

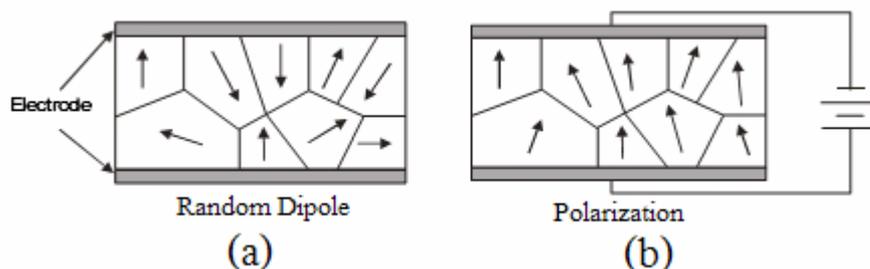
บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 ทฤษฎีและหลักการทำงาน

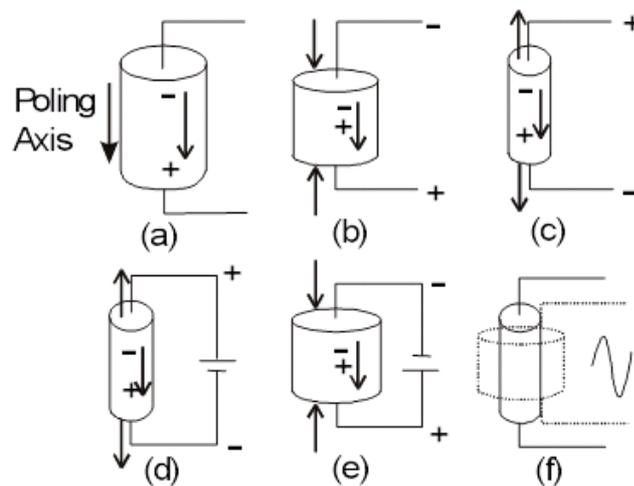
การเกิดคลื่นเคลื่อนที่ของมอเตอร์อัลตราโซนิกอาศัยการทำงานของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกบนสเตเตอร์ ที่เกิดจากการกระตุ้นด้วยสัญญาณไฟฟ้าซึ่งจะทำให้เกิดการสั่นสะเทือนและเกิดคลื่นเคลื่อนที่ขึ้น (Sashida et al., 1993), (Uchino et al., 1997) เนื่องจากตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกมีคุณสมบัติคือ เมื่อได้รับการกระตุ้นจากไฟฟ้าก็จะทำให้เกิดการยืดหดตัว (Mracek et al., 2005), (Ko et al., 2005) ดังนั้นเมื่อนำไปติดบนสเตเตอร์ในรูปแบบที่เหมาะสมต่อการเกิดคลื่นเคลื่อนที่ และกระตุ้นด้วยสัญญาณทางไฟฟ้ามีผลทำให้สเตเตอร์เกิดการยืดหดตัว เป็นผลทำให้เกิดการสั่นสะเทือนเกิดขึ้นซึ่งทำให้เกิดคลื่นเคลื่อนที่ ดังนั้นคลื่นเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นจึงมีผลมาจากรูปแบบการจัดวางตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกบนสเตเตอร์นั่นเอง (Frangi et al., 2005), (Giraud et al., 2004)

วัสดุเพียโซอิเล็กทริกที่จะนำมาใช้เป็นตัวทำงานในมอเตอร์อัลตราโซนิก จะต้องผ่านกระบวนการโพลิง (poling) เสียก่อน เพราะกระบวนการโพลิงเป็นการทำให้โดเมนต่างๆ ของตัวทำงานชี้ไปทิศทางเดียวกันกับสนามไฟฟ้าที่ป้อนให้แก่สารในระหว่างโพลิงหากไม่ผ่านกระบวนการดังกล่าวจะไม่สามารถนำมาใช้เป็นตัวทำงานได้ ภาพประกอบที่ 2.1 แสดงลักษณะของโดเมนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกที่ยังไม่ผ่านกระบวนการโพลิง (a) และผ่านกระบวนการโพลิงแล้ว (b)



ภาพประกอบที่ 2.1 a) แสดงลักษณะของโดเมนที่ยังไม่ได้ทำการโพลิง b) แสดงลักษณะการจัดเรียงตัวของโดเมนหลังการโพลิง

วัสดุเพียโซอิเล็กทริกมีคุณสมบัติคือ เมื่อได้รับแรงกระทำก็จะปลดปล่อยประจุไฟฟ้าออกมา ปรากฏการณ์นี้เรียกว่าปรากฏการณ์เพียโซอิเล็กทริกแบบตรง (direct piezoelectric effect) ในทางกลับกันหากได้รับการกระตุ้นจากไฟฟ้าจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดเรียกปรากฏการณ์นี้ว่าปรากฏการณ์เพียโซอิเล็กทริกแบบย้อนกลับ (converse piezoelectric effect) (Tzou, 1993) จากพฤติกรรมดังกล่าวสามารถที่จะนำปรากฏการณ์เพียโซอิเล็กทริกแบบย้อนกลับมาประยุกต์ใช้เป็นตัวทำงานในมอเตอร์อัลตราโซนิกได้ ภาพประกอบที่ 2.2 แสดงพฤติกรรมของวัสดุเพียโซ-อิเล็กทริกเมื่อได้รับการกระตุ้นจากไฟฟ้าและแรงที่กระทำ



ภาพประกอบที่ 2.2 a) แสดงทิศทางของโดเมน b) แท่งเพียโซอิเล็กทริกจะหดตัวเมื่อถูกกระตุ้นด้วยไฟฟ้าลบ
 c) แท่งเพียโซอิเล็กทริกจะยืดตัวเมื่อถูกกระตุ้นด้วยไฟฟ้าบวก
 d) แท่งเพียโซอิเล็กทริกจะยืดตัวเมื่อถูกดึง และปลดปล่อยไฟฟ้าออกมา
 e) แท่งเพียโซอิเล็กทริกจะหดตัวเมื่อถูกกดและปลดปล่อยไฟฟ้าออกมา
 f) แสดงสัญญาณไฟฟ้าที่ออกจากวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเมื่อถูกแรงกระทำ
 (ที่มา: <http://www.aurelienr.com/electronique/piezo/piezo.pdf>)

2.2 วัสดุเพียโซอิเล็กทริก

ปรากฏการณ์เพียโซอิเล็กทริกเกี่ยวข้องกับคุณสมบัติทางกลและทางไฟฟ้าของวัสดุ กล่าวคือ เมื่อให้ความเค้นกลแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะเกิดการกระตุ้นทางไฟฟ้าขึ้นในทางกลับกันเมื่อให้

สนามไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะเหนี่ยวนำให้เกิดความเครียดเกิดขึ้น ความสัมพันธ์เหล่านี้ดังแสดงในสมการ

$$D = dT + \epsilon^T E \quad (1)$$

$$S = s^E T + dE \quad (2)$$

เมื่อ

D คือการกระจัดทางไฟฟ้า (electric displacement) มีหน่วยเป็น m

T คือความเค้นกล (mechanical stress) มีหน่วยเป็น N/m^2

S คือความเครียดกล (mechanical strain)

E คือสนามไฟฟ้า (electric field) มีหน่วยเป็น V/m

d คือค่าคงที่เพียโซอิเล็กทริก (piezoelectric coefficient) มีหน่วยเป็น V/m

s^E คือค่าคงที่ยืดหยุ่น (elastic constant or elastic compliance) มีหน่วยเป็น m^2/N ภายใต้สนามไฟฟ้าคงที่

ϵ^T คือสภาพยอมทางไฟฟ้า (relative permittivity) มีหน่วยเป็น F/m

จากสมการที่ (1) และ (2) เมื่อวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ในที่นี้ให้ $E = 0$ สมการที่ (1) ลดรูปลงเหลือ

$$D = dT \quad (3)$$

ทำนองเดียวกันกับสมการที่ (2) กรณีที่ความเค้นกลมีค่าคงที่หรือมีค่าเป็นศูนย์ สมการที่ (2) ลดรูปลงเหลือ

$$S = dE \quad (4)$$

ค่าคงที่เพียโซอิเล็กทริก d ในสมการที่ (3) และสมการที่ (4) เป็นค่าคงที่เพียโซอิเล็กทริกที่ได้จากปรากฏการณ์เพียโซอิเล็กทริกแบบตรงและแบบผกกลับและถ้าหากสารตัวอย่างไม่มีสมบัติเพียโซอิเล็กทริก ($d=0$) สมการที่ (1) และ (2) หมายถึงสมบัติทางกลและทางไฟฟ้าของสารทั่วไปดังสมการ

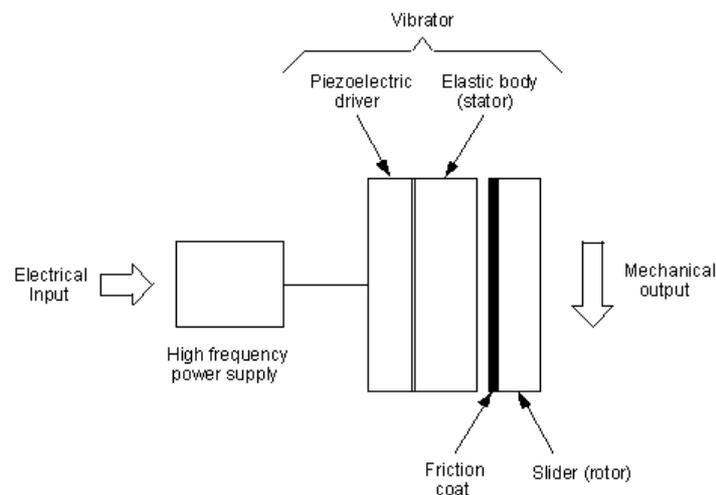
$$D = \epsilon^T E \quad (5)$$

$$S = s^E T \quad (6)$$

สมการที่ (5) อัตราส่วนระหว่างการกระจัดทางไฟฟ้า $\epsilon^T = D/E$ และจากสมการที่ (6) อัตราส่วนระหว่างค่าความเครียดต่อค่าความเค้นกล $s^E = S/T$ คือส่วนกลับของค่า Young's modulus) นอกจากนี้ยังมีความสัมพันธ์อื่นๆ อีกที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขต่างๆ เช่น เมื่อ $D=0$ สมการที่ (1) จะอยู่ในรูปของ $g = -d/\epsilon^T = -d/s^E$ ซึ่งเป็นค่าคงที่เพียโซอิเล็กทริกอีกรูปแบบหนึ่งเป็นต้น

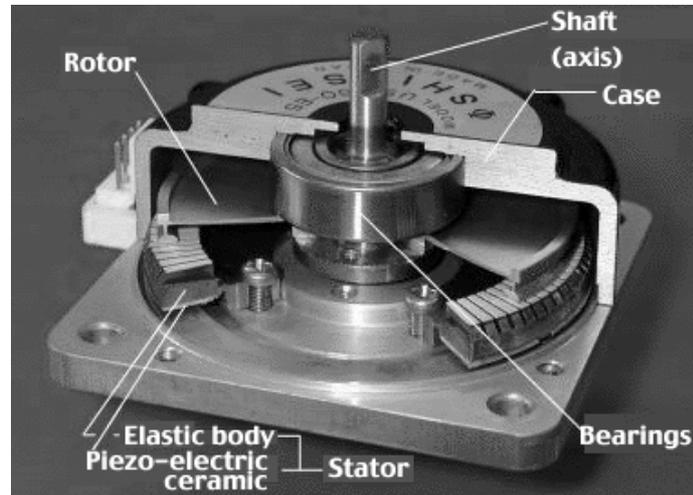
2.3 หลักการทำงานของมอเตอร์อัลตราโซนิก

ภาพประกอบที่ 2.3 แสดงส่วนประกอบต่างๆ ของมอเตอร์อัลตราโซนิกซึ่งประกอบด้วย ชุดกำเนิดความถี่สูง (high frequency power supply) ชุดกำเนิดการสั่นสะเทือน (vibrator) ประกอบด้วยสองส่วนด้วยกันคือ ตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกและวัสดุยืดหยุ่น (elastic body) ทำหน้าที่เป็นสเตเตอร์ วัสดุเพิ่มความเสียดทาน (friction coat) และโรเตอร์ โดยมีหลักการทำงานคือ เมื่อกระตุ้นไฟฟ้าบนตัวทำงานที่ติดอยู่บนสเตเตอร์มีผลทำให้ชุดสเตเตอร์เกิดการสั่นในลักษณะที่สามารถเกิดเป็นคลื่นเคลื่อนที่ออกมาได้ จากนั้นคลื่นเคลื่อนที่จะถูกส่งผ่านไปจับโรเตอร์ โดยระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์จะมีวัสดุเพิ่มความเสียดทานคั่นอยู่ระหว่างกลาง (Kurosawa et al., 1996), (Schmidt et al., 1996), (Storck et al., 2003) ซึ่งวัสดุดังกล่าวมีวัตถุประสงค์เพื่อเพิ่มแรงเสียดทานทำให้การส่งถ่ายแรงจากสเตเตอร์ไปยังโรเตอร์มีประสิทธิภาพมากขึ้นส่วนการเคลื่อนที่ของโรเตอร์ที่ถูกจับจากสเตเตอร์จะมีลักษณะแบบหมุนหรือแบบเส้นตรงขึ้นกับอยู่การออกแบบสเตเตอร์นั่นเอง



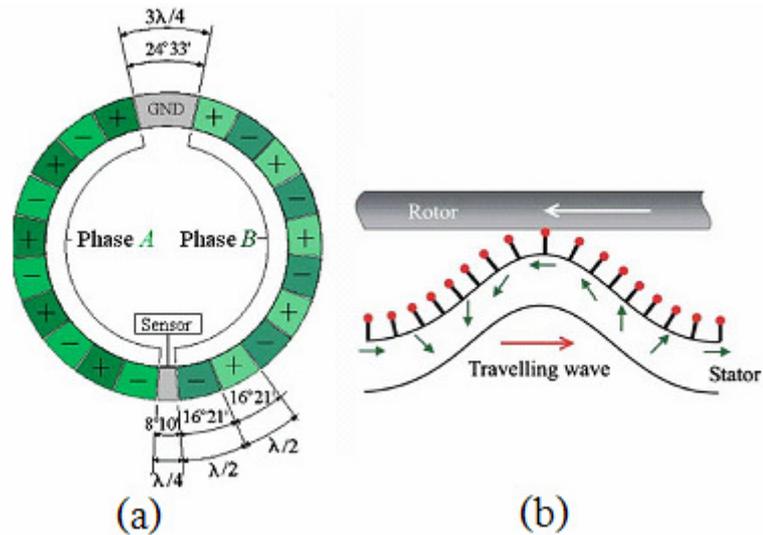
ภาพประกอบที่ 2.3 แสดงส่วนประกอบหลักของมอเตอร์อัลตราโซนิก (ที่มา: Kenji, 1997)

ลักษณะโครงสร้างและส่วนประกอบของมอเตอร์อัลตราโซนิกที่เคลื่อนที่แบบหมุน ประกอบด้วย สเตเตอร์ โรเตอร์ แบร์ริง และ case ตามลำดับ ดังแสดงในภาพประกอบที่ 2.4



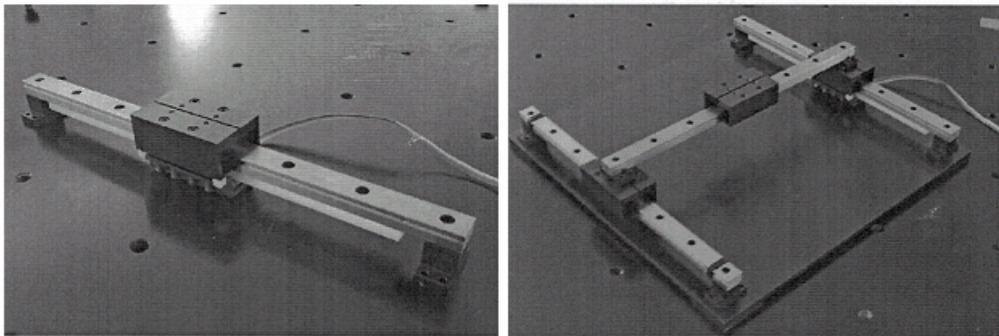
ภาพประกอบที่ 2.4 แสดงลักษณะ โครงสร้างและส่วนประกอบของอัลตราโซนิกแบบหมุน (ที่มา: Shinsei, USR60 TWUSM, 1993)

หลักการทำงานของมอเตอร์อัลตราโซนิกแบบหมุนคือ ตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกติดอยู่กับวัสดุที่มีความยืดหยุ่น(เหล็ก) ทำหน้าที่เป็นสเตเตอร์เป็นตัวสร้างคลื่นเคลื่อนที่เมื่อได้รับการกระตุ้นด้วยสัญญาณทางไฟฟ้าบนตัวทำงานทำให้เกิดการสั่นสะเทือนบนสเตเตอร์และเกิดเป็นคลื่นเคลื่อนที่แล้วส่งถ่ายแรงไปยังโรเตอร์เกิดเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุน (Nesbitt et al., 1995), (Lim et al., 2003), (Yang et al., 2006) ลักษณะการจัดวางตัวทำงานและการเกิดคลื่นเคลื่อนที่แสดงในภาพประกอบที่ 2.5 (a) การจัดวางตัวทำงานแบ่งออกเป็นสองกลุ่มคือ Phase A และ Phase B การกระตุ้นด้วยสัญญาณทางไฟฟ้าจะกระตุ้นไฟฟ้า $-V_0 \sin(\omega t)$ ที่ Phase A และไฟฟ้า $-V_0 \cos(\omega t)$ ที่ Phase B ตามลำดับ ขนาดความยาวของตัวทำงานจะมีขนาดครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่น และทั้งสองกลุ่มมีมุมเฟสต่างกัน 90 องศา หรือเท่ากับ $3\lambda/4$ (b) แสดงลักษณะของคลื่นบนสเตเตอร์และโรเตอร์ที่เคลื่อนที่สวนทางกันดังแสดงในภาพประกอบที่ 2.5



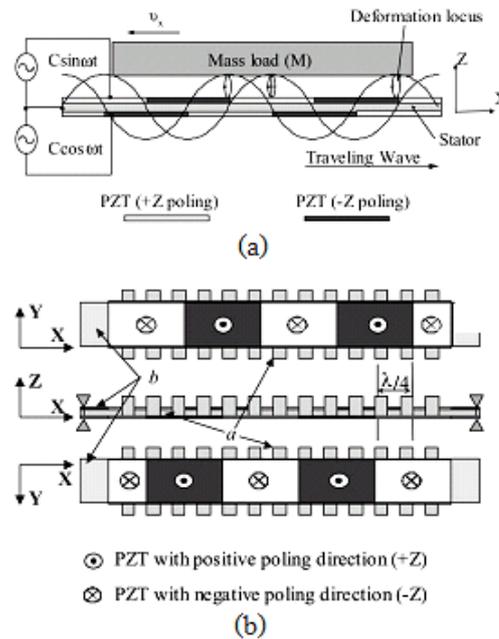
ภาพประกอบที่ 2.5 a) แสดงลักษณะการจัดวางตัวทำงานบนสเตเตอร์ของอัลตราโซนิกแบบหมุน
 b) แสดงลักษณะการเกิดคลื่นเคลื่อนที่บนมอเตอร์อัลตราโซนิกแบบหมุน (ที่มา: A. Frangi et al., 2005)

ภาพประกอบที่ 2.6 แสดงตัวอย่างลักษณะโครงสร้างของมอเตอร์อัลตราโซนิกที่เคลื่อนที่ในลักษณะแบบเส้นตรง (Lu et al., 2006), (Ming et al., 2005), (Zhai et al., 2000) มอเตอร์อัลตราโซนิกแบบเส้นตรงมีส่วนประกอบคือ สเตเตอร์และโรเตอร์ สเตเตอร์ทำหน้าที่ขับโรเตอร์ให้เกิดการเคลื่อนที่ในลักษณะเส้นตรง โดยจะมีวัสดุเพิ่มความเสียดทานคั่นระหว่างสเตเตอร์และโรเตอร์เพื่อต้องการให้การส่งผ่านแรงมีประสิทธิภาพมากขึ้น



ภาพประกอบที่ 2.6 แสดงลักษณะโครงสร้างของมอเตอร์อัลตราโซนิก
 แบบเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง (ที่มา: Lim et al., 1999)

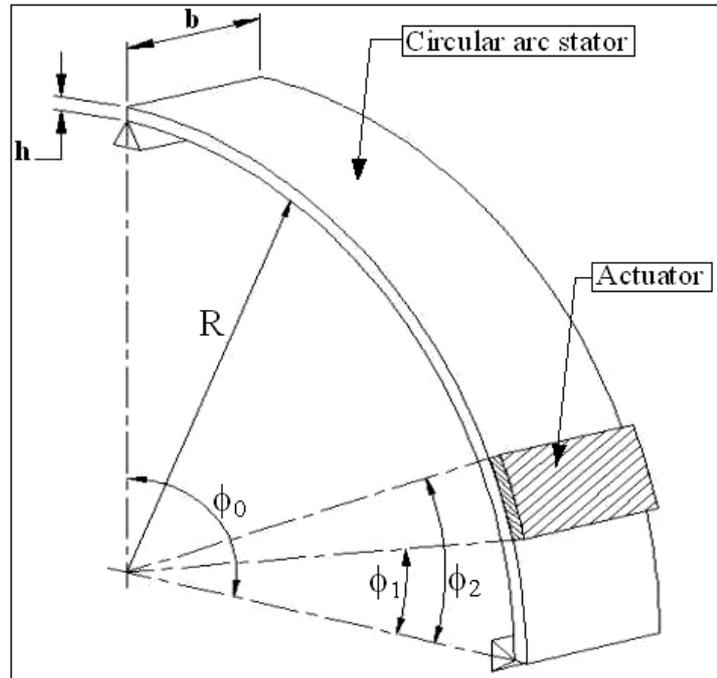
การจัดวางตัวทำงานในมอเตอร์อัลตราโซนิกที่เคลื่อนที่แบบเส้นตรงของ (Yongrae Roh, et al., 2001) มีลักษณะดังภาพประกอบที่ 2.7 (a) การจัดวางตัวทำงานแบ่งออกเป็นสองกลุ่มคือ กลุ่มที่ติดผิวด้านบนและติดที่ผิวด้านล่างและทั้งสองกลุ่มวางให้มีเฟสต่างกัน 90 องศา จากนั้นจะกระตุ้นด้วยสัญญาณไฟฟ้า $C\sin(\omega t)$ บนตัวทำงานกลุ่มติดด้านบนและสัญญาณไฟฟ้า $C\cos(\omega t)$ บนตัวทำงานกลุ่มติดด้านล่างตามลำดับ มีผลทำให้สเตเตอร์เกิดการสั่นสะเทือนและเกิดเป็นคลื่นเคลื่อนที่ขับให้โรเตอร์เคลื่อนที่ได้ ส่วนภาพประกอบที่ 2.7 (b) แสดงลักษณะของโดเมนของตัวทำงานที่จัดวางบนสเตเตอร์



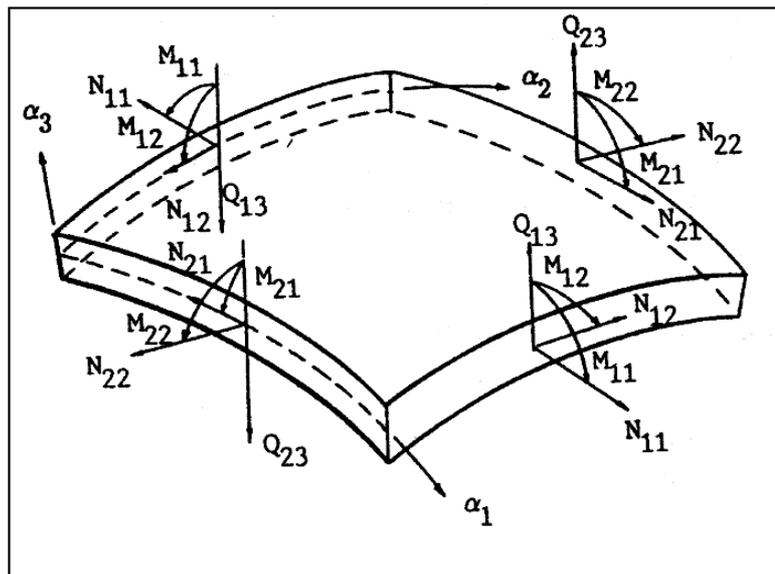
ภาพประกอบที่ 2.7 แสดงโครงสร้างและลักษณะการเกิดคลื่นเคลื่อนที่ของมอเตอร์อัลตราโซนิกแบบเคลื่อนที่ในลักษณะเส้นตรง (ที่มา : Yongrae Roh et al., 2001)

การเกิดคลื่นเคลื่อนที่บนคานโค้งนั้น จะเกิดขึ้นเมื่อติดตั้งตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกเข้าไปในรูปแบบการจัดวางที่เหมาะสมและกรณีศึกษาที่ตัวทำงานมีความหนา 0.5 mm ดังนั้นขนาดของคานโค้งจึงมีผลต่อการเกิดคลื่นเคลื่อนที่ด้วยจึงไม่ควรให้ความหนามากเพราะทำให้คานโค้งมีความแข็งตึงมากขึ้น คลื่นเคลื่อนที่ที่ได้จะมีค่าแอมพลิจูดต่ำ ในทางกลับกันหากคานโค้งมีขนาดความหนาน้อยเกินไปถึงแม้ว่าคลื่นเคลื่อนที่ที่จะเกิดขึ้นได้ง่ายกว่าแต่ก็ไม่เหมาะสมต่อการประยุกต์ใช้งานเนื่องจากไม่สามารถติดตัวทำงานบนคานโค้งได้เพราะหากติดตัวทำงานจะทำให้คานโค้งเกิดการเสียรูปทรงเนื่องจากว่าคานโค้งมีความหนาน้อยนั่นเอง (Smithmaitrie et al., 2005) ดังนั้นกรณีศึกษาที่ใช้คานโค้งที่มีขนาดคือ รัศมีของคานโค้ง $R = 60$ mm, กว้าง $b = 9$ mm, และหนา $h = 1$ mm

โดยที่คานโค้งมีมุมเปิดทั้งหมด $\phi_0 = \pi/2$ และใช้ตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกชนิด (PZT) ซึ่งมีความหนา $h^a = 0.5 \text{ mm}$ ดังแสดงในภาพประกอบที่ 2.8



ภาพประกอบที่ 2.8 แสดงลักษณะและขนาดของคานโค้ง



ภาพประกอบที่ 2.9 แสดงแรงและโมเมนต์ที่เกิดในทิศทาง α_1 , α_2 และ α_3

รูปแบบการจัดวางตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกบนคานโค้งเพื่อให้เกิดคลื่นเคลื่อนที่ในตัวทำงานจะถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณไฟฟ้า $A\cos(\omega t)$ และ $A\sin(\omega t)$ ตามลำดับ เมื่อ A คือ ขนาดของแอมพลิจูด และ ω คือความถี่ทำงาน, t คือเวลา (Smithmaitrie et al.,2005) ลักษณะของคลื่นเคลื่อนที่ที่เหมาะสมนั้นควรจะมีการเคลื่อนที่ทิศทางเดียวอาจจะเคลื่อนที่ขึ้นหรือลงบนคานโค้งก็ได้แต่ควรจะมีขนาดความสูงของคลื่นที่สม่ำเสมอ อีกประการหนึ่งที่ควรพิจารณาคือเมื่อคลื่นเคลื่อนที่มาถึงบริเวณขอบของคานโค้งจะเกิดการสะท้อนกลับของคลื่นทำให้มีผลกระทบต่อการเคลื่อนที่ของคลื่นที่ตามมา อาจทำให้คลื่นเปลี่ยนรูปได้ ดังนั้นเพื่อควมมีเสถียรภาพของคลื่นเคลื่อนที่จึงได้ติดตั้งวัสดุดูดซับแรงกระแทก (damper) ที่ปลายทั้งสองด้านของคานโค้งเพื่อเป็นการป้องกันการสะท้อนกลับของคลื่นดังกล่าว (Jones et al., 1999), (Kummel et al., 1998)

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาและออกแบบการจัดวางตัวทำงานใน 3 ลักษณะคือ 1) จัดวางตัวทำงานที่ผิวของคานโค้งทั้งด้านบนและด้านล่างเพื่อศึกษาผลกระทบของตำแหน่งการจัดวางตัวทำงานและค่าความแข็งตึงของคานโค้งที่มีผลต่อคลื่นเคลื่อนที่ 2) จัดวางตัวทำงานที่ผิวของคานโค้งเฉพาะด้านล่างเพื่อศึกษาและวิเคราะห์ขนาดของวัสดุดูดซับแรงกระแทก(damping material) บนสเตเตอร์ และ 3) จัดวางตัวทำงานที่ผิวของคานโค้งเฉพาะด้านบน เพื่อหารูปแบบที่สามารถกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ได้

2.4 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์อัลตราโซนิคเชิงเส้นโค้ง (Smithmaitrie et al., 2005)

การคิดตัวทำงานบนคานโค้งสามารถกำหนดตำแหน่งจากพิกัดในรูปแบบทั่วไปได้เป็นตำแหน่ง ϕ_1 ไปยัง ϕ_2 ในทิศทางของ ϕ และจากตำแหน่ง y_1 ไปยัง y_2 ในทิศทางของ y เมื่อกระตุ้นตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกด้วยสัญญาณไฟฟ้าจะเหนี่ยวนำให้เกิดแรงที่ผิว $N^c_{\phi\phi}$ (membrane force) และโมเมนต์คด $M^c_{\phi\phi}$ (bending moment) ขึ้น การหาค่าของแรงและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นสามารถใช้สมการของเลฟ (Love's equation) หาค่าที่เกิดขึ้นบนคานโค้งรวมถึงสมการการเคลื่อนที่ของระบบได้ ดังสมการ

$$-\frac{\partial(N_{11}A_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(N_{21}A_1)}{\partial\alpha_2} - N_{12}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + N_{22}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} - A_1A_2\frac{Q_{13}}{R_1} + A_1A_2\rho h\ddot{u}_1 = A_1A_2q_1 \quad (1)$$

$$-\frac{\partial(N_{12}A_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(N_{22}A_1)}{\partial\alpha_2} - N_{21}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + N_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + A_1A_2\frac{Q_{23}}{R_2} + A_1A_2\rho h\ddot{u}_2 = A_1A_2q_2 \quad (2)$$

$$-\frac{\partial(Q_{13}A_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(Q_{23})}{\partial\alpha_2} + A_1A_2\left(\frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2}\right) + A_1A_2\rho h\ddot{u} = A_1A_2q_3 \quad (3)$$

เมื่อ Q_{13} และ Q_{23} สามารถหาได้จากสมการ

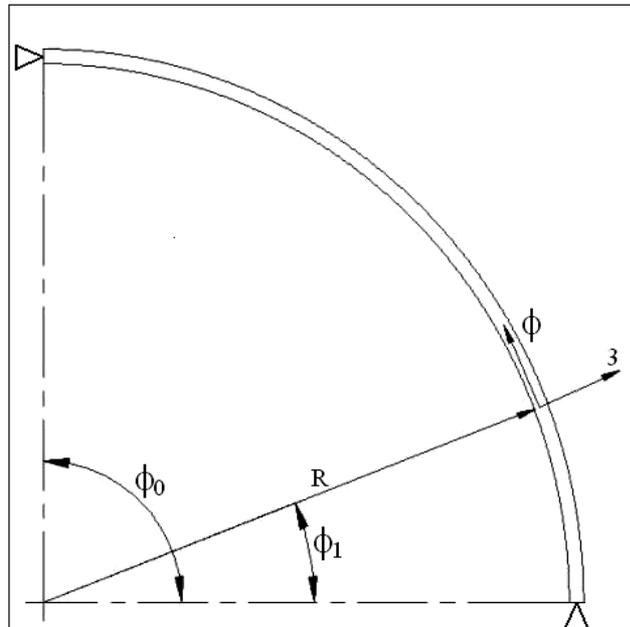
$$\frac{\partial(M_{11}A_2)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(M_{21}A_1)}{\partial\alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} - Q_{13}A_1A_2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial(M_{12}A_2)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(M_{22}A_2)}{\partial\alpha_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + M_{11} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} - Q_{23}A_1A_2 = 0 \quad (5)$$

กรณีศึกษานี้คานโค้งถูกสมมุติให้มีโครงสร้างเป็นคานนั้นคือเมื่อนำค่าความกว้างของคานโค้งเปรียบเทียบกับรัศมีความโค้งของคานแล้วมีค่าน้อยมาก ส่วนค่า Lamé' parameter A_1 , A_2 และค่า Radii of curvature หาค่าได้จากสมการ Infinitesimal distance

$$(ds)^2 = (Rd\theta)^2 + (dy)^2 \quad (6)$$

จากภาพประกอบที่ 2.9 กำหนดให้ $\alpha_1 = \phi$, $\alpha_2 = y$ และ $\alpha_3 = 3$, Lamé's parameter $A_1 = R$, $A_2 = 1$ และ Radii of curvature $R_1 = R$, $R_2 = \infty$ กรณีศึกษานี้สมมุติให้น้ำหนักของตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ และในทิศทางของแกน y ไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดความเค้นและความเครียด



ภาพประกอบที่ 2.10 แสดงทิศทาง ϕ และทิศทาง 3 ของอัลตราโซนิกมอเตอร์เชิงเส้นโค้ง

เพราะฉะนั้นสมการของการเคลื่อนที่ของระบบจึงพิจารณาในสองทิศทางคือ ทิศทาง ϕ และทิศทาง 3 จากนั้นนำค่าของ Lamé's parameter และ Radii of curvature (Soedel, 1993) แทนลงในสมการของเลฟก็จะทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ของระบบคือ

$$-\frac{\partial(N_{\phi\phi})}{\partial\phi} - Q_{\phi 3} + R\rho h \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = Rq_\phi \quad (10)$$

$$-\frac{\partial Q_{\phi 3}}{\partial\phi} + (N_{\phi\phi}) + R\rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = Rq_3 \quad (11)$$

$$Q_{\phi 3} = \frac{1}{R} \frac{\partial(M_{\phi\phi})}{\partial\phi} \quad (12)$$

เมื่อ $N_{\phi\phi}$ คือ แรงที่เกิดขึ้นที่ผิว, ρ คือความหนาแน่นของวัสดุ, $M_{\phi\phi}$ คือ โมเมนต์ดัด, q_i คือแรงภายนอก, $Q_{\phi 3}$ คือความเค้นเฉือน และสามารถหาค่าของ $N_{\phi\phi}$ และ $M_{\phi\phi}$ ได้จากสมการ

$$N_{\phi\phi} = K(S_{\phi\phi}^o + \mu S_{yy}^o) \quad (13)$$

$$M_{\phi\phi} = D(K_{\phi\phi} + \mu K_{yy}) \quad (14)$$

เมื่อ

$$K = \left(\frac{Yh}{1 - \mu^2} \right) \quad (15)$$

$$D = \left(\frac{Yh^2}{12(1 - \mu^2)} \right) \quad (16)$$

และ

K = ค่าความแข็งดิ่งของผิว

D = ค่าความแข็งดิ่งเนื่องจาก โมเมนต์

Y = โมดูลัสของความยืดหยุ่น

μ = อัตราส่วนปัวส์ซอง

และ

$$s_{yy}^o = 0 \quad (17)$$

$$s_{\phi\phi}^o = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} + \frac{u_3}{R} \right) \quad (18)$$

$$k_{yy} = 0 \quad (19)$$

$$k_{\phi\phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\phi}{\partial \phi} \quad (20)$$

$$\beta_\phi = \frac{1}{R} \left(u_\phi - \frac{\partial u_3}{\partial \phi} \right) \quad (21)$$

เมื่อ

β_0 คือ มุมบิด

s_{yy}^0 คือ ความเครียดที่ผิว(membrane strains) ของทิศทาง y

$s_{\phi\phi}^0$ คือ ความเครียดที่ผิว(membrane strains) ของทิศทาง ϕ

k_{yy} คือ ความเครียดที่เกิดจากการดัด (bending strains) ของทิศทาง y

$k_{\phi\phi}$ คือ ความเครียดที่เกิดจากการดัด (bending strains) ของทิศทาง ϕ

จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการที่ (13) ถึงสมการที่ (19) แทนลงในสมการของเกลฟ จะทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ของระบบในทิศทางของ ϕ และทิศทาง 3 ตามลำดับ

$$\frac{D}{R^4} \left(\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^3 u_3}{\partial \phi^3} \right) + \frac{K}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial u_3}{\partial \phi} \right) + q_\phi = \rho h \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} \quad (22)$$

$$\frac{D}{R^4} \left(\frac{\partial^3 u_\phi}{\partial \phi^3} - \frac{\partial^4 u_3}{\partial \phi^4} \right) - \frac{K}{R^2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_3 \right) + q_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (23)$$

การหาค่าความถี่ธรรมชาติ (f_k) และรูปแบบของโหมดการสั่น (mode shape function) (U_{ij}) สามารถหาได้จากสมการที่ (24) และสมการที่ (27) ตามลำดับ (Blevins, 1984)

กรณีเมื่อ $k = 2, 4, 6, \dots$

$$f_k = \frac{k^2 \pi^2}{2\pi(R\phi_0)^2} \left[\frac{\left(1 - \left(\frac{\phi_0}{k\pi} \right)^2 \right)^2}{1 + 3\left(\frac{\phi_0}{k\pi} \right)^2} \right]^{1/2} \sqrt{\frac{YI}{\rho h b}} \quad (24)$$

$$U_{\phi k} = \frac{\phi_0}{k\pi} \left[1 - \cos \left(\frac{k\pi\phi}{\phi_0} \right) \right] \quad (25)$$

$$U_{3k} = -\sin\left(\frac{k\pi\phi}{\phi_0}\right) \quad (26)$$

กรณีเมื่อ $k = 3, 5, 7 \dots$

$$f_k = \frac{k^2 \pi^2}{2\pi(R\phi_0)} \left[\frac{(1 - (\phi_0/k\pi)^2)^2}{1 + \frac{1}{k^2} + 2\left(\frac{\phi_0}{k\pi}\right)^2} \right]^{1/2} \sqrt{\frac{YI}{\rho h b}} \quad (27)$$

$$U_{\phi k} = -\frac{\phi_0}{k\pi} \left[\cos\left(\frac{k\pi\phi}{\phi_0}\right) - \frac{1}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi\phi}{\phi}\right) \right] \quad (28)$$

$$U_{3k} = -\sin\left(\frac{k\pi\phi}{\phi_0}\right) + \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\phi_0}\right) \quad (29)$$

เมื่อ

$k =$ จำนวน โหมด

$\phi =$ ตำแหน่งของมุมจัดวางตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริก

$\phi_0 =$ มุมทั้งหมดของคานโค้งเท่ากับ 90 องศา

คลื่นเคลื่อนจะเกิดเมื่อตัวทำงานถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณไฟฟ้า ดังนั้นสัญญาณกระตุ้นจากไฟฟ้าที่กระทำบนตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกสามารถหาได้จากสมการ

$$\phi^a(y, \phi, t) = \phi^a(t) [u_s(y - y_1) - u_s(y - y_2)] \cdot [u_s(\phi - \phi_1) - u_s(\phi - \phi_2)] \quad (30)$$

เมื่อ $u_s(\phi - \phi_i) = 1$ เมื่อ $\phi \geq \phi_i$ และ $u_s(\phi - \phi_i) = 0$ เมื่อ $\phi < \phi_i$ จะทำให้ได้สมการ

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \phi^2(y, \phi, t) = \phi^a(t) [u_s(y - y_1) - u_s(y - y_2)] [\delta(\phi - \phi_1) - \delta(\phi - \phi_2)] \quad (31)$$

เมื่อ $\delta(\cdot)$ คือฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย (dirac delta function) และ $\delta(\phi - \phi_i) = 1$ เมื่อ $\phi = \phi_i$ และ $\delta(\phi - \phi_i) = 0$ เมื่อ $\phi \neq \phi_i$ เพราะฉะนั้นจะทำให้ได้ค่าของ $N^c_{\phi\phi}$ และ $M^c_{\phi\phi}$ ในทิศทางของ ϕ ซึ่งกระทำโดยตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริกที่ติดบนคานโค้งสามารถหาค่าได้จากสมการ

$$N^c_{\phi\phi} = Y_p d_{31} \phi^a [u_s(y - y_1) - u_s(y - y_2)] [u_s(\phi - \phi_1) - u_s(\phi - \phi_2)] \quad (32)$$

$$M_{\phi\phi}^c = r^a Y_p d_{31} \phi^a [u_s(y-y_1) - u_s(y-y_2)] [u_s(\phi-\phi_1) - u_s(\phi-\phi_2)] \quad (33)$$

เมื่อ Y_p คือค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของตัวทำงานเพียโซอิเล็กทริก, d_{31} คือค่าคงที่เพียโซอิเล็กทริก r^a คือระยะจากจุดกึ่งกลางของคานโค้งถึงจุดกึ่งกลางของตัวทำงาน ผลตอบสนองทั้งหมดของคานโค้งหาได้จากสมการ

$$u_i(\phi, t) = \sum_{k=2}^{\infty} \eta_k(t) U_{ik}(\phi) \quad (34)$$

และ $i = \phi, 3$ และ η_k คือการมีส่วนร่วมของแต่ละโหมด, $U_{ik}(\phi)$ คือฟังก์ชันรูปร่างในทิศทาง i และใช้ mode orthogonality สามารถหาค่า k^{th} modal equation ของคานโค้งได้จากสมการ

$$\ddot{\eta}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = \hat{F}_k^c(t) + \hat{F}_k^m(t) \equiv \hat{F}_k(t) \quad (35)$$

เมื่อ $\zeta_k = c/2\rho h\omega_k$ และ c คือค่าคงที่ของ damper ซึ่งโดยปกติแล้วจะได้จากการทดลอง, ω_k คือความถี่ธรรมชาติที่โหมด k^{th} modal, $\hat{F}_k(t)$ คือแรงกระตุ้นจากภายนอกซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\hat{F}_k(t) = \hat{F}'_k \cdot e^{j\omega t} \quad (36)$$

เมื่อ

$$\hat{F}'_k = \frac{1}{\rho h N_k} \iint_{y\phi} \left[\sum_i L'_i(\phi^a) U_{ik} \right] A_1 A_2 d\phi dy \quad (37)$$

และ $L'_i(\phi^a)$ คือ Love parameter เนื่องจากการกระตุ้นทางไฟฟ้า แทนค่าลงในสมการจะได้รูป

$$\ddot{\eta}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{\eta}_k = \hat{F}'_k e^{j\omega t} \quad (38)$$

เมื่อ

$$\eta_k(t) = \Lambda_k e^{j(\omega t - \phi_k)} \quad (39)$$

$$\Lambda_k e^{-j\phi_k} = \frac{\hat{F}'_k}{(\omega_k^2 - \omega^2) + 2\xi_k j\omega_k \omega} \quad (40)$$

$$\Lambda_k = \frac{\hat{F}'_k}{\omega_k^2 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right)^2 \right]^2 + 4\xi_k^2 \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right)^2}} \quad (41)$$

$$\phi_k = \tan^{-1} \left[\frac{2\xi_k (\omega/\omega_k)}{1 - (\omega/\omega_k)^2} \right] \quad (42)$$

นำค่าที่ได้ของแต่ละตัวแทนในสมการของเลิฟจะได้

$$\hat{F}'_k = \frac{1}{\rho h N_k} \iint_{y\phi} \left[\left(-\frac{1}{R} \left(\frac{\partial N_{\phi\phi}^c}{\partial \phi} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\phi\phi}^c}{\partial \phi} \right) \right) U_{\phi k} + \left(-\frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_{\phi\phi}^c}{\partial \phi^2} - N_{\phi\phi}^c \right) \right) U_{3k} \right] A_1 A_2 d\phi d\alpha \quad (43)$$

จากสมการข้างบนแรงที่เกิดขึ้นนี้สามารถแยกเป็นองค์ประกอบของแรงในทิศทางต่างๆ ด้วยกัน 4 องค์ประกอบ หรืออาจเขียนรูปของสมการ \hat{F}'_k ได้เป็น

$$\hat{F}'_k = \hat{T}_{k_u\phi,mem} + \hat{T}_{k_u3,mem} + \hat{T}_{k_u\phi,bend} + \hat{T}_{k_u3,bend} \quad (44)$$

และ

$$\hat{T}_{k_u\phi,mem} = \frac{Y_p d_{31} \phi^a b}{\rho h N_k} (U_{\phi 2k} - U_{\phi 1k}) \quad (45)$$

$$\hat{T}_{k_u3,mem} = \frac{Y_p d_{31} \phi^a b}{\rho h N_k} \int_{\phi_1}^{\phi_2} U_{3k} d\phi \quad (46)$$

$$\hat{T}_{k_u\phi,bend} = \frac{r^a Y_p d_{31} \phi^a b}{R \rho h N_k} (U_{\phi 2k} - U_{\phi 1k}) \quad (47)$$

$$\hat{T}_{k_u3,bend} = \frac{r^a Y_p d_{31} \phi^a b}{R \rho h N_k} \left(\frac{\partial u_{3k}}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_1} - \frac{\partial u_{3k}}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_2} \right) \quad (48)$$

เมื่อ

$\hat{T}_{k_u\phi,mem}$ คือแรงกระทำที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนว $U_{\phi k}$

$\hat{T}_{k_u3,mem}$ คือแรงกระทำที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนว U_{3k}

$\hat{T}_{k_u\phi,bend}$ คือแรงกระทำที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนว $U_{\phi k}$

$\hat{T}_{k_u3,bend}$ คือแรงกระทำที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนว U_{3k}