# บทที่ 1
# บทนำ

## 1.1 บทนำต้นเรื่อง

อนุภาคพื้นฐานแบ่งตามลักษณะของสปินได้เป็น 2 รูปแบบคืออนุภาคที่มีเลขสปินเป็นจำนวนเต็มหรือที่เรียกว่าโบซอนและอนุภาคที่มีเลขสปินเป็นครึ่งจำนวนเต็มหรือที่เรียกว่าเฟอร์มิออน ในปี ค.ศ. 1928 พอล ดิแรก [1] ได้เสนอสมการสำหรับอนุภาคที่มีสปิน ½ ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับเวลาและอวกาศสามมิติดังนี้

$$\not{D}\psi \equiv (i\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m)\psi = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

โดยที่ $m$ คือ มวลอนุภาค $\gamma_{\mu}$ คือ เมทริกซ์ขนาด $4\times4$ นิยามไว้ดังนี้

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{bmatrix}$$

และมีคุณสมบัติทางพีชคณิตของคลิฟฟอร์ด (Clifford algebra)

$$\left\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\right\} = 2g_{\mu\nu}I \qquad (1\text{-}2)$$

$g_{\mu\nu}$ คือ เมทริกซ์เทนเซอร์ $I$ คือ เมเทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $4\times4$ $\sigma_i$ คือ เมทริกซ์ขนาด $2\times2$ เรียกว่า เมทริกซ์ของเพาลี และ $\psi$ เป็นคอลัมน์เมทริกซ์สี่แถว เรียกว่า สปินเนอร์ของดิแรก [1,2]

ทฤษฎีของดิแรกเป็นทฤษฎีทางฟิสิกส์ที่รวมกลศาสตร์ควอนตัมเข้ากับทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ซึ่งผลเฉลยจากสมการของดิแรกสามารถอธิบายในเชิงฟิสิกส์ว่าอนุภาคที่มีสปินเป็น ½ ไม่เหมือนเดิมเมื่อหมุนเพียงหนึ่งรอบ แต่กลับมาเหมือนเดิมอีกครั้งเมื่อหมุนไปครบสองรอบ นอกจากนี้ทฤษฎีของดิแรกยังทำนายว่า อิเล็กตรอนมีอนุภาคคู่ที่เรียกว่าแอนติอิเล็กตรอนหรือโพซิตรอน จากการค้นพบโพซิตรอนโดยนักฟิสิกส์ของสถาบันเทคโนโลยีแห่งแคลิฟอร์เนีย คาร์ลแอนเดอร์สันในปี ค.ศ.1932 จึงเป็นการยืนยันความถูกต้องในทฤษฎีของดิแรกและส่งผลให้เขาได้รับรางวัลโนเบลในปี ค.ศ.1933 [2]

ตัวดำเนินการของดิแรก (Dirac operator) ได้ถูกขยายเป็นรูปแบบทั่วๆไปที่เรียกว่า ตัวดำเนินการโคสแตนท์ (Kostant operator) [3,4,5,6,7,8] ทั้งนี้ตัวดำเนินการโคสแตนท์เป็นตัวดำเนินการที่สร้างขึ้นบนปริภูมิโคเชียน (quotient spaces) ของคู่พีชคณิตของลี (Lie algebra) g และพีชคณิตย่อย (subalgebra) h ซึ่งเขียนในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\not{K}\psi \equiv (\sum_i \gamma_i T_i)\psi = 0 \qquad (1\text{-}3)$$

โดย $T_i$ คือ ตัวดำเนินการบนปริภูมิพีชคณิตของลีซึ่งอยู่ใน g แต่ไม่อยู่ใน h

ผลเฉลยที่เป็นแก่นคำตอบของตัวดำเนินการโคสแตนท์จะซ้อนกันเป็นชั้นๆสูงอนันต์ ในชั้นล่างสุดประกอบด้วยกลุ่มอนุภาคโบซอนและกลุ่มอนุภาคเฟอร์มิออนซึ่งมีจำนวนอนุภาคในแต่ละกลุ่มเท่ากัน ($n_B = n_F$) รวมเรียกว่า ซูเปอร์มัลติเพลต (Supermultiplets) [3,4,5,6,7,8,9] โดย $n_B$ คือ จำนวนอนุภาคโบซอน และ $n_F$ คือ จำนวนอนุภาคเฟอร์มิออน

ในงานวิทยานิพนธ์นี้ใช้วิธีการทางพีชคณิตศึกษาการสร้างตัวดำเนินการโคสแตนท์สำหรับโคเชียนของพีชคณิต so(6)/(so(4)×so(2)) และคำนวณหาผลเฉลยที่เป็นแก่นคำตอบ (kernel solutions) ของตัวดำเนินการ

## 1.2 วัตถุประสงค์

1. สร้างตัวดำเนินการโคสแตนท์สำหรับพีชคณิตของลีแบบโคเชียน so(6)/(so(4)×so(2))
2. คำนวณหาแก่นคำตอบของตัวดำเนินการโคสแตนท์
3. วิเคราะห์แก่นคำตอบและอธิบายความหมายทางฟิสิกส์