บทที่ 4

รายละเอียดของแบบจำลอง

ในบทนี้กล่าวถึงรายละเอียดของแบบจำลองย่อยทั้ง 9 แบบจำลอง โดยอธิบายถึงรายละเอียดของการคำนวณ รวมทั้งแสดงหลักการและทฤษฎีที่นำมาใช้ในการคำนวณ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้นำหลักการทางไฟฟ้ามาใช้ในการเปรียบเทียบลักษณะการไหลของกระแสไฟฟ้าเหมือนกับลักษณะการไหลของน้ำ เนื่องจากกระแสไฟฟ้าไหลจากจุดที่มีศักดาไฟฟ้าสูงไปยังจุดที่มีศักดาไฟฟ้าต่ำ และน้ำไหลจากที่สูงไปยังที่ต่ำเช่นเดียวกัน ดังนั้น จึงใช้หลักการทางไฟฟ้าเข้ามาประยุกต์ เพื่ออธิบายลักษณะการไหลของน้ำ โดยเปรียบเทียบให้ศักดาไฟฟ้าเป็นระดับความสูงของแต่ละจุดในพื้นที่ที่พิจารณา และเส้นทางของกระแสไฟฟ้าเปรียบเทียบกับเส้นทางการไหลของน้ำ

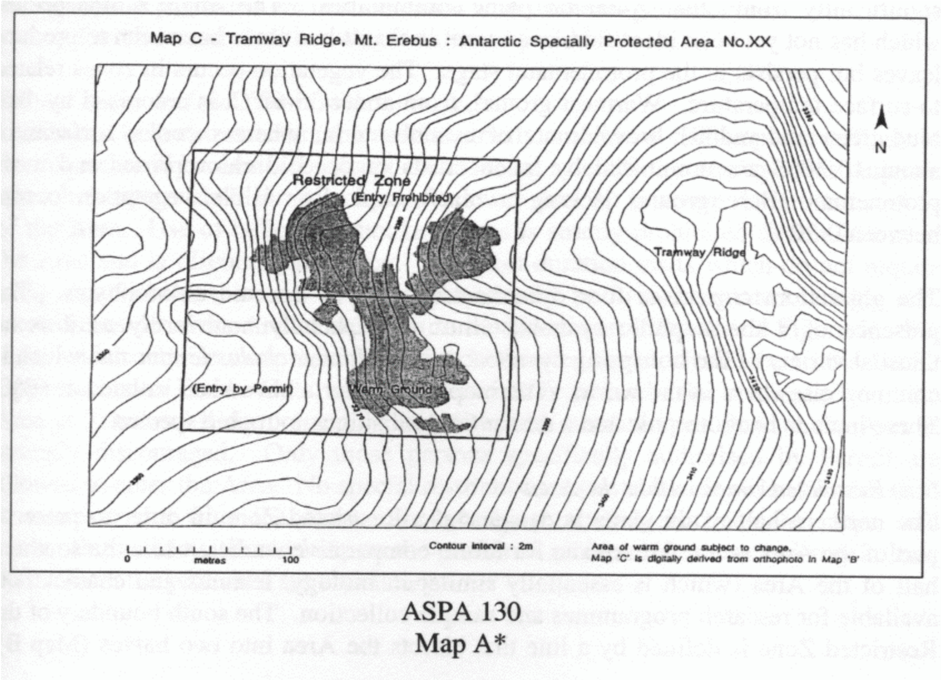
4.1 แบบจำลองระดับความสูง

จุดประสงค์ของแบบจำลองระดับความสูง คือ การคำนวณระดับความสูงของจุดใดๆในพื้นที่ที่พิจารณา ดังนั้น แบบจำลองนี้จึงสร้างขึ้นเพื่อประมาณค่าความสูงและค่าอนุพันธ์ความสูงของทุกๆจุดภายในพื้นที่ เพื่อใช้ในการคำนวณสำหรับแบบจำลองอื่นๆต่อไป

ในหัวข้อนี้อธิบายถึงที่มาของข้อมูลความสูง และการวิเคราะห์ข้อมูลความสูงเหล่านั้น เพื่อแสดงให้เห็นว่า ข้อมูลความสูงที่นำมาใช้ในการคำนวณมีคุณสมบัติที่สอดคล้องกับสมการของลาปลาซ (Laplace ‘ s Equation)

4.1.1 เส้นระดับความสูง

ข้อมูลความสูงของพื้นที่มีด้วยกันหลายรูปแบบ แต่ในงานวิจัยนี้เลือกใช้ข้อมูลความสูงที่อยู่ในแผนที่ ซึ่งเป็นรูปแบบโดยทั่วๆไป ซึ่งสามารถหาได้ง่าย นั่นคือ การใช้ข้อมูลจากเส้นระดับความสูงของแผนที่ โดยเทียบค่าความสูงจากระดับน้ำทะเล ตัวอย่างของข้อมูลในรูปแบบนี้ได้แสดงไว้ในภาพประกอบ 4-1 โดยใช้ข้อมูลเส้นระดับความสูงจากแผนที่เป็นข้อมูลเริ่มต้นในการคำนวณ



ภาพประกอบ 4-1 แผนที่แสดงเส้นระดับความสูงของจุดต่างๆในพื้นที่เทียบกับระดับน้ำทะเล

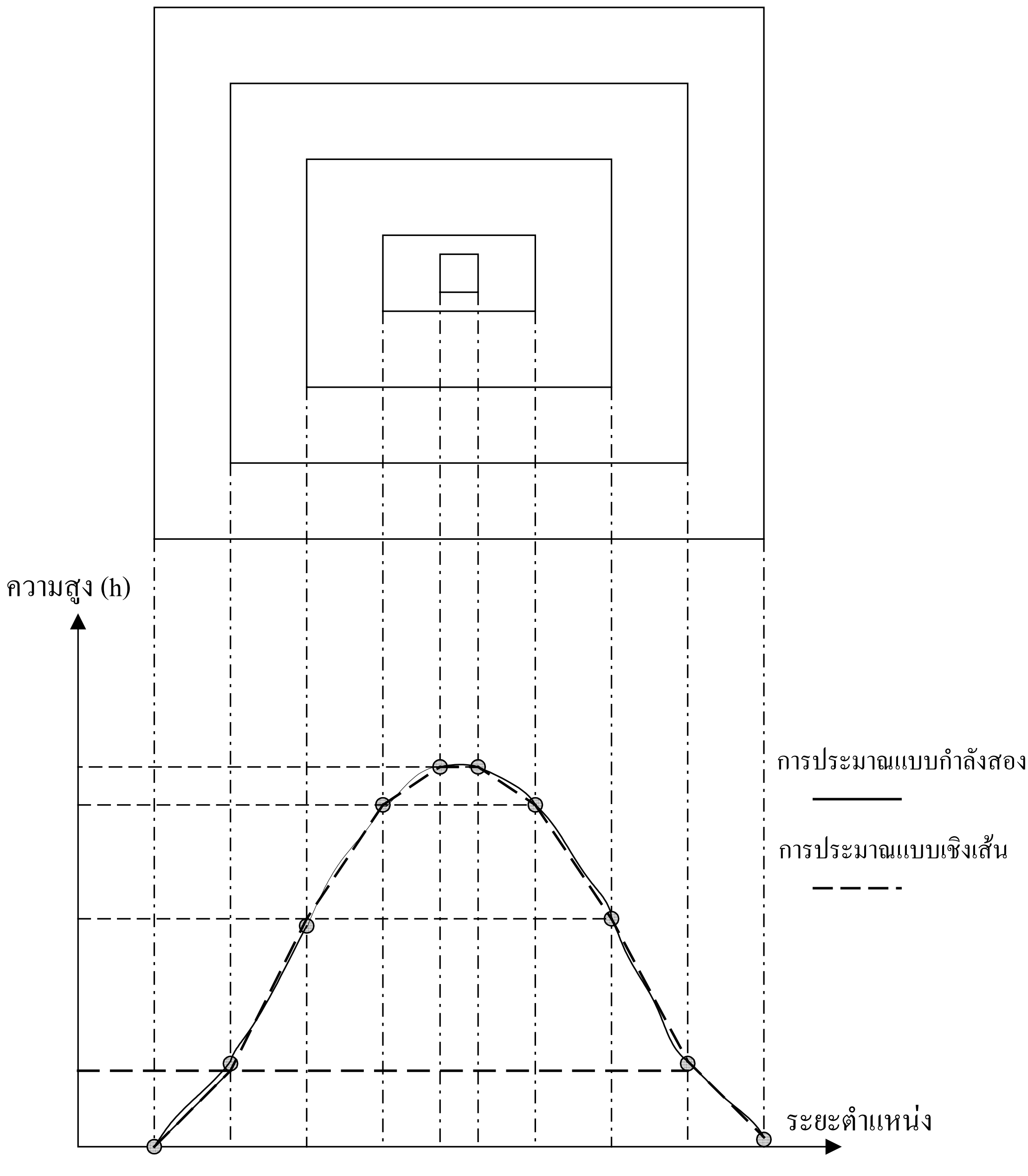
ในภาพประกอบ 4-1 แสดงเส้นระดับความสูงของพื้นที่ที่พิจารณา ซึ่งเห็นได้ว่า มีข้อมูลความสูงเพียงบางจุดเท่านั้น และจุดที่ถูกแรงเงา ซึ่งอยู่ในบริเวณระหว่างเส้นระดับความสูงเป็นจุดที่ไม่ทราบค่าความสูง ดังนั้น ในแบบจำลองระดับความสูงจึงต้องทำการคำนวณค่าความสูงของจุดเหล่านั้นเพื่อใช้เป็นข้อมูลเริ่มต้นเพื่อใช้ในการคำนวณในแบบจำลองเส้นทางการไหลของน้ำ และแบบจำลองอัตราการไหลของน้ำ

4.1.2 การวิเคราะห์ข้อมูลความสูง

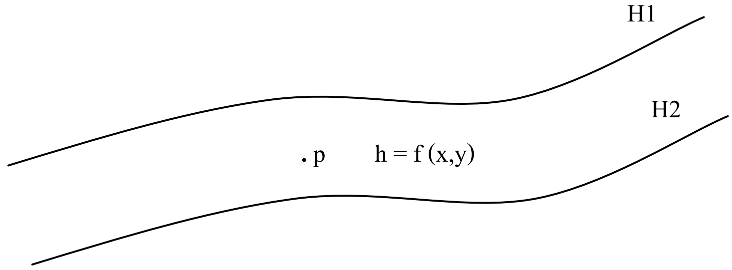
การคำนวณหาความสูงของจุดใดๆ ในบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นระดับความสูงสองเส้นที่อยู่ติดกัน มีวิธีการประมาณหลายวิธี เช่น ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) ระเบียบวิธี ไฟไนท์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) และระเบียบวิธีบาวดารี่เอลิเมนต์ (Boundary Element Method) เป็นต้น ซึ่งการประมาณในแต่ละวิธีจะได้ผลลัพธ์ที่แตกต่างกัน

เมื่อพิจารณาข้อมูลความสูงจากแผนที่ ซึ่งประมาณได้ว่า จุดใดๆในบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นระดับความสูงสองเส้นที่อยู่ติดกัน จะมีค่าความสูงอยู่ในช่วงระหว่างความสูงของเส้นระดับความสูงทั้งสองเส้น

ในภาพประกอบ 4-2 แสดงการประมาณค่าความสูงจากข้อมูลความสูง ซึ่งเป็นข้อมูลสมมุติที่มีลักษณะเหมือนกับข้อมูลจากเส้นระดับความสูงของแผนที่ ซึ่งถูกนำมาประมาณค่าแบบเชิงเส้นและแบบกำลังสอง



ภาพประกอบ 4-2 แสดงการประมาณค่าความสูง



ภาพประกอบ 4-3 แสดงจุดที่ต้องการหาค่าระดับความสูง

จากการประมาณค่าความสูงที่อยู่ระหว่างเส้นระดับความสูงสองเส้นที่อยู่ติดกัน เห็นได้ว่าความสูงของจุดเหล่านั้น มีค่าอยู่ในช่วงระหว่างความสูงของเส้นระดับความสูงทั้งสอง ในภาพประกอบ 4-3 จุด P เป็นจุดที่อยู่ระหว่างเส้นระดับความสูงสองเส้นที่อยู่ติดกัน คือ เส้นระดับความสูง H1 และ H2 โดยแทนค่าความสูง h ของจุดต่างๆเหล่านั้นด้วยฟังก์ชัน $f(x,y)$ ซึ่งจากการประมาณค่าความสูง พบว่าฟังก์ชัน $f(x,y)$ ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ แต่ความสูงจริงของพื้นผิวดังกล่าวอาจมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ได้ เนื่องจากพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นระดับความสูงอาจมีเนินเขาเล็กๆหรือหุบเขาเล็กๆ แต่ไม่ได้แสดงไว้ในแผนที่ ดังนั้น ในแบบจำลองนี้จึงประมาณค่าความสูงในลักษณะที่ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ในขณะเดียวกัน ถ้าข้อมูลของเนินเขาและหุบเขาถูกแสดงไว้ในแผนที่ แบบจำลองนี้ก็สามารถประมาณค่าความสูงของพื้นที่ในรูปของ $f(x,y)$ ในบริเวณนั้นได้

4.1.3 จุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ในทางคณิตศาสตร์โดยทั่วไปฟังก์ชัน $f(x,y)$ ใดๆให้ค่าต่ำสุดและสูงสุด ตามคุณสมบัติดังต่อไปนี้

ฟังก์ชัน $f(x,y)$ จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน $f(x,y)$ สอดคล้องตามสมการ (4-1) และสมการ(4-2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \qquad (4\text{-}1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \qquad (4\text{-}2)$$

และฟังก์ชัน $f(x,y)$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน $f(x,y)$ สอดคล้องตามสมการ(4-3) และสมการ(4-4)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \qquad (4\text{-}3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0 \qquad (4\text{-}4)$$

เมื่อนำสมการ(4-2) หารด้วยสมการ(4-1) จะได้สมการ(4-5) ดังต่อไปนี้

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \geq \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)} \geq 0 \qquad (4\text{-}5)$$

และนำสมการ(4-1) และสมการ(4-5) มารวมกันจะได้ตามสมการ(4-6) ซึ่งเป็นสมการที่มีลักษณะเป็นแบบยูนิไดเรกชั่นนอล (Unidirectional) นั่นคือ ไม่สามารถหาค่าของสมการย้อนกลับได้ ดังนั้น สมการ(4-6) ไม่อาจกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ แต่สามารถกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x,y)$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์อย่างแน่นอน

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0 \qquad (4\text{-}6)$$

และเมื่อนำสมการ(4-4) หารด้วยสมการ(4-3) จะได้สมการ(4-7) ดังต่อไปนี้

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \leq \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)} \leq 0 \qquad (4\text{-}7)$$

และนำสมการ(4-3) และสมการ(4-7) มารวมกันจะได้ตามสมการ (4-8) ซึ่งเป็นสมการที่มีลักษณะเป็นแบบยูนิไดเรกชั่นนอล (Unidirectional) นั่นคือ ไม่สามารถหาค่าของสมการย้อนกลับได้ ดังนั้น สมการ(4-8) ไม่อาจกล่าวได้ว่าได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ แต่สามารถกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x,y)$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์อย่างแน่นอน

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0 \qquad (4\text{-}8)$$

จะเห็นได้ว่า เมื่อฟังก์ชัน $f(x,y)$ ที่สอดคล้องตามสมการ(4-6) ซึ่งจะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และหมายถึงจะไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และฟังก์ชัน $f(x,y)$ ที่สอดคล้องตามสมการ(4-8) ซึ่งมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และหมายถึงไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x,y)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของการประมาณค่าความสูงของจุดใดๆที่อยู่ระหว่างเส้นระดับความสูงทั้งสองเส้นที่อยู่ติดกัน ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อต้องสอดคล้องกับสมการ(4-9) ซึ่งเกิดจากการนำสมการ(4-6)รวมกับสมการ(4-8) ดังนี้

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \qquad (4\text{-}9)$$

4.1.4 สมการลาปลาซ (Laplace 's Equation)

สามการลาปลาซเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งมีลักษณะตามสมการ(4-9) ในหัวข้อ 4.1.3 เห็นได้ว่า เป็นกรณีพิเศษของสมการ Helmholtz ซึ่งมีลักษณะตามสมการ(4-10) โดยที่มีค่าคงที่ k เท่ากับศูนย์ หรือเป็นกรณีพิเศษของสมการ Poisson ซึ่งมีลักษณะตามสมการ(4-11) โดยมีค่าคงที่ ρ เท่ากับศูนย์ ฟังก์ชัน $f(x,y)$ ที่สอดคล้องตามสมการลาปลาซ จะเป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก ซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้จากค่าฟังก์ชันของเส้นขอบเขตหรือจากค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตั้งฉากของเส้นขอบเขต โดยวิธีการแยกตัวแปร(separation of variables) ซึ่งผลเฉลยของสมการลาปลาซไม่มีค่าสูงสุดและไม่มีค่าต่ำสุด เพราะผลเฉลยจะอยู่ในลักษณะเชิงเส้น

- สมการ Helmholtz ซึ่งมีลักษณะตามสมการ(4-10) ดังนี้

$$\nabla^2 f+k^2 f=0 \qquad (4\text{-}10)$$

- สมการ Poisson ซึ่งมีลักษณะตามสมการ(4-11) ดังนี้

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0 \tag{4-11}$$

ในสมการ (4-9) เราสามารถหาผลเฉลยของสมการในแบบสองมิติได้ โดยการพิจารณาเงื่อนไขของขอบเขตจากค่าของเส้นระดับความสูง(H1) และเส้นระดับความสูง(H2)ที่อยู่ติดกัน โดยได้ผลเฉลยเป็นฟังก์ชัน $f(x, y)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันความสูงของจุดใดๆบนพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นระดับความสูงสองเส้นใดๆที่อยู่ติดกัน และการคำนวณผลเฉลยของสมการลาปลาสในแบบสองมิตินั้น มีวิธีคำนวณในลักษณะเดียวกับการหาผลเฉลยในแบบหนึ่งมิติ

ในแบบจำลองนี้ อธิบายการหาผลเฉลยของสมการลาปลาซ โดยการเปรียบเทียบค่าความสูงของพื้นที่เป็นศักดาไฟฟ้า และให้การไหลของน้ำแทนด้วยกระแสไฟฟ้า ซึ่งได้กล่าวถึงรายละเอียดของผลเฉลยสมการลาปลาซในบทที่ 5

สรุปได้ว่า ระดับความสูงและอนุพันธ์ของค่าระดับความสูง ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของแบบจำลองนี้ได้กำหนดเป็นค่าคงที่ตลอดเวลา แต่เป็นฟังก์ชันความสูงที่แปรตามจุดพิกัดต่างๆในพื้นที่ที่พิจารณา อย่างไรก็ตามค่าที่ได้จากการคำนวณเหล่านี้สามารถนำไปใช้ในแบบจำลองอื่นๆ ซึ่งอยู่ในพื้นที่ที่พิจารณาเดียวกัน

4.2 แบบจำลองเส้นทางการไหลของน้ำ

จุดประสงค์ของแบบจำลอง คือ การคำนวณเส้นทางการไหลของน้ำที่ไหลผ่านจุดต่างๆใน พื้นที่ที่พิจารณา แบบจำลองนี้เป็นการคำนวณเส้นทางการไหลจากที่สูงลงสู่ที่ต่ำหรือจากที่ต่ำขึ้นสู่ที่สูงโดยนำค่าความสูง ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันความสูงอันดับที่หนึ่ง และอันดับที่สองจากแบบจำลองระดับความสูง(Altitude Model)มาใช้ในการคำนวณเส้นทางการไหลของน้ำ

ในหัวข้อนี้อธิบายถึงการประมาณฟังก์ชันความสูง $f(x,y)$ โดยจัดให้อยู่ในรูปของเชิงขั้ว $h(r,\theta)$ เพื่อง่ายต่อการคำนวณทิศทางการไหลของน้ำ โดยทำการคำนวณจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง ซึ่งเป็นลำดับต่อๆกันตามเส้นทางการไหลของน้ำ

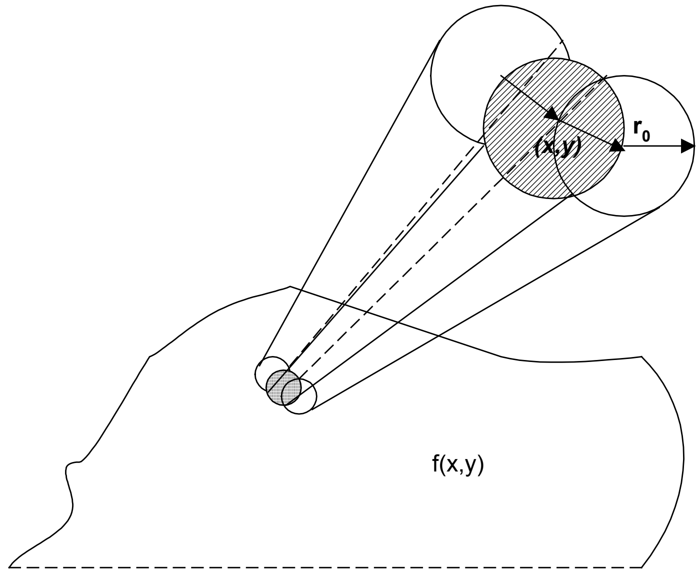
4.2.1 การประมาณฟังก์ชันความสูงในรูปแบบของฟังก์ชันเชิงขั้ว

แบบจำลองระดับความสูง เป็นแบบจำลองการประมาณค่าความสูงของทุกๆจุดภายในพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นระดับความสูง และกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันความสูงของจุดใดๆภายในพื้นที่ ซึ่งเป็นผลเฉลยจากสมการลาปลาซ จากฟังก์ชัน $f(x,y)$ ซึ่งอยู่ในพิกัดคาร์ทีเซียนจึงทำการแปลงเป็นพิกัดเชิงขั้ว $h(r,\theta)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอนุกรมอนันต์ได้ดังนี้

$$h(r,\theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left(a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta\right) \qquad (4\text{-}12)$$

การประมาณฟังก์ชันความสูง $f(x,y)$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ ตามสมการ(4-12) สามารถประมาณความสูงได้อย่างถูกต้องทุกๆจุด เนื่องจากฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ อยู่ในลักษณะอนุกรมอนันต์ซึ่งประกอบด้วยเทอมของค่าคงที่และเทอมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ อย่างไรก็ตาม การประมาณฟังก์ชันความสูง $f(x,y)$ ในรูปแบบของอนุกรมอนันต์เป็นเรื่องยากต่อการคำนวณ เนื่องจากจำนวนเทอมของอนุกรมที่มีอยู่อย่างไม่จำกัด ดังนั้น ในแบบจำลองนี้จึงเลือกวิธีการประมาณฟังก์ชันความสูง $f(x,y)$ ในรูปแบบของอนุกรมจำกัด

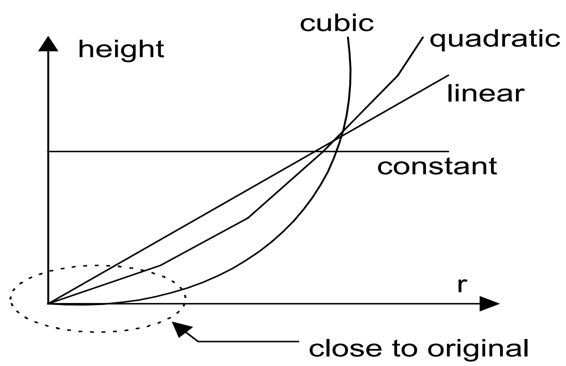
ตามภาพประกอบ 4-4 แสดงการแทนอนุกรมอนันต์ด้วยอนุกรมจำกัด ซึ่งพบว่าสามารถประมาณฟังก์ชัน $f(x,y)$ ได้อย่างถูกต้องทุกๆจุดเฉพาะภายในพื้นที่วงกลมรัศมีขนาดเล็กๆ ($r < r_0$) และจุดอื่นๆที่อยู่ภายนอกพื้นที่วงกลมดังกล่าว สามารถประมาณขึ้นมาใหม่ด้วยอนุกรมจำกัดเช่นเดียวกัน แต่ค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละเทอมมีความแตกต่างกันขึ้นอยู่กับค่าความสูง และค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันความสูงอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองของจุดนั้นๆในพื้นที่ที่พิจารณา ดังนั้น ทุกๆจุดสามารถประมาณด้วยอนุกรมจำกัดภายในวงกลมที่มีรัศมี r_0 ซึ่งเรียกวิธีดังกล่าวนี้ว่า many different overlapping approximation



ภาพประกอบ 4-4 แสดงฟังก์ชัน $f(x,y)$ ซึ่งแทนด้วยฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ ภายในวงกลมรัศมี r_0

4.2.2 การประมาณด้วยอนุกรมจำกัดกำลังสอง

ในหัวข้อนี้อธิบายถึงการประมาณฟังก์ชันความสูงด้วยอนุกรมจำกัด และจะแสดงให้เห็นถึงเหตุผลที่เลือกใช้อนุกรมจำกัดกำลังสอง



ภาพประกอบ 4-5 แสดงถึงคุณลักษณะของอนุกรมอนันต์

ในภาพประกอบ 4-5 แสดงความสัมพันธ์ในแต่ละเทอมของอนุกรมอนันต์ จากสมการ (4-12) เมื่อเทียบกับค่ารัศมี r เห็นได้ว่า เมื่อรัศมี r เท่ากับศูนย์ ซึ่งมีเฉพาะเทอมของค่าคงที่ (constant term) ซึ่งเป็นเทอมที่มีอิทธิพลเพราะเทอมอื่นมีค่าเท่ากับศูนย์ และเมื่อรัศมี r มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เห็น

ได้ว่า เทอมในลักษณะเชิงเส้น(linear term) มีค่าเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ซึ่งเป็นเทอมที่มีอิทธิพลในช่วงที่รัศมี r เข้าใกล้ศูนย์ เนื่องจากเทอมอื่นๆมีการเปลี่ยนแปลงน้อย เช่น เทอมกำลังสอง (quadratic term) และเทอมกำลังสาม(cubic term) และส่วนเทอมที่ไม่การเปลี่ยนแปลง คือ เทอมที่เป็นค่าคงที่ และเมื่อรัศมี r เริ่มมีค่ามากขึ้น เทอมกำลังสองจะมีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว และเมื่อรัศมีมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เทอมอนุกรมที่มีกำลังสูงขึ้น เช่น เทอมกำลังสาม เทอมกำลังสี่ และเทอมต่อๆไป ก็จะมีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มมากขึ้นอย่างรวดเร็วเป็นลำดับ

ดังนั้น เมื่อเราต้องการประมาณค่าความสูงในรูปแบบของฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ เพื่อให้มีความถูกต้องทุกๆจุด จึงมีความจำเป็นต้องเลือกค่ารัศมี r ที่เหมาะสม ซึ่งจากภาพประกอบ 4-5 จะเห็นได้ว่า เมื่อค่ารัศมี r มีค่าน้อยเป็นค่ารัศมีที่เหมาะสม ดังนั้น อนุกรมจำกัดมีอิทธิพลจาก 3 เทอม คือ เทอมค่าคงที่(constant term) เทอมในลักษณะเชิงเส้น(linear term) และเทอมกำลังสอง(quadratic term) ซึ่งจะเห็นได้จากสมการ(4-13)

$$h(r,\theta) \approx a_0 + r(a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) + r^2 (a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta)$$

$$\text{เมื่อ } r < r_0 \qquad (4\text{-}13)$$

จากสมการ(4-13) จะเห็นว่า การกำหนดค่ารัศมี r_0 ที่เหมาะสมเป็นสิ่งที่สำคัญต่อความถูกต้องในการประมาณ ซึ่งในทางปฏิบัติอาจเลือกรัศมี r_0 เป็นค่าที่เหมาะสมใดๆในครั้งแรก และหลังจากนั้นจึงทำการประมาณค่าความสูงของพื้นที่ด้วยฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ เพื่อคำนวณเส้นทางการไหลของกระแสน้ำ และเมื่อต้องการเส้นทางการไหลที่มีความสอดคล้องกับธรรมการไหลของน้ำเพิ่มมากขึ้น สามารถทำได้โดยการลดค่ารัศมี r_0 ในขณะเดียวกันการกำหนดให้ค่ารัศมี r_0 มีขนาดเล็กมากเกินไป ทำให้ใช้เวลานานในการคำนวณเนื่องจากมีจำนวนครั้งในการคำนวณเพิ่มมากขึ้น

4.2.3 การคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันอนุกรมจำกัดกำลังสอง

ในหัวข้อนี้เป็นการอธิบายการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆของฟังก์ชันความสูงในรูปแบบอนุกรมจำกัดกำลังสอง $h(r,\theta)$ ค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้ ได้แก่ a_0 a_1 b_1 a_2 และ b_2 ซึ่งถูกแสดงในสมการ(4-13) หัวข้อ 4.2.2 โดยทั่วๆไปการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ สามารถคำนวณได้หลายรูปแบบ โดยจะขึ้นอยู่กับหลักเกณฑ์การพิจารณาค่าแตกต่างกันระหว่าง ค่าความสูงจากพื้นที่จริงซึ่งเป็นค่าของฟังก์ชัน $f(x,y)$ และค่าความสูงจากการประมาณซึ่งเป็นค่าของฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ ที่รัศมีมีค่าเท่ากับศูนย์ มาใช้เพื่อวัดค่าความแตกต่างดังกล่าวข้างต้น ดังนั้น ในการประมาณฟังก์ชันความสูง $h(r,\theta)$ ให้ถูกต้อง จึงกำหนดให้ค่าฟังก์ชันความสูง $f(x,y)$ มีค่าเท่ากับค่า

ฟังก์ชันความสูง $h(r,\theta)$ เมื่อรัศมีมีค่าเท่ากับศูนย์ และค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันความสูง $f(x,y)$ มีค่าเท่ากับค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันความสูง $h(r,\theta)$ เมื่อรัศมีมีค่าเท่ากับศูนย์เช่นเดียวกัน

จากฟังก์ชันความสูง $f(x,y)$ และฟังก์ชันความสูง $h(r,\theta)$ สามารถแสดงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันทั้งสองได้ดังนี้

- ค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองของฟังก์ชันความสูง $h(r,\theta)$ เทียบกับรัศมี r ซึ่งมีผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$h(r,\theta) = a_0 + r(a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) + r^2(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) \tag{4-14}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} h(r,\theta) = h_r = (a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) + 2r(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) \tag{4-15}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} h(r,\theta) = h_{rr} = 2(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) \tag{4-16}$$

- ค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองของฟังก์ชันความสูง $f(x,y)$ เทียบกับรัศมี r ซึ่งมีผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$f(x,y) = f \tag{4-17}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} f(x,y) = f_r = f_x x_r + f_y y_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta \tag{4-18}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(x,y) = f_{rr} = (f_r)_r = (f_x x_r + f_y y_r)_r$$

$$= f_{xx} \cos^2\theta + 2 f_{xy} \cos\theta \sin\theta + f_{yy} \sin^2\theta \tag{4-19}$$

จากการกำหนดให้ค่าฟังก์ชันความสูง $f(x,y)$ มีค่าเท่ากับค่าฟังก์ชันความสูง $h(r,\theta)$ เมื่อรัศมีมีค่าเท่ากับศูนย์ และกำหนดให้ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันความสูง $f(x,y)$ มีค่าเท่ากับค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันความสูง $h(r,\theta)$ เมื่อรัศมีมีค่าเท่ากับศูนย์เช่นเดียวกัน ทำให้สามารถหาคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของเทอมต่างๆในฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ ได้ดังนี้

จากสมการ(4-17) ซึ่งเท่ากับสมการ(4-14) ในกรณีที่รัศมี(r) เท่ากับศูนย์

$$h = a_0 = f \tag{4-20}$$

จากสมการ(4-18) ซึ่งเท่ากับสมการ(4-15) ในกรณีที่รัศมี(r) เท่ากับศูนย์

$$h_r = a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta = f_r \tag{4-21}$$

จากสมการ(4-19) ซึ่งเท่ากับสมการ(4-16) ในกรณีที่รัศมี(r) เท่ากับศูนย์

$$h_{rr} = 2a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta = f_{xx} \cos^2\theta + 2f_{xy} \cos\theta \sin\theta + f_{yy} \sin^2\theta = f_{rr} \tag{4-22}$$

จากสมการ(4-20) จะได้สัมประสิทธิ์ a_0 ตามสมการ(4-23) ดังนี้

$$a_0 = f \tag{4-23}$$

และจากสมการ(4-21) จะได้สัมประสิทธิ์ a_1 และ b_1 เมื่อแทนค่า $\theta = 0$ และ $\theta = \pi/2$

$$a_1 = f_x \tag{4-24}$$

$$b_1 = f_y \tag{4-25}$$

และจากสมการ(4-22) จะได้สัมประสิทธิ์ a_2 และ b_2 เมื่อแทนค่า $\theta = 0$ และ $\theta = \pi/4$

$$a_2 = 0.5 * f_{xx} \tag{4-26}$$

$$b_2 = 0.25 * f_{xx} + 0.5 * f_{xy} + 0.25 f_{yy} = 0.25 * \left(f_{xx} + f_{yy}\right) \tag{4-27}$$

จากสมการ(4-27) สามารถลดรูปโดยใช้เงื่อนไขของสมการลาปลาซ เนื่องจาก $f_{xx} + f_{yy}$ ก็คือ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ ตามสมการ(4-9) ดังนั้น

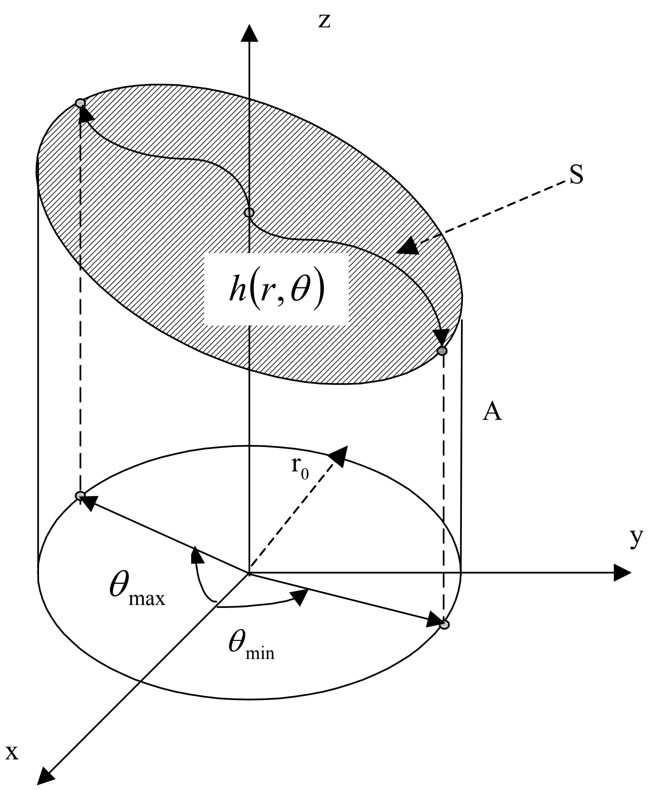
$$b_2 = 0.5 * f_{xy} \tag{4-28}$$

ดังนั้น จึงสามารถเขียนฟังก์ชันความสูงในรูปแบบอนุกรมกำลังสอง $h(r,\theta)$ เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณได้ดังนี้

$$h(r,\theta) = f + r\left(f_x \cos\theta + f_x \sin\theta\right) + r^2\left(0.5 * f_{xx} \cos 2\theta + 0.5 f_{xy} \sin 2\theta\right) \tag{4-29}$$

เห็นได้ว่า เมื่อสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันความสูงในรูปแบบอนุกรมจำกัดกำลังสองได้ทำให้ทราบค่าความสูงของจุดใดๆภายในวงกลมรัศมี r_0 ดังนั้น จึงสามารถคำนวณเส้นทางการไหลของน้ำได้

4.2.4 การคำนวณทิศทางการไหลของน้ำ



ภาพประกอบ 4-6 แสดงเส้นทางการไหลของน้ำจากการคำนวณ

ในหัวข้อนี้อธิบายถึงวิธีการคำนวณเส้นทางการไหลของน้ำโดยใช้ฟังก์ชันความสูง $h(r,\theta)$ ในสมการ(4-29) ซึ่งเป็นการคำนวณเพื่อสร้างเส้นทางการไหลของน้ำจากจุดหนึ่งไปอีกจุดหนึ่งเป็นลำดับต่อๆกัน โดยเริ่มจากจุดที่มีความสูงน้อยกว่าไปยังจุดที่มีความสูงมากกว่า หรือโดยเริ่มจากจุดที่มีความสูงมากกว่าไปยังจุดที่มีความสูงน้อยกว่า

ภาพประกอบ 4-6 แสดงฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันความสูงของพื้นที่ภายในวงกลมรัศมี $r < r_0$ ซึ่งเส้นทางการไหลของน้ำสามารถคำนวณได้ตามเส้นทางของ S จากจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมีน้อยกว่าหรือเท่ากับ r_0 โดยมีทิศทางตามแนวความชันที่มีค่ามากที่สุด(แนว AB) ดังนั้น เส้นทางการไหลจึงประกอบด้วย 2 ทิศทาง คือ จากจุดศูนย์กลางไปยังจุด A ซึ่งเป็นจุดที่มี

ความสูงน้อยที่สุด และจากจุดศูนย์กลางทิศทางการไหลไปยังจุด B ซึ่งเป็นจุดที่มีความสูงมากที่สุด โดยทั้งสองจุดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่รัศมี $r = r_0$ ซึ่งตำแหน่งของจุดทั้งสองขึ้นอยู่กับมุม θ และสามารถคำนวณมุม θ ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. คำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ โดยเทียบกับมุม θ จะได้

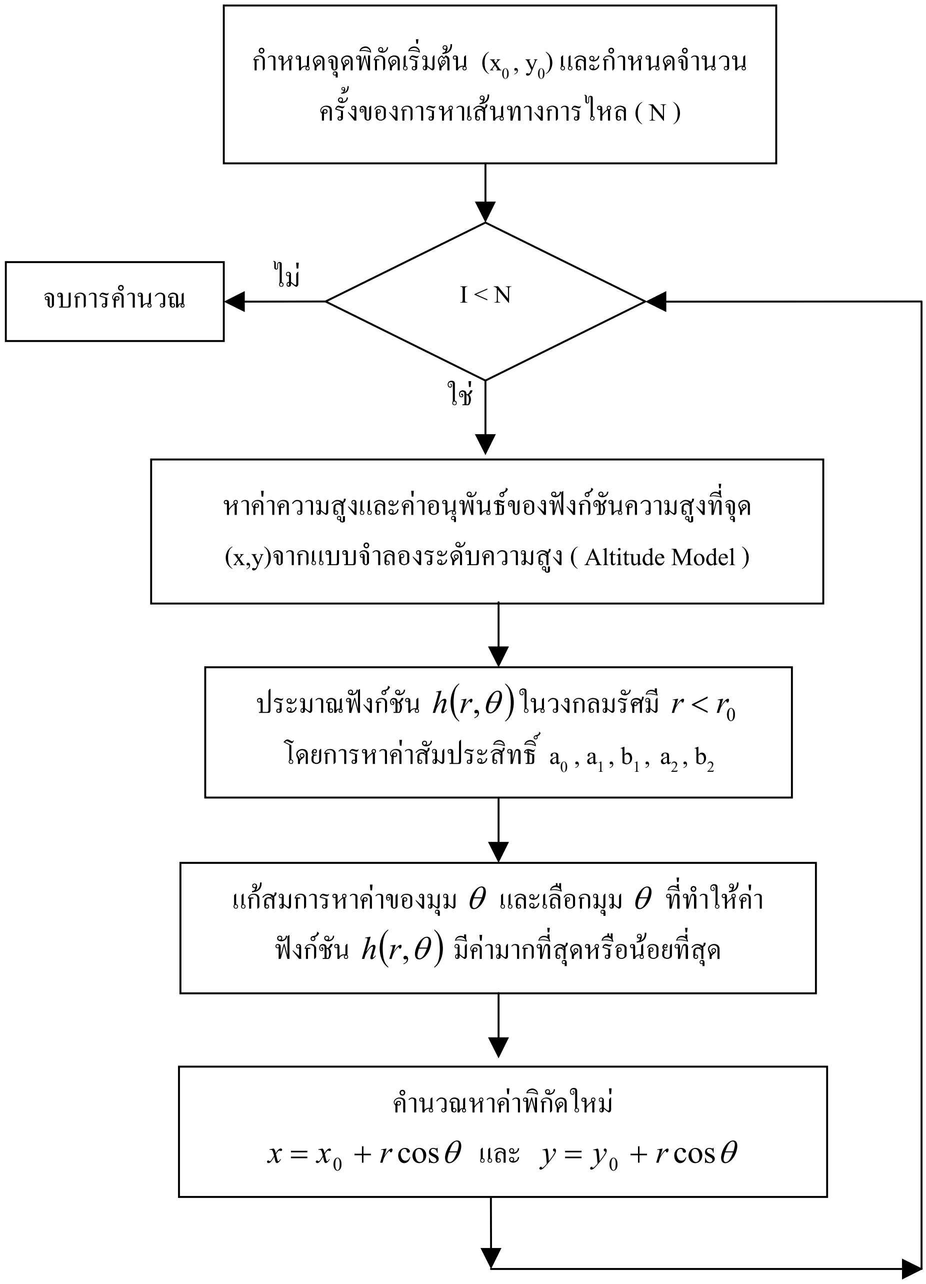
$$\frac{\partial}{\partial\theta}h(r_0,\theta) = h_\theta\Big|_{r_0} = r_0\left(-a_1\sin\theta + b_1\cos\theta\right) + 2r_0^2\left(-a_2\sin 2\theta + b_2\cos 2\theta\right) \quad (4\text{-}30)$$

2. คำนวณค่ามุม θ ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันมีค่ามากที่สุดหรือมีค่าต่ำที่สุด โดยกำหนดให้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ ในสมการ(4-30) มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้เป็นสมการ(4-31) ดังนี้

$$a_1\sin\theta + 2a_2 r_0\sin 2\theta = b_1\cos\theta + 2b_2 r_0\cos 2\theta \qquad (4\text{-}31)$$

จากสมการ(4-31) เห็นได้ว่ามีเทอมของฟังก์ชันตรีโกณมิติอยู่ 2 ฟังก์ชัน คือ cosine และ sine ดังนั้น จึงทำการแปลงฟังก์ชันทั้งสองให้เป็นฟังก์ชัน cosine หรือ sine ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง เพื่อใช้ในการแก้สมการหามุม θ และแปลงเป็นสมการกำลังสี่ (Quartic Equation) หลังจากนั้น เมื่อได้รากของสมการจึงแปลงกลับมาเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติอีกครั้ง ดังนั้น จึงสามารถคำนวณหามุม θ โดยได้มุม θ ทั้งหมดสี่มุม และนำมุม θ เหล่านั้นไปแทนในฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ เพื่อพิจารณามุม θ ที่ทำให้ค่าฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ มีค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุด หลังจากนั้นเมื่อทราบมุม θ ที่เหมาะสม จึงใช้มุม θ ดังกล่าวเป็นตัวบอกทิศทางของเส้นทางการไหลของน้ำในลำดับต่อไป

4.2.5 สรุปลำดับการคำนวณของแบบจำลองเส้นทางการไหลของน้ำ



ภาพประกอบ 4-7 สรุปลำดับการคำนวณเส้นทางการไหลของน้ำ

ในภาพประกอบ 4-7 แสดงแผนผังลำดับการคำนวณเส้นทางการไหลของน้ำ โดยเริ่มจากการกำหนดจุดเริ่มต้นของเส้นทางการไหล เห็นได้ว่า จุดพิกัด (x,y) เมื่อ $x = x_0$ และ $y = y_0$ เป็นจุดพิกัดเริ่มต้นใดๆที่ต้องการทราบค่าความสูงในรูปของฟังก์ชัน $f(x,y)$ และค่าอนุพันธ์ความสูงของ

ฟังก์ชัน $f(x,y)$ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากแบบจำลองระดับความสูง(Altitude Model) แล้วจึงใช้ผลลัพธ์ที่ได้ ซึ่งเป็นค่าความสูงและค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันความสูง เพื่อคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันความสูงภายในพื้นที่วงกลมรัศมี $r < r_0$ และหลังจากนั้น จึงทำการแก้สมการเพื่อคำนวณหาค่ามุม θ ซึ่งเป็นรากของสมการกำลังสี่ที่ได้จากการแปลงสมการ(4-31) โดยมีทั้งหมด 4 ค่า และนำรากของสมการเหล่านั้นแทนลงในฟังก์ชัน $h(r,\theta)$ เพื่อหาค่ามุม θ ที่เหมาะสมโดยการพิจารณามุม θ ที่ทำให้ค่าฟังก์ชันมีค่ามากที่สุดหรือมีค่าน้อยที่สุด ดังนั้น ค่ามุม θ ที่เหมาะสมจึงถูกใช้เพื่อแสดงแนวเส้นทางการไหลของกระแสน้ำจากจุดเริ่มต้น (x_0,y_0) ไปยังจุดปลาย (x,y) ซึ่ง x และ y เป็นจุดพิกัดใหม่ที่มีค่าสัมพันธ์กับพิกัดของจุดเริ่มต้นและค่าของมุม θ

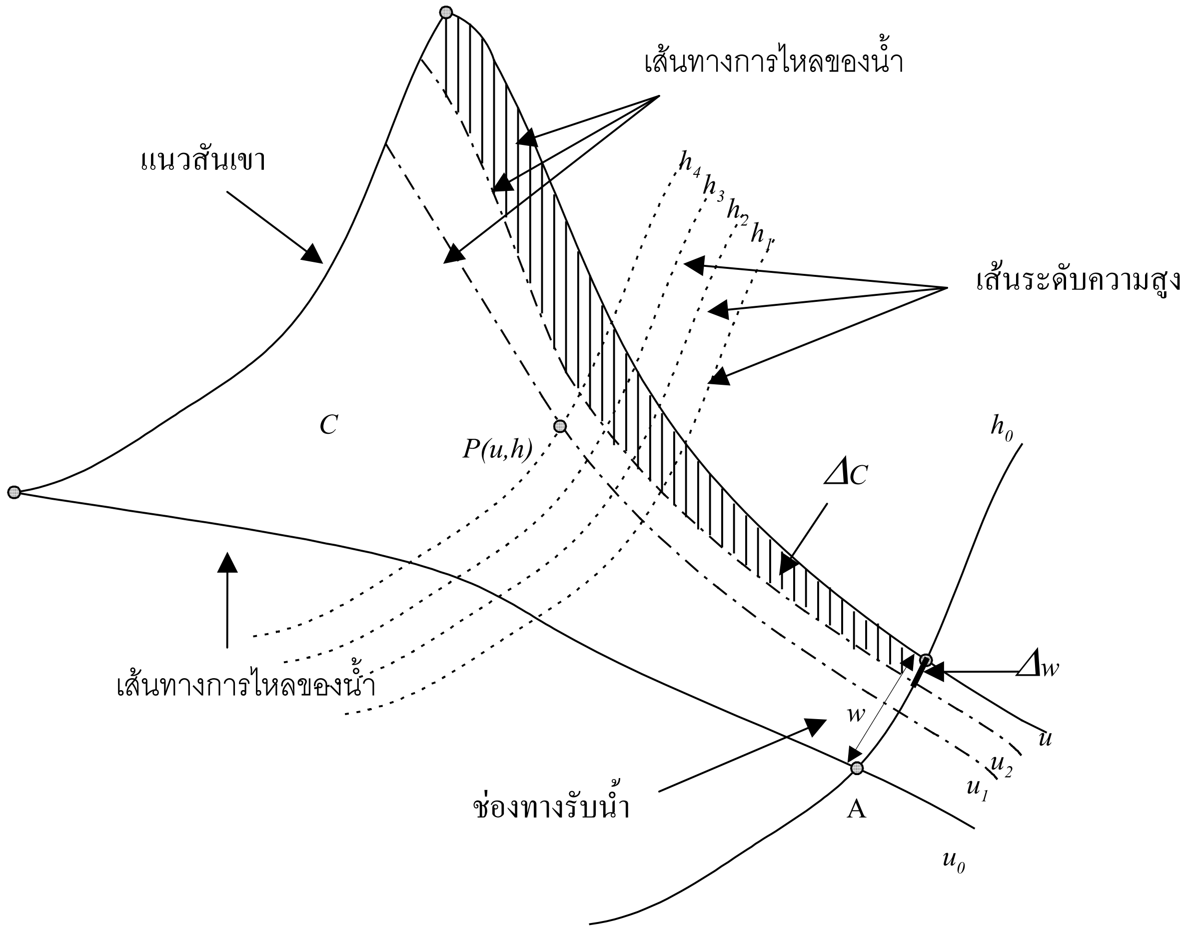
4.3 แบบจำลองพื้นที่รับน้ำ

จุดประสงค์ของแบบจำลอง คือ การคำนวณพื้นที่ที่รองรับน้ำฝน ซึ่งขนาดของพื้นที่มีผลต่อระดับความลึกของน้ำท่วม ดังนั้น จึงต้องทราบขนาดของพื้นที่รับน้ำเพื่อนำไปใช้ในการคำนวณภายในแบบจำลองความลึกของน้ำต่อไป การคำนวณพื้นที่รองรับน้ำใช้วิธีเชิงตัวเลข(Numerical) โดยทำการอินทิเกรต(integrate)ตามเส้นทางการไหลของน้ำ ซึ่งเส้นทางการไหลของน้ำเป็นผลลัพธ์ของแบบจำลองเส้นทางการไหลของน้ำ

ในหัวข้อนี้อธิบายถึงส่วนประกอบต่างๆของพื้นที่รับน้ำ วิธีการคำนวณพื้นที่รับน้ำและค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำตามแนวของเส้นทางการไหลของน้ำ

4.3.1 พื้นที่รับน้ำ

ในภาพประกอบ 4-8 แสดงพื้นที่รับน้ำ(*C*)ที่ถูกล้อมรอบโดยแนวสันเขา EF เส้นระดับความสูง h_0 ซึ่งเป็นข้อมูลความสูงของพื้นที่ที่พิจารณา และเส้นทางการไหลของน้ำ u_0 u_1 u_2และ u ซึ่งเป็นผลลัพธ์จากแบบจำลองเส้นทางการไหลของน้ำ เห็นได้ว่า ฝนที่ตกในพื้นที่รับน้ำทำให้เกิดน้ำที่ไหลจากแนวสันเขาผ่านพื้นที่รับน้ำ ซึ่งแนวเส้นทางการไหล u_0 มีทิศทางจากแนวสันเขาตัดผ่านจุด A และแนวเส้นทางการไหล u มีทิศทางจากแนวสันเขาตัดผ่านจุด B ซึ่งจุดทั้งสองอยู่บนเส้นระดับความสูง h_0 ดังนั้น ปริมาณน้ำฝนที่ตกในพื้นที่รับน้ำไหลออกจากพื้นที่ดังกล่าวผ่านช่องทางระหว่างจุด A และ B ซึ่งเรียกช่องทางนี้ว่า ช่องทางรับน้ำ



ภาพประกอบ 4-8 แสดงพื้นที่รับน้ำ

จุด P เป็นจุดภายในพื้นที่ที่พิจารณาซึ่งถูกแสดงในพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinates) P(x,y) และยังสามารถแสดงในพิกัด curvilinear P(u,h) ซึ่งเกิดจาการตัดกันของเส้นทางการไหลใดๆ และเส้นระดับความสูงใดๆ ดังนั้น จุด P จึงเป็นจุดตัดของเส้นระดับความสูงและเส้นทางการไหลที่อยู่ในพื้นที่รับน้ำ ความกว้างของช่องทางรับน้ำ(w) สามารถคำนวณโดยการอินทิเกรตตามเส้นระดับความสูงจากจุด A ไปยังจุด B โดยกำหนดให้ ds เป็นส่วนประกอบเส้นตรงเชิงอนุพันธ์ขนาดเล็กของเส้นระดับความสูง ดังนั้น ความกว้างของช่องทางรับน้ำ (w) สามารถคำนวณได้ตามสมการ (4-32) ดังนี้

$$w = \int_A^B 1 ds \qquad (4\text{-}32)$$

เมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์ของ w โดยเทียบกับ ds ในสมการ(4-32) จะได้ค่าเท่ากับ 1 ดังสมการ(4-33)

$$\frac{dw}{ds} = 1 \qquad (4\text{-}33)$$

4.3.2 ค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำ

ในหัวข้อนี้เป็นการอธิบายการหาค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำ ซึ่งจากภาพประกอบ 4-8 เมื่อแบ่งพื้นที่รับน้ำออกเป็นพื้นที่รับน้ำย่อย คือ ΔC ซึ่งอยู่ระหว่างเส้นทางการไหลของกระแสน้ำและเส้นระดับความสูง ดังนั้น ค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำ(L) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รับน้ำ (ΔC) เทียบกับการเปลี่ยนแปลงความกว้างของช่องทางรับน้ำ (Δw) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$L = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta w} = \frac{dC}{dw} = \frac{dC}{dw}\frac{dw}{ds} = \frac{dC}{ds} \qquad (4\text{-}34)$$

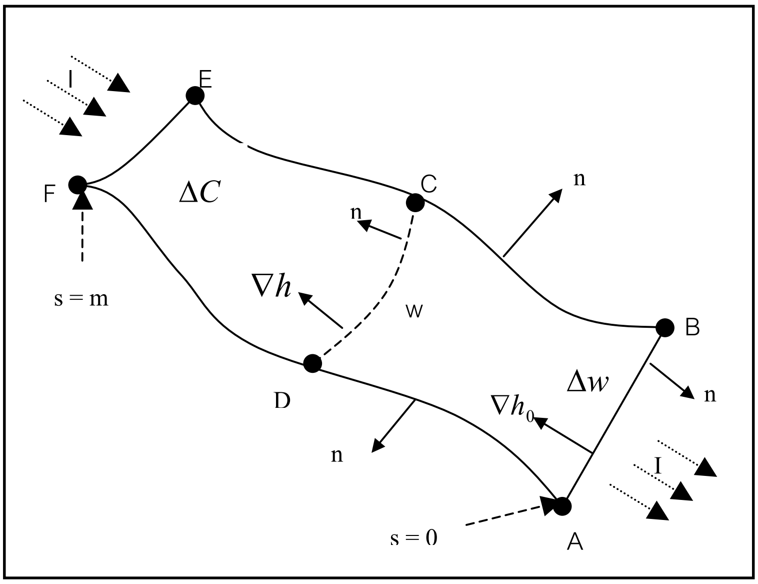
และเมื่อทำการอินทิเกรตค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำ ตามเส้นระดับความสูงจากจุด A ไปยังจุด B สามารถคำนวณขนาดของพื้นที่รับน้ำ ได้ดังต่อไปนี้

$$C = \int_A^B L\,ds \qquad (4\text{-}35)$$

เห็นได้ว่า สมการ(4-35) สามารถคำนวณพื้นที่รับน้ำจากการอินทิเกรตค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำตามช่องทางรับน้ำได้

4.3.3 การคำนวณค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำจากเส้นทางการไหลของน้ำ

จากสมการ(4-34) ในหัวข้อ 4.3.2 ได้กล่าวถึงการคำนวณค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำ โดยแบ่งพื้นที่รับน้ำออกเป็นพื้นที่รับน้ำย่อย(ΔC) ซึ่งมีขอบเขตเป็นเส้นระดับความสูงสองเส้นที่มีระดับความสูงแตกต่างกัน และเส้นทางการไหลของน้ำสองเส้น ซึ่งได้จากแบบจำลองเส้นทางการไหล โดยเส้นทางการไหลของน้ำทั้งสองเส้นนี้มีทิศทางขึ้นอยู่กับค่าความสูง และขึ้นอยู่กับค่าความชันจุดใดๆในพื้นที่ที่พิจารณา



ภาพประกอบ 4-9 แสดงพื้นที่รับน้ำย่อย ΔC

ภาพประกอบ 4-9 แสดงพื้นที่รับน้ำย่อย ΔC ซึ่งอยู่ระหว่างเส้นระดับความสูง(AB) เส้นระดับความสูง(EF) และเส้นทางการไหลของน้ำสองเส้น คือ เส้นทางการไหลจากจุด A ไปยังจุด F และเส้นทางการไหลจากจุด B ไปยังจุด E ซึ่งเมื่อพิจารณาเส้นทางการไหลจากจุด A ไปยังจุด F พบว่าจุด A เป็นจุดเริ่มต้นของการคำนวณความยาวของเส้นทางการไหลโดยที่จุดนี้จะมีค่าระยะทาง s เท่ากับ 0 (s = 0) ซึ่งจุด A เป็นจุดที่อยู่บนเส้นระดับความสูง AB ส่วนจุด F เป็นจุดสุดท้ายของการคำนวณความยาวของเส้นทางการไหลโดยที่จุดนี้มีค่าระยะทาง s เท่ากับ m (s = m) ซึ่งจุด F เป็นจุดที่อยู่บนเส้นระดับความสูง EF ดังนั้น น้ำที่ไหลเข้าสู่พื้นที่รับน้ำ ณ บริเวณที่มีค่าระยะทาง s = m และไหลออกจากพื้นที่รับน้ำ ณ บริเวณที่มีระยะทาง s = 0 โดยเรียกบริเวณนั้นว่า **ช่องทางรับน้ำ** ซึ่งมีความกว้างเท่ากับ Δw ดังนั้น จึงสามารถคำนวณค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำได้จากการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รับน้ำ ΔC เทียบกับความกว้างของช่องทางรับน้ำ Δw เมื่อ Δw มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังนี้

$$L = \lim_{\Delta w \to 0}\left(\frac{\Delta C}{\Delta w}\right) \qquad (4\text{-}36)$$

การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าอนุพันธ์พื้นที่รับน้ำ(L)ในสมการ(4-36) จำเป็นต้องทราบความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ย่อย ΔC และความกว้างของช่องทางรับน้ำ Δw ซึ่งในการคำนวณเพื่อ

หาความสัมพันธ์ของ ΔC ในรูปของ Δw โดยใช้เส้นทางการไหลของกระแสน้ำ และทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (Divergence Theorem)

ในแบบจำลองเส้นทางการไหลของน้ำ ซึ่งได้ทำการคำนวณเส้นทางการไหล โดยใช้เกรเดียนต์(Gradient)ของฟังก์ชันความสูง (∇h) ซึ่งสอดคล้องตามสมการของลาปลาซ(Laplace's Equation) เนื่องจาก $\nabla h^2 = 0$ นอกจากนี้ ∇h^2 ยังมีค่าเท่ากับลาปลาซเซียน(Laplacian)ของฟังก์ชันความสูง($\nabla \cdot \nabla h$) ดังสมการ(4-37)

$$\nabla^2 h = \nabla \cdot \nabla h = 0 \tag{4-37}$$

ทฤษฎีไดเวอร์เจนต์ได้กล่าวไว้ว่า การอินทิเกรตบนพื้นที่ใดๆของไดเวอร์เจนซ์ของสนามเวคเตอร์เท่ากับฟลักซ์ชี้ออกรวมของเวคเตอร์ที่ไหลผ่านตลอดเส้นขอบเขตวงปิดที่ล้อมรอบพื้นที่นั้น ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\int_{\gamma} \nabla \cdot A d\alpha = \oint_{\Gamma} A \cdot n ds \tag{4-38}$$

เมื่อ

A	เป็นสนามเวกเตอร์
γ	เป็นพื้นที่ใดๆ
Γ	เป็นเส้นขอบเขตวงปิดที่ล้อมรอบพื้นที่ใดๆ
$d\alpha$	เป็นส่วนประกอบพื้นที่เชิงอนุพันธ์ขนาดเล็กมาก
ds	เป็นส่วนประกอบเส้นตรงเชิงอนุพันธ์ขนาดเล็กมาก

เมื่อพิจารณาสมการ(4-37) พบได้ว่า ∇h เป็นสนามเวกเตอร์ที่เกิดจากการเกรเดียนต์ของฟังก์ชันความสูง ซึ่งจากทฤษฎีไดเวอร์เจนต์ในสมการ(4-38) ทำให้การอินทิเกรตตามพื้นที่ (γ) ของไดเวอร์เจนซ์ของ ∇h เท่ากับฟลักซ์ออกรวมของเวคเตอร์ ∇h ที่ไหลผ่านเส้นขอบเขตวงปิดที่ล้อมรอบพื้นที่ (Γ) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\int_{\gamma} \nabla \cdot \nabla h d\alpha = \oint_{\Gamma} \nabla h \cdot n ds \tag{4-39}$$

และเนื่องจากฟังก์ชันความสูง h สอดคล้องกับสมการลาปลาซตามสมการ(4-37) ดังนั้น การอินทิเกรตตามเส้นขอบเขตวงปิดของ ∇h ในสมการ(4-39) มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งสามารถแสดงในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\oint_{\Gamma} \nabla h \cdot n ds = 0 \qquad (4\text{-}40)$$

เมื่อพิจารณาภาพประกอบ 4-9 เห็นได้ว่า พื้นที่ย่อยที่ต้องการอินทิเกรตในสมการ(4-40) โดยมีเส้นขอบเขตของพื้นที่ (boundary Γ) ซึ่งประกอบด้วย 2 ส่วน ดังนี้

- ส่วนแรก คือ เส้นทางการไหลของน้ำสองเส้น ซึ่งเป็นเส้นทางการไหลจากจุด D ไปยังจุด A และเส้นทางการไหลจากจุด C ไปยังจุด B

- ส่วนที่สอง คือ เส้นระดับความสูงสองเส้น ซึ่งเป็นเส้นระดับความสูง AB และเส้นระดับความสูง DC

ดังนั้น การอินทิเกรตพื้นที่ย่อยตามเส้นขอบเขต สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\int_{A}^{B} \nabla h \cdot n ds + \int_{B}^{C} \nabla h \cdot n ds + \int_{C}^{D} \nabla h \cdot n ds + \int_{D}^{A} \nabla h \cdot n ds = 0 \qquad (4\text{-}41)$$

การอินทิเกรตตามเส้นทางการไหลจาก B ไปยัง C และจาก D ไปยัง A มีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากเวคเตอร์ n และทิศทางของเส้นทางการไหลทำมุมตั้งฉากกัน ซึ่งทำให้ผลการคูณเชิงสเกลาร์(Dot Product)ของเวคเตอร์มีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วนการอินทิเกรตตามเส้นระดับความสูงจาก A ไปยัง B และ C ไปยัง D มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ เนื่องจากเวคเตอร์ n และเส้นทางการไหลมีทิศทางขนานกัน ซึ่งทำให้ผลการคูณเชิง สเกลาร์(Dot Product)ของเวคเตอร์มีค่าเท่ากับ $-|\nabla h|$ และ $|\nabla h|$ ตามลำดับ ดังนั้นจากสมการ(4-41) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$-\int_{A}^{B} |\nabla h| ds + \int_{C}^{D} |\nabla h| ds = 0 \qquad (4\text{-}42)$$

จากการกำหนดให้ความกว้างของช่องทางรับน้ำมีค่าเข้าใกล้ศูนย์$(\Delta w \rightarrow 0)$ ซึ่งทำให้ขนาดของเกรเดียนต์($|\nabla h|$) เป็นค่าคงที่ ดังนั้น การอินทิเกรตตามเส้นระดับความสูงจากจุด A ไปยังจุด B จะมีค่าคงที่เท่ากับ - $|\nabla h_0|$ และการอินทิเกรตตามเส้นระดับความสูงจากจุด C ไปยังจุด D มีค่าคงที่เท่ากับ $|\nabla h|$ ดังนั้นจากสมการ(4-42) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$-\left|\nabla h_0\right|\int_A^B ds + \int_C^D ds = 0 \qquad (4\text{-}43)$$

ในสมการ(4-43) เห็นได้ว่า เหลือเพียงเทอมการอินทิเกรตของความยาวของเส้นระดับความสูงระหว่าง AB และระหว่าง CD ซึ่งผลการอินทิเกรตมีค่าเท่ากับ Δw_0 และ w ตามลำดับ คือ

$$-\left|\nabla h_0\right|\Delta w + \left|\nabla h\right| w = 0$$

$$w = \frac{\left|\nabla h_0\right|\Delta w}{\left|\nabla h\right|} \qquad (4\text{-}44)$$

ดังนั้น w ซึ่งเป็นระยะทางระหว่างเส้นทางการไหลสองเส้นที่อยู่บนแนวเส้นระดับความสูงใดๆในพื้นที่ที่พิจารณา สามารถเขียนอยู่ในรูปผลคูณของขนาดความกว้างของช่องทางรับน้ำ Δ w และขนาดของเกรเดียนต์ $\left|\nabla h_0\right|$ หารด้วย $\left|\nabla h\right|$ ซึ่ง $\left|\nabla h_0\right|$ เป็นขนาดเกรเดียนต์ ณ จุดเริ่มต้นของการคำนวณเส้นทางการไหล และ $\left|\nabla h\right|$ เป็นขนาดเกรเดียนต์ ณ จุดสิ้นสุดของการคำนวณเส้นทางการไหล(ดูภาพประกอบ 4-9)

จากภาพประกอบ 4-9 สามารถคำนวณพื้นที่ย่อย ΔC โดยการอินทิเกรตระยะทางระหว่างเส้นทางการไหลสองเส้นที่อยู่บนเส้นระดับความสูงใดๆ(w)ตามเส้นทางการไหลของน้ำ AF จากจุดเริ่มต้นของการคำนวณเส้นทางการไหลที่มีระยะทาง s = 0 ไปยัง จุดสุดท้ายของการคำนวณเส้นทางการไหลของน้ำที่มีระยะทาง s = m ดังนั้น พื้นที่รับน้ำย่อยสามารถคำนวณได้ตามสมการ(4-45)ดังนี้

$$\Delta C = \int_0^m w\,ds = \Delta w_0\left|\nabla h_0\right|\int_0^m \frac{1}{\left|\nabla h\right|}\,ds \qquad (4\text{-}45)$$

เมื่อนำพื้นที่ย่อย ΔC จากสมการ(4-45) แทนลงในสมการ(4-36) จะได้ค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำ ดังนี้

$$L = \lim_{\Delta w \to 0}\left(\frac{\Delta C}{\Delta w}\right) = \left|\nabla h_0\right|\int_0^m \frac{1}{\left|\nabla h\right|}\,ds \qquad (4\text{-}46)$$

จึงสรุปได้ว่า ค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำ หมายถึง ความยาวของแนวเส้นทางการไหลสองเส้นขนานกัน ซึ่งบรรจุพื้นที่รับน้ำไว้ และแนวเส้นทางการไหลของน้ำทั้งสองเส้นนี้มีระยะห่างเท่ากับความกว้างของช่องทางรับน้ำ ณ จุดเริ่มต้นของการคำนวณเส้นทางการไหลของน้ำ

4.4 แบบจำลองปริมาณน้ำฝน

จุดประสงค์ของแบบจำลองปริมาณน้ำฝน คือ การคำนวณความเข้มน้ำฝน ที่ตกลงบนจุดต่างๆ ในพื้นที่ที่พิจารณา การคำนวณได้ใช้ข้อมูลในอดีตของน้ำฝนที่ตกลงในบริเวณนั้นๆหรือข้อมูลที่สร้างขึ้นเพื่อต้องการทดสอบ ซึ่งในการวิเคราะห์แบบจำลองน้ำฝนเพื่อให้การคำนวณสอดคล้องกับแบบจำลองอื่นๆ โดยกำหนดให้ R แทนความเข้มของฝน แต่ไม่ใช่ความเร็วของฝนที่ตกลง และกำหนดให้แบบจำลองนี้เป็นชนิดคงตัวและสม่ำเสมอ ซึ่ง R เป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นอยู่กับพิกัดของ x และ y ซึ่ง x และ y เป็นพิกัดของจุดใดๆในพื้นที่ จึงกำหนดให้ความเข้มของฝน R มีค่าเท่ากัน โดย R มีหน่วยเป็นมิลลิเมตรต่อชั่วโมง (mm/hr)

4.5 แบบจำลองพื้นผิวดิน

จุดประสงค์ของแบบจำลองพื้นผิวดิน คือ การระบุชนิดของดินที่จุดต่างๆในบริเวณที่พิจารณา โดยเทียบกับชนิดของดินที่เป็นมาตรฐาน ในทางปฏิบัตินั้นการระบุชนิดของดิน ได้มาจากการสำรวจพื้นที่ที่พิจารณา กำหนดให้แบบจำลองนี้เป็นชนิดไม่สม่ำเสมอและคงตัว ซึ่งชนิดของดินกำหนดเป็นให้ค่าคงที่ตลอดช่วงเวลาแต่เปลี่ยนแปลงตามพื้นที่ที่พิจารณา ในการสร้างแบบจำลองนี้ใช้หลักการทางไฟฟ้าเข้ามาประยุกต์โดยให้ปริมาณน้ำที่ไหลผ่านหรือกระแสน้ำเทียบได้กับกระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจร และให้ลักษณะพื้นผิวดินที่ต้านทานกระแสน้ำเทียบได้กับตัวต้านทาน (RESISTOR) ในวงจรไฟฟ้า

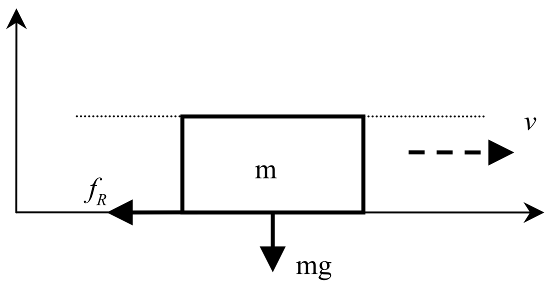
4.6 แบบจำลองพื้นผิวต้นไม้

จุดประสงค์ของแบบจำลองพื้นผิวต้นไม้ คือ การระบุชนิดของสภาพแวดล้อมทางธรรมชาติโดยเน้นที่พื้นที่ป่าไม้ที่จุดต่างๆในบริเวณที่พิจารณา โดยเทียบชนิดของต้นไม้ที่เป็นมาตรฐานในทางปฏิบัติการระบุชนิดของต้นไม้ ได้มาจากการสำรวจพื้นที่ที่พิจารณา กำหนดให้แบบจำลองนี้เป็นชนิดไม่สม่ำเสมอและคงตัว ซึ่งชนิดของสภาพแวดล้อมทางธรรมชาติถูกกำหนดให้เป็นค่าคงที่ตลอดช่วงเวลาแต่เปลี่ยนแปลงตามพื้นที่ที่พิจารณา และความสมบูรณ์ของสภาพแวดล้อม มีผลต่อการต้านทานกระแสน้ำได้ดี เพราะทำให้น้ำลดความเร็วลง และสามารถช่วยดูดซับน้ำด้วย

4.7 แบบจำลองความต้านทานการไหลของน้ำ

แบบจำลองนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความต้านทานการไหลของน้ำ ซึ่งขึ้นอยู่ลักษณะของพื้นผิวดินและวัตถุต่างๆที่อยู่เหนือผิวดินนั้น ตัวอย่างเช่น คอนกรีตหรือพื้นดินแข็ง เมื่อมีน้ำไหลลงมาทำให้เกิดการไหลผ่านอย่างรวดเร็ว ส่วนพื้นดินที่มีความขรุขระหรือมีหินก้อนใหญ่ ซึ่งมีส่วนช่วยให้ความเร็วของน้ำลดลง ส่วนพื้นดินที่มีความอุดมสมบูรณ์ของต้นไม้นั้น ก็เป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ช่วยลดความเร็วของน้ำได้ ดังนั้น จุดประสงค์ของการสร้างแบบจำลองนี้ คือ การศึกษาลักษณะพื้นผิวดินในแต่ละชนิดที่ได้กล่าวมาแล้ว เพื่อนำมาวิเคราะห์หาแรงต้านทานน้ำของผิวดินในแต่ละชนิด ซึ่งการที่พื้นผิวดินมีแรงต้านทานน้ำ ทำให้น้ำเกิดการสูญเสียพลังงานของการไหลของน้ำ เนื่องจากแรงต้านมีทิศทางตรงกันข้ามกับการไหลของน้ำ แรงต้านทานน้ำขึ้นอยู่กับปัจจัย 3 ส่วนที่สำคัญ คือ สภาพของผิวดิน ความเร็วของน้ำ และปริมาตรหรือมวลของน้ำ ซึ่งปัจจัยทั้ง 3 ส่วนนี้นำมาพิจารณาในรูปของค่าความคล่องตัวของพื้นผิวที่มีผลต่อน้ำ

4.7.1 แรงต้านทาน



ภาพประกอบ 4-10 แสดงทิศทางของแรงต้านทาน

ในภาพประกอบ 4-10 แสดงวัตถุซึ่งเป็นมวลของน้ำขนาด m กิโลกรัม(Kg) เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v เมตรต่อวินาที(m/s) และเกิดแรงต้านทานน้ำของพื้นผิว f_R ในทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ ซึ่งแรงต้านทานของพื้นผิวที่กระทำต่อวัตถุขึ้นอยู่กับค่าความคล่องตัวของพื้นผิวที่วัตถุกดทับ ความเร็วของวัตถุ และมวลของวัตถุ ซึ่งทั้งสามปัจจัยนี้ได้กำหนดให้อยู่ในรูปของตัวแปรดังต่อไปนี้

กำหนดให้	σ	เป็นค่าความคล่องตัวของพื้นผิวที่วัตถุกดทับ
	v	เป็นความเร็วของวัตถุ
	m	เป็นมวลของวัตถุ

ซึ่งในแบบจำลองนี้พิจารณาให้ตัวแปรต่างๆเหล่านี้เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งสร้างเป็นฟังก์ชันความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสามได้ดังนี้

$$f_R = f(m, v, \sigma) \tag{4-47}$$

4.7.1.1 ค่าความคล่องตัวของพื้นผิวที่มีผลต่อน้ำ

พื้นผิวเรียบและมีความแข็งมาก เช่น พื้นคอนกรีตหรือดินแข็ง เป็นพื้นผิวที่ทำให้น้ำไหลผ่านได้ง่าย จึงอาจกล่าวได้ว่า พื้นผิวลักษณะนี้มีค่าความต้านทานการไหลของน้ำต่ำ ส่วนพื้นผิวที่มีความขรุขระ เช่น ก้อนหินต่างๆ เป็นพื้นผิวที่กีดขวางการไหลของน้ำไม่ให้ผ่านไปได้โดยง่าย ดังนั้นพื้นผิวขรุขระ จึงมีค่าความต้านทานการไหลของน้ำสูง สำหรับพื้นที่ที่ปกคลุมไปด้วยต้นไม้หรือทุ่งหญ้ามีความต้านทานการไหลของน้ำสูงกว่าพื้นที่ไม่มีต้นไม้หรือทุ่งหญ้าปกคลุม

ค่าความคล่องตัวของพื้นผิวที่มีผลต่อการไหลของน้ำ สามารถพิจารณาได้จากสภาพพื้นผิวและสภาพทางธรรมชาติของต้นไม้ของพื้นที่นั้น กล่าวคือ ถ้าพื้นที่นั้นมีค่าความคล่องตัวสูง แสดงว่าพื้นที่นั้นมีความต้านทานการไหลของน้ำต่ำ ดังนั้น น้ำสามารถไหลผ่านไปได้โดยง่าย ส่วนพื้นที่ที่มีค่าความคล่องตัวต่ำ แสดงว่า พื้นที่นั้นมีความต้านทานการไหลของน้ำสูง ดังนั้น น้ำจึงไม่สามารถไหลผ่านได้อย่างสะดวก

ดังนั้น จึงสามารถเขียนความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงระหว่างแรงต้านทานกับค่าค่าความคล่องตัวของพื้นผิว ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันลดดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{df_R}{d\sigma} < 0 \tag{4-48}$$

4.7.1.2 มวลและความเร็วของน้ำ

ความเร็วของน้ำมีผลต่อแรงต้านทานเช่นกัน แรงต้านทานมีค่าสูงขึ้นเมื่อความเร็วของน้ำเพิ่มมากขึ้น เพราะน้ำที่มีการไหลแบบปั่นป่วนทำให้เกิดการสูญเสียพลังงาน โดยมีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบของพลังงานจลน์ซึ่งเป็นพลังงานของการเคลื่อนที่กลายเป็นพลังงานความร้อน และน้ำที่ที่ไหลในระดับน้ำลึกมีลักษณะการไหลแบบปั่นป่วนมากกว่าในระดับน้ำตื้น ดังนั้น ในระดับน้ำลึกจะเกิดแรงต้านทานมากกว่าระดับน้ำตื้น

จึงเขียนความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงระหว่างแรงต้านทานกับความเร็วของน้ำ ซึ่งเห็นว่าผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันเพิ่มดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{df_R}{dv} > 0 \tag{4-49}$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถเขียนความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงระหว่างแรงต้านทานกับมวลของน้ำ ซึ่งเห็นได้ว่า ในสมการ(4-49) มีผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันเพิ่มเช่นเดียวกัน เพราะน้ำเกิดสูญเสียพลังงานของการเคลื่อนที่ โดยเปลี่ยนแปลงรูปแบบของพลังงานเป็นพลังงานความร้อน ซึ่งพลังงานของการเคลื่อนที่ขึ้นอยู่กับมวลวัตถุ

$$\frac{df_R}{dm} > 0 \tag{4-50}$$

4.7.2 การกำหนดค่าความคล่องตัว

แรงต้านทาน ความเร็วและมวลของน้ำเป็นพารามิเตอร์ที่วัดค่าได้จริง แต่พารามิเตอร์ค่าความคล่องตัวไม่สามารถวัดค่าได้โดยตรง ดังนั้น ค่าความคล่องตัวที่ใช้เพื่อการคำนวณในแบบจำลองนี้ ถูกกำหนดให้สัมพันธ์กับพารามิเตอร์ของมวล ความเร็ว และแรงต้านทาน ซึ่งการกำหนดค่าความคล่องตัวสามารถพิจารณาได้เป็น 2 ลักษณะดังนี้

1. กำหนดให้ค่าความคล่องตัว(σ) สัมพันธ์กับมวลของน้ำ (m) เมื่อเพิ่มมวล (m) เป็นจำนวน k เท่าจะทำให้ค่าแรงต้านทาน(f_R) เพิ่มขึ้น k เท่า ดังนั้น เมื่อต้องการรักษาให้แรงต้านทาน (f_R)มีค่าคงเดิม ต้องทำการเพิ่มค่าความคล่องตัว(σ) เป็นจำนวน k เท่าด้วย ซึ่งความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ สามารถแสดงได้ดังสมการ(4-50)

$$f_R = f(m, v, \sigma) = f(km, v, k\sigma) \tag{4-51}$$

2. กำหนดให้ค่าความคล่องตัว(σ) สัมพันธ์กับความเร็วของน้ำ(v) เมื่อเพิ่มความเร็ว(v) เป็นจำนวน k เท่าทำให้ค่าแรงต้านทาน(f_R) เพิ่มขึ้น k เท่า ดังนั้น เมื่อต้องการรักษาให้แรงต้านทาน (f_R)มีค่าคงเดิม ต้องทำการเพิ่มค่าความคล่องตัว(σ) เป็นจำนวน k เท่าด้วย ซึ่งความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ สามารถแสดงได้ดังสมการ (4-51)

$$f_R = f(m, v, \sigma) = f(m, kv, k\sigma) \tag{4-52}$$

เมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันแรงต้านทานเทียบกับค่า k เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้น ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากแรงต้านทานไม่มีการเปลี่ยนแปลง

$$\frac{d}{dk} f(km, v, k\sigma) = m\frac{df}{dm} + \sigma\frac{df}{d\sigma} = 0 \qquad (4\text{-}53)$$

$$\frac{d}{dk} f(m, kv, k\sigma) = v\frac{df}{dv} + \sigma\frac{df}{d\sigma} = 0 \qquad (4\text{-}54)$$

เห็นได้ว่า เมื่อพิจารณาเงื่อนไขต่างๆในสมการ(4-47) (4-48) และ(4-49) ซึ่งได้ผลเฉลยของฟังก์ชันแรงต้านทานตามสมการ(4-54) โดยที่ α เป็นค่าตัวประกอบจำนวนเท่าใดๆ ซึ่งผลเฉลยดังกล่าวสามารถตรวจสอบได้ง่าย โดยทำการอนุพันธ์สมการ(4-54) ซึ่งผลลัพธ์ของการอนุพันธ์ต้องสอดคล้องตามสมการ(4-52) และสมการ(4-53)

$$\left.\begin{aligned} f_R &= f\left(\frac{\alpha m v}{\sigma}\right) \\ f' &> 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}55)$$

ในสมการ(4-54) เห็นได้ว่า ฟังก์ชันแรงต้านทานถูกเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไป ซึ่งสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันเฉพาะได้จากการทดลอง และได้ออกแบบการทดลองไว้ในหัวข้อต่อไปโดยมีลักษณะที่สอดคล้องกับพฤติกรรมการไหลของน้ำ

4.7.3 การกำหนดลักษณะของฟังก์ชันแรงต้านทาน

โดยทั่วๆไปแล้วแรงต้านทานระหว่างของไหลกับพื้นผิวดินไม่เป็นฟังก์ชันแบบเชิงเส้นเมื่อเทียบกับความเร็ว ดังนั้นเพื่อง่ายต่อการวิเคราะห์ จึงได้กำหนดเงื่อนไขความสัมพันธ์ของฟังก์ชันแรงต้านทานกับค่าความคล่องตัว โดยแบ่งออกเป็น 2 เงื่อนไข ดังต่อไปนี้

เงื่อนไขที่หนึ่ง กำหนดให้ค่าความคล่องตัวเป็นค่าคงที่ และฟังก์ชันแรงต้านทานเป็นฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น

เงื่อนไขที่สอง กำหนดให้ค่าความคล่องตัวเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งอยู่ในรูปฟังก์ชันของมวลและความเร็ว $\sigma(m, v)$ ส่วนฟังก์ชันแรงต้านทานกำหนดให้เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

แบบจำลองนี้เลือกใช้เงื่อนไขที่สอง โดยฟังก์ชันแรงต้านทานเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งสามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f_R = f\left(\alpha m v \big/ \sigma(m, v)\right) \qquad (4\text{-}56)$$

4.7.3.1 ค่าความคล่องตัวแบบไม่เป็นเชิงเส้น

โดยทั่วไปการหาค่าความคล่องตัว สามารถทำได้จากการทดลองเท่านั้น โดยจะมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น ซึ่งสภาพความเป็นจริงในทางปฏิบัติ เราไม่สามารถทดลองวัดค่าความคล่องตัวสำหรับทุกรูปแบบของพื้นผิวได้ ดังนั้น การกำหนดค่าค่าความคล่องตัวในพื้นที่ที่พิจารณาจึงใช้วิธีการประมาณเทียบเคียงกับสภาพของดินหรือพื้นผิว และสภาพแวดล้อมที่เป็นมาตรฐาน

ดังนั้น การกำหนดฟังก์ชันค่าความคล่องตัวให้ใกล้เคียงความเป็นจริง ในทางปฏิบัติ จึงมีข้อแนะนำให้พิจารณาแบ่งค่าความคล่องตัวออกเป็น 4 ลักษณะที่แตกต่างกัน ตามขนาดของมวลและขนาดของความเร็ว ดังตารางที่ 4-1 ซึ่งในแบบจำลองนี้ได้กำหนดค่าความคล่องตัวโดยประมาณเป็นค่าคงที่ในแต่ละส่วนของพื้นที่ที่พิจารณา

ตารางที่ 4-1 แสดงชนิดของค่าความคล่องตัว

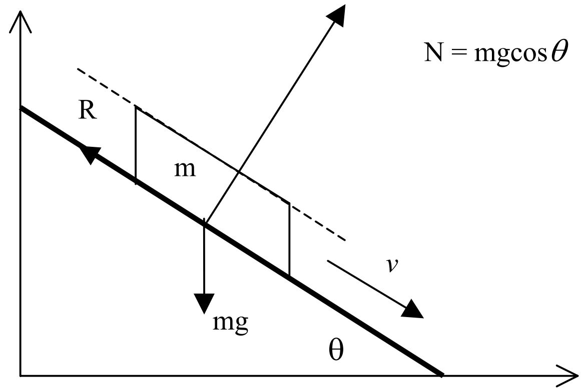
	Low velocity	High velocity
Small mass	σ_{SL}	σ_{SH}
Large mass	σ_{LL}	σ_{SH}

4.7.3.2 การคำนวณฟังก์ชันของแรงต้านทานน้ำ

จากสมการที่ 10 เห็นได้ว่า ฟังก์ชันแรงต้านทาน f_R อยู่ในลักษณะเชิงเส้นที่มีเทอมค่าคงที่เป็นศูนย์ ดังนั้นจึงสามารถเขียนฟังก์ชัน f_R ใหม่ในลักษณะเฉพาะที่ลดรูปได้เป็น $f_R(x) = x$ ซึ่งเห็นได้ว่า ถ้าเราทราบค่า α ก็ได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงต้านทาน มวล ความเร็วและค่าความคล่องตัว

แบบจำลองนี้ได้กำหนดค่าความคล่องตัว เพื่ออธิบายลักษณะของพื้นผิวที่น้ำไหลผ่านเท่านั้น โดยไม่รวมถึงสภาพแวดล้อมของพื้นผิว ตัวอย่างเช่น เมื่อเคลื่อนย้ายพื้นผิวจากโลกไปยังดวงจันทร์ หรือในอวกาศ ค่าความคล่องตัวจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงใดๆ

หากพิจารณาสภาพในอวกาศ แรงต้านทานระหว่างพื้นผิวและน้ำมีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อพิจารณาสภาพบนดวงจันทร์ แรงปฏิกิริยาของพื้นผิวที่กระทำต่อวัตถุ(N) มีค่าหนึ่งในสี่ของแรงปฏิกิริยาของพื้นผิวบนโลก ทำให้แรงต้านทานลดลงหรือความต้านทานการไหลมีค่าลดลงด้วยเช่นกัน ดังนั้น ที่ตั้งของสภาพพื้นผิวจะส่งผลต่อแรงโน้มถ่วงของที่ตั้งนั้นๆ



ภาพประกอบ 4-11 แสดงแรงต้านทานการไหลกระน้ำบนพื้นผิวที่มีความชัน

จากภาพประกอบ 4-11 แสดงการเปลี่ยนความชันของพื้นผิว ซึ่งเมื่อปรับความชันให้มุม θ มีค่าเท่ากับ 90 องศา ทำให้แรงปฏิกิริยา(N)ของพื้นผิวที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นแรงต้านทาน R จึงมีค่ากับศูนย์ด้วย(เนื่องจาก R มีค่าเป็นปฏิภาคโดยตรงกับค่า N) ดังนั้น เมื่อความชันมีค่ามากขึ้นทำให้แรงต้านทานมีค่าลดลง

ซึ่งในแต่ละกรณีที่กล่าวมานั้น เห็นได้ว่าเมื่อสภาวะระหว่างพื้นผิวกับน้ำมีการเปลี่ยนแปลงส่งผลต่อแรงปฏิกิริยา N และแรงต้านทานน้ำ R แต่ไม่มีผลต่อมวล และค่าความคล่องตัว ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการของแรงปฏิกิริยาได้ดังนี้

$$N = mg\cos\theta \tag{4-57}$$

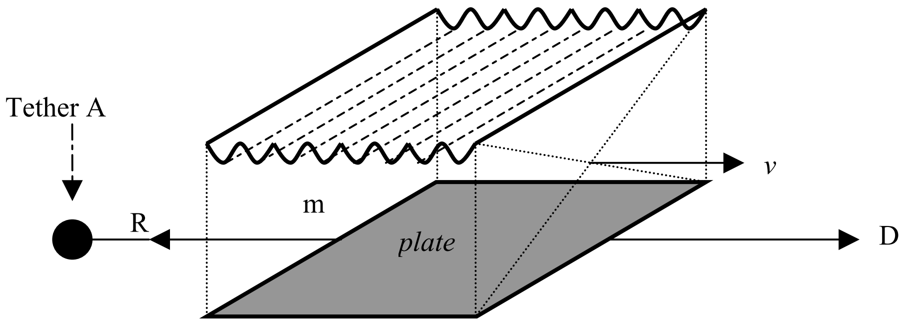
แบบจำลองนี้ได้กำหนดค่าตัวประกอบ(α) ให้มีค่าขึ้นอยู่กับค่าความเร่งโน้มถ่วง และค่ามุมของความชันของพื้นผิว ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\alpha = g\cos\theta \tag{4-58}$$

ในที่สุดสามารถเขียนฟังก์ชันเชิงเส้นของแรงต้านทานการไหลได้ดังนี้

$$R = mg\cos\theta \times \frac{v}{\sigma(m,v)} = mg\cos\theta \times \frac{v}{\sigma} \tag{4-59}$$

4.7.4 การวัดค่าความคล่องตัว



ภาพประกอบ 4-12 แสดงการทดลองเพื่อหาค่าความคล่องตัว

ค่าความคล่องตัวสามารถหาได้จากการทดลองดังภาพประกอบ 4-12 ซึ่งชุดการทดลองประกอบด้วยแผ่นระนาบสี่เหลี่ยมถูกยึดติดในแนวนอนกับช่องทางผ่านของน้ำ น้ำไหลผ่านระนาบสี่เหลี่ยมด้วยความเร็ว (v) ซึ่งทำให้เกิดแรงผลักของน้ำ (D) ไปตามแนวทางการไหลของน้ำ ซึ่งน้ำที่ไหลผ่านเหนือแผ่นระนาบมีมวลเท่ากับ (m) แผ่นระนาบถูกยึดด้วยแรงดึงR ที่จุดตรึง A ซึ่งแรงดึง R มีทิศทางตรงกันข้ามกับแรงผลัก (D) แต่มีขนาดเท่ากัน ดังนั้นแผ่นระนาบจะอยู่ในภาวะสมดุลไม่เคลื่อนที่ และเมื่อได้ค่าของแรงดึง R จากการวัดสามารถนำค่าที่ได้ไปคำนวณหาค่าความคล่องตัวได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\sigma = \left(mg\cos\theta\right) \times \frac{v}{R} = \frac{mgv}{R} \qquad (4\text{-}60)$$

เมื่อมุม θ มีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากแผ่นระนาบวางอยู่ในแนวนอน

4.8 แบบจำลองอัตราการไหลของน้ำ (Flow Model)

ในความเป็นจริงน้ำที่ไหลอยู่ในแม่น้ำ และน้ำที่ไหลบนพื้นผิวต่างๆ มีลักษณะการไหลแบบปั่นป่วน โดยที่ทฤษฎีของการไหลแบบปั่นป่วนและการไหลในรางเปิด (เช่น คูระบายน้ำ คลอง เป็นต้น) ได้มีการอธิบายไว้ในหนังสือเกี่ยวกับทฤษฎีของไหล

ในงานวิจัยฉบับนี้ได้สร้างแบบจำลองอัตราการไหลของน้ำ เพื่อบรรยายพฤติกรรมของน้ำที่ไหลผ่านพื้นผิวใดๆ ด้วยทฤษฎีการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งไม่เป็นไปตามทฤษฎีของไหล การสร้าง

แบบจำลองอัตราการไหลของน้ำด้วยการบรรยายพฤติกรรมของน้ำในลักษณะเช่นนี้ เพื่อต้องการเพียงประมาณความเร็วของน้ำ ดังนั้น การประมาณจึงมีความสอดคล้องกับธรรมชาติการไหลของน้ำน้อยกว่าการบรรยายพฤติกรรมการไหลของน้ำที่ใช้อยู่โดยทั่วๆไป และเมื่อต้องการให้มีความสอดคล้องกับธรรมชาติการไหลของน้ำเพิ่มมากขึ้น แบบจำลองนี้สามารถปรับปรุงได้โดยการนำทฤษฎีของไหลมาใช้ในการอธิบายการไหลของน้ำได้ อย่างไรก็ตาม การนำทฤษฎีของไหลมาสร้างในแบบจำลอง จะทำให้ขอบเขตของงานวิจัยนี้กว้างเกินไป

จุดประสงค์ของแบบจำลองอัตราการไหลของน้ำ คือ การคำนวณปริมาณของน้ำที่ไหลผ่านจุดต่างๆและความเร็วของน้ำที่จุดใดๆในพื้นที่ที่พิจารณา ซึ่งการคำนวณในแบบจำลองนี้ใช้ค่าความคล่องตัวที่ได้จากแบบจำลองความต้านทานการไหลของน้ำ (Impedance Model) และค่าอนุพันธ์ความสูง (∇h) จากแบบจำลองระดับความสูง (Altitude Model) นอกจากนี้ค่าคงที่ต่างๆเช่น ค่าความหนาแน่นของน้ำ (ρ) และค่าความเร่งโน้มถ่วงของโลก (g) ก็นำมาใช้เพื่อการคำนวณในแบบจำลองนี้ด้วยเช่นกัน

ในแบบจำลองนี้ ความเร็วและอัตราการไหลของน้ำไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา แต่ได้แสดงในลักษณะฟังก์ชันของพิกัดตำแหน่งต่างๆภายในพื้นที่ที่พิจารณา ซึ่งสมการที่นำมาใช้ในแบบจำลองอัตราการไหลของน้ำมาจากการประมาณโดยใช้หลักการพื้นฐาน 2 ข้อ คือ

ข้อแรก เป็นการประมาณให้น้ำไหลจากที่สูงลงสู่ที่ต่ำเพียงทิศทางเดียว ซึ่งโดยทั่วๆไปการประมาณดังกล่าวไม่เป็นความจริงทั้งหมด เนื่องจากเมื่อพิจารณาน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสูง ทำให้เกิดพลังงานจลน์และโมเมนตัม ซึ่งทำให้น้ำสามารถไหลจากที่ต่ำขึ้นสู่ที่สูงได้ในระยะทางสั้นๆ ดังนั้นพลังงานจลน์ในน้ำเปลี่ยนเป็นพลังงานศักย์ ซึ่งเป็นไปตามกฎอนุรักษ์ พลังงาน

ข้อที่สอง เป็นการประมาณให้น้ำไหลในทิศทางที่มีความชันน้อยที่สุดเพียงทิศทางเดียว ซึ่งโดยทั่วๆไปนั้น การประมาณดังกล่าวสามารถเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ ความต้านทานที่จุดต่างๆภายในพื้นผิวมีค่าเท่ากันตลอดพื้นผิวนั้นหรือผลต่างของความต้านทานเป็นค่าคงที่

4.8.1 สภาวะที่เหมาะสมในการคำนวณอัตราการไหล

จากหลักการพื้นฐานในการประมาณลักษณะการไหลของน้ำ สามารถสรุปสภาวะที่เหมาะสมในการคำนวณอัตราการไหลของน้ำเพื่อนำแบบจำลองนี้ไปใช้งาน ดังนี้

1. น้ำมีความเร็วในการไหลไม่สูงมาก เนื่องจากได้ทำการประมาณให้น้ำไหลจากที่สูงลงสู่ที่ต่ำเพียงทิศทางเดียว ซึ่งเป็นการประมาณให้พลังงานจลน์ในน้ำมีค่าต่ำมากเมื่อเทียบกับพลังงานศักย์ ดังนั้นการคำนวณอัตราการไหลของน้ำในแบบจำลองนี้ จึงเหมาะสมกับสภาวะที่น้ำมีค่าความเร็วไม่สูงมาก

2. พื้นผิวที่น้ำไหลผ่านต้องมีค่าความต้านทานของน้ำไม่เปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใด ตลอดเส้นทางการไหลในพื้นที่ที่พิจารณา เพราะค่าความคล่องตัวของพื้นที่ที่พิจารณามีค่าคงที่ ซึ่งส่งผลให้การคำนวณอัตราการไหลของน้ำมีความถูกต้องใกล้เคียงความจริง

เนื่องจากเมื่อได้ประมาณค่าแรงต้านทานการไหลให้แปรตามความเร็วกำลังหนึ่ง ซึ่งตามกฎทฤษฎีของไหลนั้น ค่าแรงต้านทานการไหลได้แปรตามความเร็วกำลังสอง ดังนั้น แบบจำลองอัตราการไหลของน้ำ สามารถประมาณได้อย่างใกล้เคียงความจริง เมื่อทำการคำนวณอัตราการไหลของน้ำที่มีความเร็วต่ำๆไม่สูงมาก และพื้นผิวที่มีการเปลี่ยนแปลงของความต้านทานอย่างช้าๆ

4.8.2 การปรับปรุงแบบจำลองในอนาคต

ในการปรับปรุงแบบจำลองนี้ เพื่อพัฒนาการคำนวณอัตราการไหลของน้ำให้มีความสอดคล้องกับพฤติกรรมของธรรมชาติเพิ่มมากขึ้น สามารถทำได้โดยการปรับเปลี่ยนสมการพื้นฐานที่ใช้ในการประมาณทั้ง 2 ข้อ ในหัวข้อ 4.6.1 ดังนี้

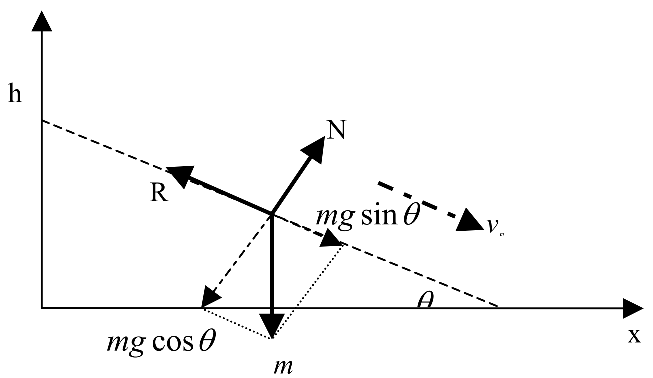
1. ใช้สมการของพลัวซอง (Poisson’s Equation) แทนสมการลาปลาซ (Laplace’s Equation) ซึ่งทำให้การประมาณทิศทางการไหลมีลักษณะใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น

2. พิจารณาแรงเฉื่อยและทิศทางการไหลของน้ำจากที่ต่ำขึ้นสู่ที่สูง

ทั้งนี้ การปรับเปลี่ยนสมการทั้ง 2 ส่วน ทำให้การหาผลเฉลยของสมการมีความยุ่งยากเพิ่มมากขึ้น

4.8.3 หลักการคำนวณค่าความหนาแน่นของน้ำ

ในขั้นตอนการคำนวณค่าอัตราการไหลของน้ำ (*Q*) ในแบบจำลองนี้ จำเป็นต้องทราบค่าความเร็วของน้ำ ซึ่งความเร็วของน้ำมีความสัมพันธ์กับแรงต้านทานการไหลที่ได้จากแบบจำลองความต้านทานการไหลของน้ำ(Impedance Model) ความเร็วของน้ำถูกคำนวณในภาวะสมดุล ซึ่งมีผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับค่าความคล่องตัวจากแบบจำลองความต้านทานการไหลของน้ำ และค่าความชันของพื้นที่ที่พิจารณาซึ่งได้จากแบบจำลองเส้นระดับความสูง



ภาพประกอบ 4-13 แสดงแรงที่กระทำต่อน้ำไหลลงสู่ที่ต่ำ

ในภาพประกอบ 4-13 แสดงแรงที่กระทำต่อน้ำที่มีความเร็ว v_s โดยน้ำมีทิศทางการไหลตามแนวเอียงของพื้นผิว ซึ่งมุม θ กับแนวระนาบ แรงกระทำต่อน้ำมีทั้งหมด 3 แรง คือ แรงโน้มถ่วงของโลก(mg) แรงปฏิกิริยาของพื้นผิว(N) และแรงต้านทานการไหลของน้ำ(R)

เห็นได้ว่า ในแนวการไหลของน้ำ สามารถเขียนความสัมพันธ์ของแรงกระทำได้ดังนี้

$$mg\sin\theta - R = ma \qquad (4\text{-}61)$$

เมื่อ a คือความเร่งของน้ำ

และในแนวตั้งฉากกับการไหลของน้ำ สามารถเขียนความสัมพันธ์ของแรงกระทำได้ดังนี้

$$mg\cos\theta - N = 0 \qquad (4\text{-}62)$$

4.8.3.1 แรงต้านทานการไหลของน้ำ

น้ำเกิดการสูญเสียพลังงานเนื่องจากการกระทำของแรงต้านทานการไหล ซึ่งพลังงานที่สูญเสียถูกเปลี่ยนไปเป็นพลังงานความร้อน แรงต้านทานการไหลถูกพิจารณาจากแบบจำลองความต้านทานการไหลของน้ำ(Impedance Model) ซึ่งองค์ประกอบที่มีผลต่อขนาดและทิศทางของแรงต้านทานการไหลน้ำ มีด้วยกัน 3 ส่วน คือ มวล ความเร็ว และค่าความคล่องตัว ซึ่งสามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันได้ดังสมการ(4-61) และ(4-62)

$$|R| = f(m, v_S, \sigma) \qquad (4\text{-}63)$$

$$\angle R = \phi(m, v_S, \sigma) \qquad (4\text{-}64)$$

เมื่อ $|R|$ คือ ขนาดของแรงต้านทานการไหล

$\angle R$ คือ ทิศทางของแรงต้านทานการไหล

จากหลักการพื้นฐานในข้อที่สองของการคำนวณอัตราการไหลของน้ำ ซึ่งได้ทำการประมาณให้น้ำไหลในทิศทางที่มีความชันน้อยที่สุดเพียงทิศทางเดียว ดังนั้น แรงต้านทานการไหลของน้ำมีทิศทางตรงกันข้ามกับเส้นทางการไหล จึงสามารถแสดงทิศทางของแรงต้านทาน ซึ่งสัมพันธ์กับค่าเกรเดียนต์ของฟังก์ชันความสูง ดังสมการ(4-63)

$$\phi(m, v, \sigma) = \angle(\nabla h) \qquad (4\text{-}65)$$

ขนาดของแรงต้านทานการไหลของน้ำ $|R|$ ในสมการ(4-61) สามารถคำนวณได้จากค่าฟังก์ชันเชิงเส้นของแรงต้านทานการไหลของน้ำในแบบจำลองความต้านทานการไหลของน้ำ(ดูหัวข้อ 4.7.3.2) ดังนั้น ซึ่งสามารถคำนวณขนาดของแรงต้านทานการไหลของจากสมการ(4-66) ดังนี้

$$|R| = \frac{(mg\cos\theta)v_S}{\sigma} \tag{4-66}$$

4.8.3.2 ความเร็วในภาวะสมดุล

ในภาพประกอบ 4-13 เห็นได้ว่า เมื่อแทนขนาดของแรงต้านทานการไหลจากสมการ(4-66) ลงในสมการ(4-61) ซึ่งสามารถเขียนสมการใหม่ได้ตามสมการ(4-67) ดังนี้

$$mg\sin\theta - \frac{(mg\cos\theta)v_S}{\sigma} = ma \tag{4-67}$$

เมื่อพิจารณาให้น้ำอยู่ในภาวะสมดุล หมายถึง น้ำไหลด้วยความเร็วคงที่ v_s ซึ่งทำให้ความเร่งมีค่าเท่ากับศูนย์ (a =0) ดังนั้น จากสมการ(4-67) จะสามารถเขียนสมการได้ใหม่ดังนี้

$$mg\sin\theta = \frac{(mg\cos\theta)v_S}{\sigma} \tag{4-68}$$

จากสมการ(4-68) สามารถหาค่าความเร็วในภาวะสมดุลได้ตามสมการ(4-69) ดังนี้

$$v_S = \sigma\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sigma\tan\theta \tag{4-69}$$

4.8.3.3 ความเร็วในแนวระนาบ

ในแบบจำลองน้ำท่วมนี้ ใช้ประโยชน์ของความเร็วน้ำที่เคลื่อนจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งในแนวระนาบ เนื่องจากต้องการแสดงค่าผลลัพธ์บนแผนที่ ดังนั้น ในหัวข้อนี้จึงได้ทำการหาค่าความเร็วของน้ำในแนวระนาบ

จากภาพประกอบ 4-13 เห็นได้ว่า ทิศทางของความเร็ว v_s ทำมุม θ กับแนวระนาบ ซึ่งสามารถคำนวณค่าความเร็วในแนวระนาบได้จากสมการ(4-70)ดังนี้

$$v = v_S\cos\theta \tag{4-70}$$

เมื่อ v คือ ความเร็วของน้ำในแนวระนาบ

และเมื่อแทนค่าความเร็ว v_s จากสมการ(4-69) ลงในสมการ(4-70) ได้ค่า v อยู่ในเทอมของค่าความคล่องตัวและค่าความชันดังสมการ(4-71)

$$v = \sigma \tan\theta \cos\theta = \sigma \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \qquad (4\text{-}71)$$

ดังนั้น จากสมการ(4-71) สามารถคำนวณค่าความเร็วในแนวระนาบได้ ก็ต่อเมื่อทราบค่าความคล่องตัว(σ)และค่าความชันของพื้นผิว($\tan\theta$)

เห็นได้ว่า ในสมการ(4-65) สามารถคำนวณทิศทางของแรงต้านทานการไหลได้จากทิศทางเกรเดียนต์ของฟังก์ชันความสูง h ซึ่งทิศทางของแรงต้านทานมีอยู่ในแนวเอียงของพื้นผิว ดังนั้น สามารถหาค่าความชันของพื้นผิวได้จากขนาดของเกรเดียนต์ของฟังก์ชันความสูง(∇h) ตามสมการ (4-72) ดังนี้

$$\tan\theta = |\nabla h| \qquad (4\text{-}72)$$

เมื่อนำค่าความชันในสมการ(4-72) แทนลงในสมการ(4-71) จะสามารถหาค่าความเร็วในแนวระนาบได้ตามสมการ(4-73) ดังนี้

$$v = \sigma \frac{|\nabla h|}{\sqrt{1+|\nabla h|^2}} \qquad (4\text{-}73)$$

4.8.3.4 ค่าอัตราการไหลของน้ำในแนวระนาบ

ตามกฎทรงมวล(Law of Conservation of mass) ค่าอัตราการไหลของน้ำมีค่าขึ้นอยู่กับความเร็วของน้ำและความหนาแน่นของน้ำ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

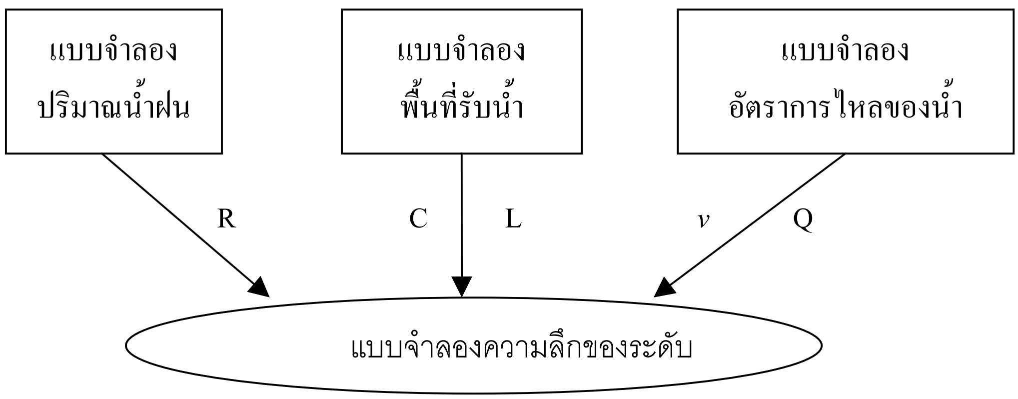
$$Q = \rho v \qquad (4\text{-}74)$$

และเมื่อแทนค่าความเร็วของน้ำในแนวระนาบจากสมการ(4-73)ลงในสมการ(4-74) สามารถคำนวณค่าอัตราการไหลของน้ำได้ดังสมการ(4-75)

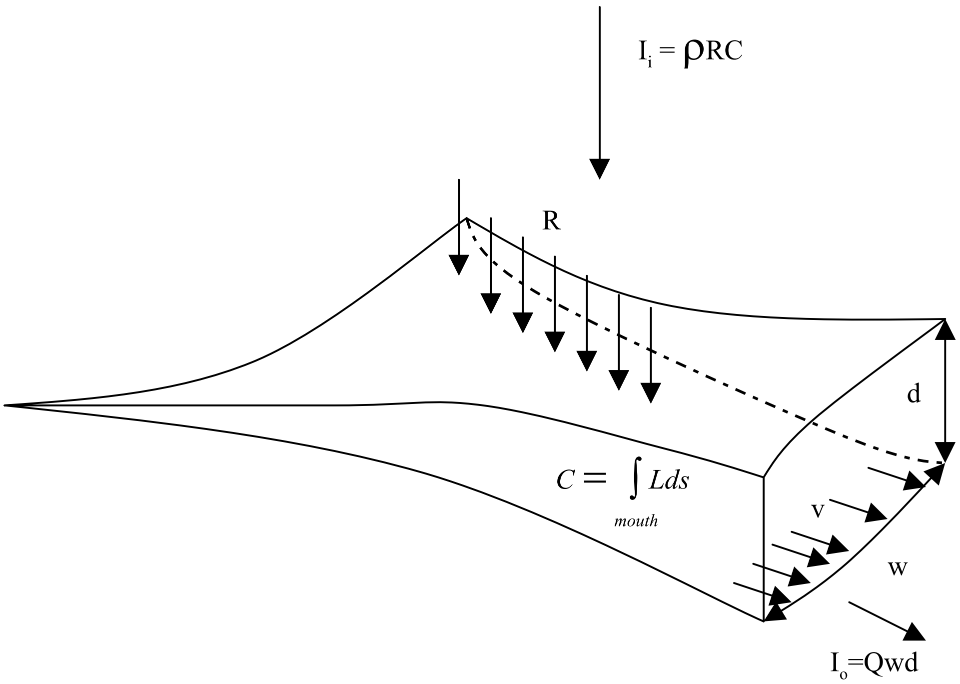
$$Q = \frac{\rho\sigma|\nabla h|}{\sqrt{1+|\nabla h|^2}} \tag{4-75}$$

4.9 แบบจำลองความลึก (Depth Model)

แบบจำลองนี้เป็นการคำนวณความลึกของระดับน้ำในทุกๆจุดบนพื้นที่ที่พิจารณา ซึ่งการคำนวณใช้ค่าผลลัพธ์ของแบบจำลองต่างๆ คือ ค่าความเข้มน้ำฝน(R) ซึ่งเป็นผลลัพธ์จากแบบจำลองปริมาณน้ำฝน ค่าพื้นที่รับน้ำ(C)และค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำ(L) ซึ่งเป็นผลลัพธ์จากแบบจำลองพื้นที่รับน้ำ รวมทั้งค่าอัตราการไหลของน้ำ(Q)และความเร็วของน้ำ(v) ซึ่งเป็นผลลัพธ์จากแบบจำลองอัตราการไหลของน้ำ ส่วนผลลัพธ์ของแบบจำลองความลึก คือ ค่าระดับความลึก(d) มีหน่วยเป็นเมตร ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ของแบบจำลองต่างๆที่นำมาใช้ในการคำนวณได้ ดังภาพประกอบ 4-14 ดังนี้



ภาพประกอบ 4-14 แสดงความสัมพันธ์ของแบบจำลองต่างๆที่ใช้ในการคำนวณแบบจำลองความลึก



ภาพประกอบ 4-15 แสดงระดับความลึกของน้ำที่ไหลผ่านช่องทางรับน้ำ

ภาพประกอบ 4-15 แสดงลักษณะของฝนที่ตกลงบนพื้นที่รับน้ำ และแสดงลักษณะของน้ำที่ไหลผ่านช่องทางรับน้ำ ซึ่งเห็นได้ว่า พื้นที่รับน้ำ(C) ซึ่งมีช่องทางรับน้ำ(w) โดยมีความเข้มน้ำฝนตกลงสู่พื้นที่รับน้ำด้วยอัตราคงที่(R) และไหลออกจากพื้นที่รับน้ำทางช่องทางรับน้ำด้วยความเร็วในแนวระนาบ(v) ดังนั้น ณ ช่องทางรับน้ำจะมีค่าความลึกของระดับน้ำ(d)

4.9.1 การไหลของน้ำน้ำและค่าอัตราการไหลของน้ำ

ในทางไฟฟ้าโดยทั่วๆไป กระแสไฟฟ้า I สามารถคำนวณได้จากการอินทิเกรตความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า J บนพื้นที่ A ดังนั้น เมื่อเปรียบเทียบให้กระแสไฟฟ้าเป็นการไหลของน้ำ ซึ่งใช้สัญลักษณ์ I เช่นเดียวกัน และให้ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า J เทียบได้กับความหนาแน่นของการไหลของน้ำ Q ซึ่งสามารถกล่าวได้ว่า ตัวแปร I คือ อัตราการไหลของมวลน้ำในแนวระนาบ โดยมีหน่วย คือ กิโลกรัมต่อวินาที(kg/s) ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$I = \int_A Q dA \qquad (4\text{-}76)$$

จากกฎทรงมวลในสมการ(4-74) ในหัวข้อ 4.8.3.4 เมื่อแทนค่า v ด้วยความเร็วของปริมาณน้ำฝน(R)ที่ตกลงในพื้นที่ที่พิจารณา ทำให้ได้ค่าค่าอัตราการไหลของน้ำ(Q)ที่ไหลลงสู่พื้นที่เป็นไปตามสมการ(4-77) ดังนี้

$$Q = \rho R \qquad (4\text{-}77)$$

และจากภาพประกอบ 4-145 เมื่อนำค่าอัตราการไหลของน้ำที่ไหลเข้าสู่พื้นที่จากสมการ(4-77) แทนลงในสมการ(4-76) โดยมี C เป็นขนาดของพื้นที่ที่พิจารณา ดังนั้น ปริมาณของน้ำที่ไหลลงสู่พื้นที่ที่พิจารณา(I_{in}) มีค่าตามสมการ(4-78)ดังนี้

$$I_{in} = \rho RC \qquad (4\text{-}78)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาปริมาณของน้ำที่ไหลออกจากพื้นที่ ซึ่งไหลผ่านช่องทางรับน้ำที่มีขนาดเท่ากับ ผลคูณระหว่างความกว้างของช่องทางรับน้ำ(w) และค่าระดับความลึกของน้ำ(d) ณ ช่องทางรับน้ำ ดังนั้น จึงสามารถคำนวณปริมาณของน้ำที่ไหลออกจากพื้นที่รับน้ำ(I_{out}) ได้ตามสมการ(4-78) ดังนี้

$$I_{out} = Qwd \qquad (4\text{-}79)$$

4.9.2 การไหลของน้ำในสภาวะคงตัว

ในสภาวะคงตัว (steady state) น้ำที่ไหลออกจากพื้นที่รับน้ำ (I_{0ut}) มีค่าเท่ากับน้ำที่ไหลเข้าสู่พื้นที่รับน้ำ (I_{in})

ดังนั้น น้ำที่ไหลเข้าพื้นที่ที่พิจารณาจากสมการ(4-78) มีค่าเท่ากับน้ำที่ไหลออกจากพื้นที่ที่พิจารณา(4-79) ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\rho RC = Qwd \qquad (4\text{-}80)$$

จากสมการ(4-80) เมื่อทำการหาอนุพันธ์ของเทอม C และเทอม w โดยเทียบกับส่วนประกอบเส้นตรงเชิงอนุพันธ์ขนาดเล็ก (ds) ได้สมการดังต่อไปนี้

$$dQ\left(\frac{dw}{ds}\right) = \rho R\left(\frac{dC}{ds}\right) \qquad (4\text{-}81)$$

จากสมการ(4-33) ซึ่ง $\frac{dw}{ds}$ มีค่าเท่ากับ 1 และจากสมการ(4-35) เมื่อทำการหาอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำ C เทียบกับ ds จะมีค่าเท่ากับ L ซึ่งเป็นค่าอนุพันธ์ของพื้นที่รับน้ำจากแบบจำลองพื้นที่รับน้ำ ดังนั้น จากสมการ(4-81)สามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$dQ = \rho RL \qquad (4\text{-}82)$$

จากสมการ(4-82) สามารถคำนวณค่าความลึกของระดับน้ำได้ดังนี้

$$d = \frac{\rho RL}{Q} = \frac{RL}{v} \qquad (4\text{-}83)$$

ดังนั้น เมื่อต้องการคำนวณค่าระดับของความลึกที่สัมพันธ์กับความเข้มน้ำฝน สามารถคำนวณได้ตามสมการ(4-84) ดังนี้

$$\frac{d}{R} = \frac{\rho L}{Q} = \frac{L}{v} \qquad (4\text{-}84)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความลึกของน้ำและปริมาณของน้ำในสมการ(4-84) ในงานวิจัยนี้เรียกว่า ค่าความเสี่ยงของการเกิดอุทกภัย ซึ่งเห็นได้ว่า ในบริเวณใดบริเวณหนึ่งของพื้นที่ที่พิจารณาเมื่อมีค่า d/R สูงแสดงว่า เมื่อปริมาณน้ำฝนน้อยแต่ค่าความลึกของน้ำมีค่ามาก ดังนั้น พื้นที่บริเวณนั้นจึงมีความเสี่ยงในการเกิดอุทกภัยสูง และในทางตรงกันข้าม บริเวณใดที่มีค่า d/R ต่ำ แสดงว่า แม้ว่าปริมาณน้ำฝนสูงแต่ค่าความลึกของน้ำมีค่าน้อย ดังนั้น พื้นที่บริเวณนั้นจึงมีความเสี่ยงในการเกิดอุทกภัยต่ำ