บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 เพนดูลัมอย่างง่าย(Simple pendulum)

(Halliday, Resnick and Walker, 2001 : 355-357 ; Serway and Beichner, 2000:402-404)

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของเพนดูลัมอย่างง่ายจากภาพประกอบที่ 1 โดยให้มวล m ผูกติดกับเชือกและปลายอีกด้านหนึ่งถูกตรึงไว้ เมื่อดึงเชือกให้ทำมุม θ กับแนวดิ่งแล้วปล่อยให้มวล m แกว่งไปมารอบตำแหน่งสมดุล($\theta = 0$) เราสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมเนื่องจากทอร์ก(τ)ที่กระทำรอบจุดหมุนได้ดังสมการที่ 2.1

$$\tau = -L(mg\sin\theta) \tag{2.1}$$

และจาก $\sum\tau = I\alpha$ จะได้

$$-L(mg\sin\theta) = I\alpha \tag{2.2}$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดหมุน และ α คือความเร่งเชิงมุมรอบจุดหมุน

จากสมการ 2.2 สมมุติให้มุม θ มีค่าน้อยมาก เราสามารถประมาณค่า $\sin\theta = \theta$ (เช่นถ้ามุม $\theta = 5^{\circ} = 0.0873$ rad ค่า $\sin\theta = 0.0872$ ซึ่งมีความแตกต่างกันประมาณ 0.1%)ดังนั้นเราจะได้ $\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{2.3}$$

ซึ่งสมการที่ 2.3 จะอยู่ในรูปของสมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย(Simple Harmonic) ดังนั้นความถี่เชิงมุมของเพนดูลัมจึงเท่ากับ $\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$ และจาก $\omega = \frac{2\pi}{T}$ คาบของการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมสามารถเขียนได้เป็น

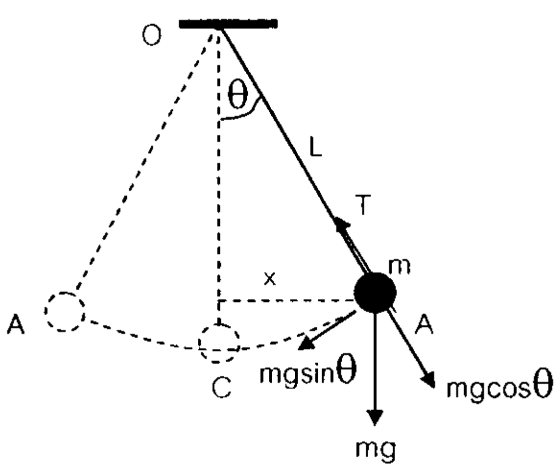
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{2.4}$$

เราสามารถพิจารณาคาบของการเคลื่อนที่โดยพิจารณาให้มวลทั้งหมดของเพนดูลัมเท่ากับมวล m จะได้โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดหมุน $I = mL^2$ ดังนั้นสมการ 2.4 สามารถเขียนเป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{2.5}$$

ซึ่งจะเห็นว่าการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมในกรณีที่แอมปลิจูดหรือมุม θ น้อยๆ คาบของการเคลื่อนที่จะไม่ขึ้นกับค่าของแอมปลิจูด

และหากวิเคราะห์คาบของการเคลื่อนที่ของเพนดูลัม (Arya.A.P.,1990 : 337-339) โดยใช้กฎอนุรักษ์พลังงานของการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมอย่างง่ายดังภาพประกอบที่ 1



ภาพประกอบ 1 แสดงเพนดูลัมอย่างง่าย

จากภาพประกอบ 1 จะได้

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{x}{L}$$

ดังนั้น

$$V = \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d\theta L}{dt}$$

$$\therefore \quad V = L\dot{\theta}$$

และจากการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของเพนดูลัมโดยใช้กฎอนุรักษ์พลังงาน โดยพลังงานศักย์ของการหมุนเนื่องจากทอร์กสามารถเขียนได้เป็น

$$V(\theta) = -\int \tau(\theta) d\theta$$

$$V(\theta) = -\int -mgL\sin\theta d\theta$$

$$= -mgL\cos\theta \qquad (2.6)$$

และพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่สามารถเขียนได้เป็น

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \qquad (2.7)$$

ดังนั้นจาก

$$K + V = E = constant \qquad (2.8)$$

แทนค่าพลังงานจลน์และพลังงานศักย์จากสมการ 2.6 และ 2.7 ลงในสมการ 2.8

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta = E \qquad (2.9)$$

ที่ตำแหน่งเริ่มต้นกำหนดให้ $\theta = \theta_0$ และ $\dot{\theta} = 0$ สมการ 2.9 จะเป็น

$$E = -mgL\cos\theta_0 \qquad (2.10)$$

แทนค่าในสมการ 2.9 และจัดรูปใหม่จะได้

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{2g}{L}}\int_0^t dt \qquad (2.11)$$

เมื่อให้ θ มีค่าน้อยมากๆ และแทนค่า $\cos\theta \approx 1-\frac{1}{2}\theta^2$ คำตอบที่ได้จากการอินทิเกรตสมการ 2.11 จะมีค่าเท่ากับคาบที่ได้จากการประมาณค่าเมื่อแอมปลิจูดในการแกว่งน้อยๆ และหากเราเปลี่ยนรูปสมการ 2.11 ให้อยู่ในรูป elliptic integral โดยใช้ค่า $\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$ ซึ่งจะได้

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = 2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

ดังนั้นสมการ 2.11 จะเปลี่ยนเป็น

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = 2\sqrt{\frac{g}{L}}\int_0^t dt \qquad (2.12)$$

เมื่อ θ เปลี่ยนแปลงอยู่ในช่วง $\pm\theta_0$ และเปลี่ยนตัวแปรใหม่โดยให้

$$\sin\phi = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{K} \qquad (2.13)$$

เมื่อกำหนดให้
$$K = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \qquad (2.14)$$

จากที่เพนดูลัมแกว่งอยู่ในช่วง $\pm\theta_0$ ดังนั้นมุม ϕ จะเปลี่ยนแปลงอยู่ระหว่าง - π ถึง+π หรือ ϕ จะอยู่ในช่วง 0 ถึง 2π ของการเคลื่อนที่แต่ละรอบ และจากสมการ 2.13 และ สมการ 2.14 สามารถเขียนสมการ 2.12 ใหม่ให้อยู่ในรูป

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\phi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\phi}} = \sqrt{\frac{g}{L}}\int_0^t dt \qquad (2.15)$$

และในการแกว่งทั้งหมดให้ t เปลี่ยนแปลงจาก 0 ถึง T และมุม ϕ เปลี่ยนแปลงจาก 0 ถึง 2π สมการ 2.15 ก็จะเปลี่ยนเป็น

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\phi}} = \sqrt{\frac{g}{L}}T \qquad (2.16)$$

สมการ 2.16 จะอยู่ในรูปของ elliptic integral of the kind ซึ่งสามารถเปิดดูคำตอบได้จากตารางมาตรฐานซึ่งจะได้คำตอบ

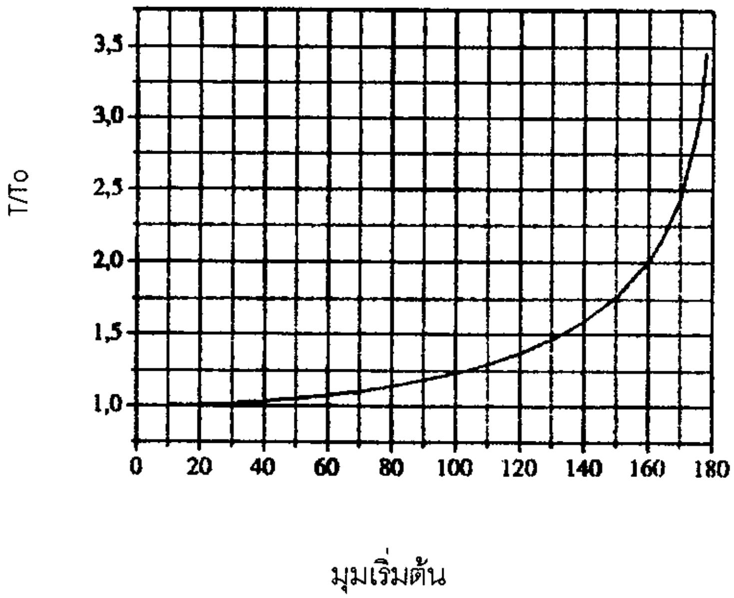
$$T = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}K^2\sin^2\phi+\ldots\right)d\phi \qquad (2.17)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}K^2 + \frac{9}{64}K^4 + \ldots\right)$$

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right) \qquad (2.18)$$

เมื่อ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

และเมื่อทำการวิเคราะห์คาบของการเคลื่อนที่ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของ $\frac{T}{T_0}$ เมื่อ T คือคาบที่แอมปลิจูดใดๆ และ T_0 เป็นคาบของการแกว่งที่แอมปลิจูดน้อยๆ กับ ค่าแอมปลิจูดของการแกว่ง พบว่าเมื่อแอมปลิจูดของการเคลื่อนที่มีค่าน้อยอัตราส่วนของคาบที่วัดได้จะมีค่าใกล้เคียงคาบของการแกว่งที่แอมปลิจูดน้อยๆ แต่เมื่อแอมปลิจูดมีค่ามากขึ้นอัตราส่วนของคาบก็จะยิ่งมีค่ามากขึ้นตามไปด้วยดังภาพประกอบ 2



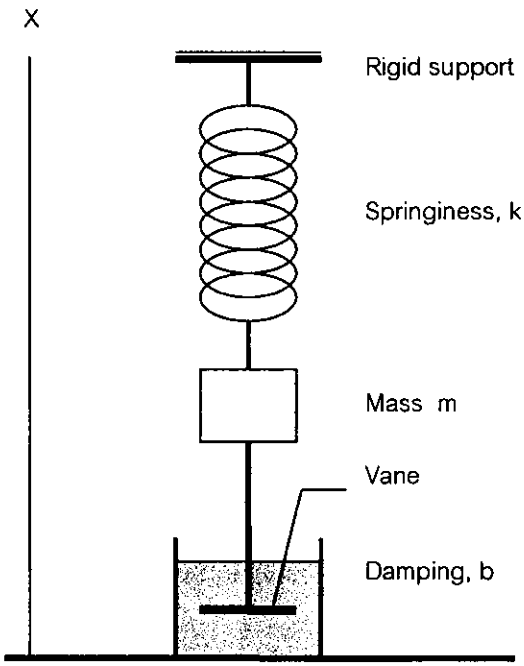
ภาพประกอบ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของคาบกับแอมปลิจูด

(ที่มา: ดัดแปลงจาก ฟิสิกส์มหาวิทยาลัย, 2530)

2.2 การแกว่งที่ถูกหน่วง(Damped Harmonic Motion)

(Halliday, Resnick and Walker, 2001 : 360-361 ; Serway and Beichner, 2000:398-405)

ในการศึกษาการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย หรือการแกว่งของเพนดูลัมอย่างง่ายโดยทั่วไปจะไม่นำแรงต้านทานที่เกิดขึ้นในการเคลื่อนที่มาใช้คำนวณ แต่อย่างไรก็ดีในทางปฏิบัติพบว่าเกิดแรงต้านการเคลื่อนที่ขึ้นเสมอ ซึ่งในการเคลื่อนที่ที่มีการแกว่งโดยมีแรงต้านภายนอกมาเกี่ยวข้องเราเรียกการแกว่งแบบนี้ว่าการแกว่งที่ถูกหน่วง โดยสามารถพิจารณาได้จากการสั่นของมวลติดสปริงดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 แสดงตัวอย่างการสั่นที่ถูกหน่วงโดยแรงภายนอกจากของเหลวของมวลติดสปริงในแนวแกน x

(ที่มา: Fundamentals of physics, 2001)

จากภาพประกอบ 3 ให้ $\vec{F}_d$ เป็นแรงหน่วงภายนอกเนื่องจากของเหลวซึ่งขึ้นอยู่กับความเร็ว $\vec{v}$ ของกล่องดังนั้นหากพิจารณาเฉพาะองค์ประกอบในแนวแกน x จากภาพประกอบที่ จะได้

$$F_d = -bv \tag{2.19}$$

เมื่อ b เป็นค่าคงที่ของความหน่วงซึ่งขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของของเหลวและวัตถุที่เคลื่อนที่ในของเหลวโดยในหน่วย SI จะมีหน่วยกิโลกรัมต่อวินาที เครื่องหมายลบแสดงว่าแรงมีทิศตรงข้ามกับการเคลื่อนที่

แรงที่กระทำบนมวล m เนื่องจากสปริงคือ $F_s = -kx$ และให้แรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ F_d และ F_s จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันจะได้

$$F_{net,x} = ma_x \tag{2.20}$$

ดังนั้นจากภาพประกอบ 3 จะได้สมการการเคลื่อนที่

$$-bv - kx = ma \tag{2.21}$$

เขียนให้อยู่ในรูป differential equation จะได้

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{2.22}$$

เมื่อกำหนดให้ $\gamma = \frac{b}{2m}$ และ $\omega^2 = \frac{k}{m}$

สมการที่ 2.22 จะเปลี่ยนเป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{2.23}$$

คำตอบทั่วไปของสมการ 2.23 จะอยู่ในรูป

$$x(t) = x_m e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi) \tag{2.24}$$

เมื่อ x_m เป็นแอมปลิจูดของการเคลื่อนที่ และ ω' เป็นความถี่เชิงมุมของการแกว่งโดยความถี่เชิงมุมสามารถเขียนได้เป็น

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \tag{2.25}$$

จากสมการ 2.24 แสดงให้เห็นว่าแอมปลิจูดของการแกว่งจะลดลงตามเวลา และเมื่อพิจารณาพลังงานกลในการเคลื่อนที่ก็พบว่าพลังงานจะไม่คงที่แต่จะลดลงตามเวลาเช่นกัน โดยเราสามารถหาความสัมพันธ์ของพลังงานกลกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย จาก $E = \frac{1}{2}kx_m^2$ ดังนั้นจากสมการ 2.24 เราสามารถเขียนสมการแสดงพลังงานกลซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาได้เป็น

$$E(t) \approx \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-2\gamma t} \tag{2.26}$$

หรือ

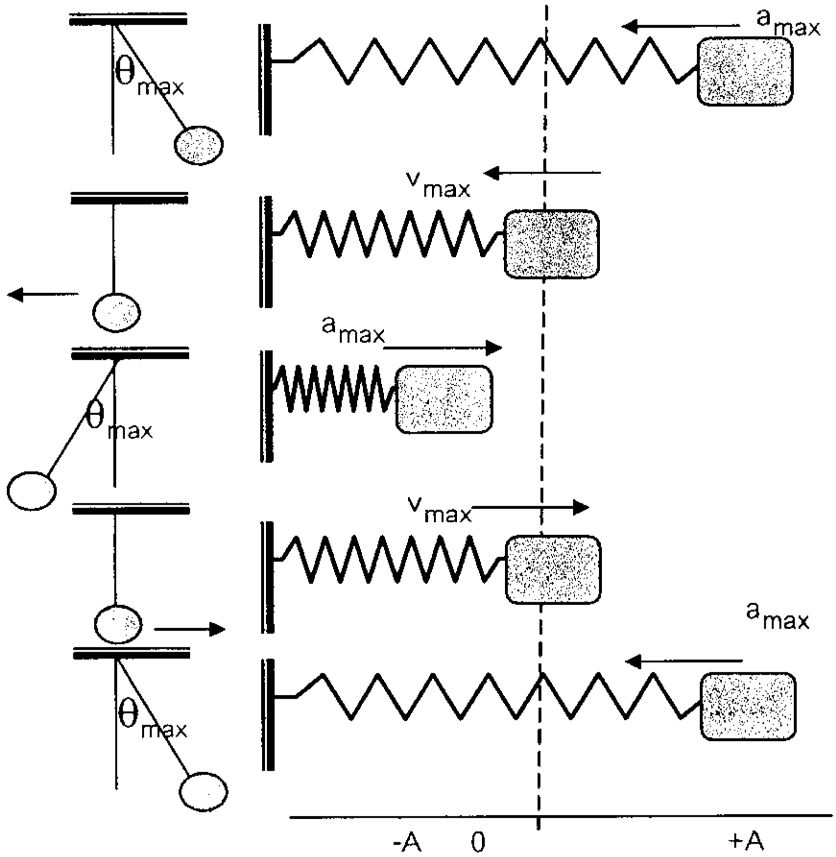
$$E(t) \approx E_0 e^{-2\gamma t} \tag{2.27}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าพลังงานกลจะลดลงแบบเอ็กโปเนนเชียลเมื่อเวลาผ่านไป และจากภาพประกอบ 4 ซึ่งแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายของมวลติดสปริงกับการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมดังนั้นสมการ 2.25 และ 2.27 สามารถเขียนได้เป็น

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \gamma^2} \tag{2.28}$$

และ

$$E \approx mgL(1 - \cos\theta)e^{-2\gamma t} \tag{2.29}$$



t	x	v	a	K	V
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
T/4	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T/2	-A	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
3T/4	0	ωA	o	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	o	$\frac{1}{2}kA^2$

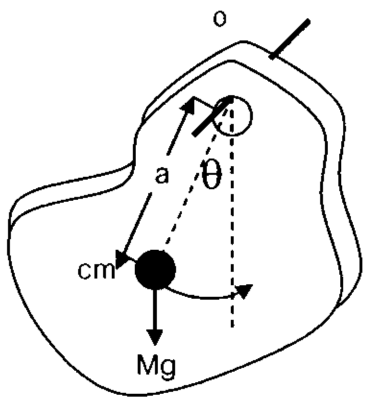
ภาพประกอบ 4 แสดงความสัมพันธ์ของปริมาณต่างๆของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายของมวลติดสปริงกับเพนดูลัม

(ที่มา: Physics for scientists and engineers with modern physics, 2000)

2.3 เพนดูลัมเชิงประกอบ(Compound pendulum)

(P.Hinrichsen, 1981 : 286-292)

ในการศึกษาการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมยังมีส่วนที่น่าสนใจ และสามารถนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้งานได้อีกคือ เพนดูลัมเชิงประกอบ(compound pendulum) ซึ่งเป็นหัวข้อที่นักศึกษาฟิสิกส์ในระดับพื้นฐานส่วนใหญ่ต้องผ่านการทำการทดลองในห้องปฏิบัติการ เพื่อนำผลการทดลองที่ได้ไปคำนวณหาจุดศูนย์กลางมวล (center of mass) และโมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia)



ภาพประกอบ 5 แสดงส่วนประกอบของเพนดูลัมเชิงประกอบ

คาบของการแกว่งที่มีแอมปลิจูดน้อยๆ ของวัตถุมวล M รอบแกนที่ขนานกับพื้นจะขึ้นอยู่กับโมเมนต์ความเฉื่อย I และระยะจากจุดหมุนถึงจุดศูนย์กลางมวล a จากภาพประกอบ 5 จะได้

$$\tau = Mga\sin\theta \qquad (2.29)$$

และจากการประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันจะได้

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = Mga\sin\theta \qquad (2.30)$$

เมื่อมุม $\theta << 1$ $\sin\theta \approx \theta$ เพราะฉะนั้นจะได้สมการเป็น

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = Mga\theta \tag{2.31}$$

จะเห็นว่าสมการ 2.31 อยู่ในรูปของสมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple harmonic) ดังนั้นคาบของการเคลื่อนที่จะเป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mga}} \tag{2.32}$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนหมุน และจากทฤษฎีแกนขนานโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลจะเป็น

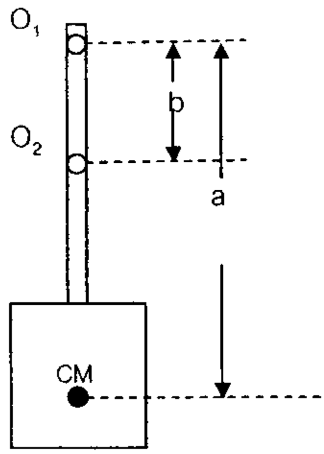
$$I = Ma^2 + I_0 = M\left(a^2 + k^2\right) \tag{2.33}$$

เมื่อ $I_0 = Mk^2$ และ k คือ รัศมีไจเรชั่น(radius of gyration)
ดังนั้นคาบของการเคลื่อนที่สามารถเขียนได้เป็น

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + k^2}{ag}} \tag{2.34}$$

ซึ่งจากสมการ 2.34 ถ้าค่าของ $k << a$ คาบที่ได้ก็จะเป็นคาบของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย(simple harmonic) แต่ในทางปฏิบัติพบว่าวัสดุต่างๆ อาจมีรูปทรงที่ไม่สามารถวัดค่า a ได้โดยตรง ดังนั้นในสมการ 2.34 จึงมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าอยู่ 2 ตัว คือ a และ k แต่ก็สามารถทำการทดลองได้โดยวัดคาบในการแกว่งสองครั้งจากการเปลี่ยนจุดหมุนให้ห่างจากจุดหมุนเดิม b ดังภาพประกอบ 6 ก็จะได้สมการของคาบเป็น

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{(a-b)^2 + k^2}{(a-b)g}} \tag{2.35}$$



ภาพประกอบ 6 เพนดูลัมเชิงประกอบเปลี่ยนแกนหมุนจาก O_1 เป็น O_2 ซึ่งมีระยะห่างกัน d

จากสมการ 2.34 และ 2.35 เราสามารถหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลได้จาก

$$a = b\left[\frac{4\pi^2 b + gT_2^2}{8\pi^2 b + g\left(T_2^2 - T_1^2\right)}\right] \tag{2.36}$$

และรัศมีไจเรชั่น k จาก

$$k = a\sqrt{\frac{gT_1^2}{4\pi^2 a} - 1} \tag{2.37}$$

จะเห็นได้ว่าจากสมการข้างต้นเมื่อทำการวัดคาบ T_1 T_2 และระยะห่างระหว่างจุดหมุนทั้งสองครั้งจะทำให้เราสามารถคำนวณหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล รัศมีไจเรชั่นและโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุใดๆ ได้