บทที่ 3
ตัวดำเนินการโคสแตนท์สำหรับโคเซียนของพีชคณิต so(6)/(so(4)×so(2))

ก่อนที่จะสร้างตัวดำเนินการโคสแตนท์บนปริภูมิโคเซียนของพีชคณิต so(6) /(so(4)×so(2)) จำเป็นที่จะต้องทราบตัวดำเนินการและตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์สถานะของ so(6) /(so(4)×so(2)) พีชคณิต so(6) ประกอบด้วยตัวดำเนินการหมุนระนาบที่จะมีได้ทั้งหมดที่ทำให้ขนาดของเวกเตอร์ตำแหน่งในปริภูมิของจำนวนจริง 6 มิติไม่เปลี่ยนแปลง

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 + x_5'^2 + x_6'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \qquad (3\text{-}1)$$

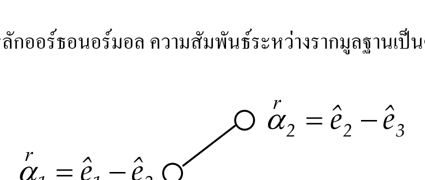
จากเมทริกซ์คาร์ตังของพีชคณิต so(6)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}2)$$

รากมูลฐานในฐานหลักโอเมกาอ่านได้จากแต่ละแถวของเมทริกซ์

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= 2\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_3 = \hat{e}_1 - \hat{e}_2 \\ \vec{\alpha}_2 &= -\hat{\omega}_1 + 2\hat{\omega}_2 = \hat{e}_2 - \hat{e}_3 \\ \vec{\alpha}_3 &= -\hat{\omega}_1 + 2\hat{\omega}_3 = \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \end{aligned} \qquad (3\text{-}3)$$

คอลัมน์สุดท้ายแสดงรากมูลฐานในฐานหลักออร์ธอนอร์มอล ความสัมพันธ์ระหว่างรากมูลฐานเป็นตามแผนภาพดินกินดังนี้



นอกจากรากมูลฐานทั้งสามแล้ว ยังมีรากที่ได้จากการรวมกันของรากมูลฐานดังนี้

$$\vec{\alpha}_4 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 = \hat{e}_1 - \hat{e}_3$$

$$\vec{\alpha}_5 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_3 = \hat{e}_1 + \hat{e}_3$$

$$\vec{\alpha}_6 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \qquad (3\text{-}4)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างฐานหลักโอเมกาและฐานหลักออร์ธอนอร์มอลเป็นตามนี้

$$\hat{\omega}_1 = \hat{e}_1 \qquad (3\text{-}5)$$

$$\hat{\omega}_2 = \frac{1}{2}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) \qquad (3\text{-}6)$$

$$\hat{\omega}_3 = \frac{1}{2}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) \qquad (3\text{-}7)$$

สมมุติให้ Λ เป็นตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์สถานะของ so(6) เมื่อตัวดำเนินการคาร์ตัง $\vec{H} = H_1\hat{\omega}_1 + H_2\hat{\omega}_2 + H_3\hat{\omega}_3$ กระทำต่อ Λ จะให้ผลดังนี้

$$\vec{H}\Lambda = (a_1, a_2, a_3)\Lambda$$

เรียก $a_{1,2,3}$ ว่าเลขกำหนดของดินกินซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
นำ a_1 คูณกับสมการ (3-5) จะได้

$$a_1\hat{\omega}_1 = a_1\hat{e}_1 \qquad (3\text{-}8)$$

นำ a_2 คูณกับสมการ (3-6) จะได้

$$a_2\hat{\omega}_2 = \frac{a_2}{2}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) \qquad (3\text{-}9)$$

นำ a_3 คูณกับสมการ (3-7) จะได้

$$a_3\hat{\omega}_3 = \frac{a_3}{2}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) \qquad (3\text{-}10)$$

จากผลรวมของสมการ (3-8) (3-9) และ (3-10) จะได้ความสัมพันธ์ของตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์สถานะในฐานหลักโอเมกากับฐานหลักออร์ธอนอร์มัล ดังนี้

$$\underbrace{(a_1, a_2, a_3)}_{\omega-basis} \equiv \underbrace{(a_1 + \frac{1}{2}(a_2 + a_3), \frac{1}{2}(a_2 + a_3), \frac{1}{2}(-a_2 + a_3))}_{orthonormal\ basis} \qquad (3\text{-}11)$$

เทอมด้านขวาของสมการ (3-11) ในฐานหลักออร์ธอนอร์มอลจะได้

$$b_1 = a_1 + \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$$
$$b_2 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$$
$$b_3 = \frac{1}{2}(-a_2 + a_3) \qquad \text{(3-12)}$$

สมการ (3-12) ให้ตัวดำเนินการคาร์ตังในฐานหลักออร์ธอนอร์มอล $h = h_1\hat{e}_1 + h_2\hat{e}_2 + h_3\hat{e}_3$ ในเทอมของตัวดำเนินการคาร์ตังในฐานหลักโอเมกา $\vec{H}$ ดังนี้

$$h_1 = H_1 + \frac{1}{2}(H_2 + H_3) \qquad \text{(3-13)}$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(H_2 + H_3) \qquad \text{(3-14)}$$

$$h_3 = \frac{1}{2}(-H_2 + H_3) \qquad \text{(3-15)}$$

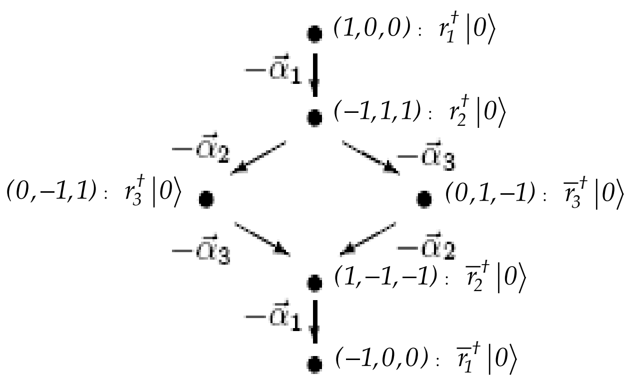
ในทางกลับกัน

$$H_1 = h_1 - h_2 \qquad \text{(3-16)}$$

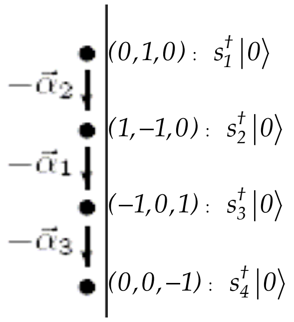
$$H_2 = h_2 - h_3 \qquad \text{(3-17)}$$

$$H_3 = h_2 + h_3 \qquad \text{(3-18)}$$

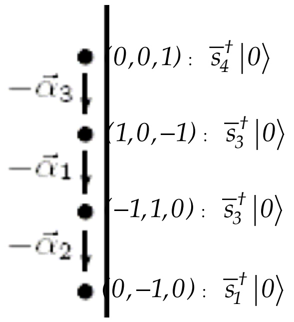
เพื่อสร้างตัวดำเนินการหมุนของ so(6) กำหนดให้ตัวออสซิลเลเตอร์ $r_i^\dagger$, $\overline{r}_i^\dagger$ และ $s_j^\dagger , \overline{s}_j^\dagger$ โดยที่ $i = 1,2,3$ และ $j = 1,2,3,4$ กระทำต่อสถานะสุญญากาศสอดคล้องกับเวกเตอร์ในตัวแทนปริฎมิ $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ และ $(0,0,1)$ ดังภาพประกอบ 3.1 , 3.2 และ 3.3 ตามลำดับ



ภาพประกอบ 3.1 แสดงเวกเตอร์ของตัวแทนปริฎูมิเวกเตอร์ $(1,0,0)$



ภาพประกอบ 3.2 แสดงเวกเตอร์ของตัวแทนปริฎูมิเวกเตอร์ $(0,1,0)$



ภาพประกอบ 3.3 แสดงเวกเตอร์ของตัวแทนปริฎูมิเวกเตอร์ $(0,0,1)$

3.1 ตัวดำเนินการของพีชคณิต so(6)

พีชคณิต so(6) ประกอบไปด้วยตัวดำเนินการหมุนทั้งหมด 15 ตัว ตัวดำเนินการ ลดระดับสถานะและเพิ่มระดับสถานะสำหรับรากทั้งหมดอ่านจากแผนภาพ 3.1, 3.2 และ 3.3 เป็นตามนี้

1) $T_1^- = r_2^\dagger r_1 + s_3^\dagger s_2 + \overline{r}_1^\dagger \overline{r}_2 + \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_3$

2) $T_1^+ = r_1^\dagger r_2 + s_2^\dagger s_3 + \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_1 + \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_2$

3) $T_2^- = r_3^\dagger r_2 + s_2^\dagger s_1 + \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_3 + \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_2$

4) $T_2^+ = r_2^\dagger r_3 + s_1^\dagger s_2 + \overline{r}_3^\dagger \overline{r}_2 + \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_1$

5) $T_3^- = \overline{r}_3^\dagger r_2 + s_4^\dagger s_3 + \overline{r}_2^\dagger r_3 + \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_4$

6) $T_3^+ = r_2^\dagger \overline{r}_3 + s_3^\dagger s_4 + r_3^\dagger \overline{r}_2 + \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_3$

7) $T_4^- = r_3^\dagger r_1 - s_3^\dagger s_1 - \overline{r}_1^\dagger \overline{r}_3 + \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_3$

8) $T_4^+ = r_1^\dagger r_3 - s_1^\dagger s_3 - \overline{r}_3^\dagger \overline{r}_1 + \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_1$

9) $T_5^- = \overline{r}_3^\dagger r_1 + s_4^\dagger s_2 - \overline{r}_1^\dagger r_3 - \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_4$

10) $T_5^+ = r_1^\dagger \overline{r}_3 + s_2^\dagger s_4 - r_3^\dagger \overline{r}_1 - \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_2$

11) $T_6^- = -\overline{r}_1^\dagger r_2 + s_4^\dagger s_1 - \overline{r}_2^\dagger r_1 + \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_4$

12) $T_6^+ = -r_2^\dagger \overline{r}_1 + s_1^\dagger s_4 - r_1^\dagger \overline{r}_2 + \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_1$ (3-19)

สำหรับตัวดำเนินการพีชคณิตคาร์ตังย่อยนิยามจากคอมมิวเตเตอร์ดังนี้

$$H_1 \equiv \left[T_1^+, T_1^-\right] = r_1^\dagger r_1 - r_2^\dagger r_2 + s_2^\dagger s_2 - s_3^\dagger s_3 + \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_2 - \overline{r}_1^\dagger \overline{r}_1 + \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_3 - \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_2$$

$$H_2 \equiv \left[T_2^+, T_2^-\right] = r_2^\dagger r_2 - r_3^\dagger r_3 + s_1^\dagger s_1 - s_2^\dagger s_2 + \overline{r}_3^\dagger \overline{r}_3 - \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_2 + \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_2 - \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_1$$

$$H_3 \equiv \left[T_3^+, T_3^-\right] = r_2^\dagger r_2 - \overline{r}_3^\dagger \overline{r}_3 + s_3^\dagger s_3 - s_4^\dagger s_4 + r_3^\dagger r_3 - \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_2 + \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_4 - \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_3 \qquad (3\text{-}20)$$

คอมมิวเตเตอร์ระหว่าง $\vec{H} = H_1\hat{\omega}_1 + H_2\hat{\omega}_2 + H_3\hat{\omega}_3$ กับตัวดำเนินการเพิ่มและลดสถานะให้ผลเป็นดังนี้

1) $\left[\vec{H}, T_1^\pm\right] = \pm(2\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_3)T_1^\pm = \pm\vec{\alpha}_1 T_1^\pm$

2) $\left[\vec{H}, T_2^\pm\right] = \pm(-\hat{\omega}_1 + 2\hat{\omega}_2)T_2^\pm = \pm\vec{\alpha}_2 T_2^\pm$

3) $\left[\vec{H}, T_3^\pm\right] = \pm(-\hat{\omega}_1 + 2\hat{\omega}_3)T_3^\pm = \pm\vec{\alpha}_3 T_3^\pm$

4) $\left[\vec{H}, T_4^\pm\right] = \pm(\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_3)T_4^\pm = \pm(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)T_4^\pm$

5) $\left[\vec{H}, T_5^\pm\right] = \pm(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3)T_5^\pm = \pm(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_3)T_5^\pm$

$$6)\ \left[\vec{H}, T_6^{\pm}\right] = \pm(\hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3)T_6^{\pm} = \pm(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3)T_6^{\pm}$$

คอมมิวเตเตอร์ของตัวดำเนินการที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่เหลือทั้งหมดมีดังนี้

$$\left[T_4^{+}, T_4^{-}\right] = H_1 + H_2 = h_1 - h_3 \qquad \left[T_5^{+}, T_5^{-}\right] = H_1 + H_3 = h_1 + h_3$$

$$\left[T_6^{+}, T_6^{-}\right] = H_1 + H_2 + H_3 = h_1 + h_2$$

$$\left[T_1^{\pm}, T_2^{\pm}\right] = \pm T_4^{\pm} \qquad \left[T_1^{\pm}, T_3^{\pm}\right] = \pm T_5^{\pm}$$

$$\left[T_1^{\pm}, T_5^{\mp}\right] = \mp T_3^{\mp} \qquad \left[T_2^{\pm}, T_4^{\mp}\right] = \pm T_1^{\mp}$$

$$\left[T_2^{\pm}, T_5^{\pm}\right] = \pm T_6^{\pm} \qquad \left[T_1^{\pm}, T_4^{\mp}\right] = \mp T_2^{\mp}$$

$$\left[T_2^{\pm}, T_6^{\mp}\right] = \mp T_5^{\mp} \qquad \left[T_3^{\pm}, T_5^{\mp}\right] = \pm T_1^{\mp}$$

$$\left[T_4^{\pm}, T_6^{\mp}\right] = \pm T_3^{\mp} \qquad \left[T_5^{\pm}, T_6^{\mp}\right] = \pm T_2^{\mp} \qquad (3\text{-}21)$$

3.2 แกมมาเมทริกซ์ของปริภูมิโคเซียนของพีชคณิต so(6)/(so(4)$\times$so(2))

ในการสร้างตัวดำเนินการโคสแตนท์บนปริภูมิโคเซียน 8 มิติ ใช้แกมมาเมทริกซ์ 8 ตัว ซึ่งสร้างขึ้นจากเมทริกซ์ของเพาลีและเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 2×2 ดังนี้

$$\gamma_1 = \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \qquad \gamma_2 = \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2$$

$$\gamma_3 = \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \qquad \gamma_4 = \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes 1$$

$$\gamma_5 = \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes 1 \qquad \gamma_6 = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1$$

$$\gamma_7 = \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes 1 \otimes 1 \qquad \gamma_8 = \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$$

เพื่อใช้กับตัวดำเนินการเพิ่มและลดระดับสถานะ แกมมาเมทริกซ์นิยามใหม่เป็นดังนี้

$$\gamma_2^{\pm} = (\gamma_1 \pm i\gamma_2) = \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^{\pm}$$

$$\gamma_3^{\pm} = (\gamma_3 \pm i\gamma_4) = \left\{ \left[\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^{+} \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 \pm \underset{\sim}{1}) \right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^{-} \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 \mp \underset{\sim}{1}) \right] \right\}$$

$$\gamma_4^{\pm} = (\gamma_5 \pm i\gamma_6) = \left\{ \left[\sigma_1 \otimes \sigma^{+} \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 \pm \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma^{-} \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 \mp \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\}$$

$$\gamma_5^{\pm} = (\gamma_7 \pm i\gamma_8) = \left\{ \left[\sigma^{+} \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 \pm \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma^{-} \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 \mp \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\} \quad (3\text{-}22)$$

คอมมิวเตเตอร์ระหว่างคู่ของแกมมาเมทริกซ์ให้ผลตามนี้

1) $\left[\gamma_2^{+}, \gamma_2^{-} \right] = \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3$ 2) $\left[\gamma_3^{+}, \gamma_3^{-} \right] = \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3$

3) $\left[\gamma_4^{+}, \gamma_4^{-} \right] = \underset{\sim}{1} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \underset{\sim}{1}$ 4) $\left[\gamma_5^{+}, \gamma_5^{-} \right] = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}$ (3-23)

เมื่อ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma^{+}$ และ σ^{-} กระทำต่อสถานะของสปินให้ผลเป็น

$$\sigma_1 |\pm\rangle = \pm|\mp\rangle,\ \sigma_2 |\pm\rangle = \pm i|\mp\rangle,\ \sigma_3 |\pm\rangle = \pm|\pm\rangle,$$

$$\sigma^{+} |-\rangle = |+\rangle,\ \sigma^{-} |+\rangle = |-\rangle \quad (3\text{-}24)$$

3.3 ตัวดำเนินการโคสแตนท์สำหรับพีชคณิต so(6)/(so(4) $\times$ so(2))

ตัวดำเนินการหมุนของพีชคณิต so(6) *15* ตัว ตามที่แสดงไว้ในสมการ (3-19) และสมการ (3-20) ประกอบด้วยส่วนต่างๆดังนี้

1. ตัวเนินการหมุนของพีชคณิต so(4) ประกอบด้วยตัวดำเนินการ 6 ตัว ได้แก่

1) $T_1^{-} = r_2^{\dagger} r_1 + s_3^{\dagger} s_2 + \overline{r}_1^{\dagger} \overline{r}_2 + \overline{s}_2^{\dagger} \overline{s}_3$

2) $T_1^{+} = r_1^{\dagger} r_2 + s_2^{\dagger} s_3 + \overline{r}_2^{\dagger} \overline{r}_1 + \overline{s}_3^{\dagger} \overline{s}_2$

3) $T_6^- = -\overline{r}_1^\dagger r_2 + s_4^\dagger s_1 - \overline{r}_2^\dagger r_1 + \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_4$

4) $T_6^+ = -r_2^\dagger \overline{r}_1 + s_1^\dagger s_4 - r_1^\dagger \overline{r}_2 + \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_1$

5) $H_1 = r_1^\dagger r_1 - r_2^\dagger r_2 + s_2^\dagger s_2 - s_3^\dagger s_3 + \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_2 - \overline{r}_1^\dagger \overline{r}_1 + \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_3 - \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_2$

6) $H_6 = H_1 + H_2 + H_3$ (3-25)

2. ตัวเนินการหมุนของพีชคณิต so(2) มี 1 ตัว คือ

$$h_3 = \frac{1}{2}(-H_2 + H_3) \tag{3-26}$$

3. ตัวเนินการหมุนของโคเชียน so(6)/(so(4) $\times$ so(2)) มี 8 ตัวดังนี้

1) $T_2^- = r_3^\dagger r_2 + s_2^\dagger s_1 + \overline{r}_2^\dagger \overline{r}_3 + \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_2$

2) $T_2^+ = r_2^\dagger r_3 + s_1^\dagger s_2 + \overline{r}_3^\dagger \overline{r}_2 + \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_1$

3) $T_3^- = \overline{r}_3^\dagger r_2 + s_4^\dagger s_3 + \overline{r}_2^\dagger r_3 + \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_4$

4) $T_3^+ = r_2^\dagger \overline{r}_3 + s_3^\dagger s_4 + r_3^\dagger \overline{r}_2 + \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_3$

5) $T_4^- = r_3^\dagger r_1 - s_3^\dagger s_1 - \overline{r}_1^\dagger \overline{r}_3 + \overline{s}_1^\dagger \overline{s}_3$

6) $T_4^+ = r_1^\dagger r_3 - s_1^\dagger s_3 - \overline{r}_3^\dagger \overline{r}_1 + \overline{s}_3^\dagger \overline{s}_1$

7) $T_5^- = \overline{r}_3^\dagger r_1 + s_4^\dagger s_2 - \overline{r}_1^\dagger r_3 - \overline{s}_2^\dagger \overline{s}_4$

8) $T_5^+ = r_1^\dagger \overline{r}_3 + s_2^\dagger s_4 - r_3^\dagger \overline{r}_1 - \overline{s}_4^\dagger \overline{s}_2$ (3-27)

ตัวเนินการโคสแตนท์ของโคเชียน so(6)/(so(4) $\times$ so(2)) เขียนในรูปทั่วๆได้ดังนี้

$$\not{K} = \sum_{i=2}^{5}(\gamma_i^+ T_i^- + \gamma_i^- T_i^+)$$

$$= \gamma_2^+ T_2^- + \gamma_2^- T_2^+ + \gamma_3^+ T_3^- + \gamma_3^- T_3^+ + \gamma_4^+ T_4^- + \gamma_4^- T_4^+ + \gamma_5^+ T_5^- + \gamma_5^- T_5^+ \tag{3-28}$$

ตัวดำเนินการโคสแตนท์ที่สร้างขึ้นกระทำบนปริภูมิเวกเตอร์สถานะที่สร้างจากผลคูณเทนเซอร์ระหว่างตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์สถานะของสปินเนอร์กับตัวแทนปริภูมิเวกเตอร์สถานะของ so(6) ซึ่งแทนได้ด้วย $|\psi\rangle = |\pm\pm\pm\pm\rangle \otimes V_\lambda$

แกมมาเมทริกซ์ $\gamma^{\pm}_{2,3,4,5}$ กระทำต่อสปินเนอร์ของ so(8) ให้ผลที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกับเครื่องหมาย ± ตามนี้

1) $\gamma_2^+ = (\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^+)$

$$|+++-\rangle\,,\ |-++-\rangle,$$
$$|++--\rangle\,,\ |-+--\rangle,$$
$$|+-+-\rangle\,,\ |--+-\rangle,$$
$$|+---\rangle\,,\ |----\rangle.$$

2) $\gamma_2^- = (\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^-)$

$$|++++\rangle\,,\ |-+++\rangle,$$
$$|++-+\rangle\,,\ |-+-+\rangle,$$
$$|+-++\rangle\,,\ |--++\rangle,$$
$$|+--+\rangle\,,\ |---+\rangle.$$

3) $\gamma_3^+ = \left\{\left[\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1})\right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1})\right]\right\}$

$$|++-+\rangle, \qquad -|+++-\rangle,$$
$$|+--+\rangle, \qquad -|+-+-\rangle,$$
$$|-+-+\rangle, \qquad -|-++-\rangle,$$
$$|---+\rangle, \qquad -|--+-\rangle.$$

4) $\gamma_3^- = \left\{\left[\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1})\right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1})\right]\right\}$

$$-|++--\rangle, \qquad |++++\rangle,$$
$$-|+---\rangle, \qquad |+-++\rangle,$$
$$-|-+--\rangle, \qquad |-+++\rangle,$$
$$-|----\rangle, \qquad |--++\rangle.$$

5) $\gamma_4^+ = \left\{\left[\sigma_1 \otimes \sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1}\right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1}\right]\right\}$

$$|+-++\rangle, \qquad -|++-+\rangle,$$
$$|+-+-\rangle, \qquad -|++--\rangle,$$
$$|--++\rangle, \qquad -|-+-+\rangle,$$
$$|--+-\rangle, \qquad -|-+--\rangle.$$

6) $$\gamma_4^- = \left\{ \left[\sigma_1 \otimes \sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma_1 \otimes \sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\}$$

$$\begin{array}{ll} -\left|+--+\right\rangle, & \left|++++\right\rangle, \\ -\left|+---\right\rangle, & \left|+++-\right\rangle, \\ -\left|---+\right\rangle, & \left|-+++\right\rangle, \\ -\left|----\right\rangle, & \left|-++-\right\rangle. \end{array}$$

7) $$\gamma_5^+ = \left\{ \left[\sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\}$$

$$\begin{array}{ll} \left|-+++\right\rangle, & -\left|+-++\right\rangle, \\ \left|-++-\right\rangle, & -\left|+-+-\right\rangle, \\ \left|-+-+\right\rangle, & -\left|+--+\right\rangle, \\ \left|-+--\right\rangle, & -\left|+---\right\rangle. \end{array}$$

8) $$\gamma_5^- = \left\{ \left[\sigma^+ \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 - \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] + \left[\sigma^- \otimes \frac{1}{2}(\sigma_3 + \underset{\sim}{1}) \otimes \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \right] \right\}$$

$$\begin{array}{ll} -\left|--++\right\rangle, & \left|++++\right\rangle, \\ -\left|--+-\right\rangle, & \left|+++-\right\rangle, \\ -\left|---+\right\rangle, & \left|++-+\right\rangle, \\ -\left|----\right\rangle, & \left|++--\right\rangle. \end{array} \qquad (3\text{-}29)$$

ในกรณีที่ $K\left|\psi\right\rangle = 0$ จะได้ระบบสมการดังนี้

1. $1 \otimes (T_3^+ + T_4^+ + T_5^+ + T_6^+)\psi_{\lambda_1}^{++++} = 0$

2. $1 \otimes (T_3^- - T_4^- + T_5^+ + T_6^+)\psi_{\lambda_2}^{+++-} = 0$

3. $1 \otimes (T_3^+ + T_4^- - T_5^- + T_6^+)\psi_{\lambda_3}^{+---} = 0$

4. $1 \otimes (T_3^- - T_4^+ - T_5^- + T_6^+)\psi_{\lambda_4}^{++--} = 0$

5. $1\otimes(T_3^+ + T_4^+ - T_5^- - T_6^-)\psi_{\lambda_5}^{+-++} = 0$

6. $1\otimes(T_3^- - T_4^- + T_5^- - T_6^-)\psi_{\lambda_6}^{+-+-} = 0$

7. $1\otimes(T_3^+ + T_4^- - T_5^+ - T_6^-)\psi_{\lambda_7}^{+--+} = 0$

8. $1\otimes(T_3^- - T_4^+ - T_5^+ - T_6^-)\psi_{\lambda_8}^{++-+} = 0$

9. $1\otimes(T_3^+ + T_4^+ + T_5^+ + T_6^-)\psi_{\lambda_1'}^{-+++} = 0$

10. $1\otimes(T_3^- - T_4^- + T_5^+ + T_6^-)\psi_{\lambda_2'}^{-++-} = 0$

11. $1\otimes(T_3^+ + T_4^- - T_5^- + T_6^-)\psi_{\lambda_3'}^{-+-+} = 0$

12. $1\otimes(T_3^- - T_4^+ - T_5^- + T_6^-)\psi_{\lambda_4'}^{-+--} = 0$

13. $1\otimes(T_3^+ + T_4^+ + T_5^- - T_6^+)\psi_{\lambda_5'}^{--++} = 0$

14. $1\otimes(T_3^- - T_4^- + T_5^- - T_6^+)\psi_{\lambda_6'}^{--+-} = 0$

15. $1\otimes(T_3^+ + T_4^- - T_5^+ - T_6^+)\psi_{\lambda_7'}^{---+} = 0$

16. $1\otimes(T_3^- - T_4^+ - T_5^+ - T_6^+)\psi_{\lambda_8'}^{----} = 0$ (3-30)

ซึ่งมีผลเฉลยสำหรับสปินเนอร์ที่เป็นบวก (positive spinor) ตามนี้

1. $\psi_{\lambda_1}^{++++} = |++++\rangle \otimes (r_1^\dagger)^{a_1}(s_1^\dagger)^{a_2}(\overline{s}_4^\dagger)^{a_3}|0\rangle$

2. $\psi_{\lambda_2}^{+++-} = |+++-\rangle \otimes (r_1^\dagger)^{a_1}(s_2^\dagger)^{a_2}(\overline{s}_3^\dagger)^{a_3}|0\rangle$

3. $\psi_{\lambda_3}^{+---} = |+---\rangle \otimes (r_2^\dagger)^{a_1}(s_1^\dagger)^{a_2}(\overline{s}_4^\dagger)^{a_3}|0\rangle$

4. $\psi_{\lambda_4}^{++--} = |++--\rangle \otimes (r_3^\dagger)^{a_1}(s_2^\dagger)^{a_2}(\overline{s}_4^\dagger)^{a_3}|0\rangle$

5. $\psi_{\lambda_5}^{+-++} = |+-++\rangle \otimes (\overline{r}_1^\dagger)^{a_1}(s_3^\dagger)^{a_2}(\overline{s}_2^\dagger)^{a_3}|0\rangle$

6. $\psi_{\lambda_6}^{+-+-} = \left|+-+-\right\rangle \otimes (\overline{r}_1^{\dagger})^{a_1}(s_4^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_1^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$

7. $\psi_{\lambda_7}^{+--+} = \left|+--+\right\rangle \otimes (\overline{r}_3^{\dagger})^{a_1}(s_1^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_3^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$

8. $\psi_{\lambda_8}^{++-+} = \left|++-+\right\rangle \otimes (\overline{r}_2^{\dagger})^{a_1}(s_2^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_3^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$

สำหรับสปินเนอร์ที่เป็นลบ (negative spinor) ตามนี้

9. $\psi_{\lambda_1^{\prime}}^{-+++} = \left|-+++\right\rangle \otimes (r_2^{\dagger})^{a_1}(s_1^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_2^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$

10. $\psi_{\lambda_2^{\prime}}^{-++-} = \left|-++-\right\rangle \otimes (\overline{r}_2^{\dagger})^{a_1}(s_4^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_3^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$

11. $\psi_{\lambda_3^{\prime}}^{-+-+} = \left|-+-+\right\rangle \otimes (\overline{r}_1^{\dagger})^{a_1}(s_4^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_2^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$

12. $\psi_{\lambda_4^{\prime}}^{-+--} = \left|-+--\right\rangle \otimes (\overline{r}_1^{\dagger})^{a_1}(s_3^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_1^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$

13. $\psi_{\lambda_5^{\prime}}^{--++} = \left|--++\right\rangle \otimes (r_2^{\dagger})^{a_1}(s_3^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_4^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$

14. $\psi_{\lambda_6^{\prime}}^{--+-} = \left|--+-\right\rangle \otimes (\overline{r}_2^{\dagger})^{a_1}(s_2^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_1^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$

15. $\psi_{\lambda_7^{\prime}}^{---+} = \left|---+\right\rangle \otimes (r_1^{\dagger})^{a_1}(s_1^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_3^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$

16. $\psi_{\lambda_8^{\prime}}^{----} = \left|----\right\rangle \otimes (r_1^{\dagger})^{a_1}(s_2^{\dagger})^{a_2}(\overline{s}_4^{\dagger})^{a_3}\left|0\right\rangle$ (3-31)

เพื่อหาเวกเตอร์สถานะในเทอมของพีชคณิตย่อย $so(4)\times so(2)$ จำเป็นต้องใช้ตัวดำเนินการคาร์ตังของพีชคณิตย่อยกระทำต่อ $\psi_{\lambda_i}^{\pm\pm\pm\pm}$ ในฐานหลักของโอเมกา ตัวดำเนินการคาร์ตังเป็นดังนี้

$$D_1 = h_1 - h_2 + \frac{1}{2}\left(f_{+-1}^{4}\left[\gamma_4^{+},\gamma_4^{-}\right] + f_{+-1}^{5}\left[\gamma_5^{+},\gamma_5^{-}\right] - f_{+-2}^{2}\left[\gamma_2^{+},\gamma_2^{-}\right] - f_{+-2}^{3}\left[\gamma_3^{+},\gamma_3^{-}\right]\right)$$

$$= H_1 + \frac{1}{2}\left(\left[\gamma_4^{+},\gamma_4^{-}\right] + \left[\gamma_5^{+},\gamma_5^{-}\right] - \left[\gamma_2^{+},\gamma_2^{-}\right] - \left[\gamma_3^{+},\gamma_3^{-}\right]\right)$$

$$= H_1 + \frac{1}{2}\left(1\otimes\sigma_3\otimes\sigma_3\otimes 1 + \sigma_3\otimes\sigma_3\otimes 1\otimes 1 - 1\otimes 1\otimes 1\otimes\sigma_3 - 1\otimes 1\otimes\sigma_3\otimes\sigma_3\right)$$

$$D_2 = h_1 + h_2 + \frac{1}{2}(f^4_{+-1}\left[\gamma_4^+,\gamma_4^-\right] + f^5_{+-1}\left[\gamma_5^+,\gamma_5^-\right] + f^2_{+-2}\left[\gamma_2^+,\gamma_2^-\right] + f^3_{+-2}\left[\gamma_3^+,\gamma_3^-\right])$$

$$= H_6 + \frac{1}{2}(\left[\gamma_4^+,\gamma_4^-\right] + \left[\gamma_5^+,\gamma_5^-\right] + \left[\gamma_2^+,\gamma_2^-\right] + \left[\gamma_3^+,\gamma_3^-\right])$$

$$= H_6 + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{1}\otimes\sigma_3\otimes\sigma_3\otimes\underset{\sim}{1} + \sigma_3\otimes\sigma_3\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\sigma_3 + \underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\sigma_3\otimes\sigma_3)$$

$$D_3 = \frac{-H_2 + H_3}{2} + \frac{1}{4}\left(f^2_{+-3}\left[\gamma_2^+,\gamma_2^-\right] + f^3_{+-3}\left[\gamma_3^+,\gamma_3^-\right] + f^4_{+-3}\left[\gamma_4^+,\gamma_4^-\right] + f^5_{+-3}\left[\gamma_5^+,\ \gamma_5^-\right]\right)$$

$$= \frac{h_3}{2} + \frac{1}{4}\left(-\left[\gamma_2^+,\gamma_2^-\right] + \left[\gamma_3^+,\gamma_3^-\right] - \left[\gamma_4^+,\gamma_4^-\right] + \left[\gamma_5^+,\gamma_5^-\right]\right)$$

$$= \frac{h_3}{2} + \frac{1}{4}\left(-\underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\sigma_3 + \underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\sigma_3\otimes\sigma_3 - \underset{\sim}{1}\otimes\sigma_3\otimes\sigma_3\otimes\underset{\sim}{1} + \sigma_3\otimes\sigma_3\otimes\underset{\sim}{1}\otimes\underset{\sim}{1}\right) \tag{3-32}$$

ในกรณีที่ $V_\Lambda = 1$ นั่นคือ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ เมื่อนำตัวดำเนินการคาร์ตังกระทำต่อแก่นคำตอบให้ผลตามนี้ สำหรับสปินเนอร์ที่เป็นบวกตามนี้

$$(D_1, D_2; D_3)\left|++++\right\rangle\otimes 1 = (0,2;0)\left|++++\right\rangle\otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)\left|+++-\right\rangle\otimes 1 = (2,0;0)\left|+++-\right\rangle\otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)\left|+---\right\rangle\otimes 1 = (0,0;0)\left|++-+\right\rangle\otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)\left|++--\right\rangle\otimes 1 = (0,0;1)\left|++--\right\rangle\otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)\left|+-++\right\rangle\otimes 1 = (-2,0;0)\left|+-++\right\rangle\otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)\left|+-+-\right\rangle\otimes 1 = (0,-2;0)\left|+-+-\right\rangle\otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)\left|+--+\right\rangle\otimes 1 = (0,0;-1)\left|+--+\right\rangle\otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)\left|++-+\right\rangle\otimes 1 = (0,0;0)\left|+---\right\rangle\otimes 1$$

สำหรับสปินเนอร์ที่เป็นลบตามนี้

$$(D_1, D_2; D_3)|-+++\rangle \otimes 1 = (-1,1;-\frac{1}{2})|-+++\rangle \otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)|-++-\rangle \otimes 1 = (1,-1;-\frac{1}{2})|-++-\rangle \otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)|-+-+\rangle \otimes 1 = (-1,-1;-\frac{1}{2})|-+-+\rangle \otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)|-+--\rangle \otimes 1 = (-1,-1;\frac{1}{2})|-+--\rangle \otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)|--++\rangle \otimes 1 = (-1,1;\frac{1}{2})|--++\rangle \otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)|--+-\rangle \otimes 1 = (1,-1;\frac{1}{2})|--+-\rangle \otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)|---+\rangle \otimes 1 = (1,1;-\frac{1}{2})|---+\rangle \otimes 1$$

$$(D_1, D_2; D_3)|----\rangle \otimes 1 = (1,1;\frac{1}{2})|----\rangle \otimes 1 \qquad (3\text{-}33)$$

ในกรณีทั่วไปให้ผลตามนี้

$$(D_1, D_2; D_3)\psi_{\lambda_1}^{++++} = (a_1, a_1 + a_2 + a_3 + 2; \frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_1}^{++++}$$

$$(D_1, D_2; D_3)\psi_{\lambda_2}^{+++-} = (a_1 + a_2 + a_3 + 2, a_1; -\frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_2}^{+++-}$$

$$(D_1, D_2; D_3)\psi_{\lambda_3}^{+---} = (-a_1, a_1 + a_2 + a_3; \frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_3}^{+---}$$

$$(D_1, D_2; D_3)\psi_{\lambda_4}^{++--} = (a_2, a_3; \frac{(b_1 + 2)}{2})\psi_{\lambda_4}^{++--}$$

$$(D_1, D_2; D_3)\psi_{\lambda_5}^{+-++} = (-a_1 - a_2 - a_3 - 2, -a_1; -\frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_5}^{+-++}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_6}^{+-+-}=(-a_1,-a_1-a_2-a_3-2;\frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_6}^{+-+-}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_7}^{+--+}=(a_3,a_2;-\frac{(b_1+2)}{2})\psi_{\lambda_7}^{+--+}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_8}^{++-+}=(a_1+a_2+a_3,-a_1;-\frac{b_3}{2})\psi_{\lambda_8}^{++-+}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_1'}^{-+++}=(-a_1-a_3-1,a_1+a_2+1;-\frac{(b_2+1)}{2})\psi_{\lambda_1'}^{-+++}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_2'}^{-++-}=(a_1+a_3+1,-a_1-a_2-1;-\frac{(b_2+1)}{2})\psi_{\lambda_2'}^{-++-}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_3'}^{-+-+}=(-a_1-a_3-1,-a_1-a_2-1;-\frac{(b_2+1)}{2})\psi_{\lambda_3'}^{-+-+}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_4'}^{-+--}=(-a_1-a_2-1,-a_1-a_3-1;\frac{(b_2+1)}{2})\psi_{\lambda_4'}^{-+--}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_5'}^{--++}=(-a_1-a_2-1,a_1+a_3+1;\frac{(b_2+1)}{2})\psi_{\lambda_5'}^{--++}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_6'}^{--+-}=(a_1+a_2+1,-a_1-a_3-1;\frac{(b_2+1)}{2})\psi_{\lambda_6'}^{--+-}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_7'}^{---+}=(a_1+a_3+1,a_1+a_2+1;-\frac{(b_2+1)}{2})\psi_{\lambda_7'}^{---+}$$

$$(D_1,D_2;D_3)\psi_{\lambda_8'}^{----}=(a_1+a_2+1,a_1+a_3+1;\frac{(b_2+1)}{2})\psi_{\lambda_8'}^{----} \qquad (3\text{-}34)$$