บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 กฎการสลายตัวของนิวไคลด์

เมื่อนิวเคลียสของนิวไคลด์กัมมันตรังสีเปลี่ยนสภาพเป็นนิวเคลียสของธาตุใหม่จะปลดปล่อยพลังงานออกมาในรูปของรังสีชนิดต่างๆ เช่น แอลฟา บีตาหรือแกมมา ซึ่งการสลายตัวดังกล่าวเป็นแบบสุ่ม โดยขึ้นอยู่กับจำนวนนิวเคลียสหรือจำนวนอะตอมที่มีอยู่เดิมในขณะนั้น

กำหนดให้ N คือ จำนวนอะตอมที่มีอยู่ในขณะใดขณะหนึ่ง อัตราการสลายตัวคือ

$$-\frac{dN}{dt} \alpha N$$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{2.1}$$

เมื่อ λ คือ ค่าคงที่การสลายตัว (Decay constant) มีหน่วยเป็น s^{-1}

ถ้า N_0 เป็นจำนวนอะตอมที่มีอยู่เดิมเมื่อเวลาเริ่มต้น t = 0 สมการ (2.1) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_{0}^{t} dt$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{2.2}$$

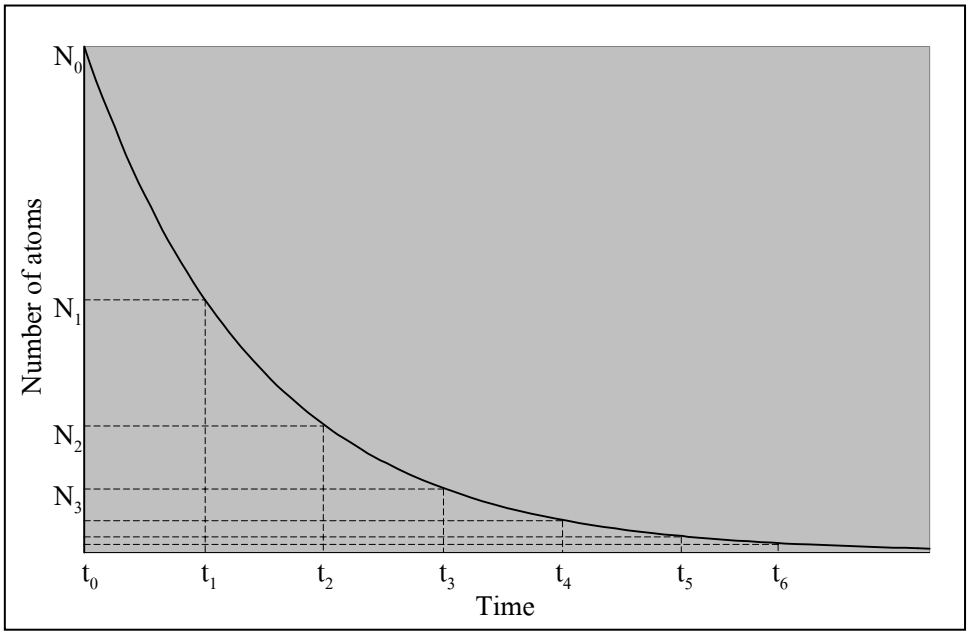
สมการ (2.2) คือ กฎการสลายตัวของนิวไคลด์กัมมันตรังสี

2.2 กัมมันตภาพรังสี

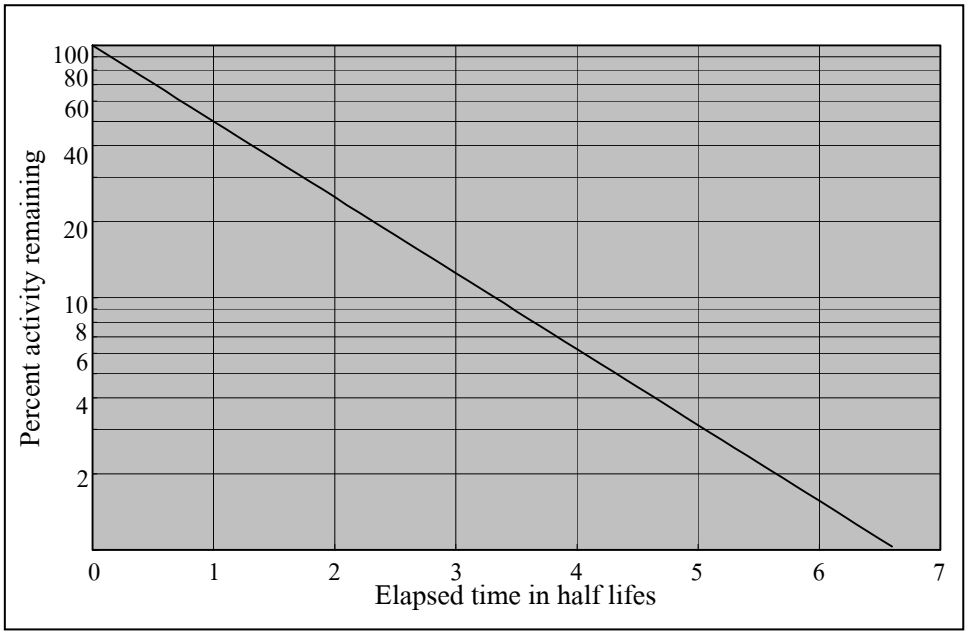
กำหนดให้ A เป็นกัมมันตภาพหรือความแรงรังสี (Activity) จะได้ว่า

$$A = \frac{dN}{dt}$$

$$A = \lambda N \tag{2.3}$$



ภาพประกอบที่ 2.1 ความสัมพันธ์ของจำนวนอะตอมนิวไคลด์กัมมันตรังสี
ที่ลดลงตามเวลาโดยลงจุดในกระดาษกราฟเชิงเส้น



ภาพประกอบที่ 2.2 ความสัมพันธ์เช่นเดียวกับภาพประกอบที่ 2.1
แต่ลงจุดในกระดาษกราฟกึ่งล็อก

จากสมการ (2.2) สามารถเขียนสมการ (2.3) ได้ใหม่เป็น

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$
$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad (2.4)$$

เมื่อ A_0 คือ กัมมันตภาพที่เวลาเริ่มต้น (t = 0)

A คือ กัมมันตภาพที่เวลาใดๆ มีหน่วยเป็น dps (Disintegration per second)

2.3 ครึ่งชีวิต ($t_{1/2}$) และชีวิตเฉลี่ย (τ)

ครึ่งชีวิตหมายถึง เวลาที่นิวไคลด์กัมมันตรังสีสลายตัวเหลือครึ่งหนึ่งจากจำนวนที่มีอยู่ในตอนเริ่มต้น นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป t เท่ากับ $t_{1/2}$ จำนวนอะตอมของธาตุกัมมันตรังสี N เหลือเท่ากับ $N_0/2$ และเมื่อแทนค่าเงื่อนไขดังกล่าวลงในสมการ (2.2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$$
$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda t_{1/2}$$
$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$
$$t_{1/2} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (2.5)$$

สมการ (2.5) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าครึ่งชีวิต ($t_{1/2}$) กับค่าคงที่การสลายตัว (λ) แต่เนื่องจากอะตอมในนิวไคลด์กัมมันตรังสีมีชีวิตไม่เท่ากัน โดยค่าเฉลี่ยช่วงชีวิตเรียกว่าชีวิตเฉลี่ย (mean life : τ) ซึ่งหาได้จากการรวมชีวิตของอะตอมทั้งหมดแล้วหารด้วยจำนวนอะตอมที่มีอยู่

กำหนดให้ อะตอม dN_n มีช่วงชีวิต t_n โดย n = 1, 2, 3, … จะได้

$$\tau = \frac{dN_1 t_1 + dN_2 t_2 + dN_3 t_3 + \ldots}{dN_1 + dN_2 + dN_3 + \ldots}$$
$$= \frac{\int_0^{N_\infty} t\,dN}{\int_0^{N_\infty} dN} \quad (2.6)$$

เมื่อ $dN = -\lambda N dt = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$ สมการ (2.6) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\tau = -\int_0^{\infty} \lambda t N_0 e^{-\lambda t} \frac{dt}{N_0}$$

$$\tau = -\lambda \left(\frac{-1}{\lambda^2} \right)$$

$$\tau = \lambda^{-1} \qquad (2.7)$$

สมการ (2.7) แสดงให้เห็นว่าค่าชีวิตเฉลี่ย (τ) มีค่าแปรผกผันกับค่าคงที่การสลายตัว (λ)

2.4 คุณสมบัติของรังสีแกมมา และอันตรกิริยากับสสาร

รังสีแกมมาคือ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดจากการถ่ายทอดพลังงานนิวเคลียร์ภายในนิวเคลียส เช่น การสลายตัวของ โคบอลต์ – 60 (Co – 60) เป็น นิกเกิล – 60 (Ni – 60) นอกจากจะปลดปล่อยอนุภาคบีตาแล้วยังมีการปลดปล่อยรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาในรูปของโฟตอนหรือควอนตัมของพลังงานที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วแสง ($3x10^8$ m/s) ในระหว่างการสลายตัวจากการจับอิเล็กตรอนอีกด้วย โดยความยาวคลื่น (λ) หรือความถี่ (ν) ของรังสีแกมมาแสดงได้ดังภาพประกอบที่ 2.3

โดยความยาวคลื่น และความถี่มีความสัมพันธ์กับความเร็วดังนี้

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \qquad (2.8)$$

สำหรับพลังงานของโฟตอนสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$E = h\nu \qquad (2.9)$$

โดยที่ E คือ พลังงานของโฟตอน มีหน่วยเป็น J

h คือ ค่าคงที่ของแพลงค์ซึ่งมีค่าเท่ากับ $6.625x10^{-34}$ J · s

ν คือ ความถี่ มีหน่วยเป็น s^{-1}

Wavelength (Angstroms)	Radiation	Energy	Use
10^{-4}	Secondary Cosmic Rays	100 MeV	
10^{-3}		10 MeV	
10^{-2}	Gamma Rays	1 MeV	
10^{-1}		100 keV	Deep Therapy
10^{0}		10 keV	
10^{1}	X-Rays	1 keV	Diagnosis and Therapy
10^{2}		100 eV	
10^{3}	Ultraviolet	10 eV	
10^{4}	Visible Light	1 eV	Solar Energy
10^{5}	Infrared	10^{-1} eV	Space Heating
10^{6}		10^{-2} eV	
10^{7}		10^{-3} eV	
10^{8}		10^{-4} eV	Radar
10^{9}	Radio Waves	10^{-5} eV	
10^{10}		10^{-6} eV	Television
10^{11}		10^{-7} eV	
10^{12}		10^{-8} eV	
10^{13}		10^{-9} eV	Radio
10^{14}		10^{-10} eV	
10^{15}	Electric Current in wires (AC)	10^{-11} eV	Power
10^{16}		10^{-12} eV	

ภาพประกอบที่ 2.3 สเปกตรัมคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

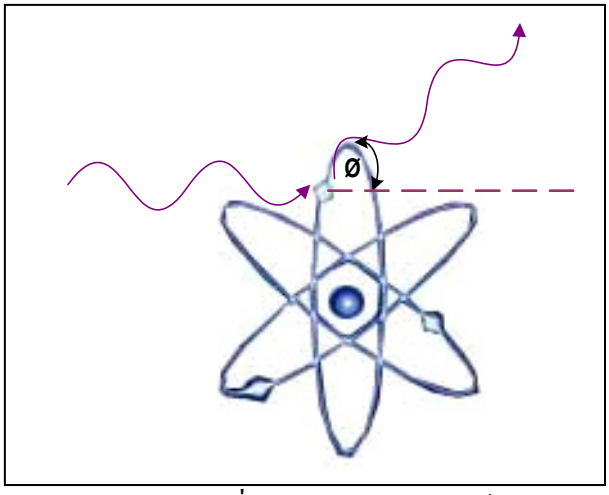
จากสมการ (2.8) และ (2.9) สามารถแสดงความสัมพันธ์ของพลังงาน และความยาวคลื่นได้ในรูป

$$\lambda(\mathrm{m}) = \frac{1.24\times10^{-8}}{\mathrm{E(MeV)}} \qquad (2.10)$$

เมื่อโฟตอนทำอันตรกิริยากับสสาร อาจเกิดการชนกับนิวเคลียส อิเล็กตรอนหรือสนามรอบนิวเคลียส ซึ่งการชนดังกล่าวอาจเป็นการชนแบบยืดหยุ่น ไม่ยืดหยุ่น หรืออาจส่งผลให้โฟตอนถูกดูดกลืนโดยสมบูรณ์ สำหรับอันตรกิริยาที่สำคัญได้แก่

- การกระเจิงเรย์เลย์ เกิดขึ้นในกรณีที่อันตรกิริยาระหว่างโฟตอน และอิเล็กตรอนในวงโคจรไม่เพียงพอที่จะทำให้เกิดการแตกตัวเป็นไอออนหรือกระตุ้นอะตอม นั่นคือ เป็นการชนกันแบบยืดหยุ่น โดยพลังงานของโฟตอนทั้งก่อน และหลังการชนมีค่าคงที่ สำหรับข้อสังเกตที่น่าสนใจคือ การกระเจิงเรย์เลย์จะอยู่ในช่วงมุมแคบเพียงไม่กี่องศาทำให้ยากต่อการตรวจสอบ

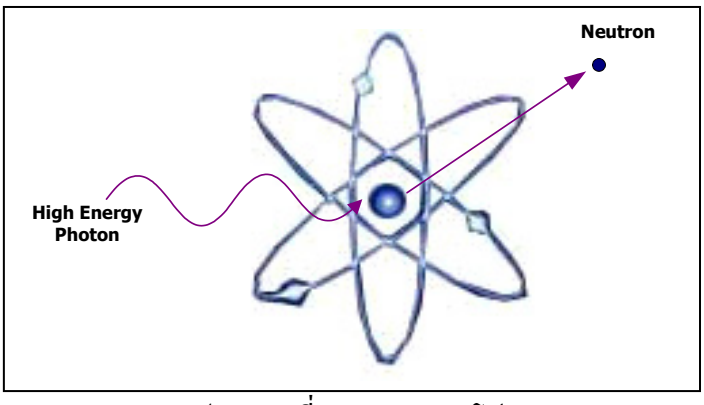
- การกระเจิงทอมป์สัน ในตอนแรกเชื่อกันว่ารังสีเอกซ์น่าจะสะท้อนกับกระจกเช่นเดียวกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในช่วงที่ตามองเห็น แต่ต่อมาได้มีการค้นพบว่ารังสีเอกซ์กระเจิงกับกระจกมากกว่าสะท้อน ซึ่งทอมป์สันได้อธิบายไว้ว่า เมื่อรังสีเอกซ์ทำอันตรกิริยากับอิเล็กตรอนในวงโคจร อิเล็กตรอนจะถูกสันนิษฐานว่าได้ดูดกลืนรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเอาไว้ จากนั้นจะกวัดแกว่งในสถานะกระตุ้น และปลดปล่อยรังสีเอกซ์ออกมาอีกครั้งในแบบสุ่มทุกทิศทาง



ภาพประกอบที่ 2.4 การกระเจิงทอมป์สัน

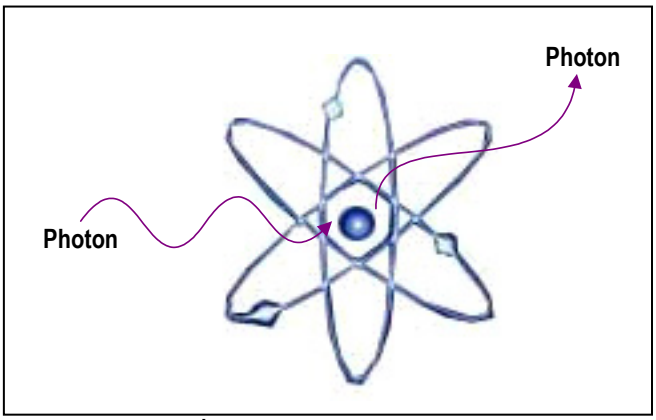
- การสลายโฟตอน เป็นอันตรกิริยาที่เกี่ยวข้องกับการชนของโฟตอนที่มีพลังงานสูงกับนิวเคลียส โดยโฟตอนจะถูกดูดกลืนโดยสมบูรณ์ จากนั้นอนุภาคนิวตรอน โปรตอนหรือแอลฟาจะถูกปล่อยออกมาจากนิวเคลียสที่ถูกกระตุ้น สำหรับตัวอย่างของอันตรกิริยานี้ได้แก่

$$^{2}_{1}\mathrm{D}+\gamma \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}$$
$$^{9}_{4}\mathrm{Be}+\gamma \rightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}$$



ภาพประกอบที่ 2.5 การสลายโฟตอน

- การกระเจิงเรโซแนนซ์นิวเคลียร์ เป็นอันตรกิริยาที่เกิดขึ้นเมื่อความถี่ของโฟตอนที่ตกกระทบเท่ากับค่าการสั่นของนิวเคลียส ทำให้เกิดการดูดกลืนโฟตอนขึ้น จากนั้นโฟตอนจะถูกปล่อยออกมาจากนิวเคลียสที่ถูกกระตุ้นอีกครั้งหนึ่ง



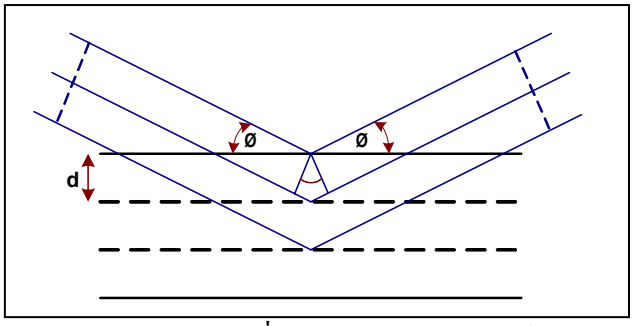
ภาพประกอบที่ 2.6 การกระเจิงเรโซแนนซ์นิวเคลียร์

- การกระเจิงแบรดค์ เป็นอันตรกิริยาที่เกิดขึ้นเมื่อรังสีแกมมาตกกระทบกับผิวหน้าของผลึก ในมุมที่สัมพันธ์กับความยาวคลื่นของรังสี ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการของแบรดค์คือ

$$n\lambda = 2d\sin\theta \qquad (2.11)$$

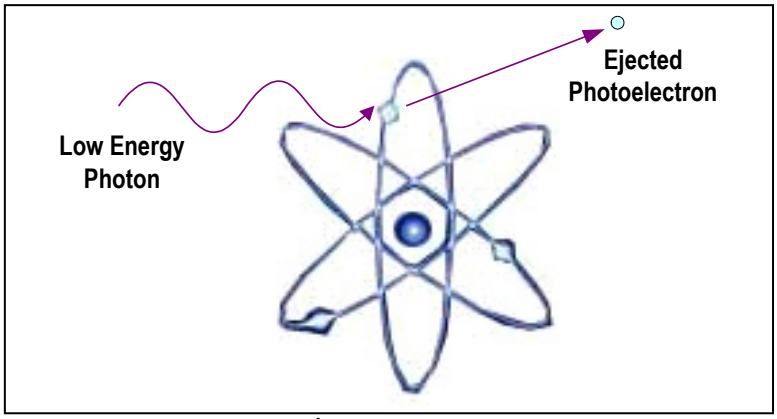
เมื่อ d คือ ระยะห่างระหว่างระนาบของอะตอมภายในผลึก

n คือ จำนวนเต็มบวกที่เกิดจากการเสริมกันของความเข้มรังสี



ภาพประกอบที่ 2.7 การกระเจิงแบรดค์

- โฟโตอิเล็กตริก เป็นอันตรกิริยาที่เกิดขึ้นเมื่อโฟตอนพลังงานต่ำเกิดการชนกับอิเล็กตรอนในวงโคจรแบบไม่ยืดหยุ่น ส่งผลให้อิเล็กตรอนหลุดออกจากวงโคจร และเกิดคู่ของไอออน โดยอิเล็กตรอนที่มีความเกี่ยวข้องมากที่สุดจะอยู่ในวงโคจร K และผลของโฟโตอิเล็กตริกจะมีมากขึ้นเมื่อเลขอะตอม z ของวัสดุดูดกลืนสูงขึ้น

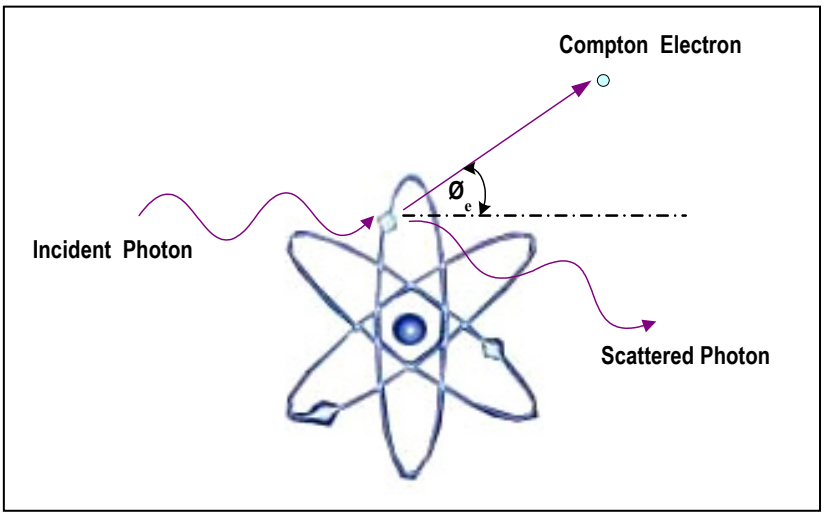


ภาพประกอบที่ 2.8 ผลของโฟโตอิเล็กตริก

ถ้ากำหนดให้ ϕ คือ พลังงานยึดเหนี่ยวของอิเล็กตรอน พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนอิสระที่หลุดออกจากวงโคจรสามารถหาได้ดังนี้

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - \phi \tag{2.12}$$

- การกระเจิงคอมป์ตัน เป็นอันตรกิริยาที่เกิดขึ้นกับรังสีแกมมาพลังงานขนาดปานกลาง (0.5 – 1.0 MeV) โดยเป็นการชนกันระหว่างโฟตอนกับอิเล็กตรอน ทำให้พลังงานส่วนหนึ่งของโฟตอนที่เข้าชนถูกถ่ายทอดให้กับอิเล็กตรอน ดังนั้นโฟตอนที่หลุดรอดออกมาจะอยู่ในทิศทางใหม่และมีพลังงานลดลง



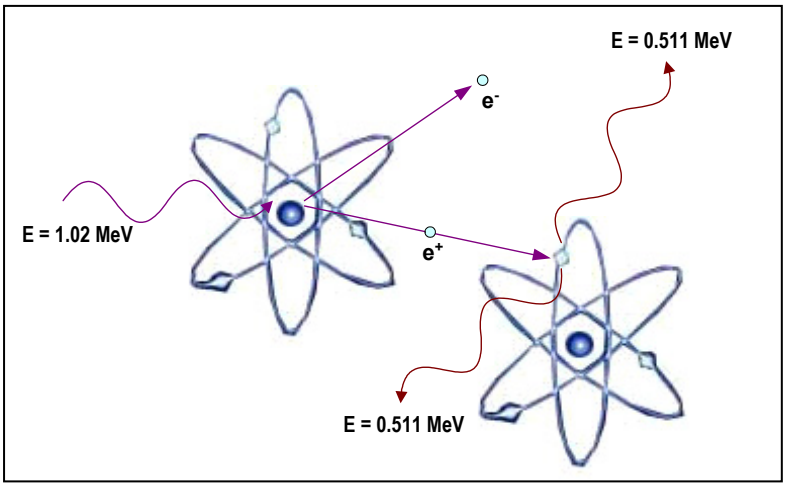
ภาพประกอบที่ 2.9 การกระเจิงคอมป์ตัน

ถ้ากำหนดให้พลังงาน และโมเมนตัมของการชนเป็นแบบอนุรักษ์จะสร้างความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\lambda' - \lambda = \left(\frac{h}{mc}\right)(1 - \cos\theta) \tag{2.13}$$

จากสมการ (2.13) จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงความยาวคลื่นของโฟตอนเกี่ยวพันกับมุมของการกระเจิง โดยเทอม (h/mc) คือ ความยาวคลื่นคอมป์ตัน ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2.43×10^{-10} cm

- ผลผลิตคู่ เป็นอันตรกิริยาที่เกิดขึ้นกับรังสีแกมมาที่มีพลังงานมากกว่า 1.02 MeV โดยพลังงานในส่วน 1.02 MeV ของรังสีแกมมาจะถูกเปลี่ยนเป็นอิเล็กตรอน และโพสิตรอนภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้ารอบนิวเคลียส และพลังงานที่มีค่ามากกว่า 1.02 MeV จะถูกเปลี่ยนไปอยู่ในรูปพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน และโพสิตรอนที่เกิดขึ้น



ภาพประกอบที่ 2.10 การเกิดผลผลิตคู่

ถ้ากำหนดให้ $2m_0c^2$ คือ พลังงานที่ทำให้เกิดคู่ของอนุภาคตามสมการของไอนสไตน์ โดยที่ T_{e^-} และ T_{e^+} คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน และโพสิตรอนตามลำดับ สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ของอันตรกิริยาชนิดนี้คือ

$$E = h\nu = 2m_0c^2 + T_{e^-} + T_{e^+} \qquad (2.14)$$

2.5 ปรากฏการณ์คอมป์ตัน

ปรากฏการณ์คอมป์ตันเป็นหลักฐานที่แสดงให้เห็นว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีลักษณะเป็นอนุภาค โดยคอมป์ตันได้ศึกษาการกระเจิง (Scattering) ของรังสีเอกซ์ด้วยการให้รังสีเอกซ์ทำอันตรกิริยากับอนุภาคเป้าแล้วเกิดการเบนของรังสี ซึ่งในบางกรณีนอกจากเกิดการเบนของรังสีเอกซ์แล้วความยาวคลื่นยังอาจเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมด้วย

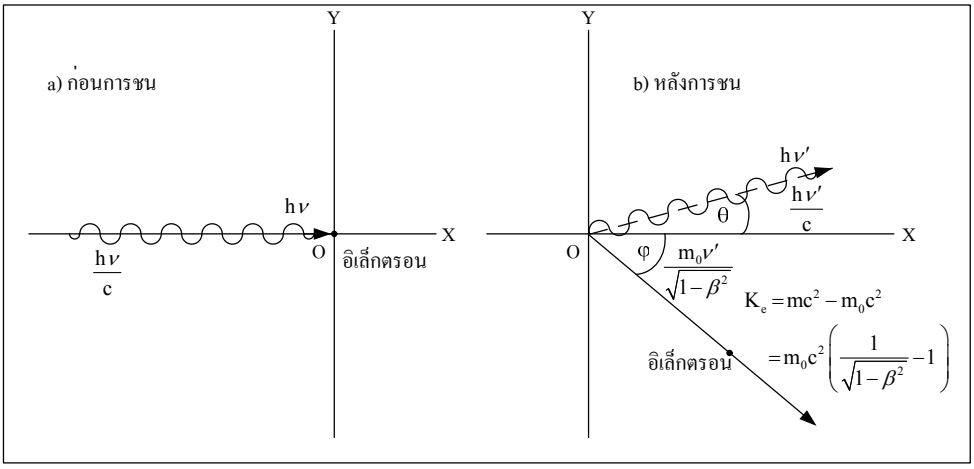
ตามทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าแผนเดิม เมื่อรังสีชนกับอนุภาคที่มีประจุ ซึ่งมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับความยาวคลื่นของรังสีตกกระทบ รังสีที่กระเจิงออกมาจะกระเจิงในทุกทิศทางด้วยความยาวคลื่นเท่าเดิม โดยกระบวนการการกระเจิงมีลักษณะดังนี้คือ เมื่อสนามไฟฟ้าของรังสีตกกระทบบนอนุภาคที่มีประจุจะทำให้อนุภาคแกว่งกวัดตามรังสีตกกระทบด้วยความถี่เดียวกัน และแผ่รังสี

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาในทุกทิศทาง ซึ่งความเข้มของรังสีที่กระเจิงจะมีค่าสูงสุดในระนาบตั้งฉากกับทิศทางของการแกว่งกวัดของประจุ และเท่ากับศูนย์ในระนาบขนานกับการแกว่งกวัด โดยที่อนุภาคที่มีประจุเพียงแต่ดูดกลืนพลังงานจากรังสีตกกระทบ และเปล่งพลังงานทั้งหมดออกมาในทิศทางต่างๆ ซึ่งการกระเจิงที่เกิดขึ้นในลักษณะที่ความยาวคลื่นของรังสีเท่าเดิมเรียกว่าการกระเจิงอาพันธ์ (Coherent scattering) โดยผลการทดลอง และทฤษฎีดังกล่าวจะตรงกันสำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่นเท่ากับหรือมากกว่าแสง ส่วนการกระเจิงของคลื่นที่มีความยาวคลื่นน้อยกว่าแสงเช่น รังสีเอกซ์ จะไม่ตรงกัน

จากการวัดความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ที่กระเจิงออกมาจากเป้า คอมป์ตันพบว่ารังสีที่กระเจิงมีความยาวคลื่นต่างกันสองค่า โดยความยาวคลื่นค่าหนึ่งเท่ากับความยาวคลื่นตกกระทบ ส่วนอีกค่าหนึ่งจะเปลี่ยนไปตามมุมกระเจิง ซึ่งการกระเจิงในลักษณะนี้เรียกว่า ปรากฏการณ์คอมป์ตัน (Compton effect) หรือการกระเจิงแบบคอมป์ตัน (Compton scattering)

คอมป์ตันได้ใช้สมมติฐานโฟตอนอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าว โดยอธิบายว่าเมื่อรังสีแม่เหล็กไฟฟ้าที่ประกอบไปด้วยโฟตอนตกกระทบบนอิเล็กตรอนอิสระของวัตถุเป้าจะทำให้เกิดการชนกันแบบยืดหยุ่นระหว่างอิเล็กตรอนที่อยู่นิ่งกับโฟตอน ซึ่งถ้าอาศัยกฎการคงตัวของพลังงานและโมเมนตัมในการคำนวณจะทำให้หาความยาวคลื่นของรังสีที่เปลี่ยนไปได้

ซึ่งหลักการชนกันระหว่างโฟตอน (รังสีเอกซ์) กับอิเล็กตรอนสามารถแสดงได้ดังภาพประกอบที่ 2.11



ภาพประกอบที่ 2.11 การชนกันของรังสีเอกซ์กับอิเล็กตรอน

a) ก่อนการชน และ b) หลังการชน

สามารถแยกพิจารณาการชนกันของโฟตอนของรังสีแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีพลังงาน $h\nu$ และโมเมนตัม $h\nu/c$ กับอิเล็กตรอนมวลนิ่ง m_0 ซึ่งอยู่กับที่ ได้เป็น 2 ส่วน คือ ก่อนการชนกันดังภาพประกอบที่ 2.11 a) และภายหลังการชนกันแบบยืดหยุ่นดังภาพประกอบที่ 2.11 b) ซึ่งโฟตอนที่กระเจิงออกมาในมุม θ จะมีพลังงาน $h\nu'$ และโมเมนตัม $h\nu'/c$ (ความถี่ ν' น้อยกว่า ν จึงทำให้ความยาวคลื่น λ' มากกว่า λ) โดยพลังงานของโฟตอนที่ลดลง ($h\nu - h\nu'$) จะกลายเป็นพลังงานจลน์ K_e ของอิเล็กตรอนที่ถอยกลับออกมา ถ้ากำหนดให้มวลของอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่เท่ากับ m จะได้ว่า

$$\begin{aligned} K_e &= mc^2 - m_0c^2 \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

เมื่อ $\beta = v/c$ โดยที่ v คือ ความเร็วของอิเล็กตรอนถอยกลับ

ถ้า p_e คือ โมเมนตัมของอิเล็กตรอนจะได้ว่า

$$p_e = mv = m\beta c = \frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.16}$$

แยกโมเมนตัมออกเป็นแกน x และ y จากนั้นใช้กฎคงตัวของโมเมนตัม และพลังงานทำให้ได้สมการดังนี้

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + \frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\varphi \tag{2.17}$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - \frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\varphi \tag{2.18}$$

$$h\nu = h\nu' + K_e = h\nu' + m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \tag{2.19}$$

เมื่อกำหนดให้ค่าของมุม φ คงที่ สามารถหาค่าของสมการได้ดังนี้

$$p_e c\cos\varphi = h\nu - h\nu'\cos\theta \tag{2.20}$$

$$p_e c\sin\varphi = h\nu'\sin\theta \tag{2.21}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 สมการแล้วรวมกัน

$$p_e^2c^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu')\cos\theta + (h\nu')^2 \tag{2.22}$$

พลังงานรวมของอิเล็กตรอน (E_e) มีค่าดังนี้

$$E_e = K_e + m_0c^2 \tag{2.23}$$

และจากทฤษฎีสัมพัทธภาพจะได้ว่า

$$E_e = \sqrt{p_e^2c^2 + m_0^2c^4} \tag{2.24}$$

แทนค่า E_e จากสมการ (2.24) ลงในสมการ (2.23) ได้ดังนี้

$$p_e^2c^2 + m_0^2c^4 = \left(K_e + m_0c^2\right)^2 \tag{2.25}$$

จากนั้นแทนค่า K_e จากสมการ (2.19) ลงไปในสมการที่ (2.25) จะได้ว่า

$$p_e^2c^2 = \left(h\nu - h\nu'\right)^2 + 2\left(h\nu - h\nu'\right)m_0c^2 \tag{2.26}$$

เนื่องจากสมการ (2.22) และ (2.26) เท่ากันดังนั้น

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1+\alpha(1-\cos\theta)} \tag{2.27}$$

เมื่อ $\alpha = h\nu/m_0c^2$ ซึ่งเท่ากับพลังงานของโฟตอนที่ตกลงบนอิเล็กตรอนที่อยู่ในหน่วยของมวลนิ่ง

ในทำนองเดียวกันสามารถหาค่าพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนได้ดังนี้

$$K_e = h\nu - h\nu' = h\nu\left(1 - \frac{1}{1+\alpha(1-\cos\theta)}\right)$$

$$K_e = h\nu\left(\frac{\alpha(1-\cos\theta)}{1+\alpha(1-\cos\theta)}\right) \tag{2.28}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{2}{(1+\alpha)^2\tan^2\varphi + 1} \tag{2.29}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ และความยาวคลื่นซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \text{ และ } \lambda' = \frac{c}{\nu'}$$

สมการ (2.27) จึงสามารถเปลี่ยนรูปได้ใหม่เป็น

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \tag{2.30}$$

จากสมการ (2.30) พบว่าโฟตอนที่กระเจิงออกมามีความยาวคลื่นมากกว่าโฟตอนที่ตกกระทบกับอิเล็กตรอน โดยความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไป ($\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$) จะไม่ขึ้นอยู่กับความยาวคลื่นที่ตกกระทบอิเล็กตรอนแต่จะขึ้นอยู่กับมุมกระเจิง θ และมวลนิ่งของอิเล็กตรอน m_0

สำหรับ h/m_0c มีหน่วยเป็นความยาวเรียกว่า ความยาวคลื่นคอมป์ตัน (Compton wavelength) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.02426 Å

ดังนั้นสมการ (2.30) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\Delta\lambda = 0.02426(1-\cos\theta)\,\text{Å} \tag{2.31}$$

สำหรับค่าพลังงาน ($h\nu$) ของโฟตอนที่ตกกระทบกับอิเล็กตรอนสามารถคำนวณหาได้โดยใช้สมการ (2.28) ด้วยการวัดพลังงานของอิเล็กตรอนถอยกลับซึ่งมีค่าสูงสุดที่มุมกระเจิง 180°

จาก

$$K_{e(max)} = h\nu\left(\frac{2\alpha}{1+2\alpha}\right) = h\nu\left(\frac{\left(2h\nu/m_0c^2\right)}{1+\left(2h\nu/m_0c^2\right)}\right) \qquad (2.32)$$

จากสมการ (2.32) เมื่อทราบค่า $K_{e(max)}$ ก็สามารถที่จะแทนค่า และคำนวณหาค่าพลังงานของโฟตอนที่ตกกระทบบนอิเล็กตรอนได้

จากการคำนวณข้างต้นแสดงให้เห็นว่าสมมติฐานโฟตอนหรือควอนตัม สามารถอธิบายการกระเจิงของรังสีเอกซ์ได้โดยที่ทฤษฎีแผนเดิมไม่สามารถอธิบายได้