บทที่ 2

ทฤษฎีสนามไฟฟ้า (Electric Field)

เมื่อวางประจุไฟฟ้าอยู่ใกล้กันย่อมเกิดแรงกระทำระหว่างประจุไฟฟ้าขึ้น ซึ่งเป็นไปตามกฎของคูลอมบ์ (Coulomb 's law) กฎนี้ใช้อธิบายหาแรงที่เกิดขึ้นระหว่างประจุไฟฟ้าตั้งแต่สองประจุขึ้นไป ดังนั้นถ้ามีประจุ q_a และ q_b วางอยู่ในตัวกลางหนึ่งด้วยระยะทาง r หาแรงที่กระทำบนประจุ q_b เนื่องจาก q_a ได้ดังสมการที่ (2.1)

$$\bar{F} = k\frac{q_a q_b}{R^2}\hat{r} \tag{2.1}$$

สมการที่ (2.1) แสดงให้เห็นว่ากฎของคูลอมบ์คือแรงที่เกิดขึ้นบนประจุตัวหนึ่งอันเนื่องมาจากประจุอีกตัวหนึ่งมีค่าแปรผันตรงตามประจุทั้งสอง และยังแปรผกผันตามระยะห่างระหว่างประจุกำลังสอง (Lorrain and Corson , 1970)

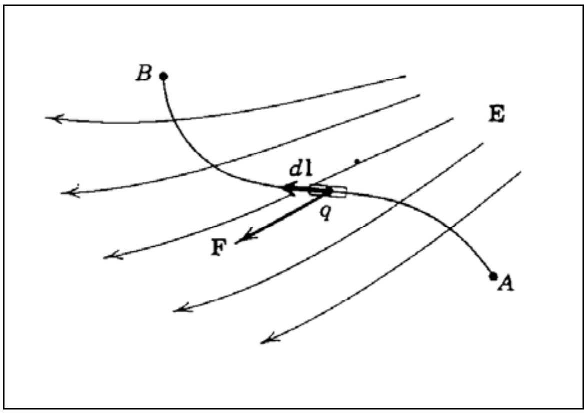
สมมุติมีประจุไฟฟ้า q_a วางอยู่ที่จุดใดจุดหนึ่งซึ่งระบุตำแหน่งที่แน่นอน นำประจุทดสอบ q_t เลื่อนเข้ามาใกล้รอบ ๆ ประจุ q_a พบว่ามีแรงกระทำที่เกิดจากประจุไฟฟ้า q_a กระทำต่อประจุทดสอบ q_t แสดงให้เห็นว่ามีอำนาจแผ่ขยายไปรอบ ๆ ประจุไฟฟ้า q_a เรียกว่า สนามไฟฟ้า (electric field) ใช้สัญลักษณ์ $\bar{E}$ ดังสมการที่ (2.2)

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q_t} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{r} \tag{2.2}$$

โดยค่าสนามไฟฟ้า ($\bar{E}$) ที่ตำแหน่งใด ๆ นิยามได้ว่า เวกเตอร์ของแรง ($\bar{F}$) ที่กระทำต่อหนึ่งหน่วยประจุบวกของประจุทดสอบ ณ ที่ตำแหน่งนั้น (สันติ อัศวศรีพงศ์ธร, 2533)

อย่างไรก็ตามการประยุกต์กฎของคูลอมบ์ในการหาค่าสนามไฟฟ้า ($\vec{E}$) ยุ่งยากและซับซ้อนเนื่องจากค่าสนามไฟฟ้ามีทิศทางเข้ามาเกี่ยวข้องซึ่งเป็นปริมาณเวกเตอร์ จึงเปลี่ยนการคำนวณเป็นปริมาณสเกลาร์ในรูปของงาน ($\boldsymbol{W}$) จากศักย์ไฟฟ้า ($\boldsymbol{V}$) แล้วนำมาหาอนุพันธ์วิธีการนี้ง่ายกว่าการหาค่าสนามไฟฟ้าโดยตรง

พิจารณางานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุทดสอบ $\boldsymbol{q}$ ในบริเวณสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ในบริเวณสนามไฟฟ้าจากจุด A ไปยังจุด B ใด ๆ ตามแนวเส้น ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 แสดงการเคลื่อนประจุทดสอบ $\boldsymbol{q}$ ในบริเวณสนามไฟฟ้าจาก จุด A ไปยังจุด B

ที่มา : Jackson , 1998 : 30

ด้วยแรงกระทำจากภายนอก ($\vec{F}_{ext}$) ซึ่งมีค่าเท่ากับแรงเนื่องจากสนามไฟฟ้าที่กระทำต่อประจุ เป็นดังสมการที่ (2.3)

$$\vec{F}_{ext} = -(q\vec{E}) \qquad (2.3)$$

ดังนั้นปริมาณงาน ($\boldsymbol{W}_{AB}$) ที่แรงภายนอกจะต้องกระทำ ในการเคลื่อนประจุไฟฟ้าจากจุด A ไปยังจุด B มีค่าเท่ากับ

$$W_{AB} = -\int_{A}^{B} \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl} = -q \int_{A}^{B} \vec{E} \cdot \vec{dl} \qquad (2.4)$$

เมื่อ $\vec{dl}$ เป็นเวกเตอร์ย่อยของการขจัดในทิศทางเคลื่อนที่ของประจุ

จากนิยามของความต่างศักย์ไฟฟ้าหมายถึง งานต่อหนึ่งหน่วยประจุที่ใช้ในการเคลื่อนประจุไฟฟ้าระหว่างตำแหน่งสองตำแหน่ง (Jackson , 1998)

ดังนั้นค่าความต่างศักย์ไฟฟ้า (V_{AB}) ระหว่างจุด A ไปยังจุด B จะสัมพันธ์กับค่าสนามไฟฟ้า ($\vec{E}$) ดังสมการ (2.5)

$$V_{AB} = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} = -\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot \vec{dl} \qquad (2.5)$$

เมื่อ V_A และ V_B คือ ค่าศักย์ไฟฟ้าที่จุด A และจุด B ตามลำดับ

ถ้าเลือกจุด A เป็นจุดอ้างอิงซึ่งเป็นระยะอนันต์ โดยกำหนดให้ศักย์ไฟฟ้าที่จุด A มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น ศักย์ไฟฟ้าที่จุด B ซึ่งอาจเป็นตำแหน่งใด ๆ จะมีค่า

$$V_B = -\int_{\infty=0}^{B} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

(2.6)

สมการที่ (2.6) เป็นฟังก์ชันของพลังงานศักย์ไฟฟ้า (potential function) ที่อธิบายค่าศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่งใด ๆ ในสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ โดยเทียบอ้างอิงกับต่างศักย์ไฟฟ้าที่จุด A ซึ่งกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์

จากภาพประกอบ 1 ถ้าจุด A และจุด B อยู่ใกล้กันมาก โดยห่างกันเป็นระยะ

$\vec{dl}$ ตามแนวเส้น สมการที่ (2.5) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\lim_{B\to A} \{V_B - V_A\} = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

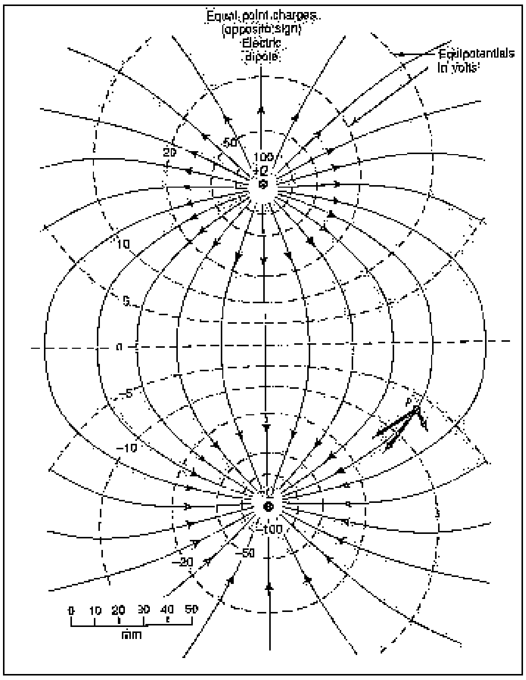
หรือ

$$\boldsymbol{dV} = -\,\vec{\boldsymbol{E}}\,.\,\vec{\boldsymbol{dl}} \qquad (2.7)$$

เมื่อ $\boldsymbol{dV}$ เป็นผลต่างของศักย์ไฟฟ้าที่จุดทั้งสองซึ่งอยู่ใกล้กันมาก

กรณีที่จุดทั้งสองซึ่งอยู่ใกล้กันมาก ๆ และอยู่บนเส้นสมศักย์เส้นเดียวกัน $\boldsymbol{dV}$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งหมายความว่า $\vec{\boldsymbol{E}}\,.\,\vec{\boldsymbol{dl}}$ ต้องเท่ากับศูนย์ตามไปด้วย ซึ่งจะเป็นไปได้กรณีเดียวคือ เวกเตอร์ $\vec{\boldsymbol{E}}$ ต้องตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{\boldsymbol{dl}}$ โดยมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองเป็น 90° แต่เนื่องจาก $\vec{\boldsymbol{dl}}$ เป็นเวกเตอร์อยู่ในแนวเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดสองจุดที่อยู่ใกล้กันมากมีศักย์ไฟฟ้าเท่ากัน พิจารณาถือได้ว่า $\vec{\boldsymbol{dl}}$ สัมผัสกับเส้นสมศักย์ ณ จุดที่พิจารณานั้น

ถ้าลากต่อจุดต่าง ๆ ในสนามไฟฟ้าซึ่งมีศักย์ไฟฟ้าเท่ากัน จะได้เส้นหรือผิว ที่เรียกว่าเส้นสมศักย์ไฟฟ้าหรือผิวสมศักย์ไฟฟ้าตามลำดับ ซึ่งสนามไฟฟ้าหนึ่ง ๆ จะสามารถหาเส้นสมศักย์หรือผิวสมศักย์ได้หลายเส้นหรือหลายผิว โดยแต่ละเส้นหรือแต่ละผิวมีศักย์ไฟฟ้าไม่เท่ากัน ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 แสดงตัวอย่างเส้นสมศักย์ และเส้นแรงไฟฟ้าที่ปรากฏระหว่างขั้วลบกับขั้วบวกของตัวนำไฟฟ้า

ที่มา : Kraus , 1988 : 69

ดังนั้น สนามไฟฟ้า ($\vec{E}$) ณ จุดใด ๆ จะมีทิศทางตั้งได้ฉากกับเส้นสมศักย์ที่ลากผ่านจุดนั้นเสมอ และเส้นที่ซึ่งเกิดจากการลากต่อเวกเตอร์ $\vec{E}$ นี้เรียกว่าเส้นแรงไฟฟ้าซึ่งทิศทางของเส้นแรงไฟฟ้า และขนาดความหนาแน่นของเส้นแรงไฟฟ้าที่บริเวณหนึ่งจะสัมพันธ์สอดคล้องกับทิศและขนาดของสนามไฟฟ้าที่บริเวณเดียวกัน ดังในภาพประกอบ 2

ส่วนกรณีที่จุดทั้งสองอยู่ในแนวทิศของสนามไฟฟ้า คือ $d\vec{l}$ ขนานกับ $\vec{E}$ หรือ $d\vec{l}$ มีทิศตั้งฉากกับเส้นสมศักย์ ณ จุดที่พิจารณา สมการที่ (2.7) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$dV \;=\; -\,\vec{E}\,.\,d\vec{l} \;=\; -\left|\vec{E}\right|\left|d\vec{l}\right|.\cos\theta \qquad (2.8)$$

หรือ

$$\left|\vec{E}\right|.\cos\theta \;=\; -\,\frac{dV}{\left|d\vec{l}\right|} \qquad (2.9)$$

จากสมการที่ (2.8) แสดงทิศทางของระยะทาง l อยู่ในทิศทางการเคลื่อนที่ของประจุ ซึ่งทำมุม θ กับทิศทางของสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ และหาอนุพันธ์ของศักย์ไฟฟ้า V ในทิศทางของระยะทาง l ซึ่งสมการนี้สามารถนำไปใช้ประมาณค่าขนาดของสนามไฟฟ้า ($\left|\vec{E}\right|$) ที่บริเวณใดบริเวณหนึ่งได้

จากสมการที่ (2.9) ต้องหาทิศทางของ $d\vec{l}$ ที่ทำให้การเปลี่ยนแปลงของศักย์ไฟฟ้ามีค่าสูงสุด ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ $\cos\theta = -1$ หรือ $d\vec{l}$ มีทิศตรงกันข้ามกับ $\vec{E}$ เราเรียกค่าสูงสุด $\frac{dV}{\left|d\vec{l}\right|}$ ที่ตำแหน่งที่กำหนดว่า เกรเดียนท์ของศักย์ไฟฟ้า V (gradient of potential) (ไพบูลย์ พฤกษ์สุนันท์ , 2538) ดังนั้นเกรเดียนท์คือตัวดำเนินการที่ทำต่อศักย์ไฟฟ้า V (X,Y,Z)ซึ่งเป็นฟังก์ชันของพิกัดที่เป็นค่าคงที่ เพื่อให้ได้สนามไฟฟ้า $\vec{E}$

$$\vec{E} \;=\; -\,\nabla V \qquad (2.10)$$

พิจารณางานต่อหน่วยประจุชิ้นเล็ก ๆ จากตำแหน่งที่พิจารณามีพิกัด (X,Y,Z) ไปเป็นระยะ $\boldsymbol{dl}$ ดัง

$$-\boldsymbol{dV} = \bar{\boldsymbol{E}}.\bar{\boldsymbol{dl}}$$

$$-\boldsymbol{dV} = (\boldsymbol{E_x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \boldsymbol{E_y}\hat{\boldsymbol{e}}_y + \boldsymbol{E_z}\hat{\boldsymbol{e}}_z).(\boldsymbol{dx}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \boldsymbol{dy}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + \boldsymbol{dz}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$$

$$-\boldsymbol{dV} = \boldsymbol{E_x\,dx} + \boldsymbol{E_y\,dy} + \boldsymbol{E_z\,dz} \qquad (2.11)$$

ให้ $\boldsymbol{dV}$ เป็นเสมือนผลต่างอนุพันธ์รวม (total differential)

จากความรู้ทางแคลคูลัส หาอนุพันธ์ส่วนย่อย (partial derivation) ณ ตำแหน่งที่เริ่มพิจารณา

$$\boldsymbol{dV} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{dy} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}\boldsymbol{dz} \qquad (2.12)$$

เปรียบเทียบสมการที่ (2.11) และ (2.12)

$$\boldsymbol{E_x\,dx} + \boldsymbol{E_y\,dy} + \boldsymbol{E_z\,dz} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{dy} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}\boldsymbol{dz}\right) \qquad (2.13)$$

ทำสมการที่ (2.13) ให้อยู่ในรูปผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\bar{\boldsymbol{E}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \qquad (2.14)$$

หรือ

$$\bar{\boldsymbol{E}} = -\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)\boldsymbol{V} \qquad (2.15)$$

เมื่อประจุมีการกระจายตลอดปริมาตร แต่ละประจุจะสร้างสนามไฟฟ้าไปบนจุดข้างนอก การหาผลรวมหรือการอินทิเกรตจะสามารถหาสนามไฟฟ้าสุทธิได้ แม้ว่าส่วนที่ย่อยที่สุดในประจุที่พบคืออิเล็กตรอน (electron) หรือโปรตรอน (protron) จะพิจารณาให้ประจุมีการกระจายอย่างต่อเนื่อง (ซึ่งความเป็นจริงการกระจายของประจุไม่ต่อเนื่อง) สามารถแสดงความหนาแน่นของประจุเชิงปริมาตรได้ (ประสิทธิ์ ทีฆพุฒิ, 2540) ดังนี้

$$\rho = \frac{dq}{d\upsilon} \qquad (2.16)$$

หรือ

$$dq = \rho d\upsilon \qquad (2.17)$$

กำหนดให้ $d\upsilon$ คือปริมาตร มีหน่วยเป็นลูกบาศก์เมตร (m^3) ให้ dq คือประจุไฟฟ้ามีหน่วยเป็นคูลอมบ์ (C) และ ρ คือ ความหนาแน่นประจุไฟฟ้าเชิงปริมาตร มีหน่วยเป็นคูลอมบ์ต่อลูกบาศก์เมตร (C/m^3)

จากสมการ (2.17) สามารถหาความหนาแน่นประจุไฟฟ้าเชิงปริมาตร (ρ) ได้โดยการอินทิเกรตตลอดปริมาตร ดังนี้

$$q = \int_{vol} \rho d\upsilon \qquad (2.18)$$

พฤติกรรมของสนามไฟฟ้าสถิตย์ สามารถอธิบายได้ด้วยสองสมการอนุพันธ์ดังนี้

$$\nabla . \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2.19)$$

เนื่องจากสนามไฟฟ้าได้มาจากเกรเดียนท์ของศักย์ไฟฟ้าดังสมการที่ (2.10) คือ $\vec{E} = -\nabla \mathbf{v}$ เมื่อแทนสมการที่ (2.19) ได้สมการดังนี้

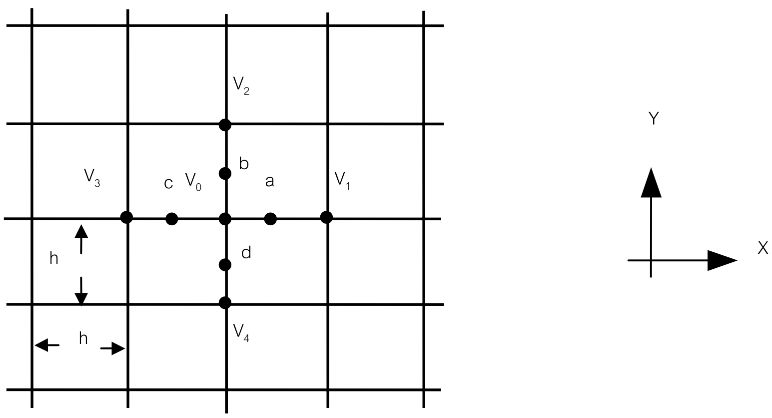
$$\nabla^2 \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -\frac{\rho(X, Y, Z)}{\varepsilon_0} \qquad (2.20)$$

ในกรณีพิเศษในบริเวณที่มีประจุมีลักษณะอยู่แยกห่างกันเป็นหน่วย (discrete) หรือเป็นบริเวณที่ปลอดประจุไฟฟ้า แสดงให้เห็นว่าความหนาแน่นประจุไฟฟ้าเชิงปริมาตร (ρ) เป็นศูนย์สมการที่ (2.20) จะได้ดังนี้

$$\nabla^2 \mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = 0 \qquad (2.21)$$

สมการที่ (2.21) เรียกว่า สมการลาปลาซ ใช้หาศักย์ไฟฟ้าสถิตย์ในบริเวณพื้นที่ที่มีความหนาแน่นประจุเชิงปริมาตรรวมเป็นศูนย์เป็นสมการเอกพันธ์ (homogeneous equation)

ปัญหาเกี่ยวกับศักย์ไฟฟ้าแบบสองมิติ เมื่อศักย์ไฟฟ้าไม่ได้ขึ้นกับระบบพิกัดแกน Z สามารถแก้ปัญหาได้โดยใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ด้วยสมการลาปลาซโดยอาศัยหลักการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดเมื่อทราบศักย์ไฟฟ้าทุก ๆ จุดบนขอบเขตที่กำหนด แบ่งพื้นที่ภาคตัดขวางของบริเวณที่ต้องการหาค่าศักย์ไฟฟ้าออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ h ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 แสดงขอบเขตของสนามศักย์ไฟฟ้าแบบสองมิติ แบ่งออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว h

ที่มา : สันติ อัศวศรีพงศ์ธร, 2533 : 138

โดยบริเวณดังกล่าวเป็นบริเวณที่ไม่มีประจุอิสระ หรือค่าความหนาแน่นประจุเชิงปริมาตรเป็นศูนย์ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นไปตามสมการลาปลาซ $\nabla^2 = 0$ และบรรจุด้วยสารไดอิเลกตริกเนื้อเดียวล้วน จึงจะสามารถนำสมการดังกล่าวมาใช้ในการแก้ไขหาเทอมต่าง ๆ ของสนามไฟฟ้าได้ตามต้องการ ดังนี้

$$\nabla . \overline{E} = 0 \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial E_X}{\partial X} + \frac{\partial E_Y}{\partial Y} = 0$$

(2.23)

แต่จากปฏิบัติการเกรเดียนท์ $E_X = -\frac{\partial V}{\partial X}$ และ $E_Y = -\frac{\partial V}{\partial Y}$ แทนค่า E_X และ E_Y ได้

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 0 \tag{2.24}$$

โดยการประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) เหล่านี้ อาจหาได้ในเทอมของศักย์ไฟฟ้าที่ติดค่าไว้ โดยที่

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \approx \frac{V_1 - V_0}{h} \tag{2.25}$$

และ

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \approx \frac{V_0 - V_3}{h} \tag{2.26}$$

จากสมการ (2.25) และ (2.26) นำมาประมาณค่าหาสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง (The second partial derivatives) ได้สมการดังนี้

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 \approx \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} \approx \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

(2.27)

ในทำนองเดียวกันได้พิกัดแกน Y ดังสมการนี้

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right|_0 \approx \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_b - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_d}{h} \approx \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2} \qquad (2.28)$$

นำสมการ (2.27) และ (2.28) รวมกันได้ดังสมการนี้

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} \qquad (2.29)$$

$$V_0 = \frac{1}{4}\,(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \qquad (2.30)$$

สมการที่ (2.30) เมื่อกำหนดให้ h มีค่าใกล้เคียงศูนย์มากที่สุด แสดงให้เห็นว่าศักย์ไฟฟ้าที่จุดใด ๆ คือ ค่าเฉลี่ยของศักย์ไฟฟ้าของจุดใกล้เคียงรอบ ๆ ทั้งสี่จุด ในการคำนวณหาศักย์ไฟฟ้าดังกล่าวนี้ สามารถหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่มุมของทุก ๆ ตาราง ทีละตาราง วิธีการนี้จะดำเนินซ้ำกันเรื่อย ๆ จนกระทั้งค่าที่คำนวณได้ในรอบถัดมามีค่าต่างกันน้อยมากหรือไม่แตกต่างกันเลย วิธีการนี้เรียกว่า วิธีคำนวณซ้ำ (The Iteration Method)

ในกรณีที่ต้องการความแม่นยำในการคำนวณสูง ใช้เวลาคำนวณค่อนข้างมากฉะนั้นวิธีการคำนวณซ้ำดังกล่าวจึงเป็นวิธีที่เหมาะสมกับการคำนวณโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์เข้าช่วยในการประมวลผลข้อมูล