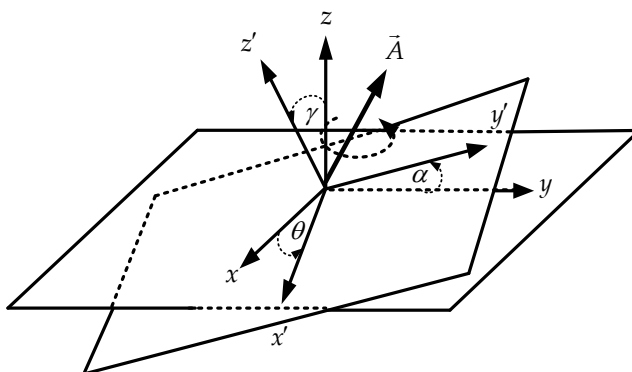


บทที่ 2 พีชคณิตของลី

2.1 การแปลงพิกัดการหมุนเวกเตอร์ในระบบแกนจำนวนจริง

ปริมาณเวกเตอร์มีทั้งขนาดและทิศทาง มีคุณสมบัติของการเปลี่ยนแปลงพิกัดที่สำคัญคือ เมื่อแปลงพิกัดการหมุนเวกเตอร์ไปแล้ว ขนาดตั้งคงที่แต่ทิศทางอาจจะเปลี่ยนแปลง ซึ่งการแปลงพิกัดของเวกเตอร์สามารถทำได้โดยการสร้างตัวดำเนินการแปลงพิกัด

พิจารณาเวกเตอร์ \vec{A} ในระบบพิกัดฉาก xyz และระบบพิกัด $x'y'z'$ ดังภาพ



ภาพประกอบ 2.1 การหมุนเวกเตอร์ในระบบสามมิติจากระบบพิกัดฉาก xyz และระบบพิกัด $x'y'z'$

จะได้
$$\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z = A'_x \hat{e}'_x + A'_y \hat{e}'_y + A'_z \hat{e}'_z \quad (2-1)$$

นำ \hat{e}'_x คูณแบบดอดกับสมการ (2-1) จะได้ทราบความสัมพันธ์ส่วนประกอบของ \vec{A} ในแนวแกน x

$$A'_x = A_x (\hat{e}'_x \cdot \hat{e}_x) + A_y (\hat{e}'_x \cdot \hat{e}_y) + A_z (\hat{e}'_x \cdot \hat{e}_z) \quad (2-2)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับแกน y และ z

$$A'_y = A_x (\hat{e}'_y \cdot \hat{e}_x) + A_y (\hat{e}'_y \cdot \hat{e}_y) + A_z (\hat{e}'_y \cdot \hat{e}_z)$$

$$A'_z = A_x (\hat{e}'_z \cdot \hat{e}_x) + A_y (\hat{e}'_z \cdot \hat{e}_y) + A_z (\hat{e}'_z \cdot \hat{e}_z)$$

เพื่อความสะดวกเราจะใช้ตัวเลข 1, 2, 3 แทนแกน x, y, z และกำหนด $R_{ij} = (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j)$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์การแปลงพิกัด ซึ่งหาได้จากมุมระหว่างแกนแต่ละคู่ตั้งนั้นจะได้

$$\left. \begin{aligned} A'_1 &= R_{11}A_1 + R_{12}A_2 + R_{13}A_3 \\ A'_2 &= R_{21}A_1 + R_{22}A_2 + R_{23}A_3 \\ A'_3 &= R_{31}A_1 + R_{32}A_2 + R_{33}A_3 \end{aligned} \right\} \text{เขียนสั้นๆ } A'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}A_j \text{ เมื่อ } i, j = 1, 2, 3 \quad (2-3)$$

นำมาเขียนในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

กำหนดให้ $\underline{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$ เรียกว่า เมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์การแปลงพิกัดหรือตัวดำเนินการแปลงพิกัดของเวกเตอร์

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}' = \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}$$

จะได้ตัวดำเนินการการแปลงพิกัด xyz ไปสู่ระบบพิกัด $x'y'z'$ ของเวกเตอร์ในรูปแบบอย่างง่าย ดังนี้

$$\underline{A}' = \underline{R}\underline{A} \quad (2-5)$$

ในทำนองเดียวกัน

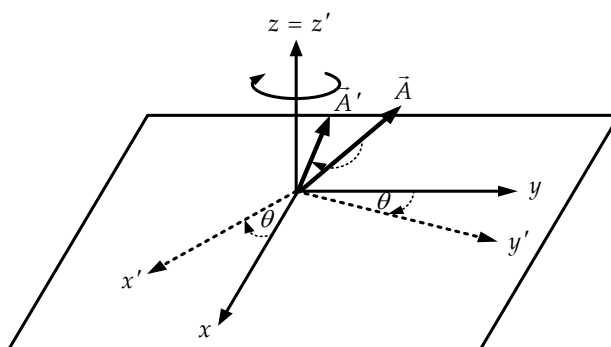
$$\underline{A} = \underline{R}^T \underline{A}' \quad (2-6)$$

เมื่อ \underline{R}^T คือ เมทริกซ์ทรานสโพสของ \underline{R}

2.2 ตัวดำเนินการหมุนเชิงน้อยยั้งสำหรับพีชคณิตของลีบนปริภูมิพีชคณิต $so(2)$

เมื่อพิจารณาการหมุนเชิงน้อยยั้งสำหรับเวกเตอร์จะพบว่าตัวดำเนินการหมุนเวกเตอร์มีความสอดคล้องกับกลุ่มพีชคณิตของลี เมื่อกำหนดเวกเตอร์ \vec{A} ดังนี้

$$\vec{A} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$



ภาพประกอบ 2.2 การหมุนเวกเตอร์ \vec{A} บนระนาบ xy ไปเป็นระนาบ $x'y'$

สามารถเขียนความสัมพันธ์ในรูปแบบเมทริกซ์ของการแปลงพิกัดเวกเตอร์ \vec{A} ใดๆ จากระบบ xyz ไปเป็น $x'y'z'$ ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

เมื่อพิจารณาแต่ละองค์ประกอบ

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2-8)$$

จะได้ตัวดำเนินการหมุนของพีชคณิตบน $so(2)$ ซึ่งมีพารามิเตอร์หนึ่งตัว คือ θ ถ้าพิจารณาการเปลี่ยนแปลงเชิงน้อยยั้ง θ เข้าสู่ 0 จะได้ $\cos \theta$ เข้าสู่ 1 และ $\sin \theta$ เข้าสู่ $\delta \theta$ สมการ (2-8) จะได้

$$\begin{aligned}x' &= x - y\delta\theta & , & & \delta x &= -y\delta\theta \\y' &= x\delta\theta + y & , & & \delta y &= x\delta\theta\end{aligned}\quad (2-9)$$

ตัวดำเนินการหมุนเชิงน้อยยั้งของกลุ่มพีชคณิต กำหนดโดย

$$\chi_\sigma = U_\sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{เมื่อ} \quad U_\sigma^i = \left(\frac{\partial f^i}{\partial a^\sigma} \right)$$

จะให้

$$\chi = U^1 \frac{\partial}{\partial x} + U^2 \frac{\partial}{\partial y} \quad (2-10)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (2-10) และ สมการที่ (2-11) จะได้

$$U^1 = \frac{\delta x}{\delta\theta} = -y \quad \text{และ} \quad U^2 = \frac{\delta y}{\delta\theta} = x$$

$$\chi = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad (2-11)$$

จากทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัมของโมเมนตัมเชิงมุม จะได้

$$J_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2-12)$$

ทำให้ทราบว่าสมการ (2-12)

$$J_z = -i\chi$$

ซึ่ง J_z คือ ตัวดำเนินการหมุนของเวกเตอร์ของพีชคณิตของลีบนปริภูมิพีชคณิต $so(2)$ [6]

2.3 ลักษณะพีชคณิตของลี

เมื่อเราพิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ \mathfrak{g} ซึ่งมีมิติ n บนสนาม K ซึ่งจะเป็นปริภูมิของจำนวนจริงหรือปริภูมิจำนวนเชิงซ้อนขึ้นกับสนาม K จะถูกเรียกว่าเป็นพีชคณิตของลี ถ้า \mathfrak{g} สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังนี้

$$1) [X_a, X_a] = 0 \quad (2-13)$$

$$2) [\alpha X_a + \beta X_b, X_c] = \alpha[X_a, X_c] + \beta[X_b, X_c] \quad (2-14)$$

$$3) [X_a, X_b] = f_{ab}^c X_c \quad (2-15)$$

$$4) [X_a, [X_b, X_c]] + [X_b, [X_c, X_a]] + [X_c, [X_a, X_b]] = 0 \quad (2-16)$$

เรียก f_{ab}^c ว่าค่าคงที่โครงสร้าง (structure constant) สมการ (2-16) เรียกว่า เอกลักษณ์แบบจาโคบี (Jacobi Identity) โดยที่ $X_a, X_b, X_c \in \mathfrak{g}$ และ $\alpha, \beta \in K$

ทั้งนี้พีชคณิตของลีสี่มีทั้งแบบมิติจำกัดและแบบมิติไม่จำกัด ขึ้นกับที่เราพิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ \mathfrak{g} เป็นแบบจำกัดหรือไม่จำกัด เช่น พีชคณิตของ $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{so}(2n)$ แทนพีชคณิตที่มองปริภูมิเวกเตอร์ \mathfrak{g} เป็นแบบมิติจำกัด โดยกำหนดเป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และมีดีเทอร์มิแนนต์เท่ากับ +1

2.4 แผนภาพดินกิน (Dynkin diagram)

แผนภาพดินกินเป็นสัญลักษณ์ในรูปแบบอย่างสั้น สำหรับการเขียนรากมูลฐาน (simple root) ในแต่ละกลุ่มพีชคณิตของลี โดยรากมูลฐานแต่ละตัวจะถูกแสดงด้วยวงกลมหนึ่งวง แต่ละคู่ของวงกลมเชื่อมโยงกันด้วยเส้นตรง มุมแต่ละคู่ของรากกำหนดโดยแผนภาพดินกิน ดังต่อไปนี้ [7]

α_i	α_j	$A_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$	$\frac{ \alpha_i }{ \alpha_j }$	$\cos \phi = \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{ \alpha_i \alpha_j }$	ϕ
○	○	0	-	0	$\pi/2$
○	○	-1	1	-1/2	$2\pi/3$
○	●	-2	$\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$3\pi/4$
●	○	-1	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$3\pi/4$
○	●	-3	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$
●	○	-1	$1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$

2.5 เมทริกซ์คาร์ตัง (Cartan matrix)

เมทริกซ์คาร์ตังเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่ประกอบด้วยรากมูลฐาน $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ ตามแถวของเมทริกซ์ โดยสมาชิกซึ่งเป็นจำนวนเต็มของเมทริกซ์คาร์ตัง ถูกกำหนดโดยผลคูณภายใน โดยใช้รูปแบบของคิลลิง (Killing form) ดังสมการ [6,7,8]

$$A_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \quad (2-17)$$

คุณสมบัติของเมทริกซ์คาร์ตัง มีดังต่อไปนี้

- 1) A_{ii} ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มภายในเซต $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$
- 2) $A_{ii} = 2$ สำหรับสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก
- 3) $A_{ij} \leq 0$ สำหรับสมาชิกที่ไม่ใช่ A_{ii}
- 4) $A_{ij} = 0$ ถ้า $A_{ji} = 0$

พิจารณาระบบรากของกลุ่มพีชคณิต A_n ที่กำหนดตามกลุ่มพีชคณิตของลี ประกอบด้วยรากมูลฐานคือ $\{e_i - e_{i+1}\}_{i=1}^{n+1}$ จำนวนทั้งหมด n ราก พิจารณาสองรากใดๆ $e_i - e_{i+1}$ และ $e_{i+1} - e_{i+2}$ นำมาวิเคราะห์สร้างเมทริกซ์คาร์ตัง A คือ

$$A = \frac{2\langle e_i - e_{i+1}, e_{i+1} - e_{i+2} \rangle}{\langle e_i - e_{i+1}, e_i - e_{i+1} \rangle} \quad (2-18)$$

พิจารณาคำนวณค่าผลคูณภายในของเศษ คือ

$$\langle e_i - e_{i+1}, e_{i+1} - e_{i+2} \rangle = \langle e_i, e_{i+1} \rangle - \langle e_i, e_{i+2} \rangle - \langle e_{i+1}, e_{i+1} \rangle + \langle e_{i+1}, e_{i+2} \rangle \quad (2-19)$$

โดย แต่ละรากของ e จะมีความยาวเป็น 1 หน่วย และลดรูป เป็น -1

พิจารณาคำนวณค่าผลคูณภายในของตัวส่วนในทำนองเดียวกัน คือ

$$\langle e_i - e_{i+1}, e_i - e_{i+1} \rangle = \langle e_i, e_i \rangle - \langle e_i, e_{i+1} \rangle - \langle e_{i+1}, e_i \rangle + \langle e_{i+1}, e_{i+1} \rangle \quad (2-20)$$

ซึ่งลดรูปลงเป็น 2 ในทำนองเดียวกันกับตัวเศษ

ดังนั้น สมาชิกที่อยู่เหนือและใต้เส้นทแยงมุมหลักของเมทริกซ์คาร์ตัง จึงเป็น -1 เสมอ และสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักก็จะมีค่าเท่ากับ 2 เสมอเช่นกัน

เมทริกซ์คาร์ตังสำหรับระบบรากของกลุ่มพีชคณิต A_n จะกำหนดโดย

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & , |i-j| > 1 \\ -1 & , |i-j| = 1 \\ 2 & , |i-j| = 0 \end{cases} \quad (2-21)$$

เขียนในรูปทั่วไปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.6 กลุ่มพีชคณิตของลี

กลุ่มพีชคณิตของลี เป็นกลุ่มของตัวดำเนินการที่คิดค้นโดยลี [6,9] โดยในแต่ละกลุ่มของพีชคณิตจะให้แผนภาพดินกิน เมทริกซ์ของคาร์ตัง และรากมูลฐาน เพื่อที่จะนำไปสู่การสร้างตัวกำเนิดบนปริภูมิพีชคณิตที่แตกต่างกัน สามารถจำแนกได้เป็น 2 กลุ่มใหญ่ ดังนี้

2.6.1) พีชคณิตของลีแบบฉบับ (Classical Lie algebras) เป็นพีชคณิตที่ศึกษาเกี่ยวกับเวกเตอร์ของรากที่มีมิติจำกัด ประกอบด้วยกลุ่มพีชคณิตทั้งหมด 4 กลุ่ม และแผนภาพดินกินดังต่อไปนี้

1) กลุ่มพีชคณิต $su(n+1)$

รูปแบบคาร์ตัง : A_n

รูปแบบกลุ่มพีชคณิต : $su(n+1)$

$$\text{เมทริกซ์คาร์ตัง} : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{แผนภาพดิเนกิน} : \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \quad \quad \alpha_n \end{array}$$

$$\text{รากเวกเตอร์} : e_i - e_j ; i, j = 1, \dots, n+1$$

2) กลุ่มพีชคณิต $so(2n+1)$

$$\text{รูปแบบคาร์ตัง} : B_n$$

$$\text{รูปแบบกลุ่มพีชคณิต} : so(2n+1)$$

$$\text{เมทริกซ์คาร์ตัง} : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{แผนภาพดิเนกิน} : \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \circ \text{---} \bullet \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \quad \quad \alpha_n \end{array}$$

$$\text{รากเวกเตอร์} : \pm e_i \text{ และ } \pm e_i \pm e_j ; i, j = 1, \dots, n$$

3) กลุ่มพีชคณิต $Sp(2n)$ รูปแบบคาร์ตัง : C_n รูปแบบกลุ่มพีชคณิต : $Sp(2n)$

$$\text{เมทริกซ์คาร์ตัง} : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{แผนภาพดินนิน} : \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \cdots \text{---} \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \quad \quad \alpha_n \end{array}$$

$$\text{รากเวกเตอร์} : \pm 2e_i \text{ และ } \pm e_i \pm e_j ; i, j = 1, \dots, n$$

4) กลุ่มพีชคณิต $so(2n)$ รูปแบบคาร์ตัง : D_n รูปแบบกลุ่มพีชคณิต : $so(2n)$

$$\text{เมทริกซ์คาร์ตัง} : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{แผนภาพดินนิน} : \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \begin{array}{l} \diagup \circ \alpha_{n-1} \\ \diagdown \circ \alpha_n \end{array} \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \quad \quad \alpha_{n-2} \end{array}$$

$$\text{รากเวกเตอร์} : \pm e_i \pm e_j ; i, j = 1, \dots, n$$

2.6.2) พีชคณิตของลีแบบพิเศษ (Exceptional Lie algebras) เป็นพีชคณิตที่ศึกษาเกี่ยวกับเวกเตอร์ของรากที่มีมิติไม่จำกัดประกอบด้วยกลุ่มพีชคณิตทั้งหมด 5 กลุ่ม และแผนภาพดินกินดังต่อไปนี้

1) กลุ่มพีชคณิต G_2

รูปแบบคาร์ตัง และ รูปแบบกลุ่มพีชคณิต : G_2

$$\text{เมทริกซ์คาร์ตัง} : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{แผนภาพดินกิน} : \begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \end{array}$$

$$\text{รากเวกเตอร์} : \begin{array}{l} e_i - e_j; i, j = 1, 2, 3; i \neq j \\ \pm e_i; i = 1, 2, 3 \end{array}$$

2) กลุ่มพีชคณิต F_4

รูปแบบคาร์ตัง และ รูปแบบกลุ่มพีชคณิต : F_4

$$\text{เมทริกซ์คาร์ตัง} : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

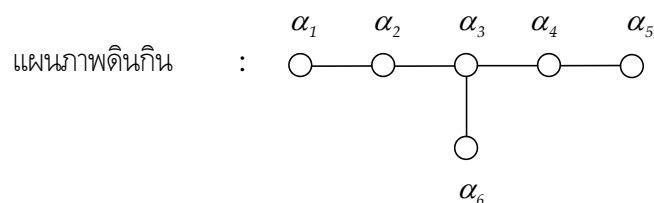
$$\text{แผนภาพดินกิน} : \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \end{array}$$

$$\text{รากเวกเตอร์} : \text{เท่ากับราก } B_4 \text{ รวมกับอีก 16 ราก } \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$$

3) กลุ่มพีชคณิต E_6

รูปแบบคาร์ตัง และ รูปแบบกลุ่มพีชคณิต : E_6

$$\text{เมทริกซ์คาร์ตัง} : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



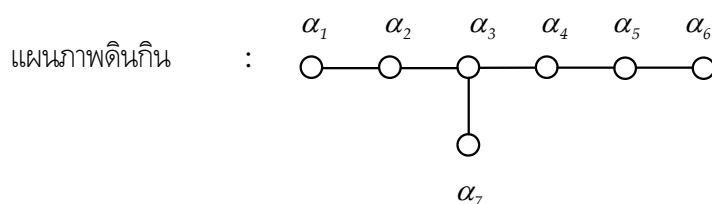
รากเวกเตอร์ : เท่ากับราก A_5 รวมกับราก $\pm\sqrt{2}e_7$ และ

$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6) \pm e_7 / \sqrt{2}$ เป็น บวกสามชุดแรกและ ลบสามชุดหลัง ในเศษส่วนชุดแรก

4) กลุ่มพีชคณิต E_7

รูปแบบคาร์ตัง และ รูปแบบกลุ่มพีชคณิต : E_7

$$\text{เมทริกซ์คาร์ตัง} : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



รากเวกเตอร์ : เท่ากับราก A_7 รวมกับราก

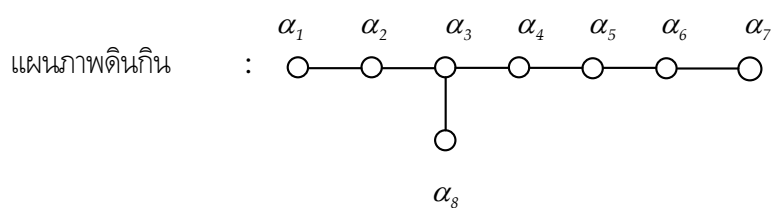
$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$ สำหรับสี่จุดแรกเป็นบวก และสี่จุดหลังเป็นลบ

5) กลุ่มพีชคณิต E_8

รูปแบบคาร์ตัง และ รูปแบบกลุ่มพีชคณิต : E_8

เมทริกซ์คาร์ตัง :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



รากเวกเตอร์ : เท่ากับราก D_8 รวมกับราก $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$

พจน์คู่แทนเป็นบวก