บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

2.1 การจำลองระบบ

การจำลองแบบปัญหา (Simulation) เป็นวิธีการอันหนึ่งซึ่งใช้ในกระบวนการแก้ปัญหาในด้านต่างๆ มาแต่โบราณกาลแล้ว แต่ที่ได้รับความสนใจและตื่นตัวในการนำมาใช้แก้ปัญหาในสาขาอาชีพต่างๆ อย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เป็นผลมาจากความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ ในระยะแรกๆ มีผู้ใช้ที่ให้คำจำกัดความของการจำลองแบบปัญหาตามความเห็นและวิธีการนำไปใช้ประโยชน์ แต่คำจำกัดความที่เป็นที่ยอมรับ สามารถครอบคลุมความหมายของการจำลองแบบปัญหาได้เหมาะสมที่สุดก็คือคำจำกัดความที่ให้โดย Shannon ซึ่งให้ความจำกัดความว่า “การจำลองแบบปัญหาคือกระบวนการออกแบบแบบจำลอง (Model) ของระบบงานจริง (Real System) แล้วดำเนินการทดลองโดยใช้แบบจำลองนั้นเพื่อการเรียนรู้พฤติกรรมของระบบงานหรือเพื่อประเมินผลการใช้กลยุทธ์ (Strategies) ต่างๆ ในการดำเนินงานของระบบภายใต้ข้อกำหนดที่วางไว้” [18]

ตัวแบบหรือแบบจำลอง (Model) หมายถึงตัวแทนของระบบที่พัฒนาขึ้นเพื่อใช้ศึกษาระบบนั้น ตัวแบบที่ดีจะต้องมีรายละเอียดเพียงพอ เพื่อให้ผู้วิเคราะห์หรือผู้มีอำนาจตัดสินใจได้ข้อสรุปของระบบเหมือนกับที่ได้เมื่อสามารถทำการทดลองจริงกับระบบนั้น [19]

การจำลองแบบปัญหาด้วยคอมพิวเตอร์ [18] เป็นการศึกษาปัญหาของระบบงานด้วยแบบจำลอง ซึ่งอยู่ในรูปของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แบบจำลองก่อนที่จะมาอยู่ในรูปของโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้อาจจะอยู่ในรูปของแบบจำลองประเภทหนึ่งประเภทใดก็ได้ เช่น แบบจำลองทางกายภาพ แบบจำลองอะนาลอก แบบจำลองทางคอมพิวเตอร์ เป็นต้น โดยที่การจำลองแบบปัญหาด้วยคอมพิวเตอร์นี้เป็นที่นิยมใช้ที่สุดของการใช้จำลองแบบปัญหา เพราะสามารถใช้ได้กับปัญหาของระบบงานได้มากมายหลายประเภท ในปัจจุบันเป็นเทคนิคที่ได้รับการนำเอาไปใช้อย่างกว้างขวาง

2.1.1 ข้อดีและข้อเสียของการใช้การจำลองแบบปัญหา

การจำลองแบบปัญหานั้นเป็นเครื่องมือซึ่งใช้บอกผลต่างๆ อันจะเกิดจากระบบงานภายใต้เงื่อนไขต่างๆ ผลที่ได้จากการจำลองแบบปัญหานั้นอาจนำไปใช้งานได้โดยตรงหรืออาจจะต้องนำไปวิเคราะห์ต่อ การจำลองแบบปัญหานั้นเป็นวิธีหนึ่งในหลายๆ วิธีที่อาจใช้ช่วยแก้ปัญหาในการดำเนินงานของระบบงานได้ ดังนั้นเมื่อมีปัญหาเกิดขึ้นจึงต้องวิเคราะห์ปัญหานั้นๆ เสียก่อนว่าควรจะใช้เครื่องมือใดเข้าไปช่วยแก้ปัญหา เมื่อเป็นดังนี้จึงเป็นความจำเป็นที่จะต้องทราบถึงข้อดีและข้อเสียของเครื่องมือ เพื่อช่วยในการตัดสินใจว่าเครื่องมือนั้นๆ เหมาะสมเพียงใดในการนำไปใช้แก้ปัญหา

โดยที่แบบจำลองนั้นเป็นตัวแทนของระบบงานจริง ในเมื่อมีระบบงานจริงอยู่แล้วทำไมจึงต้องสร้างแบบจำลองขึ้นใช้ทดลองแทน ทำไมจึงไม่ทดลองกับระบบงานจริง คำตอบอาจสรุปได้ดังนี้

1. เพราะว่าการทดลองกับระบบงานจริง อาจก่อให้เกิดความขัดข้องในการดำเนินงานตามปกติ

2. เพราะว่าในการทดลองกับระบบงานจริง ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับการวัดผลของสมรรถนะของคน อาจได้ข้อมูลที่คลาดเคลื่อนอันเนื่องมาจากความสามารถในการปรับสมรรถนะของตนเอง จึงทำให้ได้ข้อมูลที่สูงกว่าหรือต่ำกว่าความเป็นจริง

3. เพราะว่าการทดลองกับระบบงานจริงนั้น เป็นการยากที่จะควบคุมเงื่อนไขต่างๆ ของการทดลองให้คงที่ ทำให้ผลการทดลองที่ได้แต่ละครั้งของการทดลองอาจไม่ใช่ผลที่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขกลุ่มเดียวกัน

4. เพราะว่าการทดลองกับระบบงานจริง อาจต้องใช้เวลาและค่าใช้จ่ายจำนวนมากจึงจะได้ข้อมูลเพียงพอสำหรับการวิเคราะห์

5. เพราะว่าการทดลองกับระบบงานจริง อาจจะเป็นไปไม่ได้ที่จะทดลองกับเงื่อนไขทุกรูปแบบที่ต้องการ

จากอุปสรรคที่เกิดขึ้น ทำให้ไม่สามารถทำการทดลองกับระบบงานจริงได้ จึงคิดที่จะใช้การจำลองแบบปัญหาในการช่วยแก้ไขปัญหา [18, 20] โดยสรุปเราควรจะพิจารณาใช้การจำลองแบบปัญหาเมื่อเงื่อนไขข้อหนึ่งข้อใดต่อไปนี้เกิดขึ้น

1. กรณีไม่มีวิธีการแก้ปัญหาโดยวิธีทางคณิตศาสตร์

2. กรณีที่มีวิธีการแก้ปัญหาโดยวิธีทางคณิตศาสตร์ แต่การคำนวณและขั้นตอนในการวิเคราะห์ยุ่งยาก ทำให้เสียเวลาและแรงงานมาก และการจำลองแบบปัญหาเป็นวิธีการแก้ไขปัญหาที่ง่ายกว่า

3. กรณีที่มีวิธีการแก้ไขปัญหาโดยวิธีทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ยุ่งยากมาก แต่เกินกว่าขีดความสามารถของบุคลากรที่มีอยู่ และค่าใช้จ่ายในการจำลองแบบปัญหาถูกกว่าการจ้างผู้เชี่ยวชาญในวิธีการทางคณิตศาสตร์นั้นมาแก้ปัญหา

4. กรณีมีความจำเป็นในการสร้างสถานการณ์ในอดีตขึ้น เพื่อศึกษาหรือประเมินค่าพารามิเตอร์

5. กรณีที่การจำลองปัญหาเป็นวิธีเดียวที่จะสามารถนำไปใช้ได้ เนื่องจากไม่อาจทำการทดลองและวัดผลในสภาพจริง

6. กรณีที่ต้องการศึกษาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของระบบงาน ในช่วงระยะเวลาการใช้งานระบบนานๆ เช่น การศึกษาปัญหาเกี่ยวกับสภาวะแวดล้อมเป็นพิษ

ประโยชน์ที่สำคัญประการหนึ่งของการจำลองแบบปัญหาก็คือ เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสูงสำหรับการศึกษาและฝึกอบรมเกี่ยวกับระบบงาน เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสภาวะแวดล้อมและองค์ประกอบต่างๆ ของระบบงาน ซึ่งจะช่วยให้เข้าใจถึงปัญหาต่างๆ ที่อาจจะเกิดขึ้นกับระบบงาน รวมทั้งผลที่จะเกิดขึ้นเมื่อมีการนำเอาวิธีการใหม่เข้าไปใช้ในการดำเนินงานของระบบงาน ทำให้การวางแผนการดำเนินงานมีประสิทธิภาพดีขึ้น

ดังได้กล่าวมาแล้วว่า การจะนำเอาเครื่องมือใดไปใช้ ควรต้องทราบถึงข้อดีและข้อเสียของเครื่องมือนั้นๆ ดังนั้นจึงควรทราบว่าเพราะเหตุใดจึงไม่ควรใช้การจำลองแบบปัญหา สรุปโดยสังเขปได้ดังนี้

1. การที่จะได้มาซึ่งแบบจำลองที่ดีนั้น ต้องใช้เวลาและค่าใช้จ่ายจำนวนมาก รวมทั้งต้องอาศัยความสามารถอย่างสูงของผู้ออกแบบจำลอง

2. แบบจำลองที่ได้ในบางครั้ง ดูเหมือนว่าสามารถใช้เป็นตัวแทนของระบบงานจริงได้ แต่ในความเป็นจริงแบบจำลองนั้นอาจจะไม่ใช่ตัวแทนของระบบงานนั้นๆ และการที่จะบอกได้ว่าแบบจำลองนั้นใช้ได้หรือไม่ก็ไม่ใช่เรื่องง่าย

3. ข้อมูลที่ได้จากการใช้แบบจำลองไม่มีความแม่นยำ และไม่สามารถวัดขนาดของความไม่แม่นยำได้ แม้จะทำการวัดความไวของข้อมูลเหล่านั้น ก็ไม่สามารถทำให้ข้อเสียข้อนี้หายไปได้

4. เนื่องจากข้อมูลที่ได้จากการจำลองแบบปัญหานั้นโดยปกติจะเป็นตัวเลข ซึ่งก่อให้เกิดปัญหาว่า ผู้สร้างแบบจำลองอาจให้ความสำคัญกับตัวเลขเหล่านั้นมากเกินไป และพยายามที่จะทดสอบความถูกต้องของตัวเลขแทนที่จะทดสอบความถูกต้องของแบบจำลอง ทำให้แบบจำลองอาจไม่มีความเหมาะสมที่จะนำไปใช้งาน

2.1.2 ขั้นตอนการจำลองแบบปัญหา [18, 19, 20]

การแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิคการจำลองแบบสถานการณ์หรือปัญหา มีขั้นตอนดังนี้

2.1.2.1 การตั้งปัญหาและการให้คำจำกัดความของระบบงาน (Problem Formulation and System Definition) ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดในการจำลองแบบปัญหา ขั้นตอนนี้เป็นการกำหนดวัตถุประสงค์ของการศึกษาระบบ การกำหนดขอบเขต ข้อจำกัดต่างๆ และวิธีการวัดผลของระบบงาน โดยเริ่มตั้งแต่ผู้มีอำนาจการตัดสินใจให้ข้อมูลแก่นักวิเคราะห์ นักวิเคราะห์จะตั้งปัญหาขึ้นในใจและพิจารณาวิธีที่เป็นไปได้ในการแก้ปัญหานี้ ความสามารถในการตั้งปัญหา (เช่น ปัญหาแถวคอย) เกิดจากการฝึกฝนและประสบการณ์ ซึ่งต้องกำหนดให้ชัดเจน อาจใช้การจำลองแบบสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริง เพื่อศึกษาถึงสภาพและสาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหา

2.1.2.2 พัฒนาตัวแบบจำลองของระบบ ขั้นตอนนี้เริ่มตั้งแต่นักวิเคราะห์กำหนดคำจำกัดความของระบบ และกำหนดวัตถุประสงค์ของการจำลอง พิจารณาองค์ประกอบของระบบและความสัมพันธ์ขององค์ประกอบเหล่านั้น มีการรวบรวมข้อมูล และสร้างตัวแบบ ซึ่งจะต้องสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรหรือสิ่งที่เกี่ยวข้องหรือมีอิทธิพลต่อวัตถุประสงค์ขึ้น โดยความสัมพันธ์จะต้องแสดงถึงสถานภาพที่แท้จริงของปัญหา จากลักษณะของระบบงานที่จะต้องทำการศึกษาเขียนแบบจำลองที่สามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบงานตามวัตถุประสงค์ของการศึกษา และแปลงแบบจำลองไปอยู่ในรูปของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

2.1.2.3 เก็บรวบรวม และวิเคราะห์ข้อมูล เมื่อสร้างรูปแบบแทนระบบของปัญหาแล้ว จะต้องพิจารณาว่าควรจะใช้ข้อมูลอะไรบ้างในการวิเคราะห์ระบบของปัญหา รวมทั้งการจัดเปลี่ยน

รูปแบบของข้อมูลให้อยู่ในลักษณะที่สามารถนำไปใช้ในรูปแบบปัญหาได้ โดยต้องศึกษาและเก็บรวบรวมข้อมูลดิบต่างๆ ที่เป็นตัวแทนของสถานการณ์จริงที่แม่นยำ และถูกต้องแล้วหารูปแบบการแจกแจงที่เหมาะสม และประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงสำหรับข้อมูลที่เก็บได้ และทดสอบรูปแบบการแจกแจงและค่าพารามิเตอร์ที่หาได้ เพื่อให้เหมาะสมกับข้อมูลที่เก็บมาในเชิงสถิติ [21, 22, 23]

2.1.2.4 ตรวจสอบและทดสอบตัวแบบจำลองแทนระบบ เป็นการวิเคราะห์เพื่อช่วยให้ผู้เขียน และผู้ใช้แบบจำลองมั่นใจว่าแบบจำลองที่ได้นั้น สามารถใช้แทนระบบงานจริงตามวัตถุประสงค์ของการศึกษาได้ ดังนั้นเมื่อสร้างรูปแบบแทนระบบของปัญหา โดยเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์แล้ว ควรมีการตรวจสอบความถูกต้องของรูปแบบที่สร้างขึ้นมา เพื่อให้สอดคล้องกับตัวแบบ และทวนสอบโดยการให้คนอื่นช่วยตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เขียนไว้ ใช้แผนภาพสายงานช่วยในการทวนสอบ ตรวจดูผลลัพธ์ของตัวแบบว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้พารามิเตอร์นำเข้าต่างๆ กันเป็นต้น [17, 22] เมื่อทวนสอบแล้วนำตัวแบบนั้นมาทดสอบความสมเหตุสมผลโดยการเปรียบเทียบตัวแบบกับระบบจริง เพื่อให้ตัวแบบนั้นมีพฤติกรรมที่ใกล้เคียงระบบจริงมากที่สุด โดยนำข้อมูลทั้งหมดที่มีอยู่รวมกับการพูดคุยกับผู้ที่คุ้นเคยหรือรับผิดชอบระบบที่กำลังศึกษา ใช้ทฤษฎีทางสถิติ หรือสังเกตดูระบบที่กำลังศึกษาเปรียบเทียบกับตัวแบบจนกว่าจะได้ตัวแบบที่เหมาะสม

2.1.2.5 การทดลองและหารูปแบบที่ดีที่สุดของตัวแบบจำลองระบบ เมื่อสร้างรูปแบบแทนระบบของปัญหา และเก็บรวบรวมข้อมูลได้แล้ว จะทำการทดลองรูปแบบที่สร้างขึ้นโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์จำลองสถานการณ์ที่เกิดขึ้น แล้วนำข้อมูลที่เก็บรวบรวม และข้อมูลที่สุ่มได้เข้าระบบเพื่อหาผลลัพธ์ โดยต้องออกแบบการทดลองเพื่อหาเงื่อนไขของการทดลองที่ทำให้แบบจำลองสามารถให้ข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์หาผลลัพธ์ที่ต้องการ และวางแผนว่าจะใช้งานแบบจำลองในการทดลองอย่างไร จึงจะได้ข้อมูลสำหรับการวิเคราะห์ผลเพียงพอ (ด้วยระดับความเชื่อมั่นในผลการวิเคราะห์ที่เหมาะสม) ซึ่งจะต้องดำเนินการทดลองตามเงื่อนไขของการทดลองจนกว่าจะได้จำนวนข้อมูลที่เหมาะสมและมีนัยสำคัญทางสถิติที่ยอมรับได้ แล้วทำการจำลองรูปแบบแทนระบบตามเวลาที่กำหนด และนำผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบมาช่วยในการตัดสินใจ โดยเปรียบเทียบตัวแบบหรือประเมินทางเลือก (Scenarios) ที่แตกต่างกัน เพื่อหาตัวแบบที่ให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

2.1.2.6 การนำผลลัพธ์ของการจำลองตัวแบบของระบบไปใช้งาน เมื่อเปรียบเทียบตัวแบบต่างๆ และได้วิธีการที่จะแก้ปัญหาได้ดีที่สุดไปใช้กับระบบงานจริงแล้ว นำวิธีการนั้นไปวิเคราะห์ความเป็นไปได้ในการนำไปปฏิบัติด้วยปัจจัยต่างๆ เช่น ข้อจำกัดของหน่วยงาน ค่าใช้จ่ายในการประยุกต์ใช้จริง เป็นต้น แล้วจัดทำเป็นเอกสารการงาน เพื่อบันทึกกิจกรรมในการจัดทำแบบจำลอง โครงสร้างของแบบจำลอง วิธีการใช้งานและผลที่ได้จากการใช้งาน เพื่อประโยชน์สำหรับผู้ที่จะนำแบบจำลองไปใช้งาน และเพื่อประโยชน์ในการปรับปรุงแบบจำลองเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงระบบ ฯลฯ

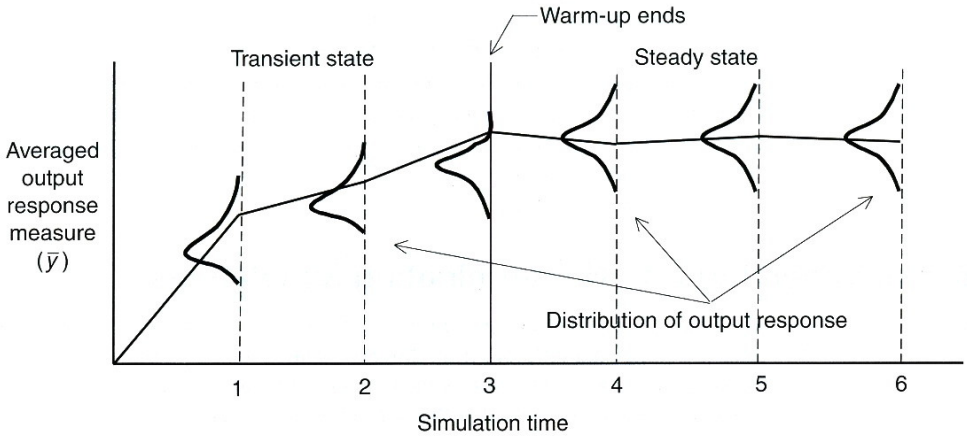
2.1.3 การวางแผนเกี่ยวกับเวลาดำเนินงาน [19, 23]

ก่อนที่จะดำเนินงานบนตัวแบบ ต้องวางแผนล่วงหน้าว่าช่วงเวลาที่จะจำลองและวิเคราะห์มีความยาวเท่าไร การตัดสินใจขึ้นอยู่กับนักวิเคราะห์ว่า สนใจที่สถานะชั่วครู่ (Transient State) หรือสถานะคงตัว (Steady State) หรือทั้งสองอย่าง ในกรณีของตัวแบบเชิงน่าจะเป็น เราต้องควบคุมความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มให้อยู่ในระดับที่ต้องการ

2.1.3.1 ภาวะที่สถานะชั่วครู่และสถานะคงตัว

ในการจำลองตัวแบบจะเริ่มดำเนินด้วยเงื่อนไขตอนเริ่มต้นแบบหนึ่ง วิธีที่ใช้กันมากที่สุดคือ เริ่มต้นด้วยระบบที่ว่างเปล่า ไม่มีรายการเปลี่ยนแปลงใดๆ (Transactions) กำลังดำเนินอยู่เลย ซึ่งในระบบจริงบางระบบเราจะเห็นระบบว่างเปล่าเฉพาะตอนเริ่มต้นดำเนินงานครั้งแรกเท่านั้น เช่น โรงพยาบาล สนามบิน และโรงงานอุตสาหกรรม เป็นต้น อย่างไรก็ตามในระบบจำลองเราสามารถเริ่มกำหนดเงื่อนไขตอนเริ่มต้นตามที่ต้องการได้เสมอ พฤติกรรมของระบบที่เงื่อนไขตอนเริ่มต้นจะเป็นแบบชั่วครู่ (Transient State) ภาวะนี้จะมีอยู่เพียงชั่วขณะเพราะว่ามันจะสิ้นสุดลงเมื่อแถวคอยเริ่มเกิดขึ้นในระบบ เป็นการเข้าสู่สถานะคงตัว (Steady State) ภาวะที่สถานะชั่วครู่และสถานะคงตัวแสดงดังภาพประกอบ 2.1

ถ้าสนใจสถานะชั่วครู่ ต้องเลือกเงื่อนไขตอนเริ่มต้นที่สะท้อนภาพของระบบจริงก่อน เงื่อนไขตอนเริ่มต้นในที่นี้ อาจจะใช้ระบบที่ว่างเปล่าหรือระบบที่มีงานระหว่างทำ (Work in Process) อยู่ส่วนหนึ่ง เมื่อการจำลองมาถึงสถานะคงตัวจะหยุดการจำลองก็ได้ เพราะสารสนเทศที่สถานะชั่วครู่ถูกรวบรวมไว้หมดแล้ว



ภาพประกอบ 2.1 ภาวะที่สถานะชั่วครู่และสถานะคงตัว

ที่มา: Harrell, C. ; Ghosh, Biman K. and Bowden, Royce O., 2003 : 240

การรวบรวมสารสนเทศเกี่ยวกับพฤติกรรมของระบบในสถานะคงตัวทำได้ 2 วิธี ด้วยกันคือ วิธีแรกต้องเลือกเงื่อนไขตอนเริ่มต้นให้แก่ระบบ เพื่อสะท้อนภาพของระบบที่ปรากฏอยู่ในสถานะคงตัว วิธีนี้จะทำให้การจำลองไม่มีสถานะคงตัวรวมอยู่เลย อย่างไรก็ตามมีหลายกรณีที่เราไม่รู้ล่วงหน้าว่า เงื่อนไขตอนเริ่มต้นที่เหมาะสมเป็นอย่างไร ซึ่งมักจะได้แก่ กรณีที่ระบบเพิ่งได้รับการออกแบบมาใหม่ กรณีดังกล่าวนี้เราอาจจะใช้วิธีจำลองพฤติกรรมของระบบตั้งแต่เริ่มต้นจนถึงสถานะคงตัวโดยไม่เก็บสถิติใดๆ เลยจนกระทั่งสถานะชั่วครู่ได้ผ่านไปแล้ว

เมื่อสภาวะที่เราสนใจมีทั้งสถานะชั่วครู่และสถานะคงตัว เราต้องเลือกเงื่อนไขตอนเริ่มต้นที่สะท้อนภาพของระบบจริง ณ จุดเริ่มต้น แล้วจำลองให้นานเพียงพอ เพื่อให้ได้สถานะทั้งสองที่ต้องการ มีการเก็บสถิติต่างๆ หลายครั้งเมื่อเวลาผ่านไป ทำให้นักวิเคราะห์ได้สารสนเทศเกี่ยวกับพฤติกรรมของระบบทั้งสถานะชั่วครู่และสถานะคงตัว

2.1.3.2 ความแม่นยำเชิงสถิติ

ในการใช้ตัวแบบเชิงน่าจะเป็น นักวิเคราะห์ปัญหาต้องคิดเสมอว่าจะบรรลุความแม่นยำเชิงสถิติที่ต้องการได้อย่างไร การจำลองอาจจะต้องดำเนินไปนานเพียงพอเพื่อให้สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มให้อยู่ในระดับที่ต้องการ

การจำลองเป็นเวลายาวนานอาจจะเหมาะกับตัวแบบอย่างง่าย ในกรณีของตัวแบบทั่วๆ ไป วิธีนี้อาจจะทำให้เกิดค่าใช้จ่ายสูงเกินความจำเป็น โดยปกติจึงไม่แนะนำให้ควบคุมความคลาดเคลื่อนด้วยวิธีนี้ ทางเลือกที่ดีกว่าทำได้โดยการกำหนดขนาดของความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ และระดับความแม่นยำเชิงสถิติที่ต้องการ แล้วหาความยาวของเวลาดำเนินงาน วิธีนี้ใช้ได้ดีเมื่อค่าสังเกตที่จำลองได้เป็นค่าอิสระเชิงสถิติ การสุ่มตัวอย่างในการทดลองจริงเราหาขนาดของตัวอย่างได้ ในการจำลองก็เช่นกันเราสามารถหาจำนวนรอบของการจำลองที่จำเป็นได้

ในทางปฏิบัติบ่อยครั้งที่เราไม่ทราบค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร ในกรณีที่กะประมาณได้ ให้ใช้ค่าประมาณนั้นในการหาขนาดตัวอย่างหรือจำนวนรอบที่ต้องจำลอง ทำการจำลองโดยมีจำนวนรอบตามที่คำนวณได้แล้วนำผลลัพธ์มาคำนวณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานใหม่ ถ้าได้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานสูงกว่าที่ประมาณไว้ครั้งแรกให้ใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานค่าใหม่ในการคำนวณหาขนาดตัวอย่างแล้วจำลองต่อไปจนได้จำนวนรอบเท่ากับที่คำนวณได้ใหม่

2.2 ทฤษฎีแถวคอย [20, 21]

ปัญหาต่างๆในระบบแถวคอยประกอบด้วย

2.2.1 รูปแบบการเข้ารับบริการ

2.2.1.1 ลักษณะการเข้ารับบริการเป็นไปอย่างไม่แน่นอน บางช่วงเวลาอาจมีลูกค้ามารับบริการมาก แต่บางเวลาอาจไม่มีลูกค้าเลย ดังนั้นจะใช้การแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนลูกค้าที่เข้ารับบริการ ส่วนมากจำนวนลูกค้าที่เข้ามาในระบบจะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง และช่วงห่างระหว่างการเข้ารับบริการ(Interarrival Time) จะมีการแจกแจงแบบเอกซโปเนนเชียล แต่ก็ไม่ได้หมายความว่าจะต้องมีการแจกแจงแบบเอกซโปเนนเชียลเสมอไป ซึ่งขึ้นอยู่กับปัจจัยภายนอกหลายอย่าง จึงอาจทำให้ลูกค้ามาเป็นกลุ่มบ้าง กระจายมาบ้าง ทำให้ช่วงเวลาระหว่างผู้ที่เข้ามาติดๆ กัน (Interarrival Time) แตกต่างกันออกไป ซึ่งการแจกแจงการมาอาจเป็นแบบปัวซอง (Poisson) เออแลงก์ (Erlang) สม่ำเสมอ (Uniform) หรืออื่นๆ ดังนั้นการเข้ามารับบริการจึงมักแสดงในรูปอัตราการเข้ารับบริการ ซึ่งเป็นจำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่เข้ามาในระบบแถวคอยช่วงเวลาหนึ่งๆ แต่ในบางระบบอัตราการเข้ารับบริการจะเป็นไปอย่างแน่นอน คือ ช่วงห่างระหว่างการเข้ารับบริการจะคงที่ เช่น เข้ามาทุก 30 นาที เป็นต้น

2.2.1.2 จำนวนลูกค้าที่เข้าในระบบแถวคอย ในบางครั้งจะเข้ามาในระบบครั้งละหน่วย หรือครั้งละคน เช่น คนไข้เข้ามารอรับการรักษาครั้งละคนหรือเข้ามาครั้งละกลุ่มเมื่อเกิดอุบัติเหตุ หรือการเข้ามารับประทานอาหารที่ร้านอาหารครั้งละหลายคน

2.2.1.3 ขนาดของประชากรของผู้รับบริการ ในที่นี้ประชากรหมายถึงลูกค้าหรือสิ่งของที่จะเข้ามารับบริการ โดยแบ่งขนาดประชากรเป็น

2.2.1.3.1 ประชากรมีจำกัด หมายถึงจำนวนลูกค้าสิ่งของที่จะเข้ามารับบริการมีจำนวนจำกัด เช่น แผนกซ่อมเครื่องจักรของโรงงานมีเครื่องจักรอยู่ 20 เครื่อง ดังนั้นสิ่งที่จะเข้ารับการซ่อมจะต้องเป็นเครื่องจักรเครื่องใดเครื่องหนึ่งจาก 20 เครื่องนั้น เป็นต้น

2.2.1.3.2 ประชากรมีขนาดไม่จำกัด หมายถึงจำนวนลูกค้าหรือสิ่งของที่เข้ามารับบริการมีขนาดนับไม่ถ้วน เช่น ลูกค้าที่เข้ามารับประทานอาหารหรือเข้ามาซื้อของที่ห้างสรรพสินค้า ซึ่งที่จริงสามารถนับได้ แต่มีจำนวนมากเพราะทุกคนมีสิทธิ์เป็นลูกค้า

2.2.2 รูปแบบการให้บริการ (Service Pattern)

เวลาที่ใช้ในการบริการตั้งแต่เริ่มต้นจนเสร็จสิ้น (Service Time) จะมากหรือน้อยนั้นขึ้นอยู่กับปริมาณงานที่ต้องทำและความชำนาญของหน่วยให้บริการ เวลาที่ใช้ในการบริการอาจจะเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้สำหรับลูกค้าแต่ละหน่วย สำหรับการให้บริการแก่ลูกค้าที่เข้ามารับบริการแต่ละหน่วยที่ใช้เวลาในการให้บริการที่ต่างๆ กัน จะใช้การแจกแจงของเวลาที่ให้บริการในทางสถิติซึ่งอาจจะเป็นแบบสม่ำเสมอ (Uniform) เออแลงก์ (Erlang) เอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential) หรือแบบอื่นๆ จำนวนหน่วยที่อยู่ในแถวคอยอาจจะมีอิทธิพลต่ออัตราการให้บริการได้ในการทำงานบางประเภท เช่น ถ้ามีลูกค้ารอรับบริการทำผมอยู่มาก ช่างทำผมจะพยายามทำงานให้เร็วขึ้น ซึ่งอาจมีผลทำให้การบริการเปลี่ยนแปลงไป นั่นคือคุณภาพอาจจะไม่ดีพอ แต่ยังมีกิจการบางอย่างที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปไม่ว่าจะมีลูกค้ารออยู่มากเท่าใดก็ตาม เช่น กรณีที่หน่วยให้บริการเป็นเครื่องจักร ซึ่งจะให้บริการในอัตราที่แน่นอน นอกจากนั้นขนาดของแถวคอยจะขึ้นอยู่กับลักษณะการจัดหน่วยให้บริการ และกฎเกณฑ์ในการให้บริการ

2.2.2.1 ลักษณะการจัดหน่วยให้บริการ มีลักษณะการจัดหน่วยให้บริการหลายลักษณะดังนี้

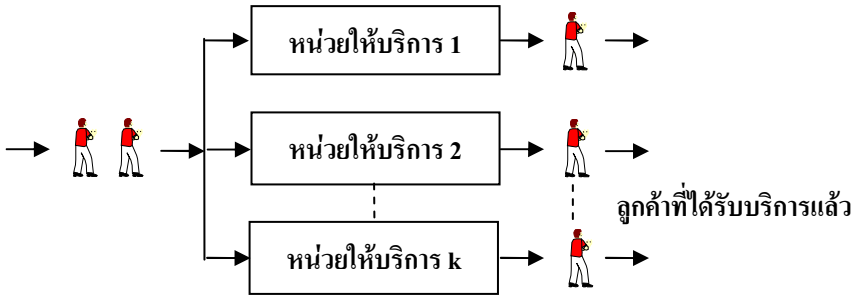
2.2.2.1.1 กรณีที่มีแถวคอย 1 แถว และหน่วยให้บริการ 1 หน่วย (Single-Channel and Single-Phase System)

ภาพประกอบ 2.2 แถวคอย 1 แถว และหน่วยให้บริการ 1 หน่วย

2.2.2.1.2 กรณีที่มีแถวคอย 1 แถว แต่การให้บริการมีหลายขั้นตอน (Single-Channel and Multi-Phase System)

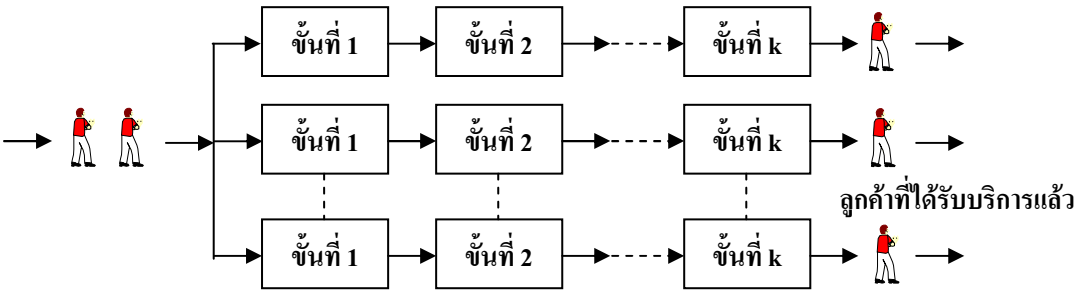
ภาพประกอบ 2.3 แถวคอย 1 แถว แต่การให้บริการมีหลายขั้นตอน

2.2.2.1.3 กรณีที่มีแถวคอย 1 แถว แต่หน่วยให้บริการหลายหน่วย โดยแต่ละหน่วยทำหน้าที่อย่างเดียวกัน (Multi-Channel and Single-Phase System)



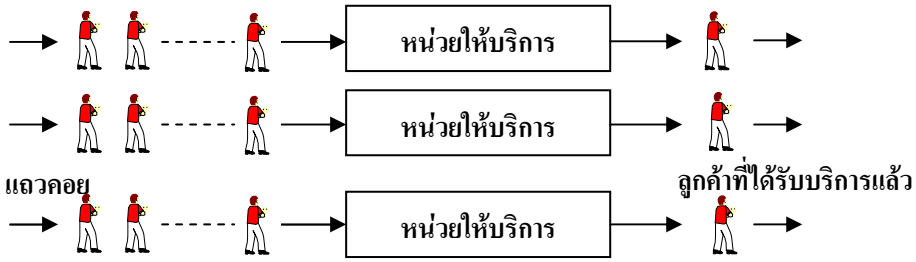
ภาพประกอบ 2.4 แถวคอย 1 แถว แต่หน่วยให้บริการหลายหน่วย แต่ละหน่วยทำหน้าที่อย่างเดียวกัน

2.2.2.1.4 กรณีที่มีแถวคอย 1 แถว การให้บริการมีหลายขั้นตอน (k ขั้นตอน) โดยที่แต่ละขั้นตอนมีหน่วยให้บริการหลายหน่วย (Multi-Channel and Multi-Phase System)



ภาพประกอบ 2.5 แถวคอย 1 แถว การให้บริการมีหลายขั้นตอน แต่ละขั้นตอนมีหน่วยให้บริการหลายหน่วย

2.2.2.1.5 กรณีที่มีแถวคอยหลายแถว และมีหน่วยให้บริการหลายหน่วย

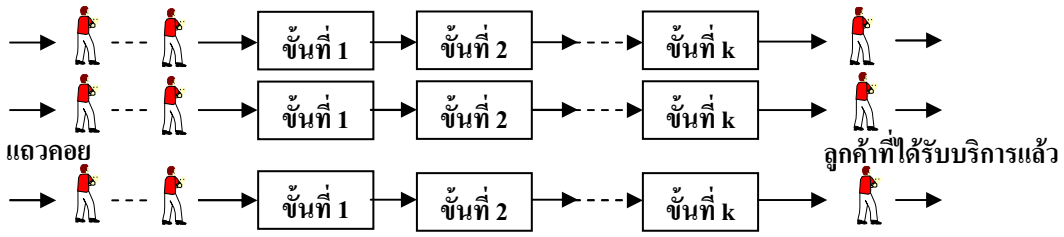


ภาพประกอบ 2.6 แถวคอยหลายแถว และมีหน่วยให้บริการหลายหน่วย

2.2.2.1.6 กรณีที่มีแถวคอยหลายแถว การให้บริการมีหลายขั้นตอน โดยที่แต่ละขั้นตอนมีหน่วยให้บริการหลายหน่วยดังแสดงในภาพประกอบ 2.7

2.2.2.2 กฎเกณฑ์ในการให้บริการ เป็นวิธีการจัดลูกค้าในแถวคอยเพื่อรอรับบริการ ซึ่งจัดได้หลายวิธี ดังนี้

2.2.2.2.1 การให้บริการตามลำดับก่อนหลัง (First In First Out: FIFO) เป็นการให้บริการแก่งานหรือลูกค้าที่มาก่อน นั่นคือให้บริการตามลำดับเวลาที่เข้ารับบริการ โดยใครมาก่อนจะได้รับบริการก่อน



ภาพประกอบ 2.7 แถวคอยหลายแถว การให้บริการมีหลายขั้นตอน แต่ละขั้นตอนมีหน่วยให้บริการหลายหน่วย

2.2.2.2.2 การให้บริการลูกค้าคนสุดท้ายก่อน (First In Last Out: FILO) เป็นการให้บริการแก่งานหรือลูกค้าที่มาหลัง นั่นคือให้บริการไม่ตามลำดับเวลาที่เข้ารับบริการ โดยใครมาหลังจะได้รับบริการก่อน

2.2.2.2.3 การให้บริการที่ไม่เป็นไปตามลำดับก่อนหลัง (A Priority-Discipline Queuing) เป็นการจัดลูกค้าตามความสำคัญหรือจัดงานตามความเร่งด่วน

2.2.2.2.4 การให้บริการอย่างสุ่ม (Service in Random Order) เป็นการให้บริการแก่งานหรือลูกค้า โดยการสุ่มลูกค้าทีละคน

2.2.3 ขีดความสามารถของระบบแถวคอย

ขีดความสามารถของระบบ หมายถึง จำนวนลูกค้าที่ระบบสามารถรับได้ แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

2.2.3.1 แถวคอยที่สามารถรับลูกค้าได้จำกัด เช่น จำนวนที่นั่งในร้านอาหาร เป็นต้น

2.2.3.2 แถวคอยที่สามารถรับลูกค้าได้ไม่จำกัด เช่น การจ่ายเงินค่าทางด่วน เป็นต้น

นอกจากนั้นจะพบว่าในทางปฏิบัติลูกค้าจะไม่เข้าสู่ระบบแถวคอย ถ้าแถวคอยนั้นยาวมากหรือไม่มีที่พอ ลูกค้าจะไปใช้บริการที่อื่น หรืออาจจะอยู่ในแถวคอยสักระยะหนึ่ง เมื่อเห็นว่ารอนานก็จะเปลี่ยนใจออกจากระบบก่อนได้รับบริการ หรือในกรณีมีหน่วยให้บริการหลายหน่วยและแต่ละหน่วยทำหน้าที่เหมือนกัน อาจจะมีการเปลี่ยนแถวเมื่อพบว่าแถวอื่นมีการทำงานที่เร็วกว่า

2.3 การศึกษาการทำงาน [24]

ILO ได้กล่าวว่าการศึกษาการทำงานเป็นคำที่ใช้แทนถึงวิธีการต่างๆ จากการศึกษาวิธีการทำงาน (Method Study) และการวัดผลงาน (Work Measurement) ซึ่งใช้ในการศึกษาอย่างมีระเบียบถึงการทำงานของคน และพิจารณาองค์ประกอบต่างๆ ซึ่งจะมีผลต่อประสิทธิภาพและเศรษฐภาวะของการทำงานเพื่อการปรับปรุงการทำงานนั้นๆ ให้ดีขึ้น การศึกษาการทำงานเป็นวิธีการเพิ่มผลผลิตให้สูงขึ้นด้วยการวิเคราะห์กระบวนการทำงานที่เป็นอยู่อย่างมีระเบียบ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการทำงานให้ดีขึ้น ดังนั้นการศึกษาการทำงานจึงเป็นการเพิ่มผลผลิตโดยไม่ต้องเพิ่มค่าใช้จ่ายการลงทุนมากนัก

การศึกษาการทำงาน (Method Study) เป็นการศึกษาวิธีการทำงานในปัจจุบัน โดยเก็บบันทึกข้อมูลอย่างมีขั้นตอน และตรวจสอบการทำงานอย่างละเอียด แล้วทำการเสนอแนะวิธีการทำงานใหม่ การศึกษาวิธีการทำงานนี้จะนำไปสู่การพัฒนาและประยุกต์วิธีการที่ง่าย และมีประสิทธิภาพมากกว่าเดิม

การศึกษาเวลา (Time Study) คือเทคนิคการวัดผลงานซึ่งมีกระบวนการเพื่อกำหนดหาเวลาในการทำงานโดยคนงานที่เหมาะสมซึ่งทำงานในอัตราที่ปกติ ภายใต้เงื่อนไขมาตรฐานในการวัดผลงาน โดยมีผลลัพธ์ของการวัดผลงานเรียกว่า “เวลามาตรฐาน”

จากการนิยามที่กล่าวว่า การศึกษาการทำงาน ประกอบด้วยการศึกษาวิธีการทำงานและการวัดผลงาน เนื่องจากการศึกษาวิธีการทำงานที่เกี่ยวข้องกับการลดและกำจัดวิธีการทำงานหรืองานที่ไร้ประสิทธิภาพ ส่วนการวัดผลงานเกี่ยวข้องกับการลดและกำจัดเวลาไร้ประสิทธิภาพ ดังนั้นการกำหนดเวลามาตรฐานของการทำงานต้องกระทำภายหลังจากการศึกษาวิธีการทำงาน โดยสามารถที่จะแบ่งขั้นตอนในการศึกษาการทำงานได้ 8 ขั้น ดังนี้

1. เลือกงานหรือกระบวนการที่จะทำการศึกษา
2. บันทึกและสังเกตการณ์โดยตรง ในทุกสิ่งที่เกิดขึ้นในงานหรือกระบวนการที่เลือก โดยการใช้วิธีการบันทึกที่เหมาะสม เพื่อเป็นข้อมูลที่เหมาะสมในการวิเคราะห์
3. ตรวจตราข้อเท็จจริงที่บันทึกมาทุกๆ เรื่องที่น่าสนใจ โดยพิจารณาถึงจุดประสงค์ของการทำงานของงานนั้นๆ สถานที่ที่งานนั้นกำลังทำอยู่ ลำดับการทำงานของงาน คนทำงาน และวิธีการอุปกรณ์การทำงาน

4. พัฒนา วิธีการทำงานที่ประหยัดในการทำงานโดยพิจารณาสิ่งแวดล้อมทั้งหมด

5. วัด ปริมาณที่ต้องทำในวิธีการทำงานที่เราเลือกใช้ และคำนวณมาตรฐานเวลาที่ต้องใช้ในการทำงานนั้น

6. นิยาม วิธีการทำงานที่เสนอขึ้นใหม่และเวลาที่เกี่ยวข้องเพื่อการอ้างอิง

7. ใช้งาน วิธีการทำงานที่เสนอขึ้นใหม่โดยมีมาตรฐานของงานตามที่กำหนดไว้

8. ดำรง มาตรฐานของงานที่กำหนดขึ้นโดยวิธีการควบคุมที่เหมาะสม

2.4 การศึกษาวิธีการทำงาน [24]

ดังได้กล่าวมาแล้วว่าการศึกษาวิธีการทำงาน เป็นการเก็บข้อมูลอย่างมีขั้นตอนและตรวจสอบอย่างละเอียดของแนวทางการทำงานที่มีอยู่ แล้วทำการเสนอแนะวิธีการทำงานใหม่ ซึ่งการศึกษาวิธีการทำงานนี้จะนำไปสู่การพัฒนาและการประยุกต์วิธีการที่ง่าย และมีประสิทธิภาพสูง นับได้ว่าเป็นเทคนิคในการเพิ่มผลผลิตที่ได้ผลที่สุด ซึ่งพัฒนาขึ้นมาต่อเนื่องจากวิธีการของการศึกษาการเคลื่อนไหว (Motion Study) จุดมุ่งหมายในการศึกษาวิธีการทำงานก็คือ การมุ่งพัฒนาวิธีการทำงานที่ดีกว่า โดยใช้หลักการปรับปรุงงาน ซึ่งจะช่วยลดและตัดทอนงานหรือขั้นตอนที่ไม่จำเป็นออกไป ซึ่งมีขั้นตอนในการศึกษาดังนี้

2.4.1 การเลือกงาน เป็นการพิจารณาเลือกงานที่จะทำการศึกษาเพื่อหาวิธีการทำงานที่ดีกว่า ซึ่งเป็นขั้นตอนที่สำคัญ เพราะงานที่จะศึกษามีอยู่ตลอดเวลา การทำงานให้เกิดผลประโยชน์สูงสุดคือเลือกที่มีความจำเป็นเร่งด่วนกว่ามาทำการศึกษาก่อน หรือเมื่อศึกษาปรับปรุงการทำงานแล้วจะให้ผลกระทบในด้านบวกสูงกว่า

2.4.2 การบันทึกการทำงาน เป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลขั้นตอนวิธีการทำงาน และปัญหาการทำงานต่างๆ เพื่อนำมาพิจารณาหาแนวทางแก้ไขต่อไป ในการบันทึกการทำงานจะใช้สัญลักษณ์ที่เป็นมาตรฐานสากลแทนกิจกรรมของขั้นตอนการทำงานต่างๆ เพื่อช่วยให้การพิจารณาปรับปรุงสามารถทำได้ง่ายขึ้น แล้วแสดงด้วยแผนภูมิการผลิต (Flow Process Chart) เพื่อแสดงทิศทางการไหลของกระบวนการผลิตตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุดของกระบวนการ

2.4.3 การพิจารณาตรวจตราเพื่อกำหนดแนวทางในการปรับปรุง เป็นการตรวจสอบว่าขั้นตอนที่ทำอยู่เหมาะสมหรือไม่ ถ้าไม่เหมาะสมก็ให้หาแนวทางในการปรับปรุง และถึงแม้ว่าจะเหมาะสมแล้ว ยังจะค้นหาว่ามีวิธีการที่เหมาะสมกว่าอีกหรือไม่

2.4.4 การปรับปรุงงาน เป็นการหาวิธีการทำงานใหม่ที่ง่ายกว่า เร็วกว่า และถูกกว่าวิธีการเดิม โดยใช้หลักการของ ECRS (Eliminate, Combine, Rearrange and Simplify) [25, 26] ดังตาราง 2.1

ตาราง 2.1 หลักการของ ECRS (Eliminate, Combine, Rearrange and Simplify)

หลักการ	ความหมาย	คำอธิบาย
E (Eliminate)	กำจัดทิ้ง	กำจัดทิ้งขั้นตอนที่ไม่จำเป็นออกไป
C (Combine)	รวมเข้าด้วยกัน	รวมขั้นตอนบางขั้นตอนเข้าด้วยกัน
R (Rearrange)	จัดลำดับใหม่	สลับหรือจัดลำดับขั้นตอนในการทำงานใหม่
S (Simplify)	ทำให้ง่ายขึ้น	ปรับปรุงขั้นตอนในการทำงานให้ง่ายขึ้น

หลักเกณฑ์ในการปรับปรุงงานที่พยายามให้เหลือกิจกรรมที่เป็นการทำงาน หรือการปฏิบัติจริงๆ เท่านั้น คือ กิจกรรมหรือกระบวนการที่ทำให้เกิดมูลค่าเพิ่ม (Value Added) แก่ชิ้นงาน ซึ่งถือว่าเป็นงานหลักของกระบวนการ โดยพยายามลดกิจกรรมหรือกระบวนการที่ไม่ก่อให้เกิดมูลค่าเพิ่มแก่ชิ้นงานไม่ว่าจะเป็น การขนย้าย การตรวจสอบปริมาณ และการควบคุมคุณภาพ รวมทั้งการหาทางลดหรือกำจัดการหยุดหรือการพักรอระหว่างกระบวนการหรือขั้นตอนการผลิต ซึ่งถือว่าเป็นการว่างงานหรือความสูญเปล่าของกระบวนการให้น้อยลง ดังตาราง 2.2

2.4.5 การประเมินผลการปรับปรุง เป็นการวัดผลจากการปรับปรุงการทำงานว่าประสิทธิภาพในการปรับปรุงเพิ่มขึ้นหรือไม่อย่างไร โดยการเปรียบเทียบผลการทำงานก่อนการปรับปรุงกับผลการทำงานหลังการปรับปรุง

2.4.6 กำหนดเป็นมาตรฐานวิธีการในการทำงาน เมื่อวิธีการทำงานใหม่ได้ผลเป็นที่น่าพอใจแล้ว นำวิธีการนั้นมาบัญญัติไว้เป็นวิธีมาตรฐาน โดยเขียนลายลักษณ์อักษรที่สามารถอ้างอิงได้

ตาราง 2.2 แนวทางในการปรับปรุงงาน

สัญลักษณ์	ความหมาย	แนวทางในการปรับปรุง
○	กิจกรรมการปฏิบัติงาน	คงไว้หรือหาวิธีการใหม่ที่ดีกว่าเดิม
⇨	กิจกรรมการเคลื่อนย้าย	ทำให้ลดน้อยลงเท่าที่จะทำได้
□	กิจกรรมการตรวจสอบ	ทำให้ลดน้อยลงเท่าที่จะทำได้
D	การพักรอหรือการหยุดชั่วคราว	หาทางลดหรือกำจัดทิ้งให้มากที่สุด
▽	การหยุดหรือการเก็บถาวร	หาทางลดหรือกำจัดทิ้งให้มากที่สุด

2.5 การศึกษาเวลา [24]

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า การศึกษาเวลา เป็นเทคนิคในการวัดผลงาน โดยการใช้นาฬิกาจับเวลา เพื่อหาเวลามาตรฐานในการทำงาน ซึ่งถือว่าเป็นข้อมูลพื้นฐานที่สำคัญในการบริหารจัดการผลิต โดยการศึกษาเวลามักจะใช้ในกรณี เมื่อมีผลิตภัณฑ์หรือวิธีการทำงานใหม่ เมื่อต้องการกำหนดเวลามาตรฐานขึ้นใหม่ เมื่อพบจุดคอขวดในสายงานประกอบ เมื่อต้องการจัดสมดุลในสายการผลิต และเมื่อต้องการใช้ระบบการให้เงินในการจูงใจการทำงาน เป็นต้น ซึ่งมีขั้นตอนในการศึกษาดังนี้

2.5.1 การเลือกงาน

ในการศึกษาเวลาในการทำงานจะต้องทำหลังจากที่ได้กำหนดวิธีการทำงาน หรือการศึกษาวิธีการทำงาน (Method Study) มาก่อนแล้ว ทั้งนี้เพราะหากยังไม่สามารถหาวิธีการทำงานที่ดีที่สุดแล้ว อาจจะค้นพบวิธีการทำงานนั้นภายหลัง โดยคนงานหรือผู้เชี่ยวชาญก็ได้ ทำให้ต้องหาเวลามาตรฐานใหม่อีกครั้ง

2.5.2 การบันทึกข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาเวลา นอกจากการบันทึกเวลาแล้ว ยังมีข้อมูลซึ่งแสดงรายละเอียดอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขมาตรฐานของการศึกษาเวลา เช่น สภาพแวดล้อมหรือข้อมูลต่างๆ ของพนักงาน เป็นต้น โดยการใช้แบบฟอร์มบันทึกเวลาช่วยในการทำงาน

2.5.3 การแบ่งออกเป็นงานย่อย

การแบ่งออกเป็นงานย่อย เป็นขั้นตอนที่สำคัญของการศึกษาเวลา เนื่องจากจะช่วยให้สามารถวิเคราะห์ การสังเกต และการจับเวลาทำได้สะดวก จึงมีความจำเป็นที่ต้องแบ่งงานออกเป็นองค์ประกอบย่อยๆ โดยมีหลักเกณฑ์ในการพิจารณาอยู่ 3 ประการดังนี้

2.5.3.1 ขั้นตอนย่อยๆ จะต้องมีเวลาเพียงพอที่จะทำการจับหรือวัดเวลาได้

2.5.3.2 แยกงานที่ทำด้วยคนออกจากงานที่ทำด้วยเครื่องจักร

2.5.3.3 แยกชิ้นงานคงที่ออกจากงานแปรผัน

2.5.4 การจับเวลางานย่อยแต่ละขั้นตอน

หลังจากที่ได้แบ่งงานย่อยได้อย่างชัดเจนแล้ว ก็ทำการจับเวลาด้วยนาฬิกาจับเวลาพร้อมบันทึกลงในแบบฟอร์มบันทึกเวลา ซึ่งวิธีการจับเวลาสามารถทำได้ 2 แบบ คือ

2.5.4.1 การจับเวลาแบบต่อเนื่อง เป็นวิธีการจับเวลาที่นาฬิกาจะเดินอยู่ตลอดเวลา โดยจะเริ่มจับเวลาที่งานย่อยอันดับแรก และจะไม่มีการหยุดจนกว่าจะสิ้นสุดการจับเวลา ในตอนท้ายของแต่ละงานย่อยจะทำการบันทึกเวลาเอาไว้ ซึ่งเวลาของแต่ละงานย่อยสามารถหาได้จากผลต่างของนาฬิกาที่เดินหลังจากจับเวลาเสร็จ

2.5.4.2 การจับเวลาแบบย้อนกลับ เป็นการจับเวลาของแต่ละงานย่อยแยกออกจากกัน โดยเข็มนาฬิกาจะกลับมาอยู่ที่ตำแหน่งศูนย์ในตอนท้ายของแต่ละงานย่อย เวลาของแต่ละงานย่อยสามารถจะอ่านได้ทันที การจับเวลาแต่ละครั้งไม่เหมาะสำหรับงานย่อยสั้นๆ เพราะอาจทำให้เกิดความผิดพลาดในการทำงาน เนื่องจากต้องคอยอ่านและกดปุ่มให้นาฬิกาตั้งที่ศูนย์ใหม่

2.5.5 การกำหนดจำนวนครั้งที่ต้องศึกษาเวลา

การกำหนดจำนวนครั้งที่ต้องการในการศึกษาเวลา เป็นการพิจารณาถึงความเหมาะสมของจำนวนครั้งหรือจำนวนที่จับเวลาว่ามีความเหมาะสมหรือไม่ เนื่องจากขั้นตอนงานย่อยแต่ละครั้งใช้เวลาในการทำงานแตกต่างกัน จึงทำให้จำนวนครั้งในการจับเวลาขึ้นอยู่กับเวลาของขั้นตอนนั้นๆ ซึ่งสามารถทำได้ 3 วิธีด้วยกันคือ

2.5.5.1 ใช้สูตรคำนวณ

2.5.5.2 ใช้ตารางสำเร็จรูป

2.5.5.3 ใช้วิธีประมาณการจากการใช้ค่าพิสัย

2.5.6 การประเมินอัตราการทำงาน

การประเมินอัตราการทำงาน เป็นกระบวนการเปรียบเทียบอัตราส่วนการทำงานของคนงาน ซึ่งผู้ศึกษาจะใช้ทำการศึกษาเวลากับอัตราการทำงานตามมาตรฐานปกติของการทำงานนั้น โดยการประเมินอัตราการทำงานหรือประสิทธิภาพของพนักงานนั้นสามารถจะกระทำพร้อมๆ กัน หรือภายหลังการจับเวลาก็ได้ แต่จะต้องรู้ว่าพนักงานนั้นสามารถทำงานด้วยประสิทธิภาพ 100 เปอร์เซ็นต์ นั้นมีลักษณะเป็นอย่างไร

2.5.7 การกำหนดเวลาเผื่อ

การกำหนดเวลาเผื่อ เป็นเวลาที่เพิ่มให้จากเวลาปรกติของคนงานที่เหมาะสมเพื่อกิจธุระส่วนตัว เพื่อลดความเมื่อยล้าจากการทำงาน และเผื่อสำหรับความล่าช้าของกิจกรรมการรอต่างๆ

2.5.8 การคำนวณหาเวลามาตรฐาน

การคำนวณหาเวลามาตรฐาน เป็นขั้นตอนของการปรับค่าจากการพิจารณาองค์ประกอบต่างๆ ที่เกี่ยวข้องแล้ว

2.6 การจัดลำดับงานโดยกฎความสำคัญ (Priority Rule for Dispatching Jobs) [27]

การเข้าคิวเป็นเหตุการณ์ปกติธรรมดาที่พบเห็นได้ในชีวิตประจำวัน ไม่ว่าจะเป็นงานทางด้านธุรกิจหรืองานทางด้านอุตสาหกรรม การเข้าคิวเป็นสภาพที่เกิดขึ้นเนื่องจากมีการรอคอยเพื่อเข้ารับบริการ ซึ่งสภาพการรอคอยที่เกิดขึ้นโดยทั่วไปมักจะพิจารณาว่าเกิดจากความต้องการใช้บริการมีอัตราสูงกว่าการให้บริการ ซึ่งปัญหาของการจัดลำดับงานที่จะเกิดขึ้นทันที เมื่อมีกลุ่มของงานหลายงานคอยรับบริการจากหน่วยผลิตที่พร้อมจะให้บริการเพียงหน่วยเดียว ในการจัดลำดับงานจะต้องรู้ว่าแต่ละงานนั้นต้องใช้เวลาในการปฏิบัติงานเท่าไร และกำหนดวันส่งงานของแต่ละงานนั้นจะต้องส่งเมื่อใด ซึ่งข้อมูลเหล่านี้ทำให้ไม่สามารถจัดลำดับงานให้กับหน่วยผลิตได้อย่างอิสระ ทำให้เกิดปัญหาว่าจะตัดสินใจเลือกงานใดเป็นอันดับหนึ่ง อันดับสอง และอันดับต่อๆไป โดยการเลือกจัดลำดับงานด้วยวิธีการใดก็ตาม ผลรวมของช่วงเวลาที่ใช้ในการทำงาน

ทั้งหมดจะมีค่าเท่ากัน ซึ่งจะหาช่วงเวลาการทำงานทั้งหมดได้เท่ากับผลรวมของเวลาการปฏิบัติงานของทุกๆ งาน แต่จะมีผลต่อเวลาเฉลี่ยที่ชิ้นงานต้องอยู่ในระบบ หรือค่าเฉลี่ยของเวลาที่ส่งงานไม่ทันกำหนด เป็นต้น ซึ่งค่าต่างๆ เหล่านี้จะเปลี่ยนแปลงไปตามแต่ละวิธีการจัดลำดับงาน เช่น ต้องการทำงานที่มาถึงก่อน ทำงานที่สำคัญเสียก่อน หรือทำงานที่มีกำหนดส่งงานเร็วที่สุดก่อน การเลือกวิธีการจัดลำดับงานใดนั้นจึงขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์หรือนโยบายในการทำงาน ซึ่งสามารถที่จะทำการทดลองจัดลำดับงานในหลายๆ วิธีก่อน เพื่อหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของกระบวนการ โดยจุดประสงค์ของการจัดตารางให้กับหน่วยผลิตนั้นมีอยู่หลายประการดังต่อไปนี้

2.6.1 เพื่อเพิ่มการใช้ทรัพยากรให้มีประสิทธิภาพสูงสุด ซึ่งหมายถึง จัดอย่างไรที่จะทำให้เกิดการรอคอยหรือสูญเสียน้อยที่สุด โดยปกติแล้วการใช้ทรัพยากรจะแปรผกผันกับเวลาที่ต้องการในการทำงาน ดังนั้นการปรับปรุงตารางการผลิต ก็เพื่อต้องการลดเวลาในการทำงาน

2.6.2 เพื่อลดการรอคอยในกระบวนการผลิต ซึ่งจะหมายถึงการลดจำนวนที่ต้องรอคอยโดยเฉลี่ยลงในขณะที่เครื่องจักรหรือคนยังต้องทำงานอยู่กับงานอื่นๆ

2.6.3 เพื่อลดความล่าช้าของงาน ในกรณีที่งานไม่เสร็จจะต้องถูกปรับแนวทางการลดความล่าช้า อาจทำได้โดยลดความล่าช้าสูงสุดหรืออาจจะลดจำนวนงานที่ล่าช้าลง

ข้อจำกัดในการกำหนดงาน หรือจัดตารางการผลิตให้กับหน่วยผลิตที่มักพบได้เสมอในการจัดตารางการผลิตหรือกำหนดงานให้กับหน่วยผลิตใดๆ มี 2 ประเภท ดังนี้

1. ข้อจำกัดด้านทรัพยากร (Resource Constraint) เป็นข้อจำกัดที่เกี่ยวข้องกับการที่ทรัพยากรมีความสามารถในการทำงานอย่างจำกัดที่ขณะใดขณะหนึ่ง เช่น เครื่องจักรเครื่องหนึ่งสามารถทำงานได้กับชิ้นงานเพียงชิ้นเดียวเท่านั้นที่เวลาใดเวลาหนึ่ง เป็นต้น

2. ข้อจำกัดด้านเทคโนโลยี (Technological Constraint) เป็นข้อจำกัดที่เกี่ยวข้องกับความจำกัดในด้านลำดับก่อนหลังของการทำงาน (Precedence Constraint) เช่น การที่ต้องทำงานแรกบนชิ้นงานชิ้นหนึ่งให้แล้วเสร็จก่อนที่จะเริ่มต้นทำงานที่ 2 บนชิ้นงานชิ้นเดียวกันได้

ในทางปฏิบัติมักจะพบว่าปัญหาในการจัดตารางหรือกำหนดงานให้กับหน่วยผลิตจะเกี่ยวข้องกับการตัดสินใจเกี่ยวกับข้อจำกัดทั้ง 2 ประเภทดังที่ได้กล่าวมาแล้วก็คือ

1. การตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดสรรทรัพยากร (Allocation) และ
2. การตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดลำดับงาน (Sequencing)

ซึ่งในความเป็นจริงแล้วจะต้องทำการตัดสินใจเพียงประเภทใดประเภทหนึ่ง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของระบบและปัญหาที่กำลังพิจารณาอยู่ เช่น ในการทำงานอย่างใดอย่างหนึ่งในโรงงานพบว่ามีเครื่องจักรที่สามารถทำงานนี้ได้เพียงเครื่องจักรเครื่องเดียวเท่านั้น ดังนั้นการตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดสรรทรัพยากรจึงไม่เกิดขึ้น เนื่องจากไม่สามารถเลือกทำงานนี้บนเครื่องจักรอื่นได้ จะมีก็แต่การตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดลำดับงานที่เหมาะสมเพื่อป้อนให้เครื่องจักรนี้เท่านั้น หรือในทางตรงกันข้ามการทำงานอีกประเภทหนึ่งสามารถที่จะทำได้บนหลายเครื่องจักร แต่เมื่อได้จัดสรรและป้อนงานเหล่านี้ให้กับเครื่องจักรเครื่องใดแล้ว จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงลำดับของงานที่อยู่บนแถวคอยหน้าเครื่องจักรอีก (โดยถือเอาลำดับของการจัดสรรให้กับเครื่องจักรเป็นลำดับของงานบนแถวคอยเลย) เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวอาจจะก่อให้เกิดความยุ่งยาก และสับสนในการทำงานของคนงานเป็นอันมาก ดังนั้นการตัดสินใจในกรณีเช่นนี้ ก็จะจำกัดอยู่เฉพาะที่เกี่ยวข้องกับการจัดสรรทรัพยากรเท่านั้น

ปัญหาการจัดตารางการผลิตหรือกำหนดงานให้กับหน่วยผลิต ในสภาพความเป็นจริงค่อนข้างจะซับซ้อนมาก ไม่ใช่เรื่องง่ายที่จะทำให้ผลลัพธ์ออกมาสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ที่ต้องการดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ทั้งนี้เพราะมีปัจจัยหรือตัวแปรที่ไม่สามารถควบคุมได้ ไม่ว่าจะเป็นเวลาที่ใช้ในการเตรียมหรือติดตั้งเครื่องจักร เพื่อทำการเฉพาะอย่างแปรเปลี่ยนไปตามขั้นตอนการปฏิบัติงาน และไม่ทราบแน่นอน ลักษณะปัญหาดังกล่าวนี้ใช้หลักเกณฑ์การสุ่มอย่างมีเหตุผล (Heuristic) ซึ่งเป็นวิธีการที่มักจะไม่ให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดแต่ให้ผลที่ดี เป็นวิธีการแก้ไขปัญหาที่สมเหตุสมผล ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นไปได้ในทางปฏิบัติและใช้เวลาในการแก้ไขปัญหาไม่มาก

2.7 การศึกษาการเคลื่อนที่ขององค์ประกอบของระบบงาน [18]

การศึกษาการเคลื่อนที่ขององค์ประกอบของระบบงาน เป็นอีกวิธีหนึ่งซึ่งนิยมใช้ในการวิเคราะห์ระบบงาน องค์ประกอบซึ่งเคลื่อนที่ในระบบ อาจเป็น คน วัตถุดิบ พัสดุ เอกสาร ข้อมูล ฯลฯ การติดตามการเคลื่อนที่ขององค์ประกอบเหล่านี้ จะช่วยให้เราเข้าใจถึงระบบงานและปัญหาของมัน วิธีการที่ใช้ในการศึกษาการเคลื่อนที่ขององค์ประกอบที่นิยมใช้ในงานด้านวิศวกรรม

ได้แก่ การใช้แผนภูมิกระบวนการผลิต (Process Chart หรือ Flow Process Chart) แผนภูมิการเคลื่อนที่ (Flow Diagram)

2.7.1 แผนภูมิกระบวนการ (Process Chart) [18, 28]

แผนภูมิ คือ เครื่องมือที่ใช้ในการบันทึกข้อมูลอย่างกะทัดรัด เพื่อความสะดวกในการอ่านแผนภูมิมีลักษณะเป็นเครื่องหมายหรือแผ่นภาพ ซึ่งแยกแยะขั้นตอนของกระบวนการผลิตไว้อย่างชัดเจน การวิเคราะห์โดยใช้แผนภูมิ โดยทั่วไปมักเริ่มต้นด้วยการที่วัตถุดิบเคลื่อนเข้าสู่สายการผลิต และบันทึกขั้นตอนการปฏิบัติงานต่างๆ บนวัตถุดิบนั้น เช่น การขนส่ง การตรวจสอบ การทำงานบนเครื่องจักร การประกอบชิ้นส่วน จนกระทั่งสำเร็จออกมาเป็นผลิตภัณฑ์ หรือชิ้นส่วนที่ประกอบแล้ว แผนภูมิขบวนการผลิตอาจเป็นการบันทึกขั้นตอนการผลิตของสินค้าชนิดเดียวภายในแผนกหนึ่ง หรือของสินค้าหลายๆ ชนิด ภายในแผนกต่างๆ พร้อมกันได้

การศึกษาจากแผนภูมิดังกล่าว จะช่วยให้เห็นภาพของขั้นตอนการปฏิบัติได้ชัดเจนยิ่งขึ้นมากกว่าการอ่านคำบรรยายเพียงอย่างเดียว และจะช่วยให้สามารถปรับปรุงวิธีการทำงานได้ง่ายขึ้นอีกด้วย การปรับปรุงส่วนใดส่วนหนึ่งของกระบวนการจะส่งผลปรากฏบนแผนภูมิ ทำให้ทราบถึงผลกระทบที่อาจมีต่อส่วนอื่นๆ ของขั้นตอนการผลิต ยิ่งกว่านั้นเรายังสามารถนำเอาขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งของแผนภูมิกระบวนการทำการวิเคราะห์ถึงรายละเอียดปลีกย่อยลึกซึ้งลงไปอีก ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์มาตรฐาน 5 ตัว ดังตาราง 2.3

ตาราง 2.3 สัญลักษณ์มาตรฐาน 5 ตัว ที่ใช้ในแผนภูมิกระบวนการ

สัญลักษณ์	ชื่อเรียก	ความหมาย
○	Operation	การปฏิบัติงานบนชิ้นงานเกิดขึ้นเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงลักษณะหรือคุณสมบัติของชิ้นงาน
⇨	Transportation	การเคลื่อนย้ายวัตถุจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง
□	Inspection	การตรวจสอบคุณภาพของชิ้นงาน
D	Delay	ความล่าช้าของงาน เนื่องจากมีอุปสรรคมาขัดขวางไม่ให้ขั้นตอนการปฏิบัติงานขั้นต่อไปดำเนินต่อได้
▽	Storage	การเก็บดูแลชิ้นงานอย่างถาวร ซึ่งการเบิกจ่ายควรมีคำสั่งหรือหนังสือจากผู้เกี่ยวข้อง

2.7.2 แผนภูมิการเคลื่อนที่ (Flow Diagram)

แผนภูมิการเคลื่อนที่ เป็นการแสดงวิธีการทำงานโดยอาศัยสัญลักษณ์ของแผนภูมิกระบวนการผลิตร่วมกับผังบริเวณที่ทำการผลิต ซึ่งจะทำให้เราทราบว่ามีการทำอะไรอยู่ตรงไหน

2.7.3 แผนภูมิกิจกรรม (Activity Chart)

แผนภูมิกิจกรรม ใช้สำหรับการศึกษาขั้นตอนของการปฏิบัติงานและเวลาที่ใช้ในการปฏิบัติงานแต่ละขั้นตอน โดยมากใช้ในกรณีที่มีการทำงานร่วมกันระหว่างองค์ประกอบ เช่น ระหว่างคนกับเครื่องจักร ระหว่างคนหลายๆ คน

2.8 การศึกษาหน้าที่และความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของระบบงาน [18]

ในระบบงานที่ค่อนข้างยุ่งยากซับซ้อน การใช้การศึกษาการเคลื่อนที่ขององค์ประกอบอาจจะไม่ใช่วิธีการที่ดีที่สุดสำหรับการศึกษา และโดยเฉพาะในระบบงานที่ไม่มีองค์ประกอบที่ทำการเคลื่อนที่หรือมีแต่ไม่ชัดเจน หรือมีการเคลื่อนที่เฉพาะในบางจุด ไม่เคลื่อนที่ตลอดทั้งระบบงาน ในกรณีเช่นนี้ เรามักจะหันมาใช้วิธีการศึกษาหน้าที่และความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของระบบงานแทน เครื่องมือที่ใช้ในกรณีนี้ มักจะเป็นการใช้เส้นและรูปต่างๆ ในการบันทึกหน้าที่และความสัมพันธ์ขององค์ประกอบ เช่น แผนภูมิการจัดองค์กรในธุรกิจ แผนภูมิขั้นตอนการทำงาน

2.9 การทดสอบสมมติฐาน [29, 30]

เมื่อต้องการศึกษาค่าพารามิเตอร์ของประชากร โดยการสุ่มเพื่อตรวจสอบดูว่าค่าพารามิเตอร์ยังเป็นไปตามที่ได้กำหนดไว้เดิมหรือไม่ เช่น การเพิ่มอัตราการใช้ปุ๋ยจะทำให้ผลผลิตต่อไร่ของข้าวเพิ่มขึ้นหรือไม่ เป็นต้น ปัญหาดังกล่าวนี้ เราจะใช้การทดสอบสมมติฐานช่วยในการหาคำตอบ ซึ่งในแต่ละกรณีจะต้องทราบการแจกแจงที่ถูกต้องของประชากรนั้นๆ เมื่อต้องการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของประชากร แต่ในบางครั้งก็อาจทดสอบสมมติฐานว่าการแจกแจงนั้นๆ เป็นการแจกแจงแบบที่คาดว่าจะเป็นหรือไม่ก็ได้

ในการทดสอบสมมติฐานอาจจะทดสอบข้อสมมติฐานเกี่ยวกับประชากรชุดเดียวหรือสองชุดขึ้นไปก็ได้ คำตอบอาจจะจริงหรือไม่ก็ได้ ดังนั้นการทดสอบข้อสมมติฐานจึงต้องตั้ง

กฎเกณฑ์ในการตัดสินใจ ในการพิจารณาที่จะยอมรับหรือปฏิเสธข้อสมมติฐานนั้นๆ การยอมรับหรือปฏิเสธเกิดจากผลของการสุ่มตัวอย่างและการทดสอบสมมติฐานตามกฎเกณฑ์ที่ตั้งขึ้น ซึ่งที่แท้จริงแล้วอาจไม่เป็นไปตามข้อสรุปก็ได้ การทดสอบสมมติฐานจะต้องตั้งข้อสมมติฐานไว้ 2 ข้อ สมมติฐาน คือ

1. H_0 หรือข้อสมมติฐานหลัก (Null Hypothesis) ได้แก่ข้อสมมติฐานที่ตั้งขึ้นเกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่ทราบค่าแน่นอน มักจะเป็นข้อสมมติฐานที่ตั้งขึ้นเพื่อต้องการปฏิเสธที่ระดับนัยสำคัญ α ที่ต้องการทดสอบ

2. H_1 หรือข้อสมมติฐานรองหรือข้อสมมติฐานทางเลือก (Alternative Hypothesis) ได้แก่ ข้อสมติฐานที่ตั้งขึ้นเพื่อแย้งกับ H_0 มักเป็นข้อสมมติฐานที่ตั้งขึ้นเพื่อต้องการยอมรับที่ระดับนัยสำคัญ α ที่ต้องการทดสอบ

2.10 P-value [29, 30]

คือค่าความน่าจะเป็นที่น้อยที่สุดที่สามารถจะปฏิเสธสมมติฐานหลักได้ ค่า P-value นี้เป็นค่าที่นิยมใช้กันโดยทั่วไปในปัจจุบันในการสรุปผลข้อมูลเพื่อการอ้างอิงต่างๆ ในทางสถิติ (Statistical Inferences) เพื่อเพิ่มระดับความเชื่อมั่นให้กับผู้ประมวลผล เนื่องจากปัญหาที่พบมากในปัจจุบันในการทำการทดสอบสมมติฐานคือ การสรุปผลจากค่าสถิติที่คำนวณได้จากตัวอย่างซึ่งมาจากข้อมูลชุดเดียวกันประมวลผลออกมาต่างกัน มักจะพบมากในกรณีที่ค่าสถิติที่คำนวณได้จากตัวอย่าง นั้นมีค่าใกล้กับค่าวิกฤต (Critical Values) มากๆ

2.11 การทดสอบการแจกแจงของข้อมูล [30, 31]

ในการวิเคราะห์ทางสถิตินั้น มักจะอยู่บนข้อสมมติที่ว่า ทราบถึงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่ทำการศึกษา โดยที่การแจกแจงเหล่านี้มักจะมาจากพื้นฐานการตัดสินใจโดยอาศัยทฤษฎีการแจกแจงต่างๆ เช่น ทฤษฎีข้อจำกัดสู่ศูนย์กลาง (Central Limit Theorem: CLT) เป็นต้น อย่างไรก็ตาม ในบางสถานการณ์ผู้ตัดสินใจอาจไม่ทราบได้เลยว่า ข้อมูลมีการแจกแจงแบบใด ซึ่งมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำก่อนทดสอบก่อนว่า ข้อมูลนั้นได้รับการเก็บมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบใด เพื่อเป็นสารสนเทศขั้นพื้นฐานสำหรับการตัดสินใจต่อไป ซึ่งการ

ทดสอบการแจกแจงของข้อมูลโดยการทดสอบเทียบความกลมกลืนกัน (Goodness of Fit Test) มีการทดสอบที่นิยมใช้ 2 วิธี คือ การทดสอบไคสแควร์ (Chi-Square Test) สำหรับการทดสอบเทียบความกลมกลืนกัน และการทดสอบโดยวิธีคอลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov Test หรือ K-S) ดังนี้

2.11.1 การทดสอบไคสแควร์ (Chi-Square Test) สำหรับการทดสอบเทียบความกลมกลืนกัน จะอยู่ภายใต้แนวความคิดในการเปรียบเทียบความถี่ กล่าวคือ ถ้าหากข้อมูลมาจากประชากรตามสมมติฐาน H_0 ที่ระบุไว้จริงแล้ว ความถี่ที่เกิดขึ้นจริงของข้อมูล (Observed Frequency: O) จะต้องมีความแตกต่างอย่างไม่มีนัยสำคัญกับความถี่ที่คาดหมาย (Expect Value: E) ที่ประเมินภายใต้ H_0 เป็นจริง แต่ถ้าหาก O และ E มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญแล้ว ก็แสดงว่า ข้อมูลไม่ควรจะมาจากประชากรที่มีการแจกแจงภายใต้สมมติฐาน จึงควรมีการตัดสินใจปฏิเสธสมมติฐาน

2.11.2 การทดสอบโดยวิธีคอลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov Test หรือ K-S Test) จะอยู่ภายใต้แนวความคิดในการเปรียบเทียบกันระหว่างฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมของสิ่งตัวอย่างกับฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมที่คาดว่าจะได้รับจากการแจกแจง เมื่อสมมติฐาน H_0 เป็นจริง ว่ามีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ ถ้าความหนาแน่นสะสมทั้งสองมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ แสดงว่าข้อมูลที่ทดสอบมิได้แจกแจงตามสมมติฐาน (คือ ปฏิเสธสมมติฐาน)

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับการทดสอบเทียบความกลมกลืนกันดังที่กล่าวมานี้ จะพบว่าในการกำหนดว่า รูปแบบของการแจกแจงเป็นแบบใดเพื่อตั้งสมมติฐานนั้นถือเป็นสิ่งที่มีความสำคัญมาก โดยที่ผู้ตัดสินใจอาจจะกำหนดได้ด้วยการตัดสินใจทางทฤษฎี โดยอาศัยทฤษฎีการแจกแจงของสิ่งตัวอย่างหรือรูปแบบของการแจกแจง ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว นอกจากนี้อาจจะทำการตรวจสอบรูปแบบอย่างคร่าวๆ เพื่อกำหนดรูปแบบของการแจกแจงโดยผ่านการศึกษาด้วยฮิสโตแกรม (Histogram) ซึ่งในกรณีนี้มีความจำเป็นที่ผู้ตัดสินใจจะต้องวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นก่อน ซึ่งควรจะมีจำนวนข้อมูลไม่ต่ำกว่า 50 ตัว แต่ในการพิจารณาเลือกใช้วิธีทดสอบทั้ง 2 วิธีดังกล่าวมีเกณฑ์ที่พอจะใช้เป็นแนวทางได้คือ ถ้าขนาดตัวอย่างใหญ่มาก ($n \geq 100$ ตัว) วิธีไคสแควร์จะดีที่สุด ขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 10 ถึง 99 ตัว เหมาะกับวิธีคอลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ แต่ถ้าขนาดตัวอย่างเล็กกว่า 10 ตัว ควรใช้วิธีอื่นเช่น วิธีทดสอบของแครเมอร์-ฟอนไมซ์ (Cramer-Von Mises Test) อย่างไรก็ตาม นักสถิติบางท่านพบว่า วิธีไคสแควร์ใช้ได้ผลเป็นที่น่าพอใจ เมื่อ $n \geq 30$ ตัว [19] นอกจากนี้การทดสอบแบบไคสแควร์จะมีการปรับค่าองศาความอิสระสำหรับตัวสถิติทดสอบเมื่อมีการ

ประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ในขณะที่การทดสอบแบบ K-S จะไม่มีการปรับค่าองศาความอิสระใดๆ จึงแสดงว่าการทดสอบแบบไคสแควร์จะมีความเหมาะสมกับการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับการแจกแจงทั้งแบบต่อเนื่องและแบบไม่ต่อเนื่องที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงตามสมมติฐาน นอกจากนี้แล้วการทดสอบแบบ K-S จะอาศัยการเปรียบเทียบความแตกต่างที่ทุกค่าของฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมที่มีผลทำให้ตัวสถิติทดสอบมีความต่อเนื่อง จึงทำให้วิธีการทดสอบแบบ K-S มีความเหมาะสมกับการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่ทราบค่าพารามิเตอร์ ดังสรุปได้ดังตาราง 2.4

ตาราง 2.4 วิธีการเหมาะสมสำหรับการทดสอบเทียบความกลมกลืนกัน

ประเภทการแจกแจงตามสมมติฐาน	ค่าพารามิเตอร์	วิธีการทดสอบ
แบบช่วง	ทราบค่า	ไคสแควร์
แบบช่วง	ไม่ทราบค่า	ไคสแควร์
แบบต่อเนื่อง	ทราบค่า	K-S
แบบต่อเนื่อง	ไม่ทราบค่า	ไคสแควร์

ที่มา: กิติศักดิ์ พลอยพานิชเจริญ, 2547 : 358

2.12 การหาขนาดสิ่งตัวอย่าง [31, 32, 33]

2.12.1 กรณีที่ค่าเฉลี่ยมาจากประชากรเดียวที่ไม่ทราบค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ในการหาขนาดสิ่งตัวอย่างสำหรับการทดสอบความมีนัยสำคัญ จะขึ้นอยู่กับค่าความผิดพลาดประเภท 2 (β) ซึ่งเป็นการตัดสินใจผิดพลาดจากการยอมรับสมมติฐานหลัก (H_0) เมื่อสมมติฐานไม่เป็นจริง กล่าวคือ ถ้าค่าแท้จริงของค่าเฉลี่ยคือ ค่าเฉลี่ยบวกกับค่าความแตกต่างสูงสุดของค่าเฉลี่ยที่ทำให้ปฏิเสธสมมติฐาน ($\mu = \mu_0 + \delta$) แล้ว จะได้ตัวสถิติ t ที่มีค่าเฉลี่ยไม่อยู่ตรงกลาง

ในการหาขนาดสิ่งตัวอย่างจะใช้รูปกราฟพล็อตระหว่างβ กับ δ ที่ขนาดตัวอย่างหนึ่งๆ เรียกว่า “Operating Characteristic Curve” หรือ “O.C. Curve” โดยจะกำหนดให้แกนนอนเป็นพารามิเตอร์ของเส้นโค้งโอซี (O.C. Curve), d เมื่อ

$$d = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma} = \frac{|\delta|}{\sigma} \quad (2.1)$$

ดังนั้น ในการหาขนาดสิ่งตัวอย่างด้วยเส้นโค้งโอซีจึงขึ้นกับค่าของ d แต่อย่างไรก็ตาม ในการหาค่าของ d นี้จำเป็นต้องมีการประมาณค่าของ σ ซึ่งหากผู้ตัดสินใจสามารถประมาณการได้ (โดยอาศัยข้อมูลในอดีต) ก็อาจจะวางแผนการทดลองได้ไม่ยากนัก หรือถ้าหากผู้ตัดสินใจจะประเมินค่าของ β เพื่อพิจารณาความเหมาะสมของขนาดสิ่งตัวอย่าง ก็สามารถดำเนินการได้ด้วยการทดลองด้วยขนาดสิ่งตัวอย่างที่มีความเหมาะสม แล้วใช้ข้อมูลดังกล่าวในการประมานค่า σ เพื่อหาค่า d และตัดสินใจความเหมาะสมของขนาดสิ่งตัวอย่างจากค่า β ต่อไป

2.12.2 การหาขนาดสิ่งตัวอย่างจากตัวแบบอิทธิพลคงที่

ในการหาขนาดสิ่งตัวอย่างจากตัวแบบอิทธิพลคงที่ จะพิจารณาได้จากหลายวิธีด้วยกัน แล้วแต่ว่าผู้ตัดสินใจมีสารสนเทศอย่างไร

2.12.2.1 การกำหนดในรูปแบบความเบี่ยงเบนของค่าเฉลี่ยของทรีตเมนต์

ในกรณีนี้ผู้ตัดสินใจต้องทราบถึงความเบี่ยงเบนของค่าเฉลี่ยของทรีตเมนต์แต่ละทรีตเมนต์ที่เบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ยทั้งหมด (τ_i) จนทำให้เกิดการปฏิเสธสมมติฐาน โดยสมมติให้แต่ละทรีตเมนต์มีค่าเฉลี่ยเบี่ยงเบนไป τ_i/σ ดังนั้นความเบี่ยงเบนทั้งหมดคือ $\sum_i \tau_i^2 / \sigma^2$ ซึ่งสามารถกำหนดพารามิเตอร์เส้นโค้งโอซี (ϕ^2) ที่ทำให้เกิดการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ได้ว่า

$$\phi^2 = \frac{n\sum_i^a \tau_i^2}{a\sigma^2} \quad (2.2)$$

เมื่อ a = จำนวนของทรีตเมนต์

2.12.2.2 การกำหนดในรูปความแตกต่างมากที่สุดของค่าเฉลี่ยของทรีตเมนต์

ทางเลือกอีกประการหนึ่ง สำหรับการกำหนดความแตกต่างของทรีตเมนต์จนทำให้เกิดการปฏิเสธสมมติฐาน โดยกำหนดให้ D หมายถึง ค่าความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีตเมนต์ใดๆ 2 ทรีตเมนต์จนทำให้เกิดการปฏิเสธสมมติฐาน ซึ่งในกรณีนี้สามารถกำหนดพารามิเตอร์ของเส้นโค้งโอซี (ϕ^2) ได้ว่า

$$\phi^2 = \frac{nD^2}{2a\sigma^2} \quad (2.3)$$

เมื่อ n = จำนวนการทดลองซ้ำของแต่ละทรีตเมนต์

2.13 การทดสอบความมีนัยสำคัญของค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มปกติกรณีประชากรสองชุด [31]

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการทดสอบความมีนัยสำคัญของความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มปกติจำนวน 2 ชุด ที่ไม่ทราบค่าที่แน่นอนของความแปรปรวนของประชากร โดยไม่จำเป็นต้องทราบว่าพารามิเตอร์เท่ากับเท่าใด และสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กรณีด้วยกัน คือ

2.13.1 กรณีที่ไม่ทราบค่าที่แน่นอนของ σ_X^2 และ σ_Y^2 แต่ทราบว่าไม่แตกต่างกัน

ให้ X และ Y คือ ประชากรที่ให้ความสนใจ 2 ชุด ซึ่งมีการแจกแจงปกติโดยมีค่าเฉลี่ย μ_X และ μ_Y และมีความแปรปรวนที่ไม่ทราบค่าเป็น σ_X^2 และ σ_Y^2 โดยลำดับ โดย X และ Y มีความอิสระต่อกัน และ $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$

ในการทดสอบให้ทำการชักสิ่งตัวอย่างขนาด n_X และ n_Y จากประชากร X และ Y โดยลำดับ และกำหนดให้เป็น $X_1, X_2, \ldots, X_{n_X}$ และ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_Y}$ แล้วคำนวณได้ค่าของตัวสถิติ $\overline{X}, \overline{Y}, S_X^2$ และ S_Y^2 และโดยที่ทั้ง S_X^2 และ S_Y^2 เป็นตัวประมาณค่าของความแปรปรวน (σ^2) จึงรวมเข้าด้วยกันในรูปของความแปรปรวนร่วม (Pooled Variance) คือ

$$S_P^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} \quad (2.4)$$

จากทฤษฎีการแจกแจงสิ่งตัวอย่าง จะได้ผลว่า

$$t = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \quad (2.5)$$

องศาความอิสระ (Degree of Freedom: ν) = $n_X + n_Y - 2$

2.13.2 กรณีที่ไม่ทราบค่าที่แน่นอนของ σ_X^2 และ σ_Y^2 และไม่ทราบว่าแตกต่างกันกันหรือไม่

ในการตัดสินใจปัญหาทางวิศวกรรมนั้น มีหลายครั้งที่อาจจะไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะกำหนดให้ $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ จึงทำให้ไม่สามารถใช้ตัวสถิติสำหรับการทดสอบ t สำหรับการทดสอบความแตกต่างของ μ_X และ μ_Y ได้ ดังนั้น ในกรณีนี้มีความจำเป็นต้องทำการประมาณตัวสถิติสำหรับการทดสอบขึ้น โดย

$$t' = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} \tag{2.6}$$

เป็นตัวสถิติแบบ t ที่มีองศาความอิสระ (ν) โดยที่

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{(S_X^2/n_X)^2}{n_X - 1} - \frac{(S_Y^2/n_Y)^2}{n_Y - 1}} - 2 \tag{2.7}$$

2.14 การวิเคราะห์ความแปรปรวน [32, 33]

สมมุติว่ามีระดับซึ่งแตกต่างของปัจจัยเดียวที่ต้องการเปรียบเทียบ และค่าตอบสนองที่ได้จากการสังเกตในแต่ละระดับเป็นตัวแปรสุ่ม ข้อมูลควรจะมีลักษณะเหมือนในภาพประกอบ 2.8 ซึ่งค่าต่างๆ ที่แสดงในภาพประกอบ เช่น y_{ij} หมายถึง ค่าสังเกตที่ j ภายใต้ระดับที่ i หรือโดยทั่วไปจะมีค่าสังเกต n ค่าภายใต้ระดับ i ซึ่งสามารถที่จะอธิบายค่าสังเกตต่างๆ นี้ด้วยแบบจำลองทางสถิติเชิงเส้น (Linear Statistical Model) คือ

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, ..., a \\ j = 1, 2, ..., n \end{cases} \tag{2.8}$$

โดยที่ y_{ij} = ค่าสังเกตที่ ij

μ = ผลเฉลี่ยทั้งหมด (Overall Mean)

τ_i = ผลกระทบที่เกิดจากระดับที่ i

ε_{ij} = องค์ประกอบของความผิดพลาดแบบสุ่ม (Random Error)

จุดประสงค์ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนก็เพื่อทำการทดสอบสมมติฐานที่เหมาะสมเกี่ยวกับผลกระทบที่ระดับต่างๆ และทำการประมาณค่าของมัน สำหรับการทดสอบสมมติฐาน ความผิดพลาดของแบบจำลองถูกสมมติให้เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบปกติและเป็นอิสระต่อกัน ด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวน σ^2 ซึ่งสมมติให้มีค่าคงตัวตลอดทุกระดับของปัจจัย

Treatment (level)	Observations				Totals	Averages
1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n}	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	y_{an}	$y_{a.}$	$\bar{y}_{a.}$
					$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$

ภาพประกอบ 2.8 ข้อมูลสำหรับการทดลองปัจจัยเดียว

ที่มา: Montgomery, Douglas C., 2001 : 63

แบบจำลองนี้เรียกว่า “การวิเคราะห์ความแปรปรวนปัจจัยเดียว (Single Factor Analysis of Variance)” เพราะมีเพียงแค่ปัจจัยเดียวที่นำมาพิจารณา ยิ่งกว่านั้นลำดับในการทดลองจะต้องเป็นแบบสุ่มเพื่อทำให้สิ่งแวดล้อมที่ทำการทดลองในสภาวะต่างๆ (เรียกว่า “หน่วยการทดลอง (Experimental Units)”) จะมีความเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ดังนั้นการทดลองนี้จึงเป็นการออกแบบการทดลองที่เรียกว่า “การออกแบบสุ่มสมบูรณ์ (Completely Randomized Design)”

แบบจำลองทางสถิติในสมการ 2.8 อธิบายความแตกต่างของ 2 สถานการณ์ที่เกี่ยวกับผลกระทบของระดับ อันดับแรกคือ ระดับ a ระดับ สามารถถูกกำหนดขึ้นโดยผู้ทดลอง ในที่นี้เราต้องการที่จะทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของระดับ และบทสรุปที่เกิดขึ้นจะนำไปประยุกต์ได้กับระดับของปัจจัยที่พิจารณาเท่านั้น ข้อสรุปที่ได้ไม่สามารถไปใช้กับระดับอื่นที่มีค่าใกล้เคียงที่เราไม่ได้พิจารณาหรือทำการทดลองได้ นอกจากนั้น อาจจะต้องประมาณค่าพารามิเตอร์

ของแบบจำลอง (μ, τ_i, σ^2) ซึ่งเรียกว่า “แบบจำลองผลกระทบคงที่ (Fixed Effect Model)” ในทางกลับกันถ้าระดับ a ถูกสุ่มเลือกจากประชากรขนาดใหญ่ของระดับต่างๆ ที่เป็นไปได้ ในกรณีนี้เราสามารถที่จะขยายผลสรุป (ซึ่งขึ้นกับตัวอย่างของระดับที่ใช้) ของเราไปยังทุกๆ ระดับของประชากร ถึงแม้ว่าเราอาจจะไม่ได้ทำการพิจารณาระดับนั้นๆ อย่างชัดเจนก็ตาม ในการวิเคราะห์ในที่นี้ τ_i คือตัวแปรสุ่ม และความรู้เกี่ยวกับค่าตัวแปรสุ่มตัวใดตัวหนึ่งจะไม่มีประโยชน์แต่อย่างไร เราทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแปรผันของ τ_i และพยายามที่จะประมาณค่าความแปรผันนี้ ซึ่งเรียกว่า “แบบจำลองผลกระทบแบบสุ่ม (Random Effect Model)”

2.14.1 การวิเคราะห์แบบจำลองผลกระทบคงที่

ในส่วนนี้เราจะกล่าวถึง การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปัจจัยเดียวของแบบจำลองผลกระทบคงที่ ผลกระทบของระดับ (τ_i) มีนิยามเหมือนกับส่วนของค่าที่เบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยรวม

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0 \tag{2.9}$$

ให้ $y_{i.}$ แทนค่าของค่าสังเกตทุกๆ ตัวของระดับ i และ $\bar{y}_{i.}$ แทนค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตภายใต้ระดับที่ i ในทำนองเดียวกัน $y_{..}$ แทนผลรวมของค่าสังเกตทั้งหมด และ $\bar{y}_{..}$ แทนค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตทั้งหมด ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปของสัญลักษณ์ คือ

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad \bar{y}_{i.} = \frac{y_{i.}}{n} \qquad i = 1, 2, ..., a \tag{2.10}$$

$$y_{..} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad \bar{y}_{..} = \frac{y_{..}}{N} \tag{2.11}$$

โดยที่ $N = an$ คือ จำนวนค่าสังเกตทั้งหมด จะสังเกตว่าเครื่องหมาย “.” แทนผลรวมของตัวห้อย (Subscript) ที่เครื่องหมายนั้นเข้าไปแทนที่อยู่

ค่าเฉลี่ยของระดับ i คือ $E(y_{ij}) \equiv \mu_i = \mu + \tau_i,\ i = 1, 2, ..., a$ ดังนั้นค่าเฉลี่ยของระดับที่ i ประกอบด้วย ค่าเฉลี่ยรวมบวกกับผลกระทบที่เกิดจากระดับที่ i เราสนใจในการทดสอบความเท่ากันของค่าเฉลี่ย a ระดับ คือ

$$H_0 \ : \ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$$
$$H_1 \ : \ \mu_i \neq \mu_j \qquad \text{อย่างน้อยหนึ่งคู่ของ (i, j)} \qquad (2.12)$$

ถ้าหาก H_0 เป็นจริง ทุกระดับจะมีค่าเฉลี่ยที่เท่ากันคือ μ เราอาจจะเขียนสมมติฐานใหม่ในรูปของผลกระทบของระดับ τ_i ได้ คือ

$$H_0 \ : \ \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$$
$$H_1 \ : \ \tau_i \neq 0 \qquad \text{อย่างน้อยหนึ่ง i} \qquad (2.13)$$

ดังนั้น เราสามารถกล่าวได้ว่า การทดสอบความเท่ากันของค่าเฉลี่ยของระดับหรือการทดสอบผลที่เกิดขึ้นจากระดับ (τ_i) เท่ากับศูนย์ก็ได้ กระบวนการที่เหมาะสมสำหรับการทดสอบความเท่ากันของค่าเฉลี่ยของระดับ a คือ การวิเคราะห์ความแปรปรวน

2.14.2 การแยกย่อยของผลรวมของกำลังสอง

คำว่า “การวิเคราะห์ความแปรปรวน” มาจากความหมายของการแบ่งความแปรปรวนทั้งหมดออกเป็นส่วนประกอบย่อยๆ จะได้ว่า Total Corrected Sum of Square คือ

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \qquad (2.14)$$

ใช้สำหรับวัดความแปรผันทั้งหมดของข้อมูล เป็นการเหมาะสมถ้าเราหาร SS_T ด้วยระดับขั้นความเสรีที่เหมาะสม (ในกรณีนี้ an-1 = N-1) เราจะได้ความแปรปรวนของตัวอย่าง y สังเกตว่า Total Corrected Sum of Square, SS_T สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left[(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.})\right]^2 \qquad (2.15)$$

หรือ $$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = n\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.}) \qquad (2.16)$$

อย่างไรก็ตาม พจน์ของผลคูณไขว้ในสมการ 2.16 มีค่าเป็นศูนย์ เพราะว่า

$$\sum_{j-1}^{a}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right) = y_{i.} = n\bar{y}_{i.} = y_{i.}-n\left(y_{i.}/n\right)=0 \qquad (2.17)$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{..}\right)^2 = n\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)^2 \qquad (2.18)$$

สมการ 2.18 กล่าวว่า ความแปรปรวนทั้งหมดของข้อมูล ซึ่งวัดจาก Total Corrected Sum of Square สามารถแบ่งออกเป็น ส่วนของผลรวมของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยในแต่ละระดับกับค่าเฉลี่ยรวม รวมกับผลรวมของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตภายในระดับกับค่าเฉลี่ยของระดับนั้นๆ ค่าของความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตเฉลี่ยของแต่ละระดับกับค่าเฉลี่ยรวมคือ ตัววัดความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของระดับ ในขณะที่ค่าความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตภายในระดับกับค่าเฉลี่ยของระดับ คือ ความผิดพลาดแบบสุ่ม (Random Error) ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการ 2.18 ใหม่ได้เป็น

$$SS_T = SS_{Treatment} + SS_E \qquad (2.19)$$

ซึ่ง $SS_{Treatment}$ เรียกว่า ผลรวมของกำลังสองที่เกิดเนื่องจากระดับ (นั้นคือ ระหว่างระดับต่างๆ) และ SS_E เรียกว่า ผลรวมของกำลังสองที่เกิดเนื่องจากความผิดพลาด เนื่องจากมีค่าสังเกตทั้งหมด an = N ค่า ดังนั้น SS_T จะมี N-1 ระดับขั้นความเสรี ปัจจัยที่กำลังพิจารณาอยู่จะมี a ระดับ (และค่าเฉลี่ยของระดับจะมี a ค่า) ดังนั้น $SS_{Treatment}$ มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับ a-1 และภายในทุกๆ ระดับจะมี n ซ้ำ (Replicate) ทำให้มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับ n-1 สำหรับประมาณความผิดพลาดในการทดลอง ดังนั้น ถ้าปัจจัยมี a ระดับ เราจะมี a(n-1) = an-a = N-a ระดับขั้นความเสรีสำหรับความผิดพลาด และจะมีประโยชน์อย่างมากถ้าเราจะพิจารณาในรายละเอียดของสองพจน์ทางด้านขวามือของสมการ 2.18 ให้พิจารณาค่าผิดพลาดของผลรวมของกำลังสอง

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-y_{i.}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-y_{i.}\right)^2\right] \qquad (2.20)$$

ในรูปแบบนี้ จะเป็นการง่ายที่พิจารณาพจน์ที่อยู่ในวงเล็บซึ่งถูกหารด้วย n-1 ว่าคือความแปรปรวนของตัวอย่างในระดับที่ i

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i.}\right)^2}{n-1} \quad ,i = 1, 2,..., a \tag{2.21}$$

ตอนนี้ความแปรปรวนตัวอย่าง a ค่าอาจจะถูกรวมให้เป็นค่าประมาณค่าหนึ่งของค่าความแปรปรวนร่วมของประชากร ซึ่งแสดงได้โดย

$$\frac{(n-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2 + ... + (n-1)S_a^2}{(n-1)+(n-1)+...+(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i.}\right)^2\right]}{\sum_{i=1}^{a}(n-1)} = \frac{SS_E}{(N-a)} \tag{2.22}$$

ดังนั้น $SS_E/(N-a)$ คือ ค่าประมาณความแปรปรวนร่วมภายในระดับแต่ละระดับ ซึ่งมีทั้งหมด a ระดับ ในทำนองเดียวกัน ถ้าหากไม่มีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของระดับทั้งหมด a ระดับ สามารถนำค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรวมเพื่อประมาณ σ^2 โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$\frac{SS_{Treatments}}{a-1} = \frac{n\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}\right)^2}{a-1}$$

คือค่าประมาณของ σ^2 ถ้าหากค่าเฉลี่ยของระดับมีค่าเท่ากัน เหตุผลสำหรับอธิบายเป็นดังนี้คือ ค่า $\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}\right)^2 \Big/ a-1$ ประมาณค่าของ σ^2/n ซึ่งหมายถึงความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของระดับ ดังนั้น $n\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}\right)^2 \Big/ a-1$ จะเป็นตัวประมาณของ σ^2 ถ้าหากไม่มีความแตกต่างในค่าเฉลี่ยของระดับ

เราพบว่าการวิเคราะห์เอกลักษณ์ความแปรปรวน (สมการ 2.18) ทำให้ได้ค่าประมาณของ σ^2 2 ตัว ตัวหนึ่งเป็นความแปรผันภายในระดับ และอีกตัวหนึ่งอยู่ในความแปรผันระหว่างระดับ ถ้าหากไม่มีความแตกต่างในค่าเฉลี่ยของระดับ ค่าประมาณทั้ง 2 ค่าจะคล้ายคลึงกันมาก แต่หากว่าไม่เป็นเช่นนั้น ควรจะสงสัยว่า ความแตกต่างของค่าสังเกตต้องเกิดมาจากความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของระดับ ถึงแม้ว่าคำกล่าวนี้จะมาจากความรู้สึกเท่านั้น แต่ก็มีวิธีการอย่างเป็นทางการที่สามารถนำมาใช้อธิบายได้เช่นกัน เราเรียกจำนวน $MS_{Treatment} = SS_{Treatment}/a-1$

และ $MS_E = SS_E/(N-a)$ ว่าค่ากำลังสองเฉลี่ย ตอนนี้เราพิจารณา ค่าคาดหมาย (Expected Value) ของค่ากำลังสองเฉลี่ยเหล่านี้ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} E(MS_E) = E\left(\frac{SS_E}{N-a}\right) &= \frac{1}{N-a}\ E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{N-a}\ E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}^2-2y_{ij}\bar{y}_{i.}+\bar{y}_{i.}^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{N-a}\ E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2-2n\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}^2+n\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}^2\right] \\ &= \frac{1}{N-a}\ E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}y_{i.}^2\right] \end{aligned} \tag{2.23}$$

แทนค่าแบบจำลอง (สมการ 2.8) ในสมการนี้ เราจะได้

$$E(MS_E) = \frac{1}{N-a}\ E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}\right)^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{n}\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}\right)^2\right] \tag{2.24}$$

เมื่อยกกำลังสองและใส่ค่าคาดหมายเข้าไปยังค่าภายในวงเล็บ เราพบว่าพจน์ที่รวมเอา ε_{ij}^2 และ $\varepsilon_{i.}^2$ จะถูกแทนด้วย σ^2 และ $n\sigma^2$ ตามลำดับ เพราะว่า $E(\varepsilon_{ij})=0$ ยิ่งกว่านั้นผลคูณไขว้ทั้งหมดที่เกี่ยวกับ ε_{ij} จะมีค่าคาดหมายเป็นศูนย์ ดังนั้นหลังจากยกกำลังสองและใส่ค่าคาดหมายลงไป สมการสุดท้ายจะกลายเป็น

$$E(MS_E) = \frac{1}{N-a}\left[N\mu^2+n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2+N\sigma^2-N\mu^2-n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2+N\sigma^2-a\sigma^2\right]$$

หรือ

$$E(MS_E) = \sigma^2 \tag{2.25}$$

โดยวิธีการที่คล้ายคลึงกัน เราสามารถแสดงให้เห็นว่า

$$E(MS_{Treatment}) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1} \tag{2.26}$$

ดังนั้น เราสามารถกล่าวได้ว่า $MS_E = SS_E/(N-a)$ เป็นตัวประมาณของ σ^2 และถ้าหากไม่มีความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของระดับ ($\tau_i = 0$) $MS_{Treatment} = SS_{Treatment}/(a-1)$ จะเป็นตัวประมาณของ σ^2 เช่นเดียวกัน อย่างไรก็ตาม สังเกตว่าถ้าหากค่าเฉลี่ยของระดับแตกต่างกัน ค่าคาดหมายของค่าเฉลี่ยของระดับยกกำลังสองจะมากกว่า σ^2

ดูเหมือนจะเป็นการชัดเจนว่า การทดสอบสมมติฐานซึ่งไม่มีความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของระดับสามารถทำได้โดยการเปรียบเทียบ $MS_{Treatment}$ และ MS_E และตอนนี้เราจะมาพิจารณาว่า เราสามารถทำการเปรียบเทียบนี้ได้อย่างไร

2.14.3 การวิเคราะห์ทางสถิติ

ตอนนี้เราจะค้นหาว่า การทดสอบสมมติฐานอย่างเป็นทางการในกรณีที่ไม่มีความแตกต่างในค่าเฉลี่ยของระดับ ($H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$ หรือ $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a$) จะทำได้อย่างไร เนื่องจากเราต้องสมมติให้ ε_{ij} มีการกระจายแบบปกติและเป็นอิสระต่อกัน มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ค่าสังเกต y_{ij} มีการแจกแจงแบบปกติและเป็นอิสระ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\mu + \tau_i$ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ดังนั้น SS_T คือ ผลรวมของกำลังสองของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นเราสามารถแสดงได้ว่า SS_T/σ^2 มีการแจกแจงแบบ Chi-Square ที่ N-1 ระดับขั้นความเสรี ยิ่งกว่านั้นเราสามารถแสดงได้ว่า SS_E/σ^2 มีการแจกแจงแบบ Chi-Square ที่มี N-a ระดับขั้นความเสรี และ $SS_{Treatment}$ มีการกระจายแบบ Chi-Square ที่มี a-1 ระดับขั้นความเสรี ถ้าสมมติฐานหลัก $H_0 : \tau_i = 0$ เป็นจริง อย่างไรก็ตาม ค่าผลรวมของกำลังสองทั้งสามไม่ได้เป็นอิสระต่อกัน เพราะ SS_E และ $SS_{Treatment}$ รวมกันเป็น SS_T ทฤษฎีที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้มีประโยชน์ในการสร้างความเป็นอิสระให้แก่ SS_E และ $SS_{Treatment}$

จากทฤษฎีของ Cochran กำหนดให้ เป็น NID (0,1) สำหรับ i = 1, 2, …, ν และ $\sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2 = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_S$ ซึ่ง $S \le \nu$, และ Q_i มี ν_i ระดับขั้นความเสรี (i = 1, 2, …, s) ดังนั้น $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_S$ เป็นการแจกแจง Chi-Square ที่เป็นอิสระต่อกัน ด้วยค่า $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_S$ ระดับขั้นความเสรีตามลำดับ ก็ต่อเมื่อ $\nu = \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_S$ เพราะระดับขั้นความเสรีของ $SS_{Treatment}$ และ SS_E รวมกันเท่ากับ N-1 ซึ่งเป็นระดับขั้นความเสรีรวมทั้งหมด ทฤษฎีของ Cochran บอกเป็นนัยว่า $SS_{Treatment}/\sigma^2$ และ SS_E/σ^2 เป็นตัวแปรอิสระที่มีการแจกแจงแบบ Chi-Square ที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น ถ้าหากสมมติฐานหลักคือ ไม่มีความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของระดับที่เป็นจริง ดังนั้นอัตราส่วน

$$F_0 = \frac{SS_{Treatment}/(a-1)}{SS_E/(N-a)} = \frac{MS_{Treatment}}{MS_E} \quad (2.27)$$

จากสมการ 2.27 จะมีการแจกแจงแบบ F ด้วยระดับขั้นความเสรีเท่ากับ a-1 และ N-a สมการ 2.27 คือ สถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานที่ว่าไม่มีความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของระดับ

จากค่าคาดหมายกำลังสองเฉลี่ย พบว่า โดยทั่วไป MS_E จะเป็นค่าประมาณที่ไม่ลำเอียงของ σ^2 ภายใต้สมมติฐานหลัก $MS_{Treatment}$ จะเป็นค่าประมาณที่ไม่ลำเอียงของ σ^2 เช่นกัน อย่างไรก็ตาม ถ้าสมมติฐานหลักเป็นเท็จ ค่าคาดหมายของ $MS_{Treatment}$ จะมากกว่า σ^2 ดังนั้นภายใต้สมมติฐานรอง ค่าคาดหมายของตัวตั้งของสถิติทดสอบ (สมการ 2.27) จะมากกว่าค่าคาดหมายของตัวหาร และเราจะปฏิเสธ H_0 ถ้าค่าของสถิติทดสอบมีค่าที่มาก หรือค่าดังกล่าวตกอยู่ในบริเวณวิกฤตซึ่งหมายถึงพื้นที่ด้านขวาของค่าวิกฤต ($F_{\alpha, a-1, N-a}$) ดังนั้นเราจะปฏิเสธ H_0 และสรุปว่ามีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของระดับถ้า $F_0 > F_{\alpha, a-1, N-a}$ ซึ่ง F_0 คำนวณได้จากสมการ 2.27 หรือโดยการใช้ P-Value ในการตัดสินใจก็ได้

สูตรสำหรับคำนวณผลรวมของกำลังสองสามารถหาได้จากการเขียนและลดรูปของ $MS_{Treatment}$ และ SS_T ในสมการ 2.18 ให้ง่ายขึ้น ซึ่งจะได้ว่า

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} \quad (2.28)$$

และ

$$SS_{Treatment} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} \quad (2.29)$$

ค่าผิดพลาดของผลรวมกำลังสองสามารถหาได้จากการลบ กล่าวคือ

$$SS_E = SS_T - SS_{Treatment} \quad (2.30)$$

ขั้นตอนการทดสอบได้สรุปไว้ในภาพประกอบ 2.9 ซึ่งเรียก “ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance Table)”

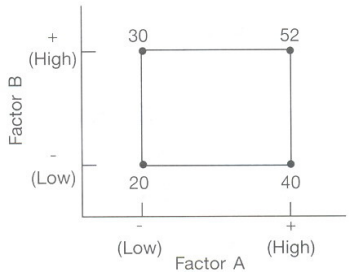
Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
Between treatments	$SS_{\text{Treatments}} = n\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$a - 1$	$MS_{\text{Treatments}}$	$F_0 = \frac{MS_{\text{Treatments}}}{MS_E}$
Error (within treatments)	$SS_E = SS_T - SS_{\text{Treatments}}$	$N - a$	MS_E	
Total	$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	$N - 1$		

ภาพประกอบ 2.9 ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับปัจจัยเดียว แบบ Fixed Effect Model
ที่มา: Montgomery, Douglas C., 2001 : 70

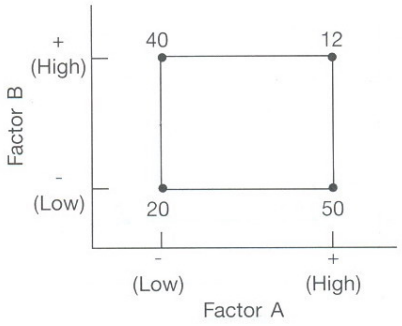
2.15 การออกแบบการทดลองเชิงแฟกทอเรียล [32, 33]

2.15.1 การออกแบบการทดลองเชิงแฟคทอเรียล 2 ปัจจัย

การทดลองส่วนมากในทางปฏิบัติจะเกี่ยวข้องกับการศึกษาถึงผลของปัจจัย (Factor) ตั้งแต่ 2 ปัจจัยขึ้นไป ในกรณีเช่นนี้การออกแบบเชิงแฟคทอเรียล (Factorial Design) จะเป็นวิธีการทดลองที่มีประสิทธิภาพสูงสุด การออกแบบเชิงแฟคทอเรียลหมายถึง การทดลองที่พิจารณาถึงผลที่เกิดจากการรวมกันของระดับ (Level) ของปัจจัยทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการทดลองนั้น ตัวอย่างเช่น กรณี 2 ปัจจัย ถ้าปัจจัย A ประกอบด้วย a ระดับ และปัจจัย B ประกอบด้วย b ระดับ นั่นคือในแต่ละการทดลองซ้ำ (Replicate) ของการทดลองจะประกอบด้วยการทดลองร่วมปัจจัยทั้งหมด ab การทดลอง และโดยปกติจะมีจำนวนการทดลองซ้ำทั้งหมด n ครั้ง และเมื่อปัจจัยที่เกี่ยวข้องถูกนำมาจัดให้อยู่ในรูปแบบของการออกแบบเชิงแฟคทอเรียล เราจะกล่าวว่าปัจจัยเหล่านี้มีการไขว้ (Crossed) ซึ่งกันและกัน

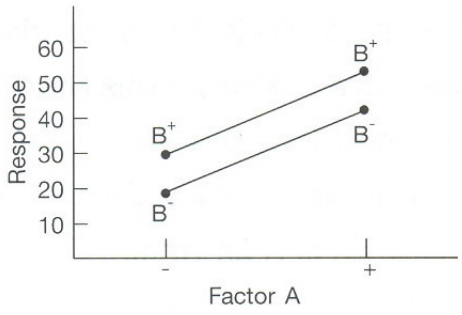


ภาพประกอบ 2.10 การออกแบบเชิงแฟคทอเรียล 2 ปัจจัย
ที่มา: ปารเมศ ชุติมา, 2545 : 219

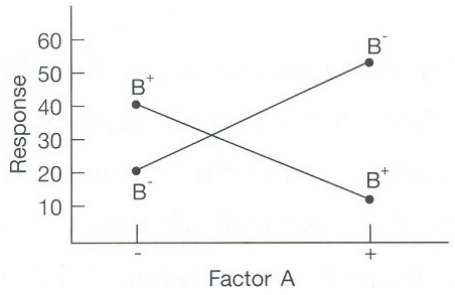


ภาพประกอบ 2.11 การออกแบบเชิงแฟคทอเรียล 2 ปัจจัย (มีอันตรกริยา)
ที่มา: ปารเมศ ชุติมา, 2545 : 219

ผลที่เกิดจากปัจจัยหนึ่งหมายถึง การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับผลตอบ (Response) ที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงระดับของปัจจัยนั้นๆ ซึ่งเรียกว่า ผลหลัก (Main Effect) เนื่องจากว่ามันเกี่ยวข้องกับปัจจัยเบื้องต้นของการทดลอง ในการทดลองบางอย่าง เราอาจจะพบว่าความแตกต่างของผลตอบที่เกิดขึ้นบนระดับต่างๆ ของปัจจัยหนึ่งจะมีค่าไม่เท่ากันที่ระดับอื่นๆ ทั้งหมดของปัจจัยอื่น ซึ่งหมายถึงว่า ผลตอบของปัจจัยหนึ่งจะขึ้นกับระดับของปัจจัยอื่นๆ นั่นเอง และเราเรียกเหตุการณ์นี้ว่า การมีอันตรกริยา (Interaction) ต่อกันระหว่างปัจจัยที่เกี่ยวข้อง



ภาพประกอบ 2.12 การออกแบบเชิงแฟคทอเรียล (ไม่มีอันตรกริยา)
ที่มา: ปารเมศ ชุติมา, 2545 : 220



ภาพประกอบ 2.13 การออกแบบเชิงแฟคทอเรียล (มีอันตรกริยา)
ที่มา: ปารเมศ ชุติมา, 2545 : 220

กำหนดให้ y_{ijk} คือผลตอบที่สังเกตได้เมื่อปัจจัย A อยู่ที่ระดับ i (i = 1, 2, …, a) และปัจจัย B อยู่ที่ระดับ j (j = 1, 2, …, b) สำหรับการทดลองซ้ำ (Replicate) ที่ k (k = 1, 2, …, n) รูปแบบทั่วไปของการออกแบบเชิงแฟคทอเรียล 2 ปัจจัย สามารถแสดงได้ดังภาพประกอบ 2.14 เนื่องจากลำดับของการสังเกต abn ครั้ง ถูกเลือกมาอย่างสุ่ม ดังนั้นการออกแบบเช่นนี้เรียกว่า “การออกแบบสุ่มบริบูรณ์ (Completely Randomized Design)”

ข้อมูลจากการทดลองอาจจะเขียนในรูปของแบบจำลองสถิติเชิงเส้น (Linear Statistical Model) คือ

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, ..., a \\ j = 1, 2, ..., b \\ k = 1, 2, ..., n \end{cases} \qquad (2.31)$$

โดยที่ μ = ผลเฉลี่ยทั้งหมด

τ_i = ผลที่เกิดจากระดับที่ i ของแถว (Row) ของปัจจัย A

β_j = ผลที่เกิดจากระดับที่ j ของคอลัมน์ (column) ของปัจจัย B

$(\tau\beta)_{ij}$ = ผลที่เกิดจากอันตรกริยาระหว่าง τ_i และ β_j

ε_{ijk} = องค์ประกอบของความผิดพลาดแบบสุ่ม

		Factor *B*			
		1	2	...	*b*
Factor *A*	1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2bn}$
	⋮				
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \ldots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abn}$

ภาพประกอบ 2.14 รูปแบบของการออกแบบเชิงแฟคทอเรียล 2 ปัจจัย

ที่มา: Montgomery, Douglas C., 2001 : 176

สมมติว่าปัจจัยทั้งคู่มีค่าตายตัว (Fixed) และผลจากการทดลอง (Treatment Effect) หมายถึง ส่วนที่เบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยทั้งหมด ดังนั้น $\sum_{i=1}^{a}\tau_i = 0$ และ $\sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$ ในทำนองเดียวกัน สมมติว่าผลที่เกิดจากอันตรกริยามีค่าตายตัว (Fixed) และกำหนดว่า $\sum_{i=1}^{a}(\tau\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij} = 0$ เนื่องจากในการทดลองครั้งนี้มีจำนวนการทดลองซ้ำ n ครั้ง ดังนั้นจำนวนข้อมูลที่ได้จากการสังเกตทั้งหมดเท่ากับ abn

ในการทดลองเชิงแฟคทอเรียล 2 ปัจจัย ทั้งปัจจัยที่เกิดจาก A (แถว) และ B (คอลัมน์) มีความสำคัญเท่ากัน ดังนั้น เราต้องการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความเท่ากันของผลที่เกิดจากปัจจัย A หรือกล่าวได้ว่า

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$$
$$H_1 : \text{อย่างน้อยหนึ่ง } \tau_i \neq 0 \qquad (2.32)$$

และความเท่ากันของผลที่เกิดจากปัจจัย B

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0$$
$$H_1 : \text{อย่างน้อยหนึ่ง } \beta_j \neq 0 \qquad (2.33)$$

นอกจากนั้นแล้ว เรายังสนใจผลที่จะทราบว่า อันตรกริยาระหว่างปัจจัย A และ B มีนัยสำคัญหรือไม่ หรือกล่าวได้ว่า

$$\begin{aligned} H_0 &: (\tau\beta)_{ij} = 0 \qquad \text{สำหรับทุกค่า i, j} \\ H_1 &: \text{อย่างน้อยหนึ่ง} (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

2.15.2 การวิเคราะห์ทางสถิติสำหรับ Fixed Effect Model

กำหนดให้ $y_{i..}$ เป็นผลรวมของข้อมูลจากการทดลองทั้งหมดภายใต้ระดับที่ i ของปัจจัย A; $y_{.j.}$ เป็นผลรวมของข้อมูลจากการทดลองทั้งหมดภายใต้ระดับที่ j ของปัจจัย B; $y_{ij.}$ เป็นค่าผลรวมของข้อมูลจากการทดลองทั้งหมดภายใต้เซลล์ตำแหน่งที่ ij และ $y_{...}$ เป็นผลรวมของข้อมูลจากการทดลองทั้งหมดที่ได้ กำหนดให้ $\bar{y}_{i..}, \bar{y}_{.j.}, \bar{y}_{ij.}$ และ $\bar{y}_{...}$ เป็นค่าเฉลี่ยของแถว คอลัมน์ เซลล์ และผลรวมทั้งหมด ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y_{i..} &= \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} & \bar{y}_{i..} &= \frac{y_{i..}}{bn} & i &= 1, 2, ..., a \\ y_{.j.} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} & \bar{y}_{.j.} &= \frac{y_{.j.}}{an} & j &= 1, 2, ..., b \\ y_{ij.} &= \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} & \bar{y}_{ij.} &= \frac{y_{ij.}}{n} & i &= 1, 2, ..., a \\ & & & & j &= 1, 2, ..., b \\ y_{...} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} & \bar{y}_{...} &= \frac{y_{...}}{abn} & & \end{aligned} \tag{2.35}$$

ค่าของผลรวมแก้ไขแล้วทั้งหมดของกำลังสองสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{...}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\right) + \left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right) + \left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{ij.}\right)\right]^2 \\ &= bn\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\right)^2 + an\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)^2 \\ &\quad + n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{ij.}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.36}$$

สังเกตได้ว่า ค่าผลรวมทั้งหมดของกำลังสองจะถูกแบ่งออกเป็นผลรวมของกำลังสองที่เกิดจากแถวหรือปัจจัย A (SS_A) ผลรวมของกำลังสองที่เกิดจากคอลัมน์หรือปัจจัย B (SS_B) ผลรวมกำลังสองที่เกิดขึ้นจากอันตรกริยาระหว่างปัจจัย A และปัจจัย B (SS_{AB}) และผลรวมของกำลังสองที่เกิดจากความผิดพลาด (SS_E) และจากพจน์สุดท้ายของสมการ 2.36 จะเห็นว่าจะต้องมีอย่างน้อย 2 การทดลองซ้ำเพื่อที่จะทำให้เราสามารถคำนวณหาค่าของผลรวมของกำลังสองที่เกิดจากความผิดพลาดได้ ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ 2.36 ได้ใหม่เป็น

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E \tag{2.37}$$

จำนวนของระดับขั้นความเสรีสำหรับผลรวมของกำลังสองแต่ละค่าดังแสดงในภาพประกอบ 2.15

Effect	Degrees of Freedom
A	a - 1
B	b - 1
AB interaction	(a - 1)(b - 1)
Error	ab(n - 1)
Total	abn - 1

ภาพประกอบ 2.15 จำนวนของระดับขั้นความเสรีสำหรับผลรวมของกำลังสองแต่ละค่า
ที่มา: ปารเมศ ชุติมา, 2545 : 225

เมื่อนำค่าของผลรวมของกำลังสองมาหารด้วยระดับขั้นความเสรีก็จะได้ค่าของกำลังสองเฉลี่ย โดยที่ค่าคาดหมาย (Expect Value) ของกำลังสองเฉลี่ยคือ

$$E(MS_A) = E\left(\frac{SS_A}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1} \tag{2.38}$$

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{an\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1} \tag{2.39}$$

$$E(MS_{AB}) = E\left(\frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} \quad (2.40)$$

$$E(MS_E) = E\left(\frac{SS_E}{ab(n-1)}\right) = \sigma^2 \quad (2.41)$$

สังเกตว่า ถ้าสมมติฐานหลัก (Null Hypothesis) ที่ว่า ไม่มีผลเนื่องจากปัจจัยของแถว คอลัมน์ และอันตรกริยามีค่าเป็นจริง ดังนั้น MS_A, MS_B, MS_{AB} และ MS_E จะมีค่าประมาณเท่ากับ σ^2 อย่างไรก็ตาม ถ้ามีความแตกต่างเนื่องจากปัจจัยของแถว จะได้ว่า MS_A จะมีค่ามากกว่า MS_E เหตุการณ์ทำนองเดียวกันจะเกิดขึ้นกับ MS_B และ MS_{AB} เช่นกัน ดังนั้น ในการทดสอบความมีนัยสำคัญของผลหลักและอันตรกริยา เราก็เพียงหาค่ากำลังสองเฉลี่ยที่เกี่ยวข้องด้วยค่า MS_E และถ้าอัตราส่วนนี้มีค่ามาก หมายความว่า ข้อมูลที่ได้จากการทดลองไม่สนับสนุนสมมติฐานหลัก (ปฏิเสธสมมติฐานหลัก)

ถ้าสมมติว่าแบบจำลองตามสมการ 2.31 เป็นแบบจำลองที่เหมาะสม และพจน์ของความผิดพลาด ε_{ijk} มีการกระจายแบบปกติและเป็นอิสระโดยมีค่าความแปรปรวนคงตัวเท่ากับ σ^2 ดังนั้นอัตราส่วนของกำลังสองเฉลี่ยที่เกิดขึ้นจาก MS_A/MS_E, MS_B/MS_E และ MS_{AB}/MS_E จะมีการกระจายแบบ F ซึ่งมีระดับขั้นความเสรีของตัวตั้งเป็น a-1, b-1 และ (a-1)(b-1) และมีระดับขั้นความเสรีของตัวหารคือ ab(n-1) ค่าบริเวณวิกฤต (Critical Region) คือปลายทางด้านบนของการกระจายแบบ F วิธีการทดสอบจะทำได้โดยอาศัยตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนดังแสดงในภาพประกอบ 2.16 เพื่อให้คำนวณได้ง่าย เราสามารถหาค่าของ SS_T, SS_A, SS_B และ SS_E ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \quad (2.42)$$

$$SS_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \quad (2.43)$$

$$SS_B = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \quad (2.44)$$

$$SS_{Subtotals} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SS_{AB} = SS_{Subtotals} - SS_A - SS_B \quad (2.45)$$

$$SS_E = SS_T - SS_{AB} - SS_A - SS_B \quad (2.46)$$

หรือ $$SS_E = SS_T - SS_{Subtotals}$$

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
A treatments	SS_A	a - 1	$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$F_0 = \frac{MS_A}{MS_E}$
B treatments	SS_B	b - 1	$MS_B = \frac{SS_B}{b-1}$	$F_0 = \frac{MS_B}{MS_E}$
Interaction	SS_{AB}	(a - 1)(b - 1)	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$
Error	SS_E	ab(n - 1)	$MS_E = \frac{SS_E}{ab(n-1)}$	
Total	SS_T	abn - 1		

ภาพประกอบ 2.16 ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนของการทดลองเชิงแฟคทอเรียล 2 ปัจจัย แบบ Fixed Effect Model

ที่มา: ปารเมศ ชุติมา, 2545 : 226

2.16 อัตราส่วนของผลประโยชน์ต่อเงินลงทุน [34, 35]

เนื่องจากโครงการที่เป็นสาธารณประโยชน์มักจะเป็นโครงการที่ถือว่าไม่มีกำไร หรืออีกนัยหนึ่งผลตอบแทนของโครงการไม่สามารถคิดเทียบเป็นจำนวนเงินได้โดยตรง เหมือนกับผลกำไรที่ได้จากการค้าขายหรือการลงทุนในกิจการต่างๆ ผลตอบแทนของโครงการเหล่านี้จึงเรียกว่าเป็นผลประโยชน์ (Benefit) ที่ได้จากโครงการ

ค่าอัตราส่วนที่ใช้เพื่อตัดสินใจระหว่างโครงการต่างๆ ที่มีขนาดใหญ่และมีขอบข่ายการดำเนินการกว้างขวางที่ถูกกำหนดขึ้นเรียกว่า “อัตราส่วนผลประโยชน์ต่อเงินลงทุน

(Benefit-Cost Ratio; B/C)" โดยจะต้องพยายามแปลงผลประโยชน์ที่ได้รับออกมาเป็นมูลค่าของเงิน อัตราส่วนของผลประโยชน์ต่อเงินลงทุนมีลักษณะดังสมการ 2.47 โดยปกติถ้าอัตราส่วนผลประโยชน์ต่อเงินลงทุนของโครงการใดมีค่ามากกว่าหนึ่ง ถือว่าโครงการนั้นน่าจะได้รับความสนใจ และถ้าโครงการนั้นแบ่งขั้นตอนของการดำเนินงานออกเป็นหลายๆ ระดับ ในแต่ละระดับอาจจะมีค่าของอัตราส่วนผลประโยชน์ต่อเงินลงทุนน้อยกว่าหรือมากกว่าหนึ่งก็ได้ เมื่ออัตราส่วนของผลประโยชน์ต่อเงินลงทุนของทั้งโครงการยังมีค่ามากกว่าหนึ่ง โครงการนั้นยังนับว่าน่าสนใจ

$$\text{อัตราส่วนของผลประโยชน์ต่อเงินลงทุน (B/C)} = \frac{\text{ผลประโยชน์}}{\text{เงินลงทุน}} \qquad (2.47)$$

ในการวิเคราะห์อัตราส่วนของผลประโยชน์ต่อเงินลงทุนนั้น ในความเป็นจริงมูลค่าของเงินจะอยู่ที่ช่วงเวลาในการลงทุนแตกต่างกัน ดังนั้นจะต้องแปลงมูลค่าของเงินที่อยู่ตามช่วงเวลาต่างๆ มาอยู่ที่จุดเดียวกัน อาจจะแปลงเป็นมูลค่าปัจจุบัน มูลค่าจ่ายรายปี หรือมูลค่าอนาคตก็ได้ จากสมการ 2.47 สามารถเขียนดัดแปลงให้เหมาะสมได้ดังสมการ 2.48

$$\text{อัตราส่วนของผลประโยชน์ต่อเงินลงทุน (B/C)} = \frac{\text{ผลประโยชน์เทียบเท่า}}{\text{เงินลงทุน}} \qquad (2.48)$$

เมื่อ ผลประโยชน์ คือ สิ่งที่เป็นประโยชน์ทั้งหมดต่อผู้ใช้
เงินลงทุน คือ ค่าใช้จ่ายทั้งหมด