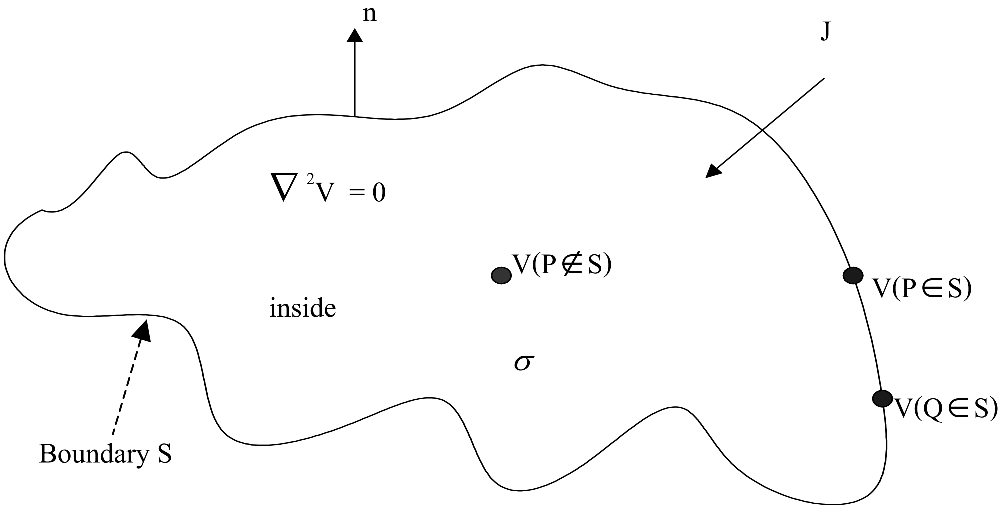
บทที่ 5

ผลเฉลยของสมการลาปลาซด้วยระเบียบวิธีบาวดารี่เอลิเมนต์

ในบทนี้กล่าวถึง การหาผลเฉลยของสมการลาปลาซด้วยวิธีการ Boundary Element Method (BEM) โดยอธิบายในรูปแบบของไฟฟ้า ซึ่งเปรียบเทียบลักษณะของน้ำกับกระแสไฟฟ้า และเปรียบเทียบความสูง (h) ของพื้นผิวกับค่าแรงดันไฟฟ้าที่จุดต่างๆในพื้นที่

ในการคำนวณค่าแรงดันที่จุดใดๆภายในพื้นที่ที่พิจารณา ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซโดยวิธี BEM จำเป็นต้องทราบค่าขอบเขตของพื้นที่ที่พิจารณา ดังนั้น จึงได้กำหนดพารามิเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของสมการลาปลาซในภาพประกอบ 5-1 ดังนี้



ภาพประกอบ 5-1 พารามิเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลย

ในภาพประกอบ 5-1 แสดงพารามิเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของสมการลาปลาซ ซึ่งได้กำหนดให้พารามิเตอร์มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

S เป็นเซตที่ประกอบด้วยจุดใดๆที่อยู่บนเส้นขอบเขตของพื้นที่ที่พิจารณา ซึ่งจุดเหล่านั้นจะมีทิศทางตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของขอบเขตพื้นที่ และทิศทางดังกล่าวอยู่ในแนวเดียวกับเวคเตอร์ n

เวคเตอร์ n เป็นเวคเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากกับแนวเส้นสัมผัสของขอบเขตพื้นที่ที่พิจารณา

J เป็นกระแสไฟฟ้าที่ไหลตัดกับเส้นขอบเขตของพื้นที่ ณ จุด Q ใดๆ

V(P) เป็นแรงดันที่จุด P ซึ่งจุด P อยู่ภายในพื้นที่และอยู่บนเส้นขอบเขตของพื้นที่ที่พิจารณา

V(Q) เป็นแรงดันที่จุด Q ซึ่งจุด Q อยู่บนเส้นขอบเขตของพื้นที่ที่พิจารณา

σ เป็นค่าสภาพความนำไฟฟ้าภายในพื้นที่ที่พิจารณา

โดยทั่วๆไป การหาผลเฉลยของสมการลาปลาซด้วยวิธี BEM มีด้วยกัน 2 วิธี คือ การหาผลเฉลยในเชิงวิเคราะห์ และการหาผลเฉลยในเชิงตัวเลข

5.1 ผลเฉลยสมการลาปลาซในเชิงวิเคราะห์

จากภาพประกอบ 5-1 ค่าแรงดันไฟฟ้าที่จุดใดๆภายในพื้นที่ที่พิจารณา ซึ่งครอบคลุมด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบสมการของลาปลาซ ดังนี้

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{5-1}$$

โดย V แทนแรงดันไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามจุดพิกัดของ x และ y ซึ่งการหาผลเฉลยในเชิงวิเคราะห์ของสมการลาปลาซด้วยวิธี BEM แสดงในสาการ (5-1) และ สมการ (5-2) ดังต่อไปนี้

1. สมการของแรงดัน $V(P \notin S)$ ที่จุดใดๆภายในพื้นที่

$$2\pi\sigma V(P \notin S) + \sigma\int_S V(Q)\frac{P-Q}{|P-Q|^2}\cdot n ds_Q = \int_S \ln|P-Q| J \cdot n ds_Q \tag{5-2}$$

2. สมการของแรงดัน $V(P \in S)$ ที่จุดใดๆบนเส้นขอบของพื้นที่

$$\psi\sigma V(P \in S) + \sigma\int_S V(Q)\frac{P-Q}{|P-Q|^2}\cdot n ds_Q = \int_S \ln|P-Q| J \cdot n ds_Q \tag{5-3}$$

โดยแต่ละเทอมของสมการ(5-2)และ(5-3) มีรายละเอียดดังนี้

$V(P \notin S)$ คือ แรงดันที่จุดใดๆภายในพื้นที่

$V(P \in S)$ คือ แรงดันที่จุดใดๆบนเส้นขอบเขต

$V(Q)$ คือ แรงดันที่จุดใดๆบนเส้นขอบเขต

$J \cdot n$ คือ กระแสที่มีทิศทางตั้งฉากกับเส้นขอบเขต

นอกจากนั้น ในสมการ(5-3) ค่าของ ψ จะถูกกำหนดจากรูปร่างของเส้นขอบเขตที่ จุด P เช่น

เมื่อจุด P อยู่บนเส้นขอบเขตที่มีลักษณะเป็นเส้นตรง ทำให้ค่า ψ มีค่าเท่ากับ π

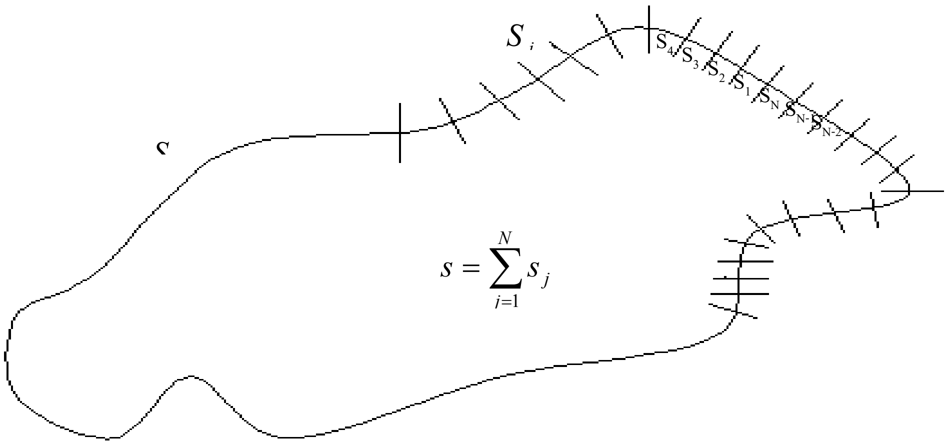
เมื่อจุด P อยู่บนจุดร่วมของเส้นขอบเขตจำนวนสองเส้น ทำให้ค่า ψ มีค่าเท่ากับค่าของมุมภายในที่อยู่ระหว่างเส้นขอบเขตทั้งสอง

5.2 ผลเฉลยในเชิงตัวเลข

ในงานด้านวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ การแก้ไขปัญหาด้วยระเบียงวิธีเชิงตัวเลขจะมีความสำคัญอย่างมาก เพราะสามารถนำระเบียงวิธีเชิงตัวเลขไปใช้ในการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อหาผลเฉลยโดยการประมาณสำหรับบางปัญหา ดังนั้นจึงทำให้การคำนวณมีความรวดเร็วอย่างมากเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีทางคณิตศาสตร์แบบเดิม

การหาผลเฉลยของสมการในเชิงวิเคราะห์ในสมการ(5-2)และ(5-3) มีความจำเป็นต้องการทราบค่าของฟังก์ชันของแรงดันบนเส้นของเขต และต้องทำการอินทิเกรตตามเส้นขอบเขต ดังนั้นการสร้างฟังก์ชันของแรงดันบนเส้นขอบเขตในเชิงวิเคราะห์จึงทำได้ยาก และถึงแม้ว่าจะสามารถสร้างฟังก์ชันแรงดันบนเส้นขอบเขตได้ ก็ไม่สามารถทำการอินทิเกรตแต่ละเทอมในสมการเชิงวิเคราะห์ได้เช่นเดียวกัน ดังนั้น จึงได้ทำการหาผลเฉลยของสมการลาปลาซด้วยวิธีเชิงตัวเลข โดยการนำสมการ(5-2)และ สมการ(5-3) มาทำการคำนวณในเชิงตัวเลขโดยมีรายละเอียดดังนี้

ขั้นตอนแรกของการคำนวณเริ่มต้นด้วยการแบ่งเส้นขอบเขต ออกเป็นส่วนย่อยๆ ซึ่งกำหนดให้ Sj เป็นเส้นขอบเขตย่อยของเส้นขอบเขต S แสดงในภาพประกอบ 5-2



ภาพประกอบ 5-2 แสดงการแบ่งขอบเขต S เป็นขอบเขตย่อย

จากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการ(5-2)และ(5-3) สามารถแปลงเป็นสมการเชิงตัวเลขได้ตามสมการ(5-4)และ(5-5)ตามลำดับ

$$2\pi\sigma V(P \notin S) + \sum_{j=1}^{N} \sigma \int_{S_j} V(Q) \frac{P-Q}{|P-Q|^2} \cdot nds_Q = \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \ln|P-Q| J \cdot nds_Q \qquad (5\text{-}4)$$

$$\psi\sigma V(P \in S) + \sum_{j=1}^{N} \sigma \int_{S_j} V(Q) \frac{P-Q}{|P-Q|^2} \cdot nds_Q = \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \ln|P-Q| J \cdot nds_Q \qquad (5\text{-}5)$$

ในการคำนวณหาแรงดันภายในพื้นที่ $V(P \notin S)$ จะสามารถคำนวณได้จากสมการ(5-4) ก็ต่อเมื่อทราบค่าของแรงดัน $V(Q)$ และกระแสบนเส้นขอบเขต $J \cdot n$ ซึ่งในตอนแรกจะทราบเพียงค่าของแรงดันบนเส้นขอบเขต $V(Q)$ เพียงค่าเดียว ดังนั้นจึงต้องเริ่มจากการคำนวณหาค่าของกระแสบนขอบเขต $J \cdot n$ ด้วยสมการ(5-5)

5.2.1 การประมาณค่าของแรงดันและกระแสบนเส้นขอบเขต

กำหนดฟังก์ชันของแรงดันและกระแสในแต่ละขอบเขตย่อย Sj ให้เป็นฟังก์ชันของตัวแปร sซึ่ง s เป็นระยะห่างจากจุดกึ่งกลางของขอบเขตย่อย Sj โดยลักษณะการประมาณค่าแรงดันและกระแสเป็นดังนี้

การประมาณค่าแรงดันบนเส้นขอบเขตด้วยฟังก์ชันเส้นตรง ซึ่งลักษณะฟังก์ชันจะเป็นดังนี้

$$V(Q) \approx V_j \frac{s}{l_j} + W_j \tag{5-6}$$

การประมาณค่ากระแสที่ไหลตัดกับเส้นขอบเขตด้วยฟังก์ชันกำลังสาม ซึ่งลักษณะฟังก์ชันเป็นดังต่อไปนี้

$$J \cdot n \approx J_j \left(\frac{s}{l_j}\right)^3 + K_j \left(\frac{s}{l_j}\right)^2 + L_j \left(\frac{s}{l_j}\right) + M_j \tag{5-7}$$

โดยที่ $V_j, W_j, J_j, K_j, L_j, M_j$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน

l_j เป็นความยาวของ Sj

s เป็นระยะห่างจากจุดกึ่งกลางของแต่ละขอบเขตย่อย Sj ซึ่งค่าของ s จะมีค่าอยู่ระหว่าง $-\frac{l_j}{2} \le s \le \frac{l_j}{2}$

จากการประมาณค่าแรงดันและกระแสให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน s ในสมการ(5-6)และ(5-7) จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันของแรงดันและกระแสในแต่ละขอบเขตย่อยสามารถประมาณได้ถูกต้อง ก็ต่อเมื่อคุณสมบัติของเส้นขอบเขต S สอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1) แรงดันและกระแสเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องภายในขอบเขตย่อย
2) เส้นขอบเขตย่อย S_j จะต้องถูกแบ่งให้จำนวนมากพอที่จะทำให้ขอบเขต S ไม่ผิดเพี้ยน

ในกรณีที่ต้องการเพิ่มความแม่นยำของการคำนวณค่าแรงดันภายในพื้นที่ $V(P \notin S)$ เราสามารถทำได้โดยการแบ่งเส้นขอบเขตย่อย S_j ให้มีจำนวนเพิ่มมากขึ้นหรือทำการเปลี่ยนฟังก์ชัน $V(Q)$ หรือฟังก์ชัน $J \cdot n$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่มีอันดับสูงขึ้น

นำฟังก์ชันที่ได้จากการประมาณค่าของแรงดันและกระแส จากสมการ(5-6) และ (5-7) ตามลำดับ ไปแทนลงในสมการ(5-4) และ (5-5) จะได้สมการ(5-8) และ (5-9)

$$2\pi\sigma V\left(P \notin S\right)+\sum_{j=1}^{N}\sigma\int_{S_j}\left(V_j\frac{s}{l_j}+W_j\right)\frac{P-Q}{\left|P-Q\right|^2}\cdot nds_Q$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\int_{S_j}\ln\left|P-Q\right|\left(J_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^3+K_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^2+L_j\left(\frac{s}{l_j}\right)+M_j\right) \qquad (5\text{-}8)$$

$$\psi\sigma V\left(P \in S\right)+\sum_{j=1}^{N}\sigma\int_{S_j}\left(V_j\frac{s}{l_j}+W_j\right)\frac{P-Q}{\left|P-Q\right|^2}\cdot nds_Q$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\int_{S_j}\ln\left|P-Q\right|\left(J_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^3+K_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^2+L_j\left(\frac{s}{l_j}\right)+M_j\right) \qquad (5\text{-}9)$$

จากสมการ(5-8) และ(5-9) เมื่อแปลงเป็นสมการเวคเตอร์ จะได้ดังสมการ(5-10) และ (5-11) ดังนี้

$$2\pi\sigma V(P \notin S)+\sigma\left[* \quad * \quad \tilde{V}_j \quad \tilde{W}_j \quad * \quad *\right]\begin{bmatrix} * \\ * \\ V_j \\ W_j \\ * \\ * \end{bmatrix}=\left[* \quad * \quad \tilde{J}_j \quad \tilde{K}_j \quad \tilde{L}_j \quad \tilde{K}_j \quad * \quad *\right]\begin{bmatrix} * \\ * \\ J_j \\ K_j \\ L_j \\ M_j \\ * \\ * \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}10)$$

$$\psi\sigma V(P \notin S)+\sigma\left[* \quad * \quad \tilde{V}_j \quad \tilde{W}_j \quad * \quad *\right]\begin{bmatrix} * \\ * \\ V_j \\ W_j \\ * \\ * \end{bmatrix}=\left[* \quad * \quad \tilde{J}_j \quad \tilde{K}_j \quad \tilde{L}_j \quad \tilde{K}_j \quad * \quad *\right]\begin{bmatrix} * \\ * \\ J_j \\ K_j \\ L_j \\ M_j \\ * \\ * \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}11)$$

เมื่อกำหนดให้

V_j, W_j เป็นสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันแรงดันที่อยู่บนเส้นขอบเขต

J_j, K_j, L_j, M_j เป็นสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันกระแสที่อยู่บนเส้นขอบเขต

$\widetilde{V}_j, \widetilde{W}_j, \widetilde{J}_j, \widetilde{M}_j, \widetilde{L}_j, \widetilde{M}_j$ เป็นพจน์ต่างๆที่แสดงลักษณะของเส้นขอบเขตโดยค่าเหล่านี้จะไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณของแรงดันหรือกระแส แต่ขึ้นอยู่กับลักษณะของเส้นขอบเขตและตำแหน่งของ จุด P ดังนี้

$$\widetilde{V}_j = \int_{S_j} \frac{s}{l_j} \cdot \frac{P-Q}{|P-Q|^2} \cdot n ds_Q \qquad \widetilde{W}_j = \int_{S_j} \frac{P-Q}{|P-Q|^2} \cdot n ds_Q$$

$$\widetilde{J}_j = \int_{S_j} \left(\frac{s}{l_j}\right)^3 \cdot \ln|P-Q| ds_Q \qquad \widetilde{K}_j = \int_{S_j} \left(\frac{s}{l_j}\right)^2 \cdot \ln|P-Q| ds_Q \qquad (5\text{-}12)$$

$$\widetilde{L}_j = \int_{S_j} \frac{s}{l_j} \cdot \ln|P-Q| ds_Q \qquad \widetilde{M}_j = \int_{S_j} \ln|P-Q| ds_Q$$

5.2.2 กระแสบนเส้นขอบเขต

ในแต่ละเส้นขอบเขตย่อย S_j ได้ทำการประมาณค่าของกระแสขอบเขตเป็นไปตามสมการ (5-7) จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันกระแสที่ไหลตัดกับเส้นขอบเขตเป็นฟังก์ชันกำลังสาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์จำนวน 4 ตัว คือ J_j, K_j, L_j, M_j และเมื่อต้องการคำนวณหาค่าของกระแสบนเส้นขอบเขตจำเป็นต้องแก้ สมการหาค่าตัวแปรที่ไม่สามารถค่า 4 ตัวในแต่ละเส้นขอบเขตย่อย S_j ดังนั้นสมการ(5-9) จึงเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงดัน $V(P \in S)$ และกระแส $J \cdot n$ ซึ่งค่า $V(P \in S)$ เป็นตัวแปรที่ทราบค่า หลังจากนั้นนำสมการนี้มาคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันกระแสบนเส้นขอบเขตย่อย S_j โดยการแทนแทนค่า $V(P \in S)$ ที่ s มีค่าเท่ากับ $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}$ ดังนั้นในแต่ละเส้นขอบเขตย่อย S_j จึงสามารถสร้างสมการเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันกระแสบนเส้นขอบเขตได้ 4 สมการดังนี้

- ที่ $s = -\frac{1}{2}$

$$\psi_{ii}\left(-\frac{1}{2}\right)\sigma\left(-\frac{1}{2}V_j + W_j\right) + \sum_{j=1}^{N} \sigma \int_{S_j} \left(V_j \frac{s}{l_j} + W_j\right) \frac{P_i\left(-\frac{1}{2}\right) - Q}{\left|P_i\left(-\frac{1}{2}\right) - Q\right|^2} \cdot n ds_Q$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \ln\left|P\left(-\frac{1}{2}\right) - Q\right| \left(J_j \left(\frac{s}{l_j}\right)^3 + K_j \left(\frac{s}{l_j}\right)^2 + L_j \left(\frac{s}{l_j}\right) + M_j \right) \qquad (5\text{-}13)$$

- ที่ $s = -\frac{1}{4}$

$$\psi_{ii}\left(-\frac{1}{4}\right)\sigma\left(-\frac{1}{4}V_j + W_j\right) + \sum_{j=1}^{N}\sigma\int_{S_j}\left(V_j\frac{s}{l_j} + W_j\right)\frac{P_i\left(-\frac{1}{4}\right) - Q}{\left|P_i\left(-\frac{1}{4}\right) - Q\right|^2}\cdot n ds_Q$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j}\ln\left|P\left(-\frac{1}{2}\right) - Q\right|\left(J_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^3 + K_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^2 + L_j\left(\frac{s}{l_j}\right) + M_j\right) \qquad (5\text{-}14)$$

- ที่ $s = 0$

$$\psi_{ii}\left(-\frac{1}{4}\right)\sigma W_j + \sum_{j=1}^{N}\sigma\int_{S_j}\left(V_j\frac{s}{l_j} + W_j\right)\frac{P_i(0) - Q}{\left|P_i(0) - Q\right|^2}\cdot n ds_Q$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j}\ln\left|P(0) - Q\right|\left(J_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^3 + K_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^2 + L_j\left(\frac{s}{l_j}\right) + M_j\right) \qquad (5\text{-}15)$$

- ที่ $s = \frac{1}{4}$

$$\psi_{ii}\left(\frac{1}{4}\right)\sigma\left(\frac{1}{4}V_j + W_j\right) + \sum_{j=1}^{N}\sigma\int_{S_j}\left(V_j\frac{s}{l_j} + W_j\right)\frac{P_i\left(\frac{1}{4}\right) - Q}{\left|P_i\left(\frac{1}{4}\right) - Q\right|^2}\cdot n ds_Q$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j}\ln\left|P\left(\frac{1}{4}\right) - Q\right|\left(J_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^3 + K_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^2 + L_j\left(\frac{s}{l_j}\right) + M_j\right) \qquad (5\text{-}16)$$

การสร้างสมการเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันกระแสบนเส้นขอบเขต แสดงให้เห็นได้ว่า ในแต่ละเส้นขอบเขตย่อยสามารถสร้างสมการได้ 4 สมการ และเมื่อสร้างสมการในทุกๆเส้นขอบเขตย่อย S_j ซึ่งมีจำนวน N เส้น จะได้สมการทั้งหมด 4N สมการและสามารถแสดงในรูปเมตริกซ์(matrix)ได้ดังนี้

$$
\sigma
\underbrace{\begin{vmatrix}
* & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -\frac{1}{2}\psi_{ii}\left(-\frac{1}{2}\right) & \psi_{ii}\left(-\frac{1}{2}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{4}\psi_{ii}\left(-\frac{1}{4}\right) & \psi_{ii}\left(-\frac{1}{4}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4}\psi_{ii}\left(\frac{1}{4}\right) & \psi_{ii}\left(\frac{1}{4}\right) & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & *
\end{vmatrix}}_{D}
\underbrace{\begin{vmatrix}
* \\
* \\
\hline
\tilde{W}_{ij} \\
\tilde{W}_{ij} \\
\hline
* \\
*
\end{vmatrix}}_{\tilde{W}}
+\sigma
\underbrace{\begin{vmatrix}
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * \\
\hline
* & * & \tilde{V}_{ij}\left(-\frac{1}{2}\right) & \tilde{W}_{ij}\left(-\frac{1}{2}\right) & * & * \\
* & * & \tilde{V}_{ij}\left(-\frac{1}{4}\right) & \tilde{W}_{ij}\left(-\frac{1}{4}\right) & * & * \\
* & * & \tilde{V}_{ij}(0) & \tilde{W}_{ij}(0) & * & * \\
* & * & \tilde{V}_{ij}\left(\frac{1}{4}\right) & \tilde{W}_{ij}\left(\frac{1}{4}\right) & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & *
\end{vmatrix}}_{A}
$$

$$
= \underbrace{\begin{vmatrix}
* \\
* \\
\hline
J_j \\
K_j \\
L_j \\
M_j \\
\hline
* \\
*
\end{vmatrix}}_{J}
\quad (5\text{-}17)
\qquad
\underbrace{\begin{vmatrix}
* & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * \\
\hline
* & * & \tilde{J}_{ij}(-\frac{1}{2}) & \tilde{K}_{ij}(-\frac{1}{2}) & \tilde{L}_{ij}(-\frac{1}{2}) & \tilde{M}_{ij}(-\frac{1}{2}) & * & * \\
* & * & \tilde{J}_{ij}(-\frac{1}{4}) & \tilde{K}_{ij}(-\frac{1}{4}) & \tilde{L}_{ij}(-\frac{1}{4}) & \tilde{M}_{ij}(-\frac{1}{4}) & * & * \\
* & * & \tilde{J}_{ij}(0) & \tilde{K}_{ij}(0) & \tilde{L}_{ij}(0) & \tilde{M}_{ij}(0) & * & * \\
* & * & \tilde{J}_{ij}(\frac{1}{4}) & \tilde{K}_{ij}(\frac{1}{4}) & \tilde{L}_{ij}(\frac{1}{4}) & \tilde{M}_{ij}(\frac{1}{4}) & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & *
\end{vmatrix}}_{B}
$$

นั่นคือ

$$\sigma(D + A)V = BJ \qquad (5\text{-}18)$$

สมการ(5-17)เป็นสมการบาวดารี่เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นเพื่อหากระแสบนเส้นขอบเขต ซึ่งประกอบด้วยเทอมต่างๆดังนี้

D = เมตริกซ์ของค่า ψ

A = เมตริกซ์ที่แสดงลักษณะเส้นขอบเขตของแรงดัน

B = เมตริกซ์ที่แสดงลักษณะเส้นขอบเขตของกระแส

V = เวคเตอร์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันแรงดันบนเส้นขอบเขต

J = เวคเตอร์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันกระแสบนเส้นขอบเขต

เห็นได้ว่า เมตริกซ์และเวคเตอร์ต่างๆในสมการ(5-18) ถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยๆ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

เมตริกซ์ D ขนาด 4Nx2N แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์เมตริกซ์ของค่า ψ (D_{ii}) ขนาด 4x2 จำนวน NxN ส่วน โดยที่ i = 0 , 1 , 2 ,…,N-1

$$D_{ii} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\psi_{ii}\left(-\frac{1}{2}\right) & \psi_{ii}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{4}\psi_{ii}\left(-\frac{1}{4}\right) & \psi_{ii}\left(-\frac{1}{4}\right) \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{4}\psi_{ii}\left(\frac{1}{4}\right) & \psi_{ii}\left(\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ A ขนาด 4Nx2N แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่แสดงลักษณะเส้นขอบเขตของแรงดัน(A_{ii}) ขนาด 4x2 จำนวน NxN ส่วน โดยที่ i = 0 , 1 , 2 ,…,N-1 และ j = 0 , 1 , 2 ,…,N-1

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \widetilde{V}_{ij}\left(-\frac{1}{2}\right) & \widetilde{W}_{ij}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \widetilde{V}_{ij}\left(-\frac{1}{4}\right) & \widetilde{W}_{ij}\left(-\frac{1}{4}\right) \\ \widetilde{V}_{ij}(0) & \widetilde{W}_{ij}(0) \\ \widetilde{V}_{ij}\left(\frac{1}{4}\right) & \widetilde{W}_{ij}\left(\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ B ขนาด 4Nx2N แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่แสดงลักษณะเส้นขอบเขตของกระแส(B_{ii}) ขนาด 4x2 จำนวน NxN ส่วน โดยที่ $i = 0 , 1 , 2 ,\ldots,$N-1 และ $j = 0 , 1 , 2 ,\ldots,$N-1

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} \widetilde{J}_{ij}(-\frac{1}{2}) & \widetilde{K}_{ij}(-\frac{1}{2}) & \widetilde{L}_{ij}(-\frac{1}{2}) & \widetilde{M}_{ij}(-\frac{1}{2}) \\ \widetilde{J}_{ij}(-\frac{1}{4}) & \widetilde{K}_{ij}(-\frac{1}{4}) & \widetilde{L}_{ij}(-\frac{1}{4}) & \widetilde{M}_{ij}(-\frac{1}{4}) \\ \widetilde{J}_{ij}(0) & \widetilde{K}_{ij}(0) & \widetilde{L}_{ij}(0) & \widetilde{M}_{ij}(0) \\ \widetilde{J}_{ij}(\frac{1}{4}) & \widetilde{K}_{ij}(\frac{1}{4}) & \widetilde{L}_{ij}(\frac{1}{4}) & \widetilde{M}_{ij}(\frac{1}{4}) \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ V ขนาด 2Nx1 แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์เวคเตอร์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันแรงดันบนเส้นขอบเขตขนาด 2x1 จำนวน N ส่วน โดยที่ $j = 0 , 1 , 2 ,\ldots,$N-1

$$V_j = \begin{bmatrix} V_j \\ W_j \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ J ขนาด 4Nx1 แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์เวคเตอร์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันกระแสบนเส้นขอบเขตขนาด 2x1 จำนวน N ส่วน โดยที่ $j = 0 , 1 , 2 ,\ldots,$N-1

$$J_j = \begin{bmatrix} J_j \\ K_j \\ L_j \\ M_j \end{bmatrix}$$

จากสมการ(5-17) เห็นได้ว่าเวคเตอร์ V เป็นตัวแปรที่ทราบค่า ดังนั้น จะสามารถคำนวณหา เวคเตอร์ J ได้ตามสมการต่อไปนี้

$$J = \sigma B^{-1}(D + A)V \qquad (5\text{-}19)$$

เห็นได้ว่าการคำนวณเวคเตอร์ J ในสมการ(5-19)สามารถทำได้เมื่อทราบอินเวอส์เมตริกซ์ B (B^{-1}) ซึ่งเมตริกซ์ B ต้องไม่เป็นเมตริกซ์เอกพันธ์(ค่าดีเทอมิเนนท์ของเมตริกซ์มีค่าไม่เท่ากับศูนย์)

ในกรณีที่เมตริกซ์ B เป็นเมตริกซ์เอกพันธ์ ซึ่งไม่สามารถหาค่าอินเวอส์เมตริกซ์ได้ จึงมีความ จำเป็นที่จะต้องสร้างระบบสมการบาวดารี่ขึ้นใหม่ ซึ่งระบบสมการบาวดารี่ถูกสร้างขึ้นจากการใช้ค่าแรงดัน $V(P \in S)$ ที่ s = -0.5 , -0.25 , 0.0 , 0.25 ในแต่ละเส้นขอบเขตย่อย S_j ที่มีจำนวน N ส่วน ดังนั้นเมื่อต้องการหาค่าอินเวอส์ของเมตริกซ์ B จึงได้สร้างระบบสมการที่ใช้ค่าแรงดัน

$V(P \in S)$ ที่ s = -0.5 , -0.3 , -0.1 , 0.1 , 0.3 ในแต่ละเส้นขอบเขตย่อย S_j ซึ่งจะทำให้ระบบสมการเป็น over-determined system

ดังนั้น จึงสามารถคำนวณเวคเตอร์ J ได้ตามสมการ(5-20) ดังนี้

$$\sigma(D + A)V = BJ$$
$$\sigma B^T (D + A)V = BB^T J$$
$$J = \sigma(B^T B)^{-1} B^T (D + A)V \qquad (5\text{-}20)$$

5.2.3 การคำนวณแรงดันภายในเส้นขอบเขต

ในการคำนวณแรงดันภายในเส้นขอบเขต $V(P \in S)$ จำเป็นต้องใช้ค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันแรงดันบนเส้นขอบเขต และค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันกระแสบนเส้นขอบเขต ซึ่งฟังก์ชันแรงดันบนเส้นขอบเขตสามารถสร้างขึ้นได้จากค่าแรงดันที่จุดต่างๆของเส้นขอบเขต และฟังก์ชันกระแสบนเส้นขอบเขตสามารถสร้างขึ้นได้จากค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการคำนวณในหัวข้อ 5.2.2 ซึ่งจะเห็นได้ว่า เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันทั้งสองลงในสมการ(5-8) จะสามารถคำนวณค่าแรงดันภายในเส้นขอบเขต $V(P \in S)$ ได้ซึ่งจะอยู่ในรูปเวคเตอร์ตามสมการ(5-10)

นั่นคือ

$$2\pi\sigma V\left(P \notin S\right) + \sigma a V = bJ \qquad (5\text{-}21)$$

สมการ(5-20) เป็นสมการบาวดารี่ที่สร้างขึ้น เพื่อหาแรงดันภายในเส้นขอบเขต ซึ่งประกอบด้วยเทอมต่างๆดังนี้

V = เวคเตอร์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันแรงดันบนเส้นขอบเขต

J = เวคเตอร์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันกระแสบนเส้นขอบเขต

a = เวคเตอร์ที่แสดงลักษณะตำแหน่งที่ตั้งของแรงดันภายในเส้นขอบเขต $V(P \notin S)$ เทียบกับตำแหน่งที่ตั้งแรงดันบนเส้นขอบเขต $V(P \in S)$

b = เวคเตอร์ที่แสดงลักษณะตำแหน่งที่ตั้งของแรงดันภายในเส้นขอบเขต $V(P \notin S)$ เทียบกับตำแหน่งที่ตั้งกระแสบนเส้นขอบเขต $J \cdot n$

จะเห็นได้ว่า เวคเตอร์ a และเวคเตอร์ b ในสมการ(5-21) ถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยๆ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

เวคเตอร์ a ขนาด 1x2N แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ a_j ขนาด 1x2 จำนวน N ส่วน จะได้

$$a_j = \left[\tilde{V}_j \quad \tilde{W}_j\right]$$

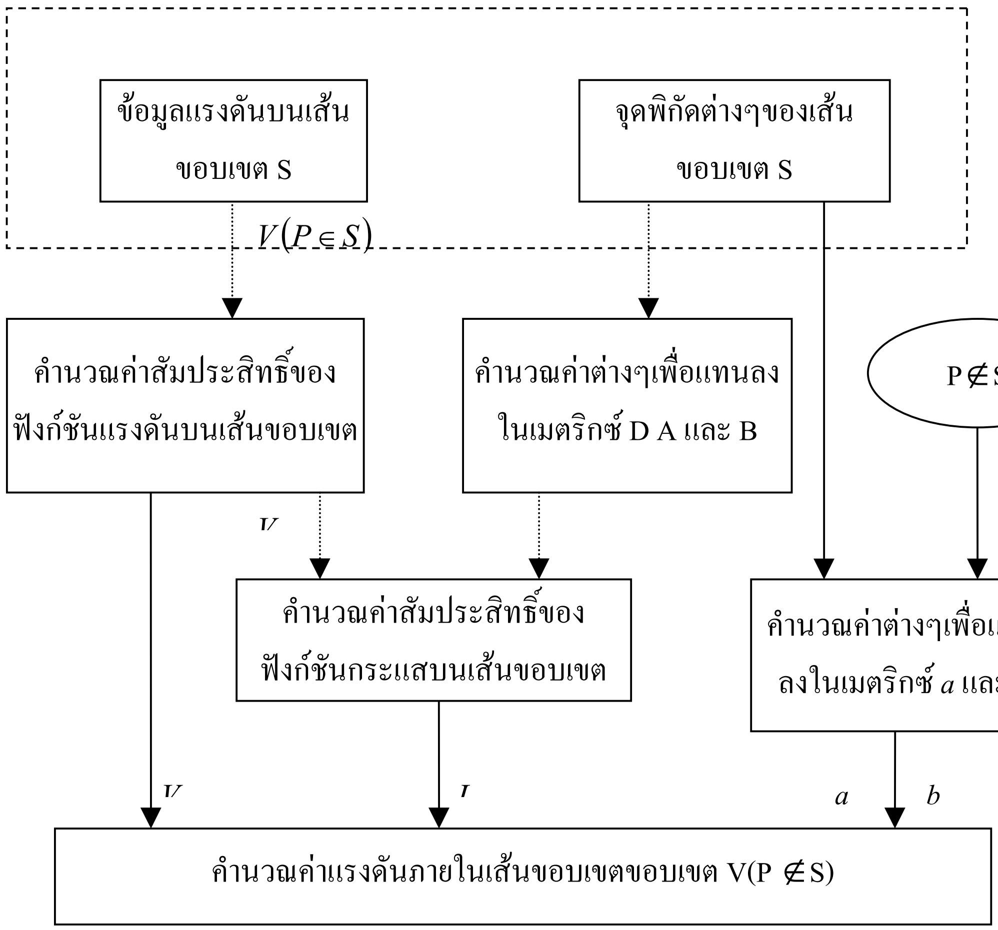
เวคเตอร์ a ขนาด 1x2N แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ a_j ขนาด 1x2 จำนวน N ส่วน จะได้

$$b_j = \left[\tilde{J}_j \quad \tilde{K}_j \quad \tilde{L}_j \quad \tilde{M}_j\right]$$

จากสมการ(5-21) สามารถคำนวณค่าแรงดันภายในขอบเขต $V(P \notin S)$ ตามสมการต่อไปนี้

$$V(P \notin S) = \frac{1}{2\pi\sigma}\left(-\sigma aV + bJ\right) \qquad (5\text{-}22)$$

5.2.4 กระบวนการคำนวณค่าแรงดันภายในเส้นขอบเขต



ภาพประกอบ 5-3 กระบวนการคำนวณค่าแรงดันภายในเส้นขอบเขต V(P ∉S)

จากภาพประกอบ 5-3 แสดงถึงขั้นตอนการคำนวณค่าแรงดันภายในขอบเขต $V(P \notin S)$ ซึ่งมี ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่หนึ่ง เป็นการประมาณค่าแรงดันบนเส้นขอบเขต $V(P \in S)$ ด้วยฟังก์ชันเส้นตรง และนำค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันมาจัดให้อยู่ในรูปของเวคเตอร์

ขั้นตอนที่สอง เป็นการคำนวณค่า $\widetilde{V}_j, \widetilde{W}_j, \widetilde{J}_j, \widetilde{M}_j, \widetilde{L}_j, \widetilde{M}_j$ โดยใช้พิกัดของเส้นขอบเขต S แล้วนำค่าที่ได้แทนลงในเมตริกซ์ D A และ B

ขั้นตอนที่สาม เป็นการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันกระแส $J.n$ บนเส้นขอบเขต โดยการแทนเวคเตอร์ V ที่ได้จากขั้นตอนที่สอง และแทนค่าของเมตริกซ์ D A และ B ที่ได้จากขั้นตอนที่สาม ลงในสมการ (5-19) ซึ่งทำให้ทราบค่ากระแสบนเส้นขอบเขต

ขั้นตอนที่สี่เป็นการกำหนดจุดพิกัดภายในเส้นขอบเขตที่ต้องการทราบค่าแรงดัน $V(P \notin S)$

ขั้นตอนที่ห้า เป็นการคำนวณค่า $\tilde{V}_j, \tilde{W}_j, \tilde{J}_j, \tilde{M}_j, \tilde{L}_j, \tilde{M}_j$ จากสมการ (5-12) โดยใช้พิกัดตำแหน่งของเส้นขอบเขต และพิกัดตำแหน่งของจุด P ที่ต้องการทราบค่าแรงดัน $V(P \notin S)$

ขั้นตอนที่หก เป็นการคำนวณค่าแรงดันภายในเส้นขอบเขต โดยการเวคเตอร์ V $J.n$ a และ b ลงในสมการ(5-22)

และเมื่อต้องการคำนวณค่าแรงดันภายในเส้นขอบเขต $V(P \notin S)$ ที่จุดอื่นๆ สามารถทำได้โดยการเริ่มจากขั้นตอนที่สี่ถึงขั้นตอนที่หก โดยไม่ต้องทำการคำนวณซ้ำในขั้นตอนที่หนึ่งถึงสาม เนื่องจากในขั้นตอนที่หนึ่งถึงขั้นตอนที่สาม เป็นการคำนวณหาเวคเตอร์ V และ J ซึ่งเป็นค่าคงที่ตามเส้นขอบเขตนั้นๆ ซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงตามพิกัดของจุด P ที่ต้องการคำนวณหาค่าแรงดัน

5.2.5 การคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของแรงดันภายในเส้นขอบเขต

ค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของแรงดันภายในขอบเขต $\nabla_P V(P \notin S)$ สามารถหาได้จากการอนุพันธ์สมการ(5-4)เทียบกับจุด P ซึ่งเป็นจุดที่ต้องการทราบค่าอนุพันธ์ ในส่วนของเทอมที่ไม่เป็นฟังก์ชันของจุด P จะกำหนดให้เป็นค่าคงที่ ดังนั้น จะแสดงเทอมที่ทำการอนุพันธ์ในสมการ(5-23) ดังต่อไปนี้

$$2\pi\sigma[\nabla_P V(P \notin S)] + \sum_{j=1}^{N} \sigma \int_{S_j} V(Q) \left[\nabla_P \frac{P-Q}{|P-Q|^2} \cdot n \right] ds_Q = \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} [\nabla_P \ln|P-Q|] J \cdot n ds_Q$$

(5-23)

ขั้นตอนของการหาค่าอนุพันธ์แต่ละเทอมจะกล่าวในภาคผนวก ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ของการอนุพันธ์ตามสมการ(5-24) ดังต่อไปนี้

$$2\pi\sigma\left[\nabla_P V(P\notin S)\right]+\sum_{j=1}^{N}\sigma\int_{S_j}V(Q)\left[\frac{1}{|P-Q|^2}\left\{n-2\frac{(P-Q)\cdot n}{|P-Q|^2}(P-Q)\right\}\right]ds_Q$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j}\left[\frac{P-Q}{|P-Q|^2}\right]J\cdot nds_Q \qquad (5\text{-}24)$$

นำฟังก์ชันที่ได้จากการประมาณค่าของแรงดันและกระแส จากสมการ(5-6) และ(5-7) ตามลำดับ ไปแทนลงในสมการ(5-24) จะได้สมการ(5-25)

$$2\pi\sigma\left[\nabla_P V(P\notin S)\right]+\sum_{j=1}^{N}\sigma\int_{S_j}\left(V_j\frac{s}{l_j}+W_j\right)\left[\frac{1}{|P-Q|^2}\left\{n-2\frac{(P-Q)\cdot n}{|P-Q|^2}(P-Q)\right\}\right]ds_Q$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{S_j}\frac{P-Q}{|P-Q|^2}\left(J_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^3+K_j\left(\frac{s}{l_j}\right)^2+L_j\left(\frac{s}{l_j}\right)+M_j\right)ds_Q \qquad (5\text{-}25)$$

จากสมการ(5-25) เมื่อแปลงเป็นสมการเวคเตอร์ จะได้ดังสมการ(5-26) ดังนี้

$$2\pi\sigma\left[\nabla_P V(P\notin S)\right]+\sigma\left[* \quad * \quad \tilde{V}_j' \quad \tilde{W}_j' \quad * \quad *\right]\begin{bmatrix} * \\ * \\ V_j \\ W_j \\ * \\ * \end{bmatrix}=\left[* \quad * \quad \tilde{J}_j' \quad \tilde{K}_j' \quad \tilde{L}_j' \quad \tilde{K}_j' \quad * \quad *\right]\begin{bmatrix} * \\ * \\ J_j \\ K_j \\ L_j \\ M_j \\ * \\ * \end{bmatrix} \qquad (526)$$

เมื่อกำหนดให้

V_j, W_j เป็นสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันแรงดันที่อยู่บนเส้นขอบเขต

J_j, K_j, L_j, M_j เป็นสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันกระแสที่อยู่บนเส้นขอบเขต

$\tilde{V}_j', \tilde{W}_j', \tilde{J}_j', \tilde{M}_j', \tilde{L}_j', \tilde{M}_j'$ เป็นพจน์ต่างๆที่แสดงลักษณะของเส้นขอบเขตโดยค่าเหล่านี้จะไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณของแรงดันหรือกระแส แต่ขึ้นอยู่กับลักษณะของเส้นขอบเขตและตำแหน่งของจุด P ดังนี้

$$\widetilde{V}'_j = \int_{S_j} \frac{s}{l_j} \cdot \frac{1}{|P-Q|^2} \left\{ n - 2\frac{(P-Q)\cdot n}{|P-Q|^2}(P-Q) \right\} ds_Q$$

$$\widetilde{W}'_j = \int_{S_j} \frac{1}{|P-Q|^2} \left\{ n - 2\frac{(P-Q)\cdot n}{|P-Q|^2}(P-Q) \right\} ds_Q \tag{5-27}$$

$$\widetilde{J}'_j = \int_{S_j} \left(\frac{s}{l_j}\right)^3 \frac{P-Q}{|P-Q|^2} ds_Q \qquad \widetilde{K}'_j = \int_{S_j} \left(\frac{s}{l_j}\right)^2 \frac{P-Q}{|P-Q|^2} ds_Q$$

$$\widetilde{L}'_j = \int_{S_j} \left(\frac{s}{l_j}\right) \frac{P-Q}{|P-Q|^2} ds_Q \qquad \widetilde{M}'_j = \int_{S_j} \frac{P-Q}{|P-Q|^2} ds_Q$$

จากสมการ(5-26) เมื่อแปลงเป็นสมการเวคเตอร์ จะได้ดังสมการ(5-28) ดังนี้

$$2\pi\sigma\left[\nabla_P \mathrm{v}(P \notin S)\right] + \sigma a' = b' J \tag{5-28}$$

สมการ(5-28) เป็นสมการบาวดารี่ที่สร้างขึ้น เพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของแรงดันภายในเส้นขอบเขต ซึ่งประกอบด้วยเทอมต่างๆดังนี้

V = เวคเตอร์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันแรงดันบนเส้นขอบเขต

J = เวคเตอร์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันกระแสบนเส้นขอบเขต

a' = เวคเตอร์ที่แสดงลักษณะตำแหน่งที่ตั้งของแรงดันภายในเส้นขอบเขต $V(P \notin S)$ เทียบกับตำแหน่งที่ตั้งแรงดันบนเส้นขอบเขต $V(P \in S)$

b' = เวคเตอร์ที่แสดงลักษณะตำแหน่งที่ตั้งของแรงดันภายในเส้นขอบเขต $V(P \notin S)$ เทียบกับตำแหน่งที่ตั้งกระแสบนเส้นขอบเขต $J \cdot n$

จะเห็นได้ว่า เวคเตอร์ a' และเวคเตอร์ b' ในสมการ(5-28) ถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยๆ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

เวคเตอร์ a' ขนาด 1x2N แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ a'_j ขนาด 1x2 จำนวน N ส่วน จะได้

$$a'_j = \left[\widetilde{V}'_j \quad \widetilde{W}'_j\right]$$

เวคเตอร์ b'_j ขนาด 1x2N แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ b'_j ขนาด 1x2 จำนวน N ส่วน จะได้

$$b'_j = \left[\tilde{J}'_j \quad \tilde{K}'_j \quad \tilde{L}'_j \quad \tilde{M}'_j\right]$$

จากสมการ(5-28) สามารถคำนวณค่าแรงดันภายในขอบเขต $\nabla_P V(P \notin S)$ ตามสมการต่อไปนี้

$$\nabla_P V(P \notin S) = \frac{1}{2\pi\sigma}\left(-\sigma a' V + b' J\right) \qquad (5\text{-}29)$$

5.2.6 การคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของแรงดันภายในเส้นขอบเขต

ค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของแรงดันภายในขอบเขต $\nabla_P\left[\nabla_P V(P \notin S)\right]$ สามารถหาได้จากการอนุพันธ์สมการ(5-24)เทียบกับจุด P ซึ่งเป็นจุดที่ต้องการทราบค่าอนุพันธ์ ในส่วนของเทอมที่ไม่เป็นฟังก์ชันของจุด P จะกำหนดให้เป็นค่าคงที่ ดังนั้น จะแสดงเทอมที่ทำการอนุพันธ์ในสมการ (5-30) ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &2\pi\sigma\left(\nabla_P\left[\nabla_P V(P \notin S)\right]\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \sigma \int_{S_j} V(Q) \left[\nabla_P \frac{1}{|P-Q|^2}\left\{n - 2\frac{(P-Q)\cdot n}{|P-Q|^2}(P-Q)\right\}\right] ds_Q \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \nabla_P \left[\frac{P-Q}{|P-Q|^2}\right] J \cdot n ds_Q \end{aligned} \qquad (5\text{-}30)$$

ขั้นตอนของการหาค่าอนุพันธ์แต่ละเทอมจะกล่าวในภาคผนวก ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ของการอนุพันธ์ตามสมการ(5-31) ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &2\pi\sigma\left(\nabla_P\left[\nabla_P V(P \notin S)\right]\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \sigma \int_{S_j} V(Q) \left[\frac{-2}{|P-Q|^3}\left\{\frac{n(P-Q)}{|P-Q|} + \frac{(P-Q)\cdot n}{|P-Q|}\left[I - 4\frac{(P-Q)^2}{|P-Q|^2}\right] + \frac{(P-Q)n}{|P-Q|}\right\}\right] ds \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \left[\frac{1}{|P-Q|^2}\left\{I - 2\frac{(P-Q)^2}{|P-Q|^2}\right\}\right] J \cdot n dS_Q \end{aligned} \qquad (5\text{-}31)$$

นำฟังก์ชันที่ได้จากการประมาณค่าของแรงดันและกระแส จากสมการ(5-6) และ(5-7) ตามลำดับ ไปแทนลงในสมการ(5-31) จะได้สมการ(5-32)

$$
\begin{aligned}
&2\pi\sigma\left(\nabla_P\left[\nabla_P V(P \notin S)\right]\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} \sigma \int_{S_j} \left(V_j \frac{s}{l_j} + W_j \right) \left[\frac{-2}{|P-Q|^3} \left\{ \frac{n(P-Q)}{|P-Q|} + \frac{(P-Q)\cdot n}{|P-Q|} \left[I - 4\frac{(P-Q)^2}{|P-Q|^2} \right] + \frac{(P-Q)n}{|P-Q|} \right\} \right] ds \\
&\quad = \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \frac{1}{|P-Q|^2} \left\{ I - 2\frac{(P-Q)^2}{|P-Q|^2} \right\} \left(J_j \left(\frac{s}{l_j} \right)^3 + K_j \left(\frac{s}{l_j} \right)^2 + L_j \left(\frac{s}{l_j} \right) + M_j \right) ds_Q \qquad (5\text{-}32)
\end{aligned}
$$

จากสมการ(5-32) เมื่อแปลงเป็นสมการเวคเตอร์ จะได้ดังสมการ(5-33) ดังนี้

$$
2\pi\sigma\left[\nabla_P V(P \notin S)\right] + \sigma\left[* \quad * \quad \widetilde{V}_j^{"} \quad \widetilde{W}_j^{"} \quad * \quad * \right] \begin{bmatrix} * \\ * \\ V_j \\ W_j \\ * \\ * \end{bmatrix} = \left[* \quad * \quad \widetilde{J}_j^{"} \quad \widetilde{K}_j^{"} \quad \widetilde{L}_j^{"} \quad \widetilde{K}_j^{"} \quad * \quad * \right] \begin{bmatrix} * \\ * \\ J_j \\ K_j \\ L_j \\ M_j \\ * \\ * \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}33)
$$

เมื่อกำหนดให้

V_j, W_j เป็นสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันแรงดันที่อยู่บนเส้นขอบเขต

J_j, K_j, L_j, M_j เป็นสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันกระแสที่อยู่บนเส้นขอบเขต

$\widetilde{V}_j^{"}, \widetilde{W}_j^{"}, \widetilde{J}_j^{"}, \widetilde{M}_j^{"}, \widetilde{L}_j^{"}, \widetilde{M}_j^{"}$ เป็นพจน์ต่างๆที่แสดงลักษณะของเส้นขอบเขตโดยค่าเหล่านี้จะไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณของแรงดันหรือกระแส แต่ขึ้นอยู่กับลักษณะของเส้นขอบเขตและตำแหน่งของจุด P ดังนี้

$$\widetilde{V}_j'' = \int_{S_j} \frac{s}{l_j} \frac{-2}{|P-Q|^3} \left\{ \frac{n(P-Q)}{|P-Q|} + \frac{(P-Q)\cdot n}{|P-Q|} \left[I - 4\frac{(P-Q)^2}{|P-Q|^2} \right] + \frac{(P-Q)n}{|P-Q|} \right\} ds_Q$$

$$\widetilde{W}_j'' = \int_{S_j} \frac{-2}{|P-Q|^3} \left\{ \frac{n(P-Q)}{|P-Q|} + \frac{(P-Q)\cdot n}{|P-Q|} \left[I - 4\frac{(P-Q)^2}{|P-Q|^2} \right] + \frac{(P-Q)n}{|P-Q|} \right\} ds_Q \qquad (5\text{-}34)$$

$$\widetilde{J}_j'' = \int_{S_j} \left(\frac{s}{l_j}\right)^3 \frac{1}{|P-Q|^2} \left\{ I - 2\frac{(P-Q)^2}{|P-Q|^2} \right\} dS_Q \qquad \widetilde{K}_j'' = \int_{S_j} \left(\frac{s}{l_j}\right) \frac{1}{|P-Q|^2} \left\{ I - 2\frac{(P-Q)^2}{|P-Q|^2} \right\} dS_Q$$

$$\widetilde{L}_j'' = \int_{S_j} \left(\frac{s}{l_j}\right) \frac{1}{|P-Q|^2} \left\{ I - 2\frac{(P-Q)^2}{|P-Q|^2} \right\} dS_Q \qquad \widetilde{M}_j'' = \int_{S_j} \frac{1}{|P-Q|^2} \left\{ I - 2\frac{(P-Q)^2}{|P-Q|^2} \right\} dS_Q$$

จากสมการ(5-33) เมื่อแปลงเป็นสมการเวคเตอร์ จะได้ดังสมการ(5-35) ดังนี้

$$2\pi\sigma\left(\nabla_P\left[\nabla_P v(P \notin S)\right]\right) + \sigma a'' V = b'' J \qquad (5\text{-}35)$$

สมการ(5-35) เป็นสมการบาวดารี่ที่สร้างขึ้น เพื่อหาแรงดันภายในเส้นขอบเขต ซึ่งประกอบด้วยเทอมต่างๆดังนี้

V = เวคเตอร์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันแรงดันบนเส้นขอบเขต

J = เวคเตอร์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันกระแสบนเส้นขอบเขต

a'' = เวคเตอร์ที่แสดงลักษณะตำแหน่งที่ตั้งของแรงดันภายในเส้นขอบเขต $V(P \notin S)$ เทียบกับตำแหน่งที่ตั้งแรงดันบนเส้นขอบเขต $V(P \in S)$

b'' = เวคเตอร์ที่แสดงลักษณะตำแหน่งที่ตั้งของแรงดันภายในเส้นขอบเขต $V(P \notin S)$ เทียบกับตำแหน่งที่ตั้งกระแสบนเส้นขอบเขต $J \cdot n$

จะเห็นได้ว่า เวคเตอร์ a'' และเวคเตอร์ b'' ในสมการ(5-34) ถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยๆ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

เวคเตอร์ a'' ขนาด 1x2N แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ a''_j ขนาด 1x2 จำนวน N ส่วน จะได้

$$a_j'' = \left[\widetilde{V}_j'' \quad \widetilde{W}_j''\right]$$

เวคเตอร์ b'_j ขนาด 1x2N แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ b'_j ขนาด 1x2 จำนวน N ส่วน จะได้

$$b''_j = \left[\tilde{J}''_j \quad \tilde{K}''_j \quad \tilde{L}''_j \quad \tilde{M}''_j\right]$$

จากสมการ(5-35) สามารถคำนวณค่าแรงดันภายในขอบเขต $\nabla_P\left[\nabla_P V\left(P \notin S\right)\right]$ ตามสมการต่อไปนี้

$$\nabla_P V(P \notin S) = \frac{1}{2\pi\sigma}\left(-\sigma a'' V + b'' J\right) \qquad (5\text{-}36)$$

ในบทนี้ได้แสดงการแปลงผลเฉลยของสมการลาปลาซในเชิงวิเคราะห์ให้อยู่ในเชิงตัวเลข ซึ่งได้แสดงวิธีการคำนวณกระแสไฟฟ้าที่ไหลตัดผ่านเส้นขอบเขต และแรงดันไฟฟ้าบนพื้นที่ที่อยู่ภายในเส้นขอบเขต รวมทั้งค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองของแรงดันไฟฟ้า ดังนั้น สามารถคำนวณค่าความสูงที่จุดต่างๆในพื้นที่ที่พิจารณา เพื่อใช้ในแบบจำลองระดับความสูง และค่าอนุพันธ์ต่างๆ เพื่อใช้ในแบบจำลองเส้นทางการไหลของน้ำ เนื่องจากได้เปรียบเทียบการไหลของน้ำเป็นการไหลของกระแสไฟฟ้าตัดกับเส้นขอบเขต และเปรียบเทียบค่าความสูงภายในพื้นที่พิจารณาเป็นค่าแรงดันไฟฟ้าที่จุดต่างๆภายในเส้นขอบเขต