} (I_1 - 3) + \lambda_U (I_2 - 3) + 2C_{02} (I_2 - 3)] \quad (2.49)$$

**Equibiaxial load**

แทน  $\frac{\partial U}{\partial I_1}$  และ  $\frac{\partial U}{\partial I_2}$  ในสมการ 
$$\sigma_B = 2 \left( \lambda_B - \frac{1}{\lambda_B^5} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + \lambda_B^2 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right)$$

จะได้

$$\sigma_B = 2(\lambda_B - \lambda_B^{-5}) [C_{10} + C_{01} \lambda_B^2 + 2C_{20} (I_1 - 3) + C_{11} (\lambda_B^2 (I_1 - 3) + (I_2 - 3)) + 2C_{02} \lambda_B^2 (I_3 - 3)] \quad (2.50)$$

**Planar (pure shear) load**

แทน  $\frac{\partial U}{\partial I_1}$  และ  $\frac{\partial U}{\partial I_2}$  ในสมการ 
$$\sigma_S = 2(\lambda_S - \lambda_S^{-3}) \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + \frac{\partial U}{\partial I_2} \right)$$

จะได้

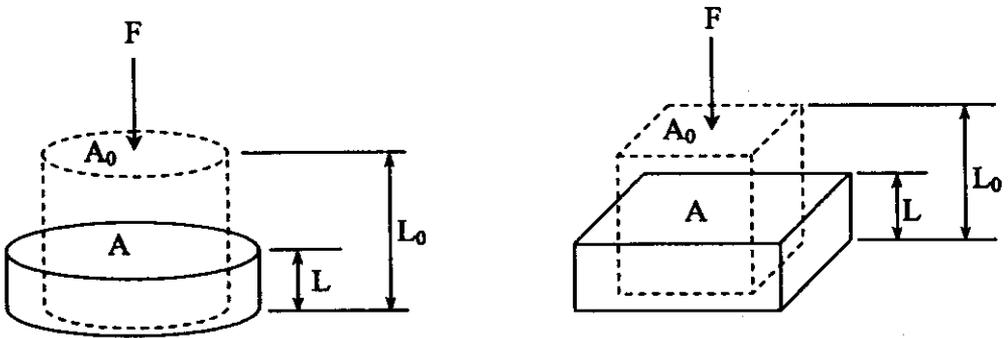
$$\sigma_S = 2(\lambda_S - \lambda_S^{-3}) [C_{10} + C_{01} + 2(C_{20} + C_{11} + C_{02})(I_1 - 3)] \quad (2.51)$$

**2.4 ความแข็งตึงของยาง**

ความแข็งตึง (Stiffness) ของยางภายใต้แรงกระทำใดๆจะขึ้นกับรูปร่างของชิ้นงาน มอดูลัสยืดหยุ่นของยาง ความเครียดภายใต้แรงกระทำและลักษณะการยึดติดของชิ้นงานโดยชิ้นงานในงานวิจัย นี้มีสองรูปทรงคือเป็นแผ่นกลมและแผ่นสี่เหลี่ยม

**ความแข็งตึงของยางที่ไม่มีการยึดติด (Free Bonding)**

ชิ้นงานยางที่รับแรงโดยชิ้นงานไม่มีการยึดติดกับวัสดุอื่น หรือที่ผิวสัมผัสกับวัสดุอื่นมีค่าความเสียดทานน้อยมากหรือเป็นศูนย์ (Free Bonding) ดังรูป 2.3



รูปที่ 2.3 การเปลี่ยนรูปชิ้นงานเมื่อได้รับแรง

ในการพิจารณาสมการเพื่อหาค่าแข็งตึงของยางที่ไม่มีกำบังค้ำคึดเมื่อรับแรงจะใช้ตัวแปรใน สมการต่างๆ ดังนี้

- $K$  คือความแข็งตึง ของยางที่สภาวะใดๆ
- $\varepsilon$  คือค่าความเครียด (Strain)
- $L_0$  คือความหนาของยางเมื่อ ไม่มีแรงกระทำ
- $L$  คือความหนาของยางเมื่อมีแรงกระทำ
- $A_0$  คือพื้นที่หน้าตัดของยางเมื่อ ไม่มีแรงกระทำ
- $x$  คือระยะการเปลี่ยนรูปในแนวแรง
- $E$  คือค่ามอดูลัสยืดหยุ่นของยางที่ความเครียดใดๆ

จากรูป 2.3 เมื่อชิ้นงานรับแรงกดสามารถหาความเครียด (Strain) ได้ดังสมการความเครียด (Strain)

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (2.52)$$

$$L - L_0 = \varepsilon L_0 \quad (2.53)$$

และระยะการเปลี่ยนรูปในแนวแรงจากสมการ

$$x = L - L_0 \quad (2.54)$$

แทนค่าในสมการ 2.53

$$x = \varepsilon L_0 \quad (2.55)$$

พิจารณาค่าแรงที่กระทำกับชิ้นยางดังสมการ

$$F = \sigma A_0 \quad (2.56)$$

พิจารณาค่าความแข็งดึงจากสมการ

$$F = K x \quad (2.57)$$

$$K = \frac{F}{x} \quad (2.58)$$

แทนค่า  $F$  จากสมการ 2.56 และ  $x$  จากสมการ 2.55 ในสมการ 2.58

$$K = \frac{\sigma A_0}{\varepsilon L_0} \quad (2.59)$$

จะได้ค่าความแข็งดึง ของยางที่ความเครียดใดๆ ของชิ้นงานที่เชื่อมต่อบนแบบ Free Bonding

$$K = \frac{E A_0}{L_0} \quad (2.60)$$

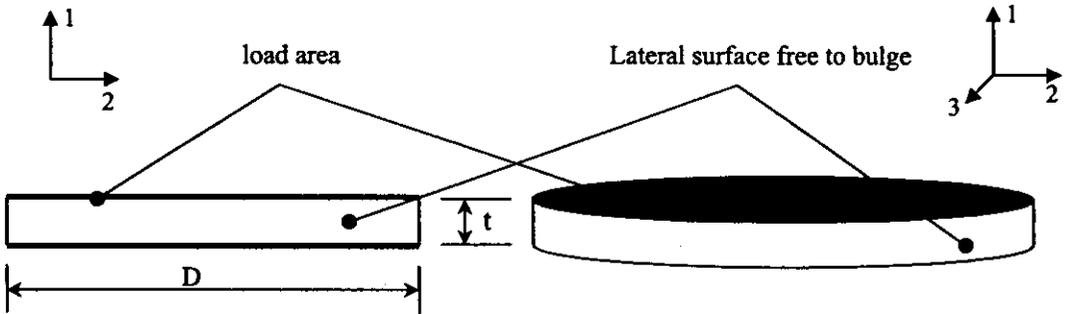
เมื่อ  $E$  คือ Secant Modulus

จากสมการที่ 2.60 พบว่าค่าความแข็งดึงของยางที่ความเครียดใดๆ จะขึ้นอยู่กับค่า  $A_0 / L_0$  ซึ่งเป็นรูปทรงเริ่มต้นของชิ้นยาง

## 2.5 ตัวประกอบรูปทรง (Shape Factor)

ตัวประกอบรูปทรงหรือ Shape Factor ของชิ้นงานยางคือ อัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของชิ้นงานส่วนที่รับแรง (Load Area) และพื้นที่ด้านข้างชิ้นงานส่วนที่ไม่รับแรงและเกิดการเปลี่ยนรูป (Lateral Surface Free to Bulge) (M. Imbimbo, 1998) ตัวประกอบรูปทรงของชิ้นงานยางแบบ

แผ่นกลม ดังรูปที่ 2.4 สามารถหาได้ตามสมการที่ 2-61 และ 2-62 และ ตัวประกอบรูปทรงของ  
ชิ้นงานยางแบบแผ่นสี่เหลี่ยม ดังรูปที่ 2.5 สามารถหาได้ตามสมการที่ 2-63 และ 2-64



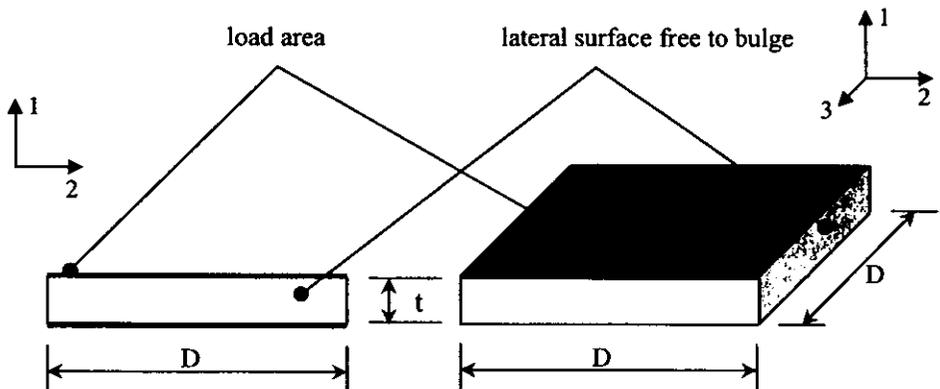
รูปที่ 2.4 ตัวประกอบรูปทรง ของชิ้นงานยางแบบแผ่นกลม

$$\text{Shape factor } (S) = \frac{\text{load area}}{\text{lateral surface free to bulge}}$$

$$S = \frac{\pi D^2 \cdot 1}{4 \pi D t} \quad (2-61)$$

$$S = \frac{D}{4t} \quad (2-62)$$

เมื่อ  $S$  คือ Shape Factor,  $D$  คือ เส้นผ่าศูนย์กลาง และ  $t$  คือความหนา



รูปที่ 2.5 ตัวประกอบรูปทรงของชิ้นงานยางแบบแผ่นสี่เหลี่ยม

$$\text{Shape factor } (S) = \frac{\text{load area}}{\text{lateral surface free to bulge}}$$

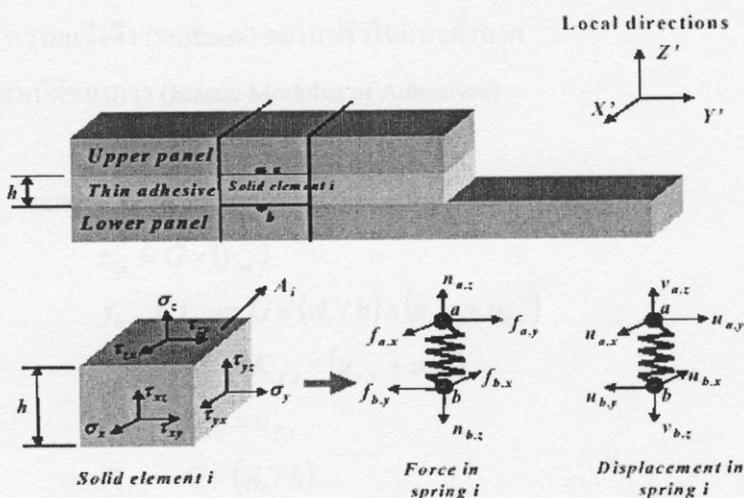
$$S = \frac{D^2}{4Dt} \tag{2-63}$$

$$S = \frac{D}{4t} \tag{2-64}$$

เมื่อ  $S$  คือ Shape Factor,  $D$  คือ ความกว้าง ยาวของชิ้นงาน และ  $t$  คือความหนา

### 2.6 การกำหนดสมบัติของชั้นกาวบาง

การกำหนดสมบัติของชั้นกาวบางเมื่อนำมาใช้ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ถูกนำมาใช้ โดยหลักการที่เรียกว่า TALA (Charoenyut Dechwayukul, 2003) คือชั้นกาวดังแสดงในรูปที่ 2.6 จะถูกเปลี่ยนเป็นสปริงเอลิเมนต์หลายๆตัว ที่สามารถจำลองพฤติกรรมจริงของชั้นกาวได้ ความเค้น ความเครียดที่เกิดขึ้นในชั้นกาวบางถูกเปลี่ยนเป็นแรงและการเคลื่อนตัวระหว่างผิวที่ต่อกันด้วยการเปลี่ยนทำได้เมื่อรู้พื้นที่ผิวสัมผัสและความหนาของชั้นกาว เมื่อสมมุติว่าชั้นกาวมีความบางมาก ค่าของ  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  และ  $\gamma_{yx}$  มีค่าน้อยมากสามารถละทิ้งได้



รูปที่ 2.6 แสดงการเปลี่ยนชั้นกาวเป็นสปริงเอลิเมนต์

จะมีเฉพาะ  $\sigma_z, \tau_{zx}$  และ  $\tau_{zy}$  เท่านั้นที่กระทำบนพื้นที่  $A_i$  ของสปริงที่ต่อระหว่างจุด  $a$  และ  $b$  ความเค้นในแนวตั้งฉากกับผิว  $\sigma_z$  จะถูกเปลี่ยนเป็นแรงในแนวตั้งฉากกับพื้นที่ผิว ขณะที่  $\tau_{zx}$  และ  $\tau_{zy}$  ถูกเปลี่ยนเป็นแรงเฉือนในแนวขนานกับผิว  $\epsilon_z, \gamma_{zy}, \gamma_{zx}$  จะถูกเปลี่ยนเป็น

การเคลื่อนตัวของสปริงในแนวตั้งฉากกับผิวและในแนวเฉียงตามลำดับ ซึ่งรูปแบบของสมการที่ใช้ในการเปลี่ยนความเค้นและความเครียดในเอลิเมนต์สามมิติของชั้นกาวบางไปเป็นแรงและการเคลื่อนที่ในสปริงเอลิเมนต์ สามารถอธิบายได้ด้วยกฎของ ฮุก ดังสมการ 2.65 ถึง 2.74

$$\sigma_z = E \times (\varepsilon_z) \quad (2.65)$$

$$n_{a,x} + n_{b,x} = E \times (A_i / h) \times (v_{a,x} + v_{b,x}) \quad (2.66)$$

$$n_{a,x} + n_{b,x} = K_{n,i} \times (v_{a,x} + v_{b,x}) \quad (2.67)$$

$$F_{n,i} = K_{n,i} \times v_{n,i} \quad (2.68)$$

$$K_{n,i} = E \times (A_i / h) \quad (2.69)$$

เมื่อ

$F_{n,i}$  คือ แรงลัพธ์ในสปริงในแนวตั้งฉาก

$n$  คือ แรงในสปริงในแนวตั้งฉาก

$v_{n,i}$  คือ การเคลื่อนตัวของสปริงในแนวตั้งฉาก

$K_{n,i}$  คือ ความแข็งตึง (Stiffness) ของสปริงในแนวตั้งฉาก

$E$  คือ สมบัติของกาว (Elastic Modulus of Adhesives)

$\tau_x$  และ  $\tau_y$  จะเท่ากันทั้งนี้วัสดุเป็นแบบไอโซโทรปิก (Isotropic);

$$\tau_x = G \times (\gamma_x) \quad (2.70)$$

$$f_{a,x} + f_{b,x} = G \times (A_i / h) \times (u_{a,x} + u_{b,x}) \quad (2.71)$$

$$f_{a,x} + f_{b,x} = K_{f,i} \times (u_{a,x} + u_{b,x}) \quad (2.72)$$

$$F_{f,i} = K_{f,i} \times u_{f,i} \quad (2.73)$$

$$K_{f,i} = G \times (A_i / h) \quad (2.74)$$

เมื่อ

$F_{f,i}$  คือ แรงลัพธ์ในสปริงในแนวเฉียง

$f$  คือ แรงในสปริงในแนวเฉียง

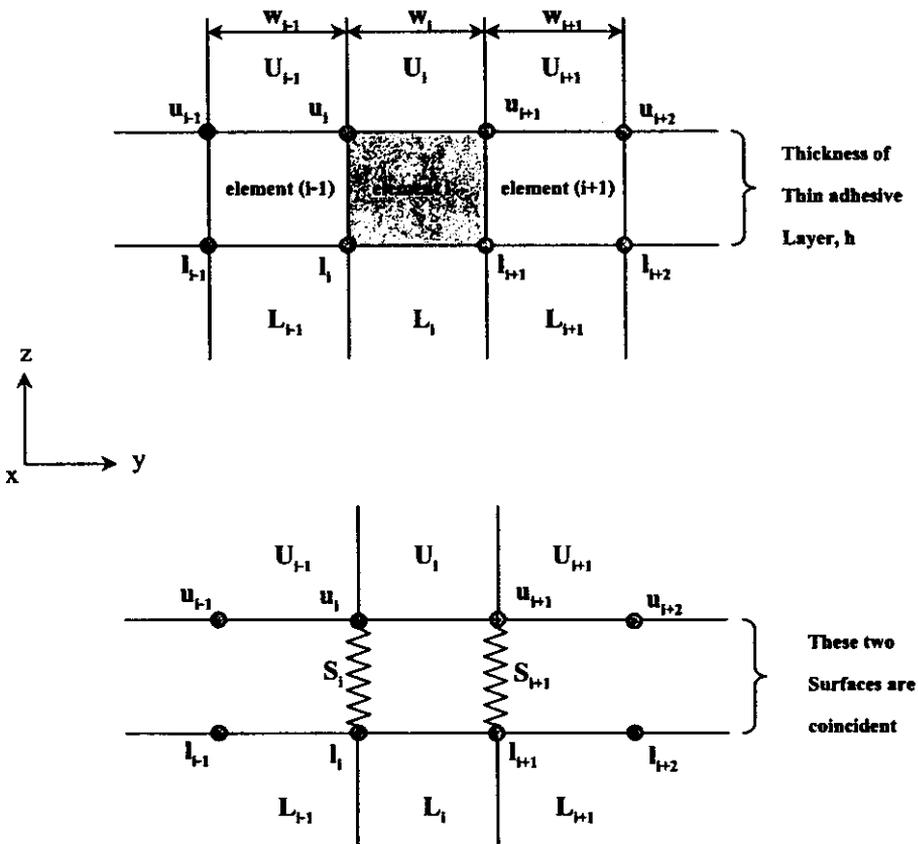
$u_{f,i}$  คือ การเคลื่อนตัวของสปริงในแนวเฉียง

$K_{f,i}$  คือ ความแข็งตึงเฉือน (Shear Stiffness) ของสปริงในแนวเฉียง

$G$  คือ สมบัติยืดหยุ่นเฉือนของกาว (Shear Modulus of Adhesives)

## 2.7 การเปลี่ยนทาวเป็นสปริงเอลิเมนต์ในแบบจำลองสองมิติ

การเปลี่ยนเอลิเมนต์ของชั้นทาวบางเป็นสปริงเอลิเมนต์ในแบบจำลองสองมิติ ทำโดยเปลี่ยนเอลิเมนต์ของทาวบางหนึ่งตัวให้เป็นสปริงเอลิเมนต์สองตัว ดังแสดงในรูปที่ 2.7 ซึ่งจะเปลี่ยน Element  $i$  ของทาวบางซึ่งเชื่อมต่อระหว่างเอลิเมนต์  $U_i$  และ  $L_i$  เป็นสปริง  $S_i$  และ  $S_{i+1}$  โดยสปริง  $S_i$  จะประกอบด้วยสปริงเอลิเมนต์สองตัวแสดงพฤติกรรมจริงของชั้นทาวในสองทิศทาง ( $z$  and  $y$  direction) เชื่อมต่อระหว่างโนด  $u_i$  และ  $l_i$  สำหรับสปริง  $S_{i+1}$  ประกอบด้วยสปริงเอลิเมนต์สองตัวเชื่อมต่อระหว่างโนด  $u_{i+1}$  และ  $l_{i+1}$  สปริง  $S_i$  มีพื้นที่รับแรง  $A_i$  และสปริง  $S_{i+1}$  มีพื้นที่รับแรง  $A_{i+1}$  คำนวณได้ดังสมการ 2.75 และ 2.76



รูปที่ 2.7 การเปลี่ยนเอลิเมนต์ของชั้นทาวบางเป็นสปริงเอลิเมนต์ในแบบจำลองสองมิติ

เมื่อ

$$A_i = \left( \frac{w_{i-1}}{2} + \frac{w_i}{2} \right) \times d \quad (2.75)$$

$$A_{i+1} = \left( \frac{w_i}{2} + \frac{w_{i+1}}{2} \right) \times d \quad (2.76)$$

เมื่อ  $w$  คือความกว้างของเอลิเมนต์ในทิศทางแกน  $y$

$d$  คือความลึกของเอลิเมนต์ในทิศทางแกน  $x$  ซึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่งหน่วย

## 2.8 การเปลี่ยนทแยงเป็นสปริงเอลิเมนต์ในแบบจำลอง 3 มิติ

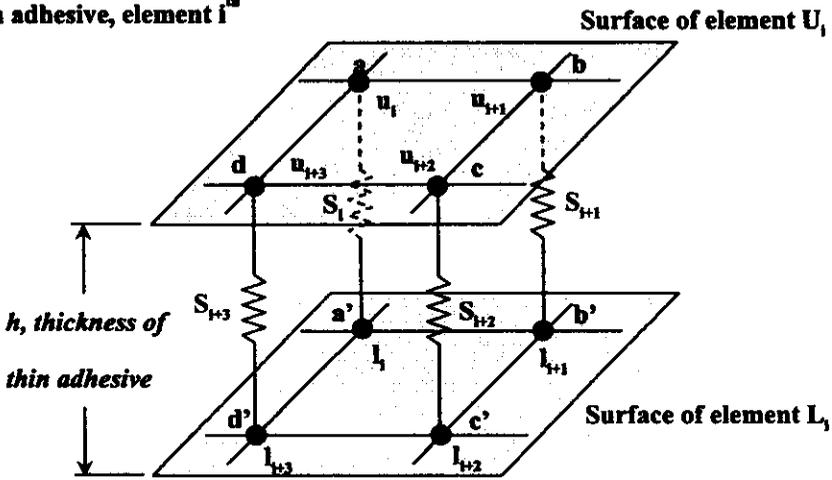
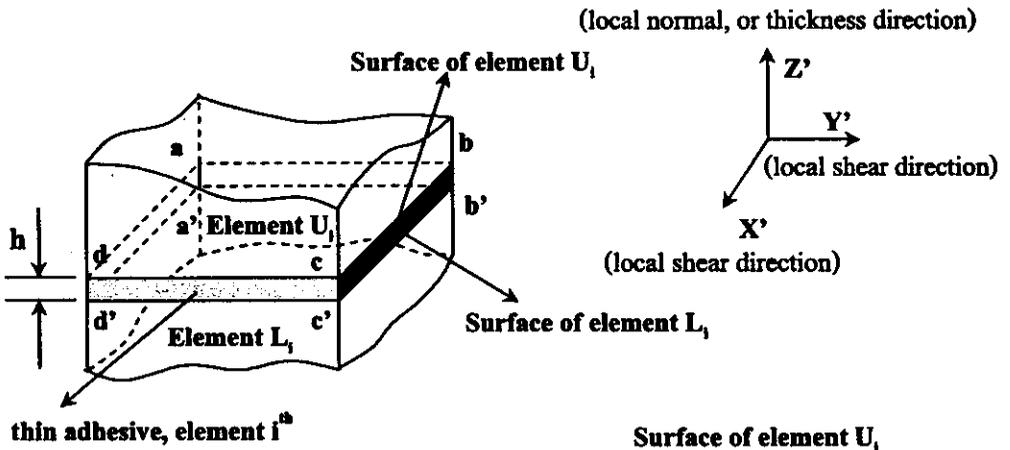
การเปลี่ยนเอลิเมนต์ของชั้นทแยงบางเป็นสปริงเอลิเมนต์ในแบบจำลองสามมิติ ทำโดยเปลี่ยนเอลิเมนต์ของทแยงบางหนึ่งตัวให้เป็นสปริงเอลิเมนต์สี่ตัว ดังแสดงในรูปที่ 2.8 โดยที่จุดบนผิวสัมผัส  $a-b-c-d$  ของ Element  $U_i$  จะเชื่อมต่อกับจุดบนผิวสัมผัส  $a'-b'-c'-d$  ของ Element  $L_i$  ด้วยชั้นทแยงบาง Element  $i$  ของทแยงบางซึ่งจะถูกเปลี่ยน เป็นสปริง  $S_i, S_{i+1}, S_{i+2}, S_{i+3}$  และ  $S_{i+4}$  โดยสปริง  $S_i$  จะประกอบด้วยสปริงเอลิเมนต์สามตัวแสดงพฤติกรรมจริงของชั้นทแยงในสามทิศทาง ประกอบด้วยทิศตั้งฉากกับพื้นที่ผิว ( $z$  direction) และขนาดกับผิวสัมผัส ( $x$  and  $y$  direction) สปริง  $S_i$  เชื่อมต่อระหว่างโนด  $u_i$  และ  $l_i$  มีพื้นที่รับแรง  $A_i$  สำหรับสปริง  $S_{i+1}$  เชื่อมต่อระหว่างโนด  $u_{i+1}$  และ  $l_{i+1}$  สปริง  $S_{i+2}$  มีพื้นที่รับแรง  $A_{i+1}$  เชื่อมต่อระหว่างโนด  $u_{i+2}$  และ  $l_{i+2}$  มีพื้นที่รับแรง  $A_{i+2}$  สปริง  $S_{i+3}$  เชื่อมต่อระหว่างโนด  $u_{i+3}$  และ  $l_{i+3}$  มีพื้นที่รับแรง  $A_{i+3}$  ตามลำดับ โดยพื้นที่ของสปริงแต่ละตัวคำนวณได้ดังสมการ 2.77 ถึง 2.80

$$A_i = \frac{D_i}{4} + \frac{D_{i+1}}{4} + \frac{D_{i+2}}{4} + \frac{D_{i+4}}{4} \quad (2.77)$$

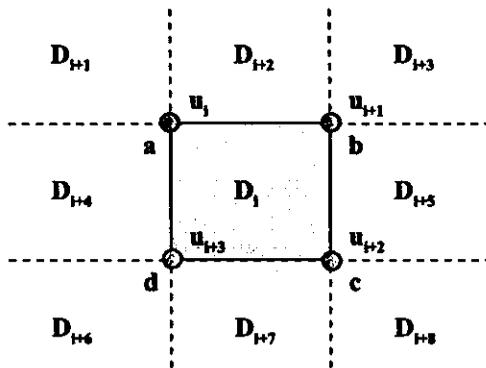
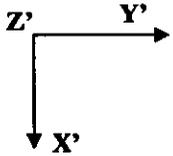
$$A_{i+1} = \frac{D_i}{4} + \frac{D_{i+2}}{4} + \frac{D_{i+3}}{4} + \frac{D_{i+5}}{4} \quad (2.78)$$

$$A_{i+2} = \frac{D_i}{4} + \frac{D_{i+5}}{4} + \frac{D_{i+7}}{4} + \frac{D_{i+8}}{4} \quad (2.79)$$

$$A_{i+3} = \frac{D_i}{4} + \frac{D_{i+4}}{4} + \frac{D_{i+6}}{4} + \frac{D_{i+7}}{4} \quad (2.80)$$



Local direction



รูปที่ 2.8 การเปลี่ยนเอลิเมนต์ของชั้นกาวบางเป็นสปริงเอลิเมนต์ในแบบจำลองสามมิติ

## 2.9 การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

หลักการทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือการแบ่งโครงสร้างออกเป็นส่วนย่อยๆ ซึ่งเรียกว่าไฟไนต์เอลิเมนต์ ฟังก์ชันการกระจัด (Displacement Function) ที่จะนำมาแทนเอลิเมนต์ จะต้องเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง แต่ละเอลิเมนต์จะโยงกันด้วยจุดต่อ (Node) หรือเส้นขอบหรือผิวรอบเอลิเมนต์สัมผัสกัน โดยอาศัยสมบัติทางกลของวัสดุที่ใช้ทำโครงสร้างหรือชิ้นงาน สามารถหาการกระจัด ความเค้น และความเครียด ที่เกิดขึ้นที่จุดต่อต่างๆ ของแต่ละเอลิเมนต์ที่ประกอบเป็นโครงสร้างหรือชิ้นงาน

เคช พุทธเจริญทอง (1998) ได้กล่าวถึงขั้นตอนต่างๆของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ โครงสร้างหรือชิ้นงานโดยทั่วไปดังนี้

### 2.9.1 การแบ่งโครงสร้างเป็นเอลิเมนต์ย่อยและการเลือกชนิดของเอลิเมนต์

การแบ่งโครงสร้างหรือชิ้นงานออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยจะต้องคำนึงถึงรูปร่างลักษณะของโครงสร้างหรือชิ้นงานเดิมคือ แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Model) จะต้องเหมือนหรือสอดคล้องกับโครงสร้างหรือชิ้นงานเดิมให้มากที่สุด คือบริเวณที่เป็นส่วนเว้า ส่วนโค้ง หรือมีรู หรือตรงบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างฉับพลันก็จำเป็นต้องแทนด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กเพียงพอที่จะให้ผลการวิเคราะห์ได้ถูกต้องแม่นยำ ส่วนบริเวณที่ไม่มีมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมากนักก็อาจจะแทนด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น แต่ถ้าแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยเอลิเมนต์จำนวนมากเกินความจำเป็นก็จะทำให้ค่าใช้จ่ายในการคำนวณสูง และอาจจะทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ถ้าเครื่องคอมพิวเตอร์มีความละเอียดในการคำนวณไม่เพียงพอ ส่วนการเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์นั้น จะต้องคำนึงถึงรูปร่างลักษณะของโครงสร้างหรือชิ้นงาน และการกระทำของโหลด รวมทั้งความละเอียดของผลเฉลยที่ต้องการวิเคราะห์ คืออาจจะเลือกใช้เอลิเมนต์ชนิดมิติเดียว สองมิติ หรือสามมิติ

### 2.9.2 การเลือกฟังก์ชันการกระจัด

จะต้องเลือกฟังก์ชันการกระจัดภายในเอลิเมนต์ ให้สอดคล้องกับจำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์ หรือสอดคล้องกับระดับความเสรีของเอลิเมนต์ ฟังก์ชันการกระจัดที่นิยมใช้กันคือ โพลีโนเมียลฟังก์ชัน ซึ่งอาจจะเป็นพอลิโนเมียลกำลังหนึ่ง กำลังสอง หรือกำลังสาม ส่วนฟังก์ชันที่เป็นอนุกรมทางเรขาคณิตก็สามารถเลือกใช้ได้แต่ไม่เป็นที่นิยม ทั้งนี้เพราะโพลีโนเมียลฟังก์ชันให้ความสะดวกในการวิเคราะห์มากกว่า

### 2.9.3 กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด/การกระจัด และความเค้น/ความเครียด

การหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์ จำเป็นต้องอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัดและความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด ในกรณีปัญหามิติเดียว การยืดตัว  $u$  ของเอลิเมนต์ในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง เช่นทิศทาง  $x$  จะมีความสัมพันธ์กับความเครียด  $\varepsilon_x$  ในกรณีที่  $\varepsilon_x$  มีค่าน้อย,  $\varepsilon_x = du/dx$  และถ้าวัสดุอยู่ในช่วงยืดหยุ่น จากกฎของฮุก ความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดคือ  $\sigma_x = E\varepsilon_x$  ซึ่ง  $\sigma_x$  คือความเค้นในทิศทาง  $x$  และ  $E$  คือมอดูลัสของความยืดหยุ่น ผลเฉลยของการกระจัด, ความเค้น, ความเครียดโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะถูกต้องแม่นยำเพียงใด ย่อมขึ้นกับสมบัติทางกลของวัสดุที่นำมาใช้ในการคำนวณ และความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด และความเค้นกับความเครียดจะมีลักษณะเป็นสมการเชิงเส้นและไม่เป็นสมการเชิงเส้น

### 2.9.4 หาสมการพีเนสมตริกซ์และสมการของเอลิเมนต์

การหาสมการพีเนสมตริกซ์ของเอลิเมนต์และสมการของแรงของแต่ละเอลิเมนต์สามารถทำได้หลายวิธีเช่น

#### ก. วิธีสมดุลโดยตรง (Direct Equilibrium Method)

วิธีสมดุลโดยตรงนี้เป็นวิธีที่ง่ายที่สุด สามารถหาสมการพีเนสมตริกซ์และสมการของแรงในเทอมการกระจัดที่จุดต่อของเอลิเมนต์ได้โดยเงื่อนไขการสมดุลของแรงในเอลิเมนต์ส่วนมากจะใช้หาสมการพีเนสมตริกซ์ของเอลิเมนต์มิติเดียว เช่น เอลิเมนต์สปริง, ท่อนโลหะ, เพล่าและคานเป็นต้น

#### ข. วิธีงานหรือพลังงาน (Work or Energy Method)

โดยอาศัยหลักของงานสมมุติ (Principle of Virtual Work), และหลักของพลังงานศักย์ต่ำสุด (Principle of Minimum Potential Energy) และทฤษฎีของแคสติกลีโย (Castigliano's Theorem) ก็จะสามารถหาสมการของเอลิเมนต์และหาสมการพีเนสมตริกซ์ของเอลิเมนต์สองและสามมิติได้โดยสะดวก สำหรับวิธีของงานสมมุตินั้นสามารถใช้หาสมการพีเนสมตริกซ์ของเอลิเมนต์ของวัสดุทุกชนิดและวิธีพลังงานต่ำสุดและทฤษฎีของแคสติกลีโย ใช้หาสมการพีเนสมตริกซ์ของเอลิเมนต์ของวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นเท่านั้น อย่างไรก็ตามทั้งสามหลักการสามารถใช้หาสมการพีเนสมตริกซ์ของเอลิเมนต์ของวัสดุยืดหยุ่นได้เหมือนกัน

#### วิธีเวทเรซิดิว (Method of Weighted Residuals)

วิธีเวทเรซิดิวที่นิยมกันมากคือวิธีของกาเลอร์กิน (Galerkin's Method) ซึ่งมีประโยชน์มากสำหรับการหาสมการของเอลิเมนต์และให้ผลเช่นเดียวกับวิธีพลังงาน ส่วนมากจะนิยมใช้ในกรณีที่วิธี

พลังงานศักย์ต่ำสุดใช้ไม่สะดวก เช่นปัญหาการไหลของของเหลว การถ่ายเทความร้อน การเคลื่อนมวล เป็นต้น

โดยอาศัยวิธีใดวิธีหนึ่งจากสามวิธีสามารถสร้างสมการสมดุลของแรงในเทอมของสทิฟเนสเมตริกซ์ และการกระจัดที่จุดต่อของเอลิเมนต์ สมการดังกล่าวสามารถจะเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & \dots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

หรือ

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (2.82)$$

ซึ่ง  $\{f\}$  คือเมทริกซ์ของแรงที่กระทำที่จุดต่อ,  $[k]$  คือสทิฟเนสของเอลิเมนต์ และ  $\{d\}$  คือการกระจัดที่จุดต่อซึ่งยังไม่ทราบค่า,  $n$  คือจำนวนของระดับความเสรีของเอลิเมนต์

### 2.9.5 หาสมการรวมของระบบและการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

สมการรวมของระบบโครงสร้างสามารถหาได้จาก การรวมสมการของแต่ละเอลิเมนต์ เข้าด้วยกัน ด้วยวิธีซ้อนทับ (Superposition Method) หรือเรียกว่าวิธีสทิฟเนสโดยตรง (Direct Stiffness Method) โดยอาศัยหลักการของสมดุลแรงที่จุดต่อของเอลิเมนต์ และการต่อเนื่องของโครงสร้าง สมการรวมของระบบโครงสร้างที่ได้รับ เขียนในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (2.83)$$

ซึ่ง  $\{F\}$  คือเมทริกซ์รวมของแรงที่จุดต่อ,  $[K]$  คือสทิฟเนสเมตริกซ์รวมของระบบ และ  $\{d\}$  คือเมทริกซ์รวมของการกระจัดของระบบซึ่งอาจจะทราบค่าบางค่า และบางตัวอาจจะไม่ทราบค่า เนื่องจากเมทริกซ์  $[K]$  ในสมการ 2.83 เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) ทั้งนี้เพราะตัวกำหนด (Determinant) เท่ากับศูนย์ จึงไม่สามารถจะหาค่า  $\{d\}$  โดยตรงจากสมการ 2.83 ได้ จึงจำเป็นต้องอาศัยเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) หรือเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เพื่อช่วย

ให้เมทริกซ์  $[K]$  ในสมการ 2.83 ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน และสามารถหาค่าการกระจัดที่แต่ละจุดต่อที่ต้องการได้

### 2.9.6 การหาการกระจัดของระบบ

หลังจากกำหนดเงื่อนไขขอบ หรือเงื่อนไขบังคับ ลงในสมการ 2.83 แล้ว สามารถจะหาการกระจัด  $d_1, d_2, \dots, d_n$  ได้โดยการแก้สมการพีชคณิตพร้อม ๆ กันคือ

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & \dots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (2.84)$$

การหาการกระจัด  $\{d\}$  อาจจะใช้วิธีของเกาส์ (Gauss's Elimination Method) หรือวิธีสมมุติการกระจัด  $\{d\}$  (Iteration Method) หรือการกระจัด  $\{d\}$  อาจหาได้โดยการคูณสมการ 2.84 ด้วย  $[K]^{-1}$  ตลอด

### 2.9.7 การหาค่าความเครียดและความเค้น

ในการวิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกล นอกจากทราบค่าการกระจัดแล้วยังต้องทราบค่าของความเครียด, ความเค้น หรือโมเมนต์ และแรงเฉือน ค่าต่าง ๆ เหล่านี้สามารถคำนวณหาโดยอาศัยพื้นฐานความรู้ทางกลศาสตร์ของแข็ง อาทิในปัญหามิติเดียว ถ้าทราบค่าการกระจัด  $u$  ก็สามารถหาความเครียดจาก  $\epsilon_x = du/dx$  และ หาความเค้นจาก  $\sigma_x = E\epsilon_x$  เป็นต้น

### 2.9.8 การตีความผลลัพธ์

จากผลที่คำนวณได้ข้างต้น สามารถทราบได้ว่าที่จุดต่อโคของเอลิเมนต์ หรือบริเวณโคของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนที่จะต้องให้ความสนใจเป็นพิเศษ เช่น บริเวณที่มีการกระจัดสูง หรือบริเวณที่มีความเค้นสูง ลักษณะของการกระจัด และความเค้นนั้นได้อย่างไร ทั้งนี้จะต้องเปลี่ยนรูปร่างลักษณะหรือมิติของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนให้เหมาะสมยิ่งขึ้น หรือจะต้องเลือกวัสดุชนิดอื่นที่เหมาะสมกว่า