บทที่ 2

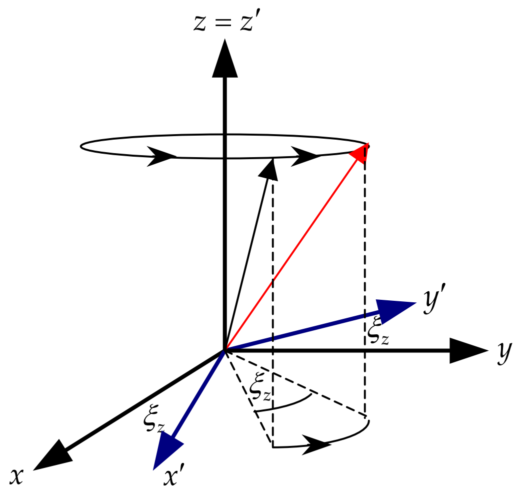
ทฤษฎี

2.1 การหมุนของปริภูมิเวกเตอร์

เวกเตอร์ตำแหน่งในปริภูมิสามมิติ $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ สามารถเขียนแทนในรูปแบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

การหมุนของเวกเตอร์ในปริภูมิสามารถทำได้โดยใช้เมทริกซ์ขนาด 3×3 ในกรณีที่หมุนเวกเตอร์รอบแกน z เป็นมุม ξ_z ดังภาพประกอบ 2.1



<u>ภาพประกอบ 2.1</u> แสดงการหมุนเวกเตอร์ในระนาบ xy ด้วยมุม ξ_z

เมทริกซ์ของการหมุนคือ

$$R_z(\xi_z) = \begin{bmatrix} cos(\xi_z) & -sin(\xi_z) & 0 \\ sin(\xi_z) & cos(\xi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

ถ้า ξ_z มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ สมการ (2-2) ประมาณได้ตามนี้

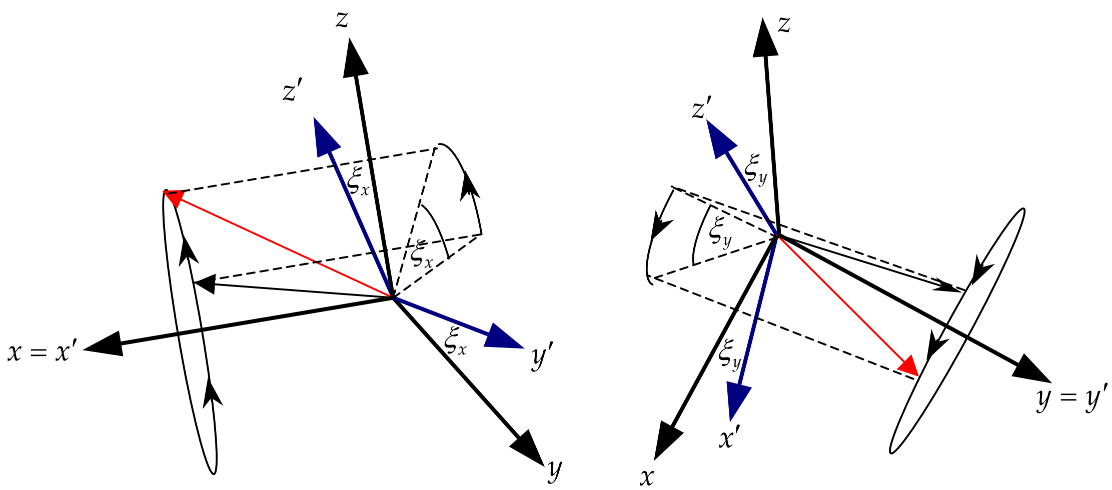
$$R_z(\xi_z) \approx \begin{bmatrix} 1 & -\xi_z & 0 \\ \xi_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I - i\xi_z T_z$$

$$= exp(-i\xi_z T_z) \tag{2-3}$$

โดย I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ และ T_z เป็นเมทริกซ์ดังนี้

$$T_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

ในทำนองเดียวกัน การหมุนเวกเตอร์รอบแกน x และ y ดัง**ภาพประกอบ** 2.2



<u>ภาพประกอบ</u> 2.2 **แสดงการหมุนเวกเตอร์ในระนาบ** yz และ xz เป็นมุม ξ_x และ ξ_y **ตามลำดับ**

เมทริกซ์ของการหมุน $R_x(\xi_x)$ และ $R_y(\xi_y)$ คือ

$$R_x(\xi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\xi_x) & -sin(\xi_x) \\ 0 & sin(\xi_x) & cos(\xi_x) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\xi_y) = \begin{bmatrix} cos(\xi_y) & 0 & sin(\xi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\xi_y) & 0 & cos(\xi_y) \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}5)$$

ถ้ามุม ξ_x และ ξ_y มีค่าเข้าใกล้ศูนย์จะได้ว่า

$$R_x(\xi_x) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi_x \\ 0 & \xi_x & 1 \end{bmatrix} = I - i\xi_x T_x$$

$$= exp(-i\xi_x T_x)$$

$$R_y(\xi_y) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\xi_y & 0 & 1 \end{bmatrix} = I - i\xi_y T_y$$

$$= exp(-i\xi_x T_x)$$

โดย T_x และ T_y เป็นตามนี้

$$T_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad T_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}6)$$

การหมุนรอบแกน z, y และ x ด้วยมุม ξ_z, ξ_y และ ξ_x ตามลำดับ เป็นผลคูณของ $R_x(\xi_x)$ $R_y(\xi_y)$ $R_z(\xi_z)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} R(\xi_x, \xi_y, \xi_z) &= R_x(\xi_x) R_y(\xi_y) R_z(\xi_z) \\ &= exp(-i\xi_x T_x).exp(-i\xi_y T_y).exp(-i\xi_z T_z) \qquad (2\text{-}7) \\ &= exp(-i\xi.T) \end{aligned}$$

โดย $\xi.T = \xi_x T_x + \xi_y T_y + \xi_z T_z$

เอกโพเนนเชียลของเมทริกซ์สองเทอมคูณกันจะได้รูปทั่วๆไปดังนี้

$$exp(-i\xi.T).exp(-i\varsigma.T)=exp(-i\zeta.T) \tag{2-8}$$

ค่า ζ ในเทอมของ ξ และ ς หาได้โดยใช้เอกลักษณ์ของเอกโพเนนเชียลในรูปอนุกรมอนันต์ตามนี้

$$exp(-i\xi.T)=1-i\xi.T-\frac{(\xi.T)^2}{2!}+... \tag{2-9}$$

โดยอาศัยความสัมพันธ์ตามสมการ (2-9) ด้านซ้ายมือของสมการ (2-8) เป็น

$$\begin{aligned} exp(-i\zeta.T) &= exp(-i\xi.T).exp(-i\varsigma.T) \\ &=\left(1-i\xi.T-\frac{(\xi.T)^2}{2!}+...\right)\left(1-i\varsigma.T-\frac{(\varsigma.T)^2}{2!}+...\right) \\ &=\left(1-i(\xi+\varsigma).T-\frac{[(\xi+\varsigma).T]^2}{2!}-\frac{[\xi.T,\varsigma.T]}{2}+...\right) \\ &=exp\left(-i(\xi+\varsigma).T-\frac{[(\xi+\varsigma).T]^2}{2!}-\frac{[\xi.T,\varsigma.T]}{2}+...\right) \end{aligned} \tag{2-10}$$

ค่า ζ หาได้เมื่อทราบค่าของคอมมิวเตเตอร์ ซึ่งความสัมพันธ์ของคอมมิวเตเตอร์ระหว่างตัวดำเนินการ T เป็นตามนี้

$$\left[T_x,T_y\right]=iT_z \quad \left[T_y,T_z\right]=iT_x \text{ และ } \left[T_z,T_x\right]=iT_y \tag{2-11}$$

ซึ่งเป็นไปตามคุณสมบัติพีชคณิตของลี so(3) [2,10,11,12]

พีชคณิตของลีที่ได้กล่าวมานั้นมาจากกรุ๊ปของการหมุนเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติซึ่งจะมีบท บาทที่มีความสำคัญต่อการนิยามพีชคณิตของลีในแบบทั่วๆไป พีชคณิตของลีบนปริภูมิเวกเตอร์ V มีคุณสมบัติภายใต้การกระทำแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear) ดังต่อไปนี้

1. $\left[x_1+x_2,y\right]=\left[x_1,y\right]+\left[x_2,y\right]$ โดยที่ x_1, x_2 และ y เป็นสมาชิกในปริภูมิเวกเตอร์ V

2. $\left[ax,y\right]=a\left[x,y\right]$ โดยที่ a เป็นสมาชิกในสนามของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ และจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ x และ y เป็นสมาชิกในปริภูมิเวกเตอร์ V

3. $\left[x,y\right]=-\left[y,x\right]$ สำหรับทุก x และ y เป็นสมาชิกในปริภูมิเวกเตอร์ V และ

4. $\left[x,[y,z]\right]+\left[y,[z,x]\right]+\left[z,[x,y]\right]=0$ โดยที่ x, y และ z เป็นสมาชิกในปริภูมิเวกเตอร์ V

คุณสมบัติข้อที่ 1 เป็นคุณสมบัติในการกระจายผลรวมของสมาชิกในคอมมิวเตเตอร์ คุณสมบัติข้อที่ 2 เป็นการจัดกลุ่มการคูณของสมาชิกในคอมมิวเตเตอร์ด้วยสนามของจำนวนจริง n หรือจำนวนเชิงซ้อน ข คุณสมบัติข้อที่ 3 เป็นคุณสมบัติในการสลับลำดับการคูณของสมาชิกในคอมมิวเตเตอร์ และคุณสมบัติข้อที่ 4 เป็นเงื่อนไขบังคับเรียกว่าเอกลักษณ์แบบยาโคบิ

พีชคณิตของลีแบ่งเป็น 2 กลุ่ม [13,14,15] ได้แก่ พีชคณิตของลีแบบฉบับมี 4 กลุ่มย่อยคือ su(n+1) sp(2n) so(2n+1) และ so(2n) ส่วนพีชคณิตอีกแบบหนึ่งคือ พีชคณิตของลีแบบเฉพาะมี 5 กลุ่มย่อยคือ G_2 F_4 E_6 E_7 และ E_8 พีชคณิตของลีนิยามได้ในเทอมของเมทริกซ์โดยการกำหนดให้ $\{e_{a,b}\}$ โดยที่ $1 \le a < b \le n$ เป็นเซตของฐานหลักมาตรฐานบนปริภูมิเวกเตอร์ V $e_{a,b}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีองค์ประกอบในแถวที่ a และหลักที่ b เป็น 1 ส่วนองค์ประกอบที่เหลือมีค่าเป็นศูนย์

$$e_{a,b} = \begin{cases} 1 \text{ ในแถวที่ } a \text{ และหลักที่ } b \\ 0 \text{ นอกแถวที่ } a \text{ และหลักที่ } b \end{cases} \qquad (2\text{-}12)$$

กฎการคูณสำหรับ $e_{a,b}$ คือ

$$e_{a,b}e_{c,d} = e_{a,d}\delta_{b,c} \qquad (2\text{-}13)$$

ตัวอย่าง เช่น ในปริภูมิเวกเตอร์ 2 มิติ กำหนดให้ฐานหลัก

$$e_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ และ } e_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}14)$$

จะได้ว่า

$$e_{2,1}e_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_{2,2} \qquad (2\text{-}15)$$

เมทริกซ์มีความสัมพันธ์ของคอมมิวเตเตอร์ [14] ดังนี้

$$\begin{aligned} \left[e_{a,b}, e_{c,d}\right] &= e_{a,b}e_{c,d} - e_{c,d}e_{a,b} \\ &= e_{a,d}\delta_{b,c} - e_{c,b}\delta_{a,d} \end{aligned} \qquad (2\text{-}16)$$

กำหนดฐานหลักตามสมการ (2-14) ความสัมพันธ์ตามสมการ (2-16) จะได้

$$\begin{aligned} \left[e_{2,1}, e_{1,2}\right] &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_{2,2} - e_{1,1} \end{aligned} \qquad (2\text{-}17)$$

สำหรับเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I = \sum_i e_{i,i}$ ซึ่งมีองค์ประกอบในแนวทแยงเป็น 1 ทั้งหมดจะมีคอมมิวเตเตอร์ (commutator) เป็นศูนย์กับทุกๆเมทริกซ์ฐานหลัก

2.2 พีชคณิตของลีแบบฉบับ (Classical Lie algebras)

2.2.1 พีชคณิตของลีแบบยูนิแทรีพิเศษ su(n+1) หรือ A_n

su(n+1) ประกอบด้วยเมทริกซ์ฐานหลัก $e_{a,b}$ โดย $a \neq b$ และพีชคณิตคาร์ตังย่อย $h = \sum \lambda_i e_{i,i}$ ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $\sum \lambda_i = 0$ จำนวนเมทริกซ์ของตัวกำเนิดของ su(n+1) มีทั้งหมด n (n+2) ตัว ความสัมพันธ์ของคอมมิวเตเตอร์ระหว่าง h และ $e_{a,b}$ เป็นดังนี้ [11,14,15]

$$\left[h, e_{a,b}\right] = \left[\sum_i \lambda_i e_{i,i}, e_{a,b}\right]$$

$$= \sum_i \lambda_i \left[e_{i,i}, e_{a,b}\right]$$

$$= \sum_i (\lambda_i e_{i,b} \delta_{i,a} - \lambda_i e_{a,i} \delta_{b,i}) \tag{2-18}$$

$$= (\lambda_a - \lambda_b) e_{a,b}$$

$$= \begin{cases} +(\lambda_a - \lambda_b) e_{a,b} \ ; \ a < b \\ -(\lambda_a - \lambda_b) e_{a,b} \ ; \ a > b \end{cases}$$

$e_{a,b}$ เป็นเวกเตอร์รากและ $\lambda_a - \lambda_b$ เป็นรากฐานหลักของปริภูมิรากของ A_n

ถ้า α_i ไม่เป็นผลรวมเชิงเส้นของ α_j แล้ว α_i เป็นรากพื้นฐานอย่างง่ายกำหนด ให้เป็นตามนี้

$$\begin{aligned} \alpha_1(h) &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ \alpha_2(h) &= \lambda_2 - \lambda_3 \\ &\vdots \\ \alpha_{n-2}(h) &= \lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} \\ \alpha_{n-1}(h) &= \lambda_{n-1} - \lambda_n \end{aligned} \tag{2-19}$$

สมการ (2-19) เขียนกลับในรูปเมทริกซ์ของตัวดำเนินการได้ตามนี้

$$h_{\alpha_1} = e_{1,1} - e_{2,2}$$

$$
\begin{aligned}
h_{\alpha_2} &= e_{2,2} - e_{3,3} \\
&\vdots \\
h_{\alpha_{n-2}} &= e_{n-2,n-2} - e_{n-1,n-1} \\
h_{\alpha_{n-1}} &= e_{n-1,n-1} - e_{n,n}
\end{aligned}
\tag{2-20}
$$

จากตัวดำเนินการคาร์ตัง

$$
h_{\alpha_i} = e_{i,i} - e_{i+1,i+1} \tag{2-21}
$$

จะให้รูปแบบคิลลิง (Killing form) ระหว่าง h_{α_i} และ h_{α_i} ตามนี้

$$
(h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}) \equiv \left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle = (\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j} + \delta_{i+1,j+1}) \tag{2-22}
$$

สมการ (2-22) เมื่อพิจารณาค่า i และ j จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle &= 2 \; ; \; i = j \\
\left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle &= -1 \; ; \; j = i \pm 1 \\
\left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle &= 0 \; ; \; j \neq i \pm 1
\end{aligned}
\tag{2-23}
$$

รูปแบบคิลลิงของผลคูณภายในระหว่างราก α_i และ α_j $\left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle$ นำไปสู่การสร้างเมทริกซ์คาร์ตัง A ซึ่งเป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดย n เป็นแรงค์ (rank) ของพีชคณิตของลี สมาชิกในแถว i หลัก j ของ A คำนวณได้จาก

$$
A_{i,j} = 2\frac{\left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle}{\left\langle \alpha_j, \alpha_j \right\rangle} \tag{2-24}
$$

โดยที่ $i, j = 1, 2, \ldots, n$

ตัวอย่างเมทริกซ์คาร์ตัง (Cartan matrix) สำหรับ su(3) $\equiv A_2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\dfrac{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} & 2\dfrac{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} \\ 2\dfrac{\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} & 2\dfrac{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} \end{pmatrix}$$

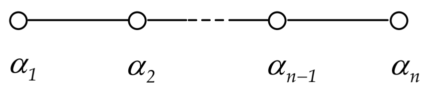
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

เมทริกซ์คาร์ตังและแผนภาพดินกิน (Dynkin diagram) สำหรับ su(n+1) หรือ A_n ใดๆเป็นดังนี้

เมทริกซ์คาร์ตัง

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -1 & 0 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

แผนภาพดินกิน



2.2.2 **พีชคณิตของลีแบบซิมเพลคติก** sp(2n) หรือ C_n

พีชคณิตแบบซิมเพลคติกประกอบไปด้วยเมทริกซ์ A ขนาด 2n×2n จำนวนเมทริกซ์ของตัวกำเนิดของ sp(2n) มีทั้งหมด $n(2n+1)$ ตัว มีเงื่อนไขบังคับว่า $A^t = JAJ$ โดย J เป็นเมทริกซ์ขนาด 2n×2n เป็นดังนี้

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{2-25}$$

สมมุติให้เมทริกซ์ A เป็นดังนี้

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & k+n \end{array} \\ \begin{array}{c} j \\ j+n \end{array} & \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2-26}$$

จะได้ว่า

$$JAJ = \begin{pmatrix} -A_4 & A_3 \\ A_2 & -A_1 \end{pmatrix} \tag{2-27}$$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $A^t = JAJ$ จะให้ผลว่า

$$A^t_1 = -A_4 \;,\; A^t_2 = A_2 \text{ และ } A^t_3 = A_3 \tag{2-28}$$

จากเงื่อนไข (2-28) เมทริกซ์ฐานหลักที่สอดคล้องกับพีชคณิตแบบซิมเพลคติก คือ

$$e^1_{j,k} = \underbrace{e_{j,k} - e_{k+n,j+n}}_{A_1 = -A_4^t} \;;\; j,k \le n$$

$$e^2_{j,k} = \underbrace{e_{j,k+n} + e_{k+n,j}}_{A_2 = A_2^t} \;;\; j \le k \;;\; j,k \le n$$

$$e^3_{j,k} = \underbrace{e_{j+n,k} + e_{k,j+n}}_{A_3 = A_3^t} \;;\; j \le k \;;\; j,k \le n \tag{2-29}$$

พีชคณิตคาร์ตังย่อยของพีชคณิตแบบซิมเพลคติกคือ $h = \sum_i \lambda_i h_i = \sum_i \lambda_i e_{i,i}$ คอมมิวเตเตอร์ระหว่าง h และ $e^l_{j,k}$ โดย $l = 1,2,3$ จะให้ผลตามนี้

$$\left[h, e^1_{j,k}\right] = +(\lambda_j - \lambda_k) e^1_{j,k} \;;\; j \ne k$$
$$\left[h, e^2_{j,k}\right] = +(\lambda_j + \lambda_k) e^2_{j,k} \;;\; j \le k$$

$$\left[h, e^3_{j,k}\right] = -(\lambda_j + \lambda_k) e^3_{j,k} \;;\; j \le k \tag{2-30}$$

รากพื้นฐาน (simple roots) ของพีชคณิตนี้คือ

$$\begin{aligned} \alpha_1(h) &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ \alpha_2(h) &= \lambda_2 - \lambda_3 \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1}(h) &= \lambda_{n-1} - \lambda_n \\ \alpha_n(h) &= 2\lambda_n \end{aligned} \tag{2-31}$$

ในเทอมของเมทริกซ์จะเป็น

$$h_{\alpha_i} = e_{i,i} - e_{i+1,i+1} \;;\; i < n \tag{2-32}$$

$$h_{\alpha_n} = e_{n,n} \tag{2-33}$$

ผลคูณสเกลาร์ของรากพื้นฐานเป็นตามนี้

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = (\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j} + \delta_{i+1,j+1}) \ ; \ i,j \neq n$$

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_n \right\rangle = (\delta_{i,n} - \delta_{i+1,n}) \ ; \ i \neq n \tag{2-34}$$

สมการ (2-34) เมื่อพิจารณาค่า $i\ j$ และ n จะได้ว่า

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = 2 \ ; i = j$$

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = -1 \ ; j = i \pm 1 \ , i = 1,...,n-1 \ , n \geq 2$$

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = 0 \ ; j \neq i \pm 1 \ , i = 1,...,n$$

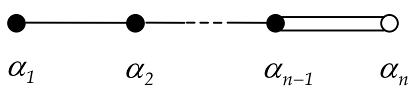
$$\left\langle \alpha_i , \alpha_n \right\rangle = -2 \ ; i = n-1 \ , n \geq 2 \tag{2-35}$$

จะให้เมทริกซ์คาร์ตังและแผนภาพดินกินของ C_n เป็นตามนี้

เมทริกซ์คาร์ตัง

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & & & \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & & & \\ 0 & -1 & 2 & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . & . \\ & & & . & . & . & 2 & -1 & 0 \\ & & & . & . & . & -1 & 2 & -1 \\ & & & . & . & . & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

แผนภาพดินกิน



2.2.3 พีชคณิตของลีแบบออร์ธอกอนอลพิเศษ

พีชคณิตของลีแบบออร์ธอกอนอลมีคุณสมบัติ $A^t A = I$ และ $A + A^t = 0$ จะให้ผลว่าเมทริกซ์มีองค์ประกอบเฉพาะนอกแถวทแยง การหาซับพีชคณิตของคาร์ตัง h จึงไม่เหมือนกับ

กรณีของ su(n+1) และ sp(2n) ที่เป็นเมทริกซ์แนวทแยง การหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวสามารถทำได้โดยแปลงเมทริกซ์ A ให้เป็นเมทริกซ์ในแนวทแยงด้วยเมทริกซ์ยูนิแทรี U ดังนี้

$$B = U^t A U \qquad (2\text{-}36)$$

ให้ $K = U^t U$ จากเงื่อนไขบังคับ $A + A^t = 0$ จะให้ผลว่า

$$KB + B^t K = 0 \qquad (2\text{-}37)$$

หรืออีกนัยหนึ่ง

$$B^t = -KBK^{-1} \qquad (2\text{-}38)$$

พีชคณิตของลีแบบออร์ธอกอนอลแบ่งออกได้เป็น 2 กรณีตามมิติของเมทริกซ์ A

2.2.3.1 ในกรณีที่มิติเป็น 2n พีชคณิตแบบออร์ธอกอนอล so(2n) หรือ D_n มีจำนวนเมทริกซ์ของตัวกำเนิดของ so(2n) ทั้งหมด n(2n-1) ตัว

กรณีนี้กำหนดให้เมทริกซ์ U เป็นดังนี้

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i_n & -i_n \\ -I_n & -I_n \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}39)$$

ซึ่งให้เมทริกซ์ K ตามนี้

$$K = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}40)$$

สมมุติให้เมทริกซ์ B เป็น

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & k+n \end{array} \\ \begin{array}{c} j \\ j+n \end{array} & \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (2\text{-}41)$$

จะได้ว่า

$$B^t = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} j & j+n \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ k+n \end{array} & \begin{pmatrix} B_1^t & B_3^t \\ B_2^t & B_4^t \end{pmatrix} \end{array} \qquad (2\text{-}42)$$

จากเงื่อนไขบังคับ $B^t = -KBK^{-1} = -KBK$ จะได้ว่า

$$B^t = \begin{pmatrix} -B_4 & -B_3 \\ -B_2 & -B_1 \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}43)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (2-42) กับสมการ (2-43) จะได้เงื่อนไขว่า

$$B_1^t = -B_4 \ , \ B_2^t = -B_2 \ \text{และ} \ B_3^t = -B_3 \qquad (2\text{-}44)$$

เมทริกซ์ฐานหลักที่เป็นไปตามเงื่อนไข (2-44) คือ

$$e^1_{j,k} = \underbrace{e_{j,k} - e_{k+n,j+n}}_{B_1 = -B_4^t}$$

$$e^2_{j,k} = \underbrace{e_{j,k+n} - e_{k+n,j}}_{B_2 = -B_2^t} \ ; \ j < k$$

$$e^3_{j,k} = \underbrace{e_{j+n,k} - e_{k,j+n}}_{B_3 = B_3^t} \ ; \ j < k \qquad (2\text{-}45)$$

พีชคณิตคาร์ตังย่อย $h = \sum_i \lambda_i h_i = \sum_i \lambda_i e_{i,i}$ จะให้คอมมิวเตเตอร์ระหว่าง h และ $e^l_{j,k}$ โดยที่ $l = 1,2,3$ เป็นตามนี้

$$\left[h, e^1_{j,k}\right] = +(\lambda_j - \lambda_k) e^1_{j,k} \ ; \ j \neq k$$

$$\left[h, e^2_{j,k}\right] = +(\lambda_j + \lambda_k) e^2_{j,k} \ ; \ j < k \qquad (2\text{-}46)$$

$$\left[h, e^3_{j,k}\right] = -(\lambda_j + \lambda_k) e^3_{j,k} \ ; \ j < k$$

กำหนดรากพื้นฐานเป็น

$$\alpha_1(h) = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\alpha_2(h) = \lambda_2 - \lambda_3$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n-1}(h) = \lambda_{n-1} - \lambda_n$$

$$\alpha_n(h) = \lambda_{n-1} + \lambda_n \qquad (2\text{-}47)$$

สมการ (2-47) เขียนกลับไปในรูปเมทริกซ์ได้ตามนี้

$$h_{\alpha_i} = e_{i,i} - e_{i+1,i+1} \ ; \ i = 1,..,n-1$$

$$h_{\alpha_n} = e_{n-1,n-1} + e_{n,n} \qquad (2\text{-}48)$$

ผลคูณสเกลาร์ของรากพื้นฐานเป็นดังนี้

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = (\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j} + \delta_{i+1,j+1}) \ ; \ i,j < n$$
$$\left\langle \alpha_i , \alpha_n \right\rangle = (\delta_{i,n-1} + \delta_{i,n} - \delta_{i+1,n-1} - \delta_{i+1,n}) \ ; \ i < n \qquad (2\text{-}49)$$

สมการ (2-49) เมื่อพิจารณาค่า i j และ n จะได้ว่า

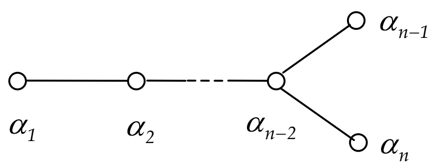
$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = 2 \ ; i = j$$
$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = -1 \ , \left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = 0 \ ; \ j \neq i \pm 1$$
$$\left\langle \alpha_i , \alpha_n \right\rangle = 0 \ ; \ i = n\text{-}1 \ , \ n \geq 3$$
$$\left\langle \alpha_i , \alpha_n \right\rangle = -1 \ ; \ i = n-2 \ , \ n \geq 3$$
$$\left\langle \alpha_i , \alpha_{n-1} \right\rangle = -1 \ ; \ i = n-2 \ , \ n \geq 3 \qquad (2\text{-}50)$$

พีชคณิตแบบออร์ธอกอนอล so(2n) $\equiv D_n$ จะมีเมทริกซ์คาร์ตังและแผนภาพดินกินสำหรับจำนวน n ใดๆตามนี้

เมทริกซ์คาร์ตัง

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & & & \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & & & \\ 0 & -1 & . & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & 2 & -1 & 0 & 0 \\ & & & . & . & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & . & . & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & & & . & . & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

แผนภาพดินกิน



2.2.3.2 ในกรณีที่มิติเป็น 2n+1 พีชคณิตแบบออร์ธอกอนอล so(2n+1) หรือ B_n มีจำนวนเมทริกซ์ของตัวกำเนิดของ so(2n+1) ทั้งหมด n(2n+1) ตัว

กรณีนี้กำหนดให้เมทริกซ์ U เป็นดังนี้

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i_n & -i_n \\ 0 & -1_n & -1_n \end{pmatrix} \tag{2-51}$$

ซึ่งให้เมทริกซ์ K ตามนี้

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0_n & I_n \\ 0 & I_n & 0_n \end{pmatrix} \tag{2-52}$$

กำหนดให้เมทริกซ์ B มีรูปแบบตามนี้

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & c_2 \\ d_1 & B_1 & B_2 \\ d_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix} \tag{2-53}$$

จากเงื่อนไข $B = -KBK^{-1}$ จะได้ว่า

$$b_1 = 0 \ , \ c_1 = -d_2^t \ \text{และ} \ c_2 = -d_1^t \tag{2-54}$$

และ

$$B_4 = -B_1^t \ , \ B_2 = -B_2^t \ \text{และ} \ B_3 = -B_3^t \tag{2-55}$$

สมการ (2-54) เป็นเงื่อนไขเพิ่มเติมจากมิติที่เป็นคู่ซึ่งให้เมทริกซ์ดังนี้

$$e_j^4 = \underbrace{e_{0,k} - e_{0,j+n}}_{c_1=-d_2^t} \quad \text{และ} \quad e_j^5 = \underbrace{e_{0,k+n} - e_{0,j}}_{c_1=-d_2^t} \quad \text{โดยที่} \ 1 \le j \le n \tag{2-56}$$

คอมมิวเตเตอร์ระหว่าง h และ e_j^l โดยที่ $l = 4,5$ เป็นตามนี้

$$\left[h, e_j^4\right] = -\lambda_j e_j^4 \ , \ \left[h, e_j^5\right] = +\lambda_j e_j^5 \tag{2-57}$$

กำหนดรากพื้นฐานเป็น

$$\begin{aligned} \alpha_1(h) &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ \alpha_2(h) &= \lambda_2 - \lambda_3 \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1}(h) &= \lambda_{n-1} - \lambda_n \\ \alpha_n(h) &= \lambda_n \end{aligned} \tag{2-55}$$

เขียนกลับในรูปแบบของเมทริกซ์จะได้ว่า

$$h_{\alpha_i} = e_{i,i} - e_{i+1,i+1} \ , \ i = 1,\ldots,n-1 \tag{2-56}$$

$$h_{\alpha_n} = e_{n,n} \tag{2-57}$$

รูปแบบคิลลิงให้ผลคูณสเกลาร์ระหว่างรากพื้นฐานตามนี้

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = (\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j} + \delta_{i+1,j+1}) \ ; \ i,j < n$$

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_n \right\rangle = (\delta_{i,j} - \delta_{i+1,n}) \ ; \ i < n$$

สมการ (2-57) เมื่อพิจารณาค่า i j และ n จะได้ว่า

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = 2 \ ; \ i = j = 1,\ldots,n$$

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = -1 \ ; \ j = i \pm 1 \ , \ i = 1,\ldots,n-2,n$$

$$\left\langle \alpha_i , \alpha_j \right\rangle = 0 \ ; \ j \neq i \pm 1$$

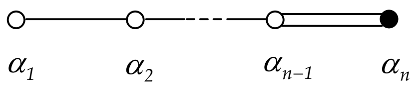
$$\left\langle \alpha_i , \alpha_{n-1} \right\rangle = -2 \ ; \ i = n \ , \ n \geq 2 \tag{2-58}$$

พีชคณิตแบบออร์ธอกอนอล so(2n+1) $\equiv B_n$ มีเมทริกซ์คาร์ตังและแผนภาพดิลกินสำหรับจำนวน n ใดๆเป็นตามนี้

เมทริกซ์คาร์ตัง

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & & & \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & & & \\ 0 & -1 & . & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . & . \\ & & & . & . & . & 2 & -1 & 0 \\ & & & . & . & . & -1 & 2 & -2 \\ & & & . & . & . & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

แผนภาพดินกิน



สังเกตว่าพีชคณิต B_n และ C_n มีความคล้ายคลึงกัน ในเมทริกซ์คาร์ตังสมาชิกของเมทริกซ์แตกต่างกันเฉพาะในส่วนนอกแถวทแยงตัวสุดท้าย ในส่วนของแผนภาพดินกินจากวงกลมโปร่งเป็นวงกลมทึบ

การคำนวณเมทริกซ์คาร์ตังของพีชคณิตตามที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น สรุปได้ว่าเมทริกซ์คาร์ตังเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิก $A_{i,j}$ ตามนี้ [13,15]

1) $A_{i,j}$ เป็นจำนวนเต็ม ได้แก่ $-3,-1,0$ และ 2

2) $A_{i,j}$ เท่ากับ 2 ในทุกๆตำแหน่งของแนวทแยงในเมทริกซ์

3) $A_{i,j}$ มีค่าน้อยกว่า 0 เฉพาะนอกแถวทแยง

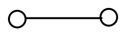
4) $A_{i,j}$ มีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ $A_{j,i}$ มีค่าเท่ากับ 0

แผนภาพดินเป็นแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรากพื้นฐานซึ่งมีหลักในการเขียนดังนี้

- ถ้ามุมระหว่างคู่ของรากพื้นฐานใดๆเท่ากับ 90 องศา ให้เขียนแผนภาพโดยไม่ใช้เส้นเชื่อมระหว่างรากพื้นฐานคู่นั้น

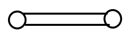
α_1 α_2

- ถ้ามุมระหว่างคู่ของรากพื้นฐานใดๆเท่ากับ 120 องศา ให้เขียนแผนภาพโดยใช้เส้นตรงเชื่อมระหว่างรากพื้นฐานคู่นั้น



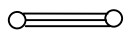
α_1 α_2

- ถ้ามุมระหว่างคู่ของรากพื้นฐานใดๆเท่ากับ 135 องศา ให้เขียนแผนภาพโดยใช้เส้นตรงสองเส้นเชื่อมระหว่างรากพื้นฐานคู่นั้น



α_1 α_2

- ถ้ามุมระหว่างคู่ของรากพื้นฐานใดๆเท่ากับ 150 องศา ให้เขียนแผนภาพโดยใช้เส้นตรงสามเส้นเชื่อมระหว่างรากพื้นฐานคู่นั้น



α_1 α_2

- ถ้ารากพื้นฐานมีขนาดสั้นจะแทนด้วยวงกลมทึบ สำหรับรากพื้นฐานที่มีขนาดยาวกว่าจะแทนด้วยวงกลมโปร่ง

α_1 α_2