ภาคผนวก (ก)
ปริภูมิเวกเตอร์

ปริภูมิเวกเตอร์ V คือ เซตของเวกเตอร์มีคุณสมบัติภายใต้การบวก สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ในกรณีทั่ว ๆ ไปนิยามบนสนาม F ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ปริภูมิแบบยูคลิเดียนของจำนวนจริง n มิติแทนด้วย $\mathbb{R}^n$ ส่วนปริภูมิเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อน n มิติจะแทนด้วย $\mathbb{C}^n$

กำหนดให้ X Y และ Z เป็นสมาชิกในปริภูมิเวกเตอร์ V และมีสเกลาร์ r และ s เป็นสมาชิกในสนาม F แล้วปริภูมิเวกเตอร์มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. คุณสมบัติการสลับที่

$$X+Y=Y+X$$

2. คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก

$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$$

3. เอกลักษณ์สำหรับการบวกสำหรับ X ใด ๆ

$$0+X=X+0=X$$

4. คุณสมบัติการผกผันของการบวก

$$X+(-X)=0$$

5. คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณด้วยสเกลาร์

$$r(sX)=(rs)X$$

6. คุณสมบัติการแจกแจงสำหรับผลรวมสเกลาร์

$$(r+s)X=rX+sX$$

7. คุณสมบัติการแจกแจงสำหรับผลรวมเวกเตอร์

$$r(X+Y)=rX+rY$$

8. เอกลักษณ์การคูณ

$$1X=X$$

ภาคผนวก (ข)
เมทริกซ์ของคาร์ตังและแผนภาพของดินกิน

1. เมทริกซ์ของคาร์ตังของพีชคณิตของลี [14,15]

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -1 & 0 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -1 & 0 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -2 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -1 & 0 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & & & \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & & & \\ 0 & -1 & . & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & 2 & -1 & 0 & 0 \\ & & & . & . & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & . & . & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & & & . & . & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

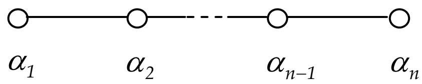
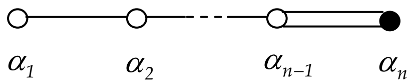
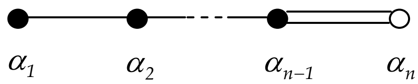
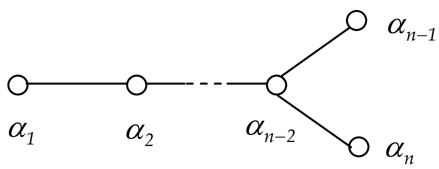
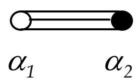
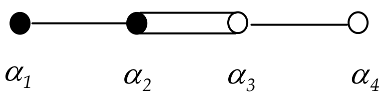
$$F_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

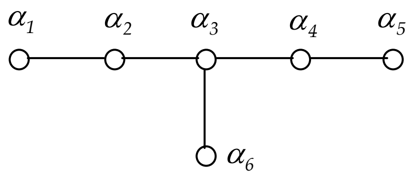
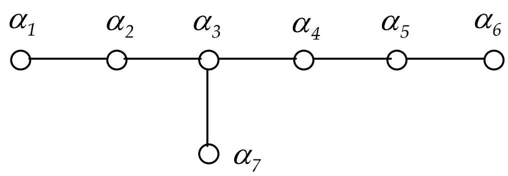
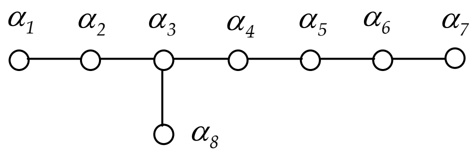
$$E_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. แผนภาพของดินกิน [15]

ชื่อของพีชคณิต	แผนภาพของดินกิน
$su(n+1) \equiv A_n$	
$so(2n+1) \equiv B_n$	
$sp(2n) \equiv C_n$	
$so(2n) \equiv D_n$	
G_2	
F_4	

E_6	
E_7	
E_8	

3. เซตของรากทั้งหมด

ชื่อของพีชคณิต	เซตของรากทั้งหมด (Σ)
$su(n+1) \equiv A_n$	$\Sigma = \{e_i - e_j\}$ $i, j = 1,2,\ldots,(n+1)\ ;\ i \neq j$
$so(2n+1) \equiv B_n$	$\Sigma = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\}$ $i, j = 1,2,\ldots,n\ ;\ i \neq j$
$sp(2n) \equiv C_n$	$\Sigma = \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j\}$ $i, j = 1,2,\ldots,n\ ;\ i \neq j$
$so(2n) \equiv D_n$	$\Sigma = \{\pm e_i \pm e_j\}$ $i, j = 1,2,\ldots,n\ ;\ i \neq j$

G_2	$\Sigma = \left\{ \pm e_i, e_i - e_j \right\}$ $i,j = 1,2,3 \; ; \; i \neq j$
F_4	$\Sigma = \left\{ \pm e_i, e_i \pm e_j, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \right\}$ $i,j = 1,2,3,4 \; ; \; i \neq j$
E_6	$\Sigma = \left\{ e_i - e_j, \pm 2e_i, e_i + e_j + e_k \right\}$ $i,j,k = 1,2,\ldots,6 \; ; \; i \neq j \neq k$
E_7	$\Sigma = \left\{ e_i - e_j, e_i + e_j + e_k + e_\ell \right\}$ $i,j,k,\ell = 1,2,\ldots,8 \; ; \; i \neq j \neq k \neq \ell$
E_8	$\Sigma = \left\{ e_i - e_j, \pm(e_i + e_j + e_k) \right\}$ $i,j,k = 1,2,\ldots,9 \; ; \; i \neq j \neq k$