แบบจำลองคานขนาดไมโคร-นาโนเมตร บนชั้นรองรับแบบอีลาสติก

Micro-Sized / Nano-Sized Beam Model on Elastic Substrate Elements

ทักษกร พรบุญญานนท์

Thaksakorn Ponbunyanon

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญา
ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Degree of Doctor of Philosophy in Civil Engineering
Prince of Songkla University
2560

แบบจำลองคานขนาดไมโคร-นาโนเมตร บนชั้นรองรับแบบอีลาสติก
Micro-Sized / Nano-Sized Beam Model on Elastic Substrate Elements

ทักษกร พรบุญญานนท์
Thaksakorn Ponbunyanon

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญา
ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Degree of Doctor of Philosophy in Civil Engineering
Prince of Songkla University
2560

ชื่อวิทยานิพนธ์ แบบจำลองคานขนาดไมโคร-นาโนเมตร บนชั้นรองรับแบบอิลาสติก
ผู้เขียน นายทักษกร พรบุญญานนท์
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

....
(ศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ ลิ่มกตัญญู)

คณะกรรมการสอบ

.... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ณัฐพงศ์ ดำรงวิริยะนุภาพ)

.... กรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ ลิ่มกตัญญู)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. วรพจน์ ประชาเสรี)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ภาสกร ชัยวิริยะวงศ์)

.... กรรมการ
(ดร. วิชัยรัตน์ แก้วเจือ)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

....
(รองศาสตราจารย์ ดร.ธีระพล ศรีชนะ)
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

ขอรับรองว่า ผลงานวิจัยนี้มาจากการศึกษาวิจัยของนักศึกษาเอง และได้แสดงความขอบคุณบุคคลที่มีส่วนช่วยเหลือแล้ว

ลงชื่อ..
(ศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ ลิ่มกตัญญู)
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

ลงชื่อ...
(นายทักษกร พรบุญญานนท์)
นักศึกษา

ข้าพเจ้าขอรับรองว่า ผลงานวิจัยนี้ไม่เคยเป็นส่วนหนึ่งในการอนุมัติปริญญาในระดับใดมาก่อน และไม่ได้ถูกใช้ในการยื่นขออนุมัติปริญญาในขณะนี้

ลงชื่อ......................................
(นายทักษกร พรบุญญานนท์)
นักศึกษา

ชื่อวิทยานิพนธ์ แบบจำลองคานขนาดไมโคร-นาโนเมตร บนชั้นรองรับแบบอีลาสติก
ผู้เขียน นายทักษกร พรบุญญานนท์
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา
ปีการศึกษา 2560

บทคัดย่อ

ในปัจจุบันไมโคร-นาโนเทคโนโลยีได้มีบทบาทอย่างมากในทุกๆแขนงวิชา ซึ่งรวมไปถึงศาสตร์ทางวิศวกรรมโครงสร้างด้วย ทำให้งานวิจัยทางโครงสร้างใหม่ๆ ได้มีการศึกษาและพัฒนาให้มีความเกี่ยวพันธ์กับไมโคร-นาโนเทคโนโลยี ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะเป็นการสร้างแบบจำลองโครงสร้างขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบอีลาสติก โดยมีแบบจำลองโครงสร้างคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรเป็นต้นแบบในการสร้างแบบจำลองในงานวิจัยนี้ แบบจำลองโครงสร้างขนาดเล็กในงานวิจัยนี้จะเป็นแบบจำลองที่ใช้ผลเฉลยที่ถูกต้องของสมการอนุพันธ์ในระบบโครงสร้างในการสร้างแบบจำลอง และใช้ทฤษฎีวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็กสองทฤษฎีร่วมกันในการอธิบายพฤติกรรมของคาน รวมไปถึงการจำลองพฤติกรรมของชั้นรองรับทั้งแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งจากผลการศึกษาพบว่าแบบจำลองโครงสร้างขนาดเล็กในงานวิจัยนี้ทำให้โครงสร้างมีความแข็งมากกว่าแบบจำลองโครงสร้างพื้นฐานเมื่อรับแรงกระทำ และยิ่งโครงสร้างมีขนาดเล็กลงหรือชั้นรองรับมีความอ่อนตัวมากยิ่งขึ้น ความแตกต่างระหว่างผลที่ได้จากแบบจำลองในงานวิจัยนี้และแบบจำลองโครงสร้างพื้นฐานจะยิ่งมีค่ามากขึ้น นอกจากนี้ชั้นรองรับที่มีพฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้นจะส่งผลให้โครงสร้างมีความแข็งมากกว่าชั้นรองรับที่มีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น

คำหลัก: แบบจำลองโครงสร้างบนชั้นรองรับ, ไมโคร-นาโนเมตร, ชั้นรองรับแบบเชิงเส้น, ชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้น

Thesis Title Micro-Sized / Nano-Sized Beam Model on Elastic Substrate
Author Mr. Thaksakorn Ponbunyanon
Major Program Civil Engineering
Academic Year 2017

ABSTRACT

In recent years, micro-nano technology has found many applications in science and engineering fields as well as in structural engineering. Therefore, the micro-nano sized beam-elastic substrate element models have been developed in this research. The modified couple stress and the nonlocal elastic theories are employed to account of the core-sized effect while the surface elastic theory is used to capture the surface-layer effect. The interaction between the beam and the substrate is represented by the Winkler-foundation model and Van der Waals force theory for linear and nonlinear behavior, respectively. Due to similarity between the beam on Winkler-Pasternak foundation and the models in this research, the procedure of "natural" beam on Winkler-Pasternak foundation is employed to develop beam on linear elastic substrate models. The finite-element method is employed to obtain the beam on nonlinear elastic substrate model. Two numerical examples for each model are used to study the characteristics and behaviors of beam substrate system.

Keywords: Beam-elastic substrate element, micro / nano-sized, linear substrate, nonlinear substrate.

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ ศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ ลิ่มกตัญญู อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ได้กรุณาให้ ความรู้ คำปรึกษา และชี้แนะแนวทางแก่ผู้วิจัยเป็นอย่างดี ตลอดการปฏิบัติงานวิจัยชิ้นนี้

ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ณัฐพงศ์ ดำรงวิริยะนุภาพ ประธานกรรมการ และ รองศาสตราจารย์ ดร. วรพจน์ ประชาเสรี, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภาสกร ชัยวิริยะวงศ์ และ ดร.วิชัยรัตน์ แก้วเจือ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ให้งานวิจัยชิ้นนี้ให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ที่ได้ให้การสนับสนุนทุนการศึกษาในระดับปริญญาเอกนี้

ขอบคุณ นายวรเทพ แซ่ล่อง นักศึกษาปริญญาเอก สาขาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ คอยชี้แนะและให้คำปรึกษาทางด้านการใช้โปรแกรม FEAP เป็นอย่างดี

สุดท้ายนี้ สิ่งสำคัญสุด ที่ทำให้มีข้าพเจ้าในวันนี้ พระคุณของบิดามารดา กำลังใจและแรงผลักดันจากภรรยาและบุตร รวมไปถึงสมาชิกทุกคนในครอบครัวที่คอยห่วงใย และคอยผลักดันจนข้าพเจ้าสำเร็จการศึกษา ซึ่งข้าพเจ้าจะระลึกถึงบุคคลเหล่านี้อยู่ในใจตลอดไป

ทักษกร พรบุญญานนท์

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

รายการภาพประกอบ

รายการสัญลักษณ์

$u_x(x,y)$	= Beam deformation in x direction
$u_y(x,y)$	= Beam deformation in y direction
$u_z(x,y)$	= Beam deformation in z direction
$v(x)$	= Beam deflection
σ,ε	= Normal stress and normal strain tensors
λ,μ	= Lame's constants
E	= Young's modulus
ν	= Poisson's ratio
m,χ	= Couple stress and couple strain tensors
l	= Material length-scale parameter
θ	= Beam rotation
σ^{NL}	= Nonlocal stress tensor
e_0a	= Nonlocal parameter
$\tau_{\alpha\beta},\tau_{n\alpha}$	= In-plane and out-of-plane surface shear stresses
λ_0,μ_0	= Surface lame's constants
τ_0	= Residual surface stress under unconstrained conditions
E^S	= Surface elastic modulus
$F(x)$	= Linear substrate force
k_1	= Linear substrate stiffness
$\Delta(x)$	= Substrate deflection
$V(d)$	= Total potential energy
ε_W,σ_W	= Energy constant of Lennard-Jones potential
d	= Distance between interacting atoms
$F(d)$	= Van der Waals force
$\overline{d}$	= Interfacial equilibrium spacing
k_3	= Nonlinear substrate stiffness
$M(x)$	= Beam-section bending moment
$V_S(x)$	= Shear-layer section shear force
$V_\tau(x)$	= Surface-layer shear force

$D_1(x)$	= Linear elastic substrate force
$D_S(x)$	= Nonlinear elastic substrate force
$p_y(x)$	= External distributed force
EI	= Flexural rigidity
EI_{eff}	= Effective flexural rigidity
GA_{eff}	= Effective shear rigidity
$\mathbf{N}_{BB}(x)$	= Bending moment interpolation functions array
$\mathbf{N}_{VV}(x)$	= Shear force interpolation functions array
$\mathbf{N}_{DD}(x)$	= Substrate force interpolation functions array
$\mathbf{N}_{CC}(x)$	= Cubic interpolation functions array
$\mathbf{K}$	= Element stiffness matrix
$\mathbf{F}$	= Element flexibility matrix
$\mathbf{M}_B^0(x)$	= Initial beam-section bending moment
$\mathbf{V}_\tau^0(x)$	= Initial beam-section shear force
$\mathbf{D}_S^0(x)$	= Initial substrate force
$\mathbf{k}_B$	= Beam-suction bending moment tangent stiffness
$\mathbf{k}_\tau$	= Beam-suction shear force tangent stiffness
$\mathbf{k}_S$	= Substrate tangent stiffness
K_{end}	= Contact stiffness
$K_{core-surf}^{end}$	= Contact stiffness account for both core and surface effects
K_{core}^{end}	= Contact stiffness account for only core size effect
$K_{surface}^{end}$	= Contact stiffness account for only surface effect
$\bar{k}_1$	= Normalized substrate stiffness
$\bar{P}$	= Normalized concentrated force

รายการผลงานตีพิมพ์ในวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์เล่มนี้ได้เขียนขึ้นโดยอ้างอิงกับงานวิจัยที่ได้เผยแพร่โดยมีรายการดังนี้ ซึ่งงานวิจัยเหล่านี้จะแนบอยู่ด้านหลังวิทยานิพนธ์เล่มนี้

Limkatanyu S., Ponbunyanon P., Prachasaree W. Kuntiyawichai K., and Kwon M. 2014. Correlation between beam on Winkler-Pasternak foundation and beam on elastic substrate medium with inclusion of microstructure and surface effects. *J. Mech. Sci. Tech.* **28**(9):3653-3665.

Ponbunyanon P., Limkatanyu S., Kaewjuea W.,Prachasaree W., and Chub-Uppakarn T. 2016. A novel beam-elastic substrate model with inclusion of nonlocal elasticity and surface energy effects. *Arab. J. Sci. Eng*. **41**(10): 4099-4113

Ponbunyanon T., Limkatanyu S., and Sae-Long W. 2017. Nano-Sized Beam-Substrate Element with Inclusion of Nonlinear Substrate. *The 1st international (NIC-2017) KU CSC conference "Innovation and Technology for Quality of Life and Sustainable Society".* Kasetsart University Chalermphrakiat Sakon Nakhon Province Campus (KUCSC)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาของงานวิจัย

แบบจำลองโครงสร้างคานบนชั้นรองรับได้มีการศึกษาวิจัยและประยุกต์ใช้ในงานทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์กันอย่างแพร่หลายในอดีตจนถึงปัจจุบัน ไม่ว่าจะเป็นการสร้างแบบจำลองของโครงสร้างคานบนชั้นรองรับเพื่อใช้ในการวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานของโครงสร้างและพฤติกรรมการตอบสนองต่อแรงกระทำของโครงสร้าง รวมไปถึงการพัฒนาและปรับปรุงแบบจำลอง การประยุกต์ใช้ทฤษฎีหลากหลายทฤษฎีร่วมกันในแบบจำลอง เพื่อทำให้แบบจำลองมีความถูกต้องและให้ผลลัพธ์ที่ดีมากยิ่งขึ้น ตัวอย่างเช่น การวิเคราะห์คาบการสั่นพื้นฐาน การดัด และการบิดตัวของคานบนชั้นรองรับ [1], คาบการสั่นพื้นฐานของคานโค้งบนชั้นรองรับ [2], แบบจำลองโครงสร้างคานบนชั้นรองรับที่มีหน้าตัดของคานไม่คงที่สำหรับการวิเคราะห์การดัดตัวและการสั่นของคาน [3], แบบจำลองไฟไนต์อิลิเมนต์ของคานบนชั้นรองรับแบบตัวแปรเดียว [4], พฤติกรรมการตอบสนองของคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรโดยใช้แบบจำลองไม่เชิงเส้น [5], แบบจำลองคานบนชั้นรองรับโดยใช้ทฤษฎีคานสองทฤษฎีร่วมกัน [6], เป็นต้น

แต่ในปัจจุบัน ไมโคร/นาโนเทคโนโลยี ได้มีบทบาทมากยิ่งขึ้นในทุกๆ แขนง แนวคิดในงานวิจัยโครงสร้างคานบนชั้นรองรับจึงได้มีการปรับปรุงและได้รับความสนใจในการวิเคราะห์ผลของขนาดโครงสร้างเพิ่มเติมเข้ามา หลายงานวิจัยในปัจจุบันได้ทำการวิเคราะห์แบบจำลองโครงสร้างคานที่มีขนาดเล็กในระดับ ไมโคร/นาโนเมตร เพื่อศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานของโครงสร้าง และพฤติกรรมการตอบสนองของโครงสร้างต่อแรงกระทำ แต่โดยส่วนมากจะเป็นการวิเคราะห์โครงสร้างขนาด ไมโคร/นาโนเมตร โดยมีทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็กเพียงทฤษฎีเดียว และไม่ได้คิดผลของชั้นรองรับร่วมเข้าไปด้วย หรือไม่ก็จะเป็นการสร้างแบบจำลองคานบนชั้นรองรับขนาด ไมโคร/นาโนเมตร โดยใช้ทฤษฎีการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็กเพียงทฤษฎีเดียว เพื่อวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานต่างๆ เช่น การสั่นของโครงสร้างแบบอิสระ (Free vibration) หรือแรงโก่งเดาะประลัย (Critical buckling load) เป็นต้น โดยในงานวิจัยส่วนมาก จะไม่ได้กล่าวถึงผลของชั้นรองรับที่มีต่อพฤติกรรมของโครงสร้าง หรือผลเนื่องจากขนาดโครงสร้างต่อพฤติกรรมของโครงสร้าง นอกจากนี้ในการวิเคราะห์และวิจัยแบบจำลองโครงสร้างขนาดเล็กที่คิดผลของขนาดโครงสร้างร่วมด้วย จะทำการทดสอบโดยใช้โครงสร้างจริงนั้นเป็นไปได้ยากมาก เนื่องมาจากขนาดของโครงสร้างที่เล็กมาก ดังนั้นในงานวิจัยทั่วไปจะเป็นการศึกษาวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการสร้างแบบจำลอง และ

ส่วนมากจะเป็นแบบจำลองโครงสร้างที่ใช้สมการรูปร่างของคานเป็นสมการประมาณ เช่น สมการพหุนามกำลังสองหรือกำลังสาม เป็นต้น ซึ่งไม่ได้เป็นสมการรูปร่างที่แม่นตรง (Exact shape function) ที่คำนวณจากผลเฉลยที่ถูกต้อง (Exact solution) ของสมการอนุพันธ์ในระบบโครงสร้าง

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ จะเป็นการสร้างแบบจำลองโครงสร้างคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับ โดยใช้ทฤษฎีวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็กร่วมกันสองทฤษฎีในการอธิบายพฤติกรรมของคาน และใช้ทฤษฎีชั้นรองรับทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับ เพื่อศึกษาและวิเคราะห์ผลของขนาดโครงสร้างและผลของชั้นรองรับต่อพฤติกรรมการตอบสนองของโครงสร้างในการรับแรงกระทำภายนอก โดยใช้สมการรูปร่างที่แม่นตรงจากผลเฉลยที่ถูกต้องของสมการอนุพันธ์ในระบบโครงสร้างในการสร้างแบบจำลองของโครงสร้าง และเปรียบเทียบกับแบบจำลองโครงสร้างที่ไม่ได้วิเคราะห์ในส่วนของขนาดโครงสร้าง

1.2 การสืบค้นเอกสาร

ในการศึกษาและวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดเล็กทางภาคปฏิบัติเป็นไปได้ยากมาก นักวิจัยส่วนมากจึงใช้วิธีทางระเบียบวิจัยเชิงตัวเลข (Numerical method) ในการสร้างแบบจำลองเพื่อใช้วิเคราะห์ร่วมกับทฤษฎีในการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็ก ซึ่งทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็กได้มีการนำเสนอและตีพิมพ์ในผลงานทางวิชาการหลากหลายทฤษฎี ยกตัวอย่างเช่น *Modified couple stress theory*, *Nonlocal elastic theory*, *Surface elastic theory* เป็นต้น โดย *Modified couple stress theory* และ *Nonlocal elastic theory* เป็นทฤษฎีที่ใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างโดยคำนึงถึงผลของความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) ภายในที่เกิดขึ้นเนื่องมาจากขนาดโครงสร้างที่เล็กลง ในส่วนของทฤษฎี *Surface elastic theory* นั้นจะเป็นทฤษฎีที่ใช้ในการอธิบายแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนชั้นผิวของโครงสร้าง (Surface Layer) ในโครงสร้างที่มีขนาดเล็ก

Yang et al. [7] ได้เสนอทฤษฎี *Modified couple stress theory* เพื่อใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดเล็ก โดยทฤษฎีนี้จะคิดผลเนื่องจากขนาดของโครงสร้างบนหลักการของทฤษฎีพลังงานความเครียดของโครงสร้าง (Strain energy theory) ซึ่งหลักการของทฤษฎีนี้นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดเล็กในระดับ ไมโครเมตร ตัวอย่างเช่น Koiter [8] ได้สร้างแบบจำลองของโครงสร้างคานโดยคิดผลเนื่องจากขนาดโครงสร้างร่วมด้วย, Mindlin [9] ได้เสนอสมการสองทิศทางสำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (Isotropic material) โดยคิดผลเนื่องจากขนาดโครงสร้าง เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ผลของขนาดโครงสร้างต่อผลของความเข้มของความเค้น (Stress concentration), Mindlin [10] และ Toupin [11] ได้เสนอแบบจำลองของวัสดุที่

มีพฤติกรรมเชิงเส้นโดยคิดผลเนื่องจากขนาดโครงสร้าง, Ma et al. [12-13] ได้ปรับปรุงทฤษฎี *Reddy-Levinson beam* และ *Mindlin plate* โดยคิดผลเนื่องจากขนาดโครงสร้างร่วมด้วย

นอกเหนือจากทฤษฎี *Modified couple stress theory* ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดเล็กแล้ว ยังมีอีกหนึ่งทฤษฎีที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดเล็กนั่นคือ *Nonlocal elastic theory* เสนอโดย Eringen [14-15] ซึ่งทฤษฎีนี้ จะเป็นการปรับปรุงกฎของ Hook (Hook's law) โดยคิดผลเนื่องจากขนาดโครงสร้างเพิ่มเติมเข้าไปในสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-strain relation) โดยทฤษฎีนี้ นิยมใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดในระดับ นาโนเมตร ตัวอย่างเช่น Yang และ Lim [16] ได้เสนอแบบจำลองโครงสร้างคานขนาดเล็กบนหลักการของทฤษฎีคาน *Timoshenko beam* ในการวิเคราะห์การสั่นแบบอิสระของโครงสร้าง, Alshorbagy et al. [17] ได้เสนอแบบจำลองไฟไนต์อิลิเมนต์บนหลักการของทฤษฎีคาน *Euler-Bernoulli beam* โดยคิดผลเนื่องจากขนาดของโครงสร้างที่เล็กลงร่วมด้วย, Pradhan [18] ปรับปรุงแบบจำลองไฟไนอิลิเมนต์บนหลักการของทฤษฎีคาน *Euler-Bernoulli beam* และ *Timoshenko beam* โดยคิดผลเนื่องจากขนาดของโครงสร้าง, Reddy [19] ปรับปรุงทฤษฎีคานโดยคิดผลเนื่องจากขนาดที่เล็กลงของโครงสร้าง เพื่อใช้ในการวิเคราะห์การโก่งตัว การดัดตัว และค่าคาบการสั่นพื้นฐานของโครงสร้าง

นอกเหนือจากขนาดของโครงสร้างที่เล็กลงจนส่งผลต่อพฤติกรรมในการรับแรงกระทำของโครงสร้าง ยังมีแรงที่เกิดขึ้นในชั้นผิวโครงสร้างที่สามารถส่งผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างได้ ซึ่งในกรณีที่โครงสร้างมีขนาดใหญ่ แรงที่เกิดขึ้นบนชั้นผิวโครงสร้างจะไม่มีความสำคัญ เนื่องจากอัตราส่วนระหว่างชั้นผิวของโครงสร้าง (Surface layer) และหน้าตัดโครงสร้าง (Bulk area) มีอัตราส่วนที่น้อยมาก แต่เมื่อโครงสร้างมีขนาดที่เล็กลงมากในระดับ ไมโคร/นาโนเมตร อัตราส่วนนี้จะมีค่ามากขึ้นนั่นหมายถึงแรงที่เกิดขึ้นบนชั้นผิวจะมีอิทธิพลมากขึ้น และจะส่งผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างในการรับแรงกระทำภายนอกมากขึ้นเช่นกัน Gurtin และ Murdoch [20-21] ได้เสนอทฤษฎี *Surface elastic theory* เพื่อใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดเล็กมาก ซึ่งทฤษฎีนี้จะนิยมใช้ร่วมกันกับทฤษฎีอื่นที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็ก ตัวอย่างเช่น Gao และ Mahmoud [22] ปรับปรุงแบบจำลองคาน *Euler-Bernoulli beam* โดยใช้ทฤษฎี *Modified couple stress theory* และ *Surface elastic theory* ร่วมด้วย, Shaat et al. [23] ปรับปรุงแบบจำลอง *Kirchhoff plate* โดยคิดผลเนื่องจากขนาดโครงสร้างบนพื้นฐานของทฤษฎี *Modified couple stress theory* และ *Surface elastic theory*, Malekzadah และ Shojaee [24], Eltaher et al. [25] ได้ศึกษาคาบการสั่นพื้นฐานของโครงสร้างคาน โดยคิดผลเนื่องจากขนาดของโครงสร้างบนหลักการของทฤษฎี *Nonlocal elastic theory* และ *Surface elastic theory*

ซึ่งทั้งสามทฤษฎีที่ได้กล่าวไปนั้น จะเป็นทฤษฎีที่นิยมใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของคานในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดเล็ก ในระดับ ไมโคร/นาเมตร ในส่วนของชั้นรองรับคานในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ชั้นรองรับมีพฤติกรรมทั้งแบบเชิงเส้น (Linear) และแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) ซึ่งในชั้นรองรับที่มีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น งานวิจัยนี้จะใช้ทฤษฎีชั้นรองรับแบบตัวแปรเดียว *Winkler-foundation theory* เสนอโดย Winkler [26] โดยทฤษฎีนี้จะอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับในรูปแบบของสปริงที่มีความอิสระต่อกัน และนิยมใช้ในการสร้างแบบจำลองโครงสร้างบนชั้นรองรับแบบง่าย ตัวอย่างเช่น Zhaohua and Cook [27] สร้างแบบจำลองของคานบนชั้นรองรับทั้งแบบตัวแปรเดียวและสองตัวแปร, Limkatanyu et al. [28] สร้างแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบ 1 ตัวแปร โดยใช้สมการโก่งตัวของคานจากผลเฉลยแม่นตรงของสมการในระบบโครงสร้าง เป็นต้น ซึ่งโดยทั่วไปแล้วชั้นรองรับแบบตัวแปรเดียว จะให้ผลที่ไม่ค่อยแม่นยำเท่าที่ควรเนื่องจากเป็นแบบจำลองแบบง่าย แต่ในงานวิจัยนี้จะสร้างแบบจำลองโดยคิดผลของแรงเฉือนในชั้นผิวโครงสร้างด้วย ส่งผลให้มีพฤติกรรมคล้ายกับชั้นรองรับแบบสองตัวแปร ทำให้ผลที่ได้จากแบบจำลองในงานวิจัยนี้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น ในส่วนของชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นในงานวิจัยนี้จะใช้ทฤษฎีแรงแวนเดอร์วาลล์ *Van der Waal force theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับ ซึ่งทฤษฎีนี้จะอยู่บนหลักการของ Lennard-Jones [29] ซึ่งทฤษฎีนี้จะอธิบายความสัมพันธ์ของแรงระหว่างอะตอมแบบไม่เชิงเส้นโดยส่วนมากจะใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับในโครงสร้างที่มีขนาด ไมโคร/นาโนเมตร ตัวอย่างเช่น Mahdavi et al. [30-31] ศึกษา การสั่นของท่อคาร์บอนที่หุ้มด้วยพอลิเมอร์ทั้งแบบ 1 ชั้น และ 2 ชั้น, He et al. [32] คิดผลของแรงแวนเดอร์วาลล์ในการวิเคราะห์การโก่งเดาะของท่อคาร์บอน, Mahdavi et al. [33] สร้างแบบจำลองแผ่นกราฟีน (Graphene sheet) ที่หุ้มด้วยพอลิเมอร์, Khosrozadeh and Hajabasi [34] วิเคราะห์การสั่นของท่อคาร์บอนโดยคิดผลของแรงแวนเดอร์วาลล์ร่วมด้วย เป็นต้น

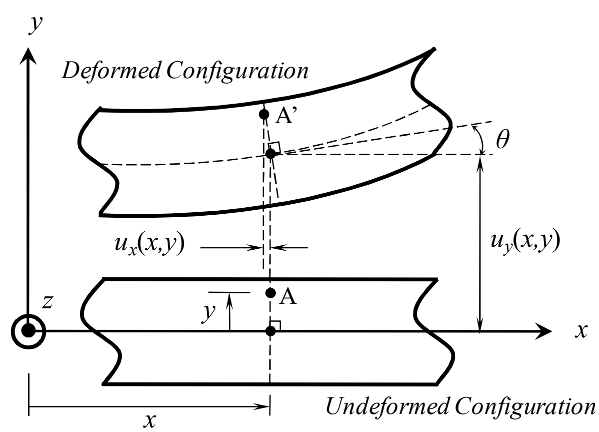
1.3 วัตถุประสงค์

1. ศึกษาและพัฒนาแบบจำลองโครงสร้างคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับ โดยคิดผลของขนาดโครงสร้างต่อพฤติกรรมของโครงสร้างร่วมด้วย
2. วิเคราะห์ผลเนื่องจากขนาดของโครงสร้างต่อพฤติกรรมในการรับแรงกระทำภายนอกของโครงสร้าง
3. วิเคราะห์ผลเนื่องจากชั้นรองรับต่อพฤติกรรมในการรับแรงกระทำของโครงสร้าง
4. เปรียบเทียบผลที่ได้จากแบบจำลองในงานวิจัยนี้กับผลที่ได้จากแบบจำลองอื่นๆ

บทที่ 2
ทฤษฎีที่ใช้ในการสร้างแบบจำลอง

งานวิจัยนี้จะเป็นการสร้างแบบจำลองโครงสร้างคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับที่มีขนาดในระดับไมโคร/นาโนเมตร ซึ่งจะใช้ทฤษฎี *Euler-Bernoulli beam* ในการอธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างคานและจะคิดผลเนื่องจากขนาดของโครงสร้างร่วมในแบบจำลองด้วย โดยทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมโครงสร้างขนาดเล็ก คือ *Modified couple stress theory*, *Nonlocal elastic theory*, และ *Surface elastic theory* ในส่วนของชั้นรองรับในงานวิจัยนี้จะพิจารณาพฤติกรรมของชั้นรองรับสองลักษณะคือ ชั้นรองรับแบบเชิงเส้น โดยจะใช้ทฤษฎี *Winkler foundation theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับ และชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งจะใช้ทฤษฎี *Van der Waals force theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับ

2.1 ทฤษฎีโครงสร้างคาน (Euler-Bernoulli beam)



รูปที่ 2.1 พฤติกรรมการเปลี่ยนรูปของคาน ทฤษฎี *Euler-Bernoulli beam*

ทฤษฎีคาน *Euler-Bernoulli beam* เป็นทฤษฎีที่อธิบายพฤติกรรมการโก่งตัวของโครงสร้างคานภายใต้แรงกระทำ โดยมีสมมุติฐานคือ การเปลี่ยนรูปของโครงสร้างมีขนาดเล็กและหน้าตัดของโครงสร้างยังคงเป็นระนาบเดิม ซึ่งลักษณะของการเปลี่ยนรูปของโครงสร้างเมื่อรับแรงกระทำแสดงดังรูปที่ 2.1 โดยมีนิยามค่าการเปลี่ยนรูปในทิศทางต่างๆดังนี้

$$
\begin{aligned}
u_x(x,y) &= -y\frac{\partial v(x)}{\partial x} \\
u_y(x,y) &= v(x) \\
u_z(x,y) &= 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

โดย $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$, $u_z(x,y)$ คือค่าการเปลี่ยนรูปของโครงสร้างในแนวแกน x, y, และ z ตามลำดับ, $v(x)$ คือค่าการโก่งตัวของคาน จากนิยามการเปลี่ยนรูปของโครงสร้างสามารถหาค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในโครงสร้างได้ ตามทฤษฎีคาน *Euler-Bernoulli beam* ค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นมีนิยามดังนี้

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.2}$$

โดย $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ คือ ความเค้นและความเครียดพื้นฐานของโครงสร้างตามลำดับ (Normal stress and normal strain), δ_{ij} คือ Kronecker delta, λ, μ คือ ค่าคงที่ของลามี (Lame's constants) มีนิยามดังนี้

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.3}$$

โดย E คือ ค่าโมดูลัสของยัง (Young's modulus), ν คือ อัตราส่วนปัวซองค์ (Poisson's ratio) แทนค่าสมการ (2.1) ในสมการ (2.2) ดังนั้นค่าความเค้นและความเครียดของโครงสร้าง (Non-zero terms) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sigma_{xx}(x,y) = -\frac{yE(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}\right)$$
$$\sigma_{yy}(x,y) = \sigma_{zz}(x,y) = \frac{\nu\sigma_{xx}(x,y)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)} \tag{2.4}$$
$$\varepsilon_{xx}(x,y) = -y\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$$

2.2 ทฤษฎีโครงสร้างขนาดเล็ก

2.2.1 Modified couple stress theory

ทฤษฎี *Modified couple stress theory* ได้ถูกนำเสนอโดย Yang et al. [7] ซึ่งทฤษฎีนี้จะคิดผลเนื่องจากขนาดของโครงสร้างบนหลักการของทฤษฎีพลังงานความเครียด (Strain energy theory) โดยจะเพิ่มค่าความเค้นและความความเครียดที่เกิดขึ้นในโครงสร้างเนื่องจากขนาดของโครงสร้างในสมการพลังงานความเครียดรวมของโครงสร้าง มีนิยามดังนี้

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} : \boldsymbol{\chi}\right)dV \tag{2.5}$$

โดย U คือ พลังงานความเครียดรวมของโครงสร้าง, $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}$ คือ ความเค้นและความเครียดพื้นฐานของโครงสร้างตามลำดับ, $\mathbf{m},\boldsymbol{\chi}$ คือ ความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นเนื่องจากขนาดของโครงสร้างตามลำดับ มีนิยามดังนี้

$$
\begin{aligned}
m_{ij} &= 2l^2\mu\chi_{ij} \\
\chi_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\theta_{i,j}+\theta_{j,i}\right)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

โดย l คือ ค่าความยาวเฉพาะของวัสดุ (Material length-scale) และสามารถหาได้จากการทดลอง, θ คือ ค่ามุมบิดของโครงสร้าง มีนิยามดังนี้

$$\theta_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j} \tag{2.7}$$

โดย e_{ijk} คือ permutation symbol พิจารณานิยามการเปลี่ยนรูป สมการ (2.1) และนิยามความเค้นและความเครียดสมการ (2.6) ดังนั้น ค่าความเค้นและความเครียดเนื่องจากขนาดของโครงสร้าง (Non-zero terms) ในระนาบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
m_{xz}(x,y) &= m_{zx}(x,y) = \mu l^2\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \\
\chi_{xz}(x,y) &= \chi_{zx}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

2.2.2 Nonlocal elastic theory

Eringen [14-15] ได้เสนอทฤษฎี *Nonlocal elastic theory* เพื่อใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดเล็ก ซึ่งทฤษฎีนี้จะปรับปรุงทฤษฎีกฎของฮุกค์ (Hook's law) โดยคิดผลเนื่องจากขนาดของโครงสร้างร่วมด้วย นิยามของทฤษฎีนี้กล่าวว่าค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในโครงสร้างจะไม่เป็นอัตราส่วนโดยตรงกับค่าความเครียดที่จุดนั้นแต่จะขึ้นอยู่กับค่าความเครียดของทั้งโครงสร้าง ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\sigma = E\varepsilon = \left(1-\left(e_0 a\right)^2\nabla^2\right)\sigma^{NL} \tag{2.9}$$

โดย σ,ε คือ ความเค้นและความเครียดพื้นฐานของโครงสร้าง, σ^{NL} คือ ความเค้นของโครงสร้างที่คิดผลเนื่องจากขนาดของโครงสร้างร่วมด้วย, ∇ คือ (Gradient operator), $\left(e_0 a\right)$ คือค่า nonlocal parameter ของวัสดุหาได้จากการทดลอง

2.2.3 Surface elastic theory

Gurtin และ Murdoch [20-21] ได้เสนอทฤษฎี *Surface elastic theory* ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดเล็ก ซึ่งทฤษฎีนี้จะอธิบายแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในชั้นผิวของโครงสร้างในการวิเคราะห์

พฤติกรรมการรับแรงกระทำของโครงสร้าง โดยในกรณีแบบจำลองคานแบบสองมิติ (Planar model) ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในชั้นผิวของโครงสร้างสามารถนิยามได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta} &= \left[\tau_0 + \left(\lambda_0 + \tau_0\right) u_{\gamma,\gamma}\right] \delta_{\alpha\beta} + \mu_0 \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\right) - \tau_0 u_{\beta,\alpha} \\ \tau_{n\alpha} &= \tau_0 u_{n,\alpha}\end{aligned} \tag{2.10}$$

โดย $\tau_{\alpha\beta}$ คือ ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในทิศทางเดียวกับผิวโครงสร้าง, $\tau_{n\alpha}$ คือ ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในทิศทางตั้งฉากกับผิวโครงสร้าง, μ_0, λ_0 คือ ค่าคงที่ของวัสดุผิวโครงสร้างสามารถหาได้จากการทดลอง, τ_0 คือ ค่าความเค้นเฉือนคงค้างที่ผิวโครงสร้าง (Residual surface stress)

แทนค่าสมการการเปลี่ยนรูปของโครงสร้างคาน สมการ (2.1) ลงในสมการ (2.10) จะได้ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในระนาบ (x, y) ดังนี้

$$\begin{aligned}\tau_{xx}\left(x, y\right) &= \tau_0 - y E_{xx}^S \frac{\partial^2 v\left(x\right)}{\partial x^2} \\ \tau_{nx}\left(x\right) &= \tau_0 n_y \frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x}\end{aligned} \tag{2.11}$$

โดย $\tau_{xx}\left(x, y\right)$ คือ ความเค้นเฉือนในแนวเดียวกับระนาบผิวโครงสร้าง, $\tau_{nx}\left(x\right)$ คือ ความเค้นเฉือนในแนวตั้งฉากกับระนาบผิวโครงสร้าง, E_{xx}^S คือ ค่าอิลาสติกของชั้นผิวโครงสร้าง (Surface elastic modulus), n_y คือ ยูนิต-เวกเตอร์ในทิศทางแกน y

2.3 ทฤษฎีชั้นรองรับ

2.3.1 Winkler foundation theory

Winkler foundation theory เป็นทฤษฎีที่ใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับโครงสร้าง เสนอโดย Winkler [26] ซึ่งทฤษฎีนี้จะแทนพฤติกรรมของชั้นรองรับด้วยสปริงที่มีความอิสระต่อกัน ดังนั้นในบริเวณที่รับแรงกระทำชั้นรองรับก็จะเกิดการทรุดตัว ส่วนบริเวณที่ไม่ได้รับแรงกระทำก็จะไม่มีการทรุดตัวใดๆเกิดขึ้นในชั้นรองรับ ซึ่งพฤติกรรมการทรุดตัวของชั้นรองรับและแรงกระทำจะมีความสัมพันธ์ในลักษณะเชิงเส้น นิยามได้ดังนี้

$$F\left(x\right) = k_1 \Delta\left(x\right) \tag{2.10}$$

โดย $F\left(x\right)$ คือ แรงในชั้นรองรับ, $\Delta\left(x\right)$ คือ ค่าการทรุดตัวของชั้นรองรับโดยทั่วไปจะมีค่าเท่ากับค่าการทรุดตัวของโครงสร้าง $v\left(x\right)$, และ k_1 คือ ค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับ

2.3.2 Van der Waals force theory

ในส่วนของพฤติกรรมของชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้น ในงานวิจัยนี้จะใช้ทฤษฎีแรงแวนเดอร์วาลล์ (*Van der Waals force theory*) ในการอธิบายพฤติกรรมดังกล่าว ซึ่งทฤษฎีนี้ได้ถูกนำเสนอ

โดย Jomehzadah [35] บนพื้นฐานของหลักการทฤษฎีพลังงานศักย์ของ Lennard-Jones [29] (Lennard-Jones potential energy) ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$V(d) = 4\varepsilon_d \left[\left(\frac{\sigma_d}{d} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma_d}{d} \right)^{6} \right] \tag{2.11}$$

โดย $V(d)$ คือ พลังงานศักย์รวม, ε_d, σ_d คือ ค่าคงที่ขึ้นอยู่กับประเภทของวัสดุโครงสร้างและชั้นรองรับ, และ d คือ ค่าระยะห่างระหว่างอะตอม จากนิยามทฤษฎีพลังงานดังกล่าว แรงเวนเดอร์วาลล์ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$F(d) = \frac{\partial V(d)}{\partial d} = \frac{24\varepsilon_d}{d} \left[2\left(\frac{\sigma_d}{d} \right)^{13} - \left(\frac{\sigma_d}{d} \right)^{7} \right] \tag{2.12}$$

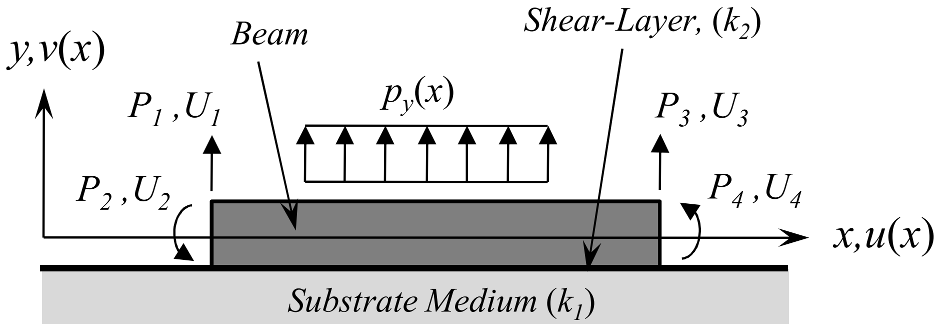
โดย $F(d)$ คือ แรงยึดเหนี่ยวระหว่างอะตอม หรือ แรงเวนเดอร์วาลล์ (Van der Waals force) ซึ่งเมื่อพิจารณาสมการ (2.12) จะเห็นได้ว่าสมการดังกล่าวเป็นสมการไม่เชิงเส้นที่มีค่ากำลังสูงมาก ดังนั้น Jomehzadah ได้ใช้ทฤษฎี *Taylor series expansion* ในการประมาณค่าแรงเวนเดอร์วาลล์ โดยกระจายค่าแรงจนถึงกำลังสามเพื่อพิจารณาผลของความไม่เชิงเส้น ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F(d) &= \frac{24\varepsilon_d}{\sigma_d^2} \left[26\left(\frac{\sigma_d}{\bar{d}} \right)^{14} - 7\left(\frac{\sigma_d}{\bar{d}} \right)^{8} \right] \left(d - \bar{d} \right) \\ &\quad - \frac{336\varepsilon_d}{\sigma_d^4} \left[65\left(\frac{\sigma_d}{\bar{d}} \right)^{16} - 6\left(\frac{\sigma_d}{\bar{d}} \right)^{10} \right] \left(d - \bar{d} \right)^3 \\ &= k_1 v(x) + k_3 v(x)^3 \end{aligned} \tag{2.13}$$

โดย $\bar{d}$ คือ ค่าระยะห่างสมดุลระหว่างอะตอม (Interfacial equilibrium spacing), k_1 คือ ค่าความแข็งแกรงของชั้นรองรับแบบเชิงเส้น, และ k_3 คือ ค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งค่าความแข็งแกร่งทั้งสองค่านี้จะขึ้นอยู่กับประเภทของวัสดุโครงสร้างและชั้นรองรับ

บทที่ 3
แบบจำลองคานบนชั้นรองรับ

3.1 แบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปร



รูปที่ 3.1 ระบบคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปร

ในงานวิจัยนี้จะใช้แบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรเป็นต้นแบบในงานวิจัย ซึ่งแบบจำลองนี้ได้ถูกนำเสนอโดย Limkatanyu et.al. [36] โดยลักษณะของแบบจำลองนี้แสดงดังรูปที่ 3.1 แบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรนี้จะใช้ทฤษฎีคาน *Euler-Bernoulli beam* ในการอธิบายพฤติกรรมของคาน และใช้ทฤษฎี *Winkler-Pasternak foundation theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับ จากระบบของแบบจำลองดังกล่าวและตามกระบวนการในการสร้างแบบจำลอง [36] จะได้สมการสมดุลของแรง (Equilibrium equation) ในระบบดังนี้

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}-\frac{\partial V_S(x)}{\partial x}+D_1(x)-p_y(x)=0 \tag{3.1}$$

โดย $M(x)$ คือ ค่าโมเมนต์ดัดในคาน, $V_S(x)$ คือ ค่าแรงเฉือนในชั้นรองรับ, $D_1(x)$ คือ ค่าแรงในชั้นรองรับแบบเชิงเส้น, และ $p_y(x)$ คือ ค่าแรงกระทำภายนอกแบบกระจาย

ในส่วนของสมการความเข้ากันได้ (Compatibility equation) ของระบบ จะคำนวณโดยอยู่บนหลักการของแรง (Force-based derivation) จากกระบวนการในการสร้างแบบจำลอง [36] จะได้สมการอนุพันธ์ของระบบคานมาสองสมการดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{M(x)}{EI}+\frac{1}{k_1}\left(\frac{\partial^4 M(x)}{\partial x^4}-\frac{\partial^3 V_S(x)}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 p_y(x)}{\partial x^2}\right)=0\\ \frac{V_S(x)}{k_2}+\frac{1}{k_1}\left(\frac{\partial^3 M(x)}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 V_S(x)}{\partial x^2}-\frac{\partial p_y(x)}{\partial x}\right)=0\end{aligned} \tag{3.2}$$

โดย k_1, k_2 คือ ค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับและชั้นแรงเฉือนตามลำดับ

จากสมการอนุพันธ์ของคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปร สมการ (3.2) จะต้องใช้สมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนในคาน เพื่อใช้ในการเขียนสองสมการอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการเดียวกัน ซึ่งสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนมีนิยามดังนี้

$$\frac{\partial V_S(x)}{\partial x} = \frac{k_2}{EI} M(x) \tag{3.3}$$

โดย EI คือ ค่าความต้านทานการดัดของคาน จากสมการอนุพันธ์สองสมการ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปหนึ่งสมการได้ โดยใช้สมการ (3.2) และ (3.3) ร่วมกัน จะได้สมการ

$$\frac{\partial^4 M(x)}{\partial x^4} + \lambda_1 M(x) - \lambda_2 \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p_y(x)}{\partial x^2} \tag{3.4}$$

โดย $\lambda_1 = k_1/EI$ และ $\lambda_2 = k_2/EI$

ในแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปร จะใช้ผลเฉลยถูกต้อง (Exact solution) ของสมการอนุพันธ์ สมการ (3.4) ในการสร้างเมตริกซ์ความแข็งแกร่ง (Stiffness matrix) ของโครงสร้าง โดยผลเฉลยถูกต้องของสมการ (3.4) จะมีอยู่ 3 ผลเฉลย ตามเงื่อนไขดังนี้

$$\left.\begin{aligned} M(x) &= c_1 \cosh\alpha x \cos\beta x + c_2 \sinh\alpha x \cos\beta x + \\ &\quad c_3 \cosh\alpha x \sin\beta x + c_4 \sinh\alpha x \sin\beta x \end{aligned}\right\} for\ \lambda_2 < 2\sqrt{\lambda_1}$$

$$M(x) = c_1 e^{\sqrt[4]{\lambda_1} x} + c_2 x e^{\sqrt[4]{\lambda_1} x} + c_3 e^{-\sqrt[4]{\lambda_1} x} + c_4 x e^{-\sqrt[4]{\lambda_1} x} \Big\} for\ \lambda_2 = 2\sqrt{\lambda_1} \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned} M(x) &= c_1 \cosh\alpha x \cosh\beta x + c_2 \sinh\alpha x \cosh\beta x + \\ &\quad c_3 \cosh\alpha x \sinh\beta x + c_4 \sinh\alpha x \sinh\beta x \end{aligned}\right\} for\ \lambda_2 > 2\sqrt{\lambda_1}$$

โดย ค่าตัวแปร α และ β มีนิยามดังนี้

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2} + \frac{\lambda_2}{4}}, \beta = \left|\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2} - \frac{\lambda_2}{4}}\right| \tag{3.6}$$

จากผลเฉลยของสมการ สามารถเขียนสมการโมเมนต์ดัด, แรงเฉือน, และแรงในชั้นรองรับให้อยู่ในรูปเมตริกซ์สมการฟังค์ชั่นรูปร่าง (Interpolation shape function) ซึ่งคำนวณมาจากผลเฉลยที่ถูกต้องโดยใช้สมการ (3.5) ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} M(x) &= \mathbf{N}_{BB}(x)\mathbf{P} \\ V_S(x) &= \mathbf{N}_{VV}(x)\mathbf{P} \\ D_1(x) &= \mathbf{N}_{DD}(x)\mathbf{P} \end{aligned} \tag{3.7}$$

โดย $\mathbf{N}_{BB}(x), \mathbf{N}_{VV}(x), \mathbf{N}_{DD}(x)$ คือ เมตริกซ์สมการฟังค์ชั่นรูปร่างของโมเมนต์ดัด, แรงเฉือน, และ แรงในชั้นรองรับ ตามลำดับ จากสมการ (3.7) สามารถหาสมการเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของโครงสร้างได้ ดังนี้

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} = \left(\mathbf{F}_{BB} + \mathbf{F}_{VV} + \mathbf{F}_{DD}\right)^{-1} \tag{3.8}$$

โดย $\mathbf{K}$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่ง (Stiffness matrix) ของโครงสร้าง, $\mathbf{F}_{BB}, \mathbf{F}_{VV}, \mathbf{F}_{DD}$ คือ เมตริกซ์ความยืดหยุ่น (Flexibility matrix) ของโครงสร้างเนื่องจากแรงในคาน, แรงในชั้นแรงเฉือน, และ แรงในชั้นรองรับ ตามลำดับ โดยมีนิยามดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{BB} &= \int_L \mathbf{N}_{BB}^T(x)\left(\frac{1}{EI}\right)\mathbf{N}_{BB}(x)\,dx \\ \mathbf{F}_{DD} &= \int_L \mathbf{N}_{DD}^T(x)\left(\frac{1}{k_1}\right)\mathbf{N}_{DD}(x)\,dx \\ \mathbf{F}_{VV} &= \int_L \mathbf{N}_{VV}^T(x)\left(\frac{1}{k_2}\right)\mathbf{N}_{VV}(x)\,dx \end{aligned} \tag{3.9}$$

ในส่วนของรายละเอียดของขั้นตอนการสร้างเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัว สามารถดูได้ในภาคผนวก

3.2 แบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับในงานวิจัย

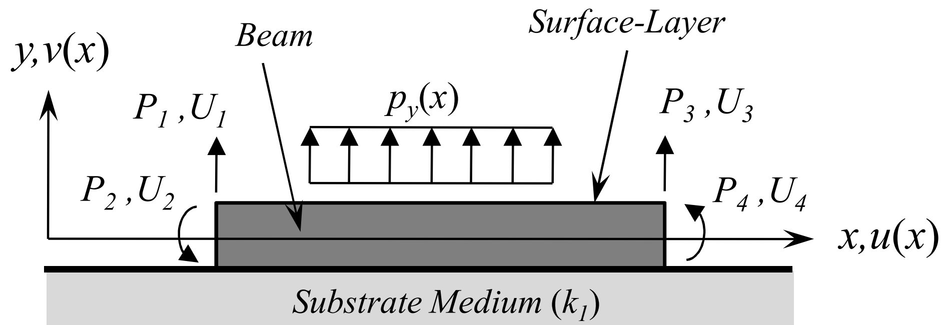
ในการสร้างแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองในงานวิจัยนี้ จะอ้างอิงตาม Limkatanyu et.al. [36] ในขั้นตอนและกระบวนการสร้างแบบจำลอง แต่จะมีความแตกต่างในส่วนของทฤษฎีที่ใช้ในการอธิบายพฤติกรรมโครงสร้าง โดยในส่วนของคานจะใช้ทฤษฎี *Euler-Bernoulli beam* ร่วมกับทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็ก สำหรับชั้นรองรับจะใช้ทฤษฎี *Winkler foundation theory* และ *Van der Waals force theory* ในการอธิบายพฤติกรรมชั้นรองรับแทนแบบจำลองชั้นรองรับแบบสองตัวแปร ดังนั้นแบบจำลองในงานวิจัยนี้จะไม่มีแรงเฉือนที่เกิดขึ้นจากชั้นแรงเฉือนในชั้นรองรับ แต่จะมีแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในชั้นผิวของโครงสร้างเข้ามาทดแทน ทำให้แบบจำลองในงานวิจัยนี้นี้มีความคล้ายคลึงกับแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปร [36] โดยในงานวิจัยนี้จะสร้างแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับทั้งหมด 3 แบบจำลอง คือ

แบบจำลองที่ 1 จะใช้ทฤษฎี *Modified couple stress theory* และ *Surface elastic theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของคาน และใช้ทฤษฎี *Winkler foundation theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับ

แบบจำลองที่ 2 จะใช้ทฤษฎี *Nonlocal elastic theory* และ *Surface elastic theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของคาน และใช้ทฤษฎี *Winkler foundation theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับ

แบบจำลองที่ 3 จะใช้ทฤษฎี *Nonlocal elastic theory* และ *Surface elastic theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของคาน และใช้ทฤษฎี *Van der Waals force theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับ

3.2.1 แบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น



รูปที่ 3.2 แบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น

แบบจำลองนี้ จะมีลักษณะทางกายภาพดังรูปที่ 3.2 ซึ่งจะมีความคล้ายคลึงกับแบบจำลองในรูปที่ 3.1 จากหลักการทฤษฎีงานเสมือน (Principle of virtual work) สามารถเขียนสมการของงานภายในและงานภายนอกที่เกิดขึ้นในระบบโครงสร้างได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta W_{int} &= \int_L \left(\int_A \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dA + \int_A m_{ij} \delta\chi_{ij} dA \right) dx \\ &\quad + \int_L \left(\int_\Gamma \tau_{ij} \delta\varepsilon_{ij}^s d\Gamma \right) dx + \int_L D_1(x) \delta\Delta(x) dx \\ \delta W_{ext} &= -\int_L p_y(x) \delta v(x) dx - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P}\end{aligned} \tag{3.10}$$

โดย δW_{int} คือ ผลรวมของงานภายในที่เกิดขึ้น, และ δW_{ext} คือ ผลรวมของงานภายนอกที่เกิดขึ้น, $\int_L \int_A \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dA dx$ คือ งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเค้นและความเครียดพื้นฐานในโครงสร้าง, $\int_L \int_A m_{ij} \delta\chi_{ij} dA dx$ คือ งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเค้นและความเครียดเนื่องจากขนาดของโครงสร้าง, $\int_L \int_\Gamma \tau_{ij} \delta\varepsilon_{ij}^s d\Gamma dx$ คือ งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงในชั้นผิวโครงสร้าง, $\int_L D_1(x) \delta\Delta(x) dx$ คือ งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงในชั้นรองรับ, และ $\int_L p_y(x) \delta v(x) dx$ คือ งานเนื่องจากแรงกระทำภายนอก

แทนค่าจากสมการ (2.4), (2.8) และ (2.11) จะได้

$$\begin{aligned}&\int_L M(x) \left(\frac{\partial^2 \delta v(x)}{\partial x^2} \right) dx + \int_L V_\tau(x) \left(\frac{\partial \delta v(x)}{\partial x} \right) dx \\ &+ \int_L D_1(x) \delta v(x) dx - \int_L p_y(x) \delta v(x) dx - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} = 0\end{aligned} \tag{3.11}$$

โดย $M(x)$ คือ ผลรวมของโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นทั้งหมด, $V_\tau(x)$ คือ แรงเฉือนที่เกิดขึ้นในผิวโครงสร้าง มีนิยามดังนี้

$$
\begin{aligned}
&M(x) = M_\sigma(x) + M_m(x) + M_\tau(x) \\
&M_\sigma(x) = -\int_A y\sigma_{xx}(x,y)\,dA \\
&M_m(x) = \int_A m_{xz}(x,y)\,dA \\
&M_\tau(x) = -\int_\Gamma y\left(\tau_{xx}(x,y) - \tau_0\right)d\Gamma \\
&V_\tau(x) = \int_\Gamma n_y \tau_{nx}(x)\,dA
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

จากสมการที่ (3.11) ทำการอินทิเกรต (Integration by pass) สองครั้งในพจน์โมเมนต์ดัด และหนึ่งครั้งในพจน์แรงเฉือน จะได้

$$
\begin{aligned}
&\int_L \left(\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial V_\tau(x)}{\partial x} + D_1(x) - p_y(x) \right) \delta v(x)\,dx \\
&+ \left[\left(V_\tau(x) - \frac{\partial M_T(x)}{\partial x} \right) \delta v(x) \right]_0^L + \left[M_T(x) - \frac{\partial \delta v(x)}{\partial x} \right]_0^L
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

ดังนั้นจะได้สมการสมดุลของแรง (Equilibrium equation) ในระบบแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับดังนี้

$$
\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial V_\tau(x)}{\partial x} + D_1(x) - p_y(x) = 0 \tag{3.14}
$$

จากสมการ (3.14) จะเห็นได้ว่าสมการสมดุลของแรงในแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับมีความเหมือนกันกับแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรที่เป็นต้นแบบ สมการ (3.1)

ในส่วนของแบบจำลองที่ 2 สามารถเขียนสมการของงานภายในและงานภายนอกของระบบโครงสร้างบนหลักการทฤษฎีงานเสมือนได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\delta W_{int} &= \int_L \left(\int_A \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}\,dA \right) dx + \int_L \left(\int_\Gamma \tau_{ij} \delta\varepsilon_{ij}^s\,d\Gamma \right) dx + \int_L D_1(x)\,\delta\Delta(x)\,dx \\
\delta W_{ext} &= -\int_L p_y(x)\,\delta v(x)\,dx - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

ทำตามกระบวนการในแบบจำลองที่ 1 ดังนั้นจะได้ สมการสมดุลของแรง (Equilibrium equation) ในแบบจำลองที่ 2 ดังนี้

$$
\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial V_\tau(x)}{\partial x} + D_1(x) - p_y(x) = 0 \tag{3.16}
$$

โดย นิยามของโมเมนต์ดัดในแบบจำลองที่ 2 จะแตกต่างจากแบบจำลองที่ 1 ซึ่งโมเมนต์ดัดในแบบจำลองที่ 2 สามารถนิยามได้ดังนี้

$$M(x) = M_\sigma(x) + M_\tau(x)$$
$$M_\sigma(x) = -\int_A y\sigma_{xx}(x,y)\,dA \tag{3.17}$$
$$M_\tau(x) = -\int_\Gamma y\left(\tau_{xx}(x,y) - \tau_0\right)d\Gamma$$

จะเห็นได้ว่าสมการสมดุลของแรง สมการ (3.1), (3.14), และ (3.16) ของแบบจำลองทั้งสามมีความเหมือนกัน ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า แบบจำลองคานบนชั้นรองรับที่มีลักษณะทางกายภาพดังรูปที่ 3.1 และ 3.2 จะมีรูปแบบทั่วไปของสมการสมดุลของแรงดังสมการข้างต้น

พิจารณาสมการ (3.12) และ (3.17) แทนค่าจากสมการ (2.4), (2.8) และ (2.11) จะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัวของคานในแบบจำลองที่ 1 ดังนี้

$$M(x) = \left[\frac{EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + (\lambda_0 + 2\mu_0)I_P + \mu l^2 A\right]\kappa(x) = EI_{eff}\kappa(x) \tag{3.18}$$
$$V_\tau(x) = \tau_0 S_P \gamma(x) = GA_{eff}\gamma(x)$$

ในกรณีแบบจำลองที่ 2 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$M(x) = \left[\frac{EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + (\lambda_0 + 2\mu_0)I_P\right]\kappa(x) = EI_{eff}\kappa(x) \tag{3.19}$$
$$V_\tau(x) = \tau_0 S_P \gamma(x) = GA_{eff}\gamma(x)$$

โดยในกรณีแบบจำลองที่ 2 จะใช้ทฤษฎี *Nonlocal elastic theory* ในการวิเคราะห์ผลที่เกิดขึ้นเนื่องจากขนาดโครงสร้าง และจะใช้ทฤษฎีนี้ในการวิเคราะห์ผลที่เกิดขึ้นในส่วนของโมเมนต์ดัดเท่านั้น ไม่ได้พิจารณาผลในส่วนของแรงเฉือน ดังนั้นจากนิยามใน สมการ (2.9) สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและการเคลื่อนตัวใหม่ได้ดังนี้

$$M(x) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = EI_{eff}\kappa(x) \tag{3.20}$$

ในส่วนของความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัวของชั้นรองรับ จะอ้างอิงตามนิยามของทฤษฎี *Winkler foundation theory* สมการ (2.10) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$D_1(x) = k_1 v(x) \tag{3.21}$$

ในการสร้างเมตริกความแข็งแกร่ง (Stiffness matrix) ของระบบโครงสร้าง จะใช้หลักการเดียวกับแบบจำลองต้นแบบที่ใช้อ้างอิง จากหลักการงานเสมือนของแรง สามารถเขียนงานภายในและภายนอกของแบบจำลองที่ 1 ได้ดังนี้

$$\delta W_{int}^* = \int_L \delta M(x)\kappa(x)\,dx + \int_L \delta V_\tau(x)\gamma(x)\,dx + \int_L \delta D_1(x)v(x)\,dx$$
$$\delta W_{ext}^* = -\int_L \delta p_y(x)v(x)\,dx - \delta\mathbf{P}^T\mathbf{U} \tag{3.22}$$

เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ จะสมมติให้แรงกระจายภายนอกมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นพลังงานรวมของระบบโครงสร้างสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta W^{*} &= \int_{L} \delta M(x)\kappa(x)\,dx + \int_{L} \delta V_{\tau}(x)\gamma(x)\,dx \\ &+ \int_{L} \delta D_{1}(x)v(x)\,dx - \delta\mathbf{P}^{T}\mathbf{U}\end{aligned} \tag{3.23}$$

ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัว สมการ (3.18) และสมการ (3.21) จะสามารถเขียนสมการ (3.23) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta W^{*} &= \int_{L} \delta M(x)\frac{M(x)}{EI_{eff}}\,dx + \int_{L} \delta V_{\tau}(x)\frac{V_{\tau}(x)}{GA_{eff}}\,dx \\ &+ \int_{L} \delta D_{1}(x)\frac{D_{1}(x)}{k_{1}}\,dx - \delta\mathbf{P}^{T}\mathbf{U}\end{aligned} \tag{3.24}$$

แทนค่า สมการสมดุลของแรงในระบบ สมการ (3.14) เพื่อกำจัดตัวแปรของแรงในชั้นรองรับในสมการ (3.24) จะได้

$$\begin{aligned}0 &= -\delta\mathbf{P}^{T}\mathbf{U} + \int_{L} \delta M(x)\frac{M(x)}{EI_{eff}}\,dx + \int_{L} \delta V_{\tau}(x)\frac{V_{S}(x)}{GA_{eff}}\,dx \\ &+ \int_{L}\left(\frac{1}{k_{1}}\right)\left(\frac{\partial \delta V_{\tau}(x)}{\partial x}\right)\left(p_{y}(x) + \frac{\partial V_{\tau}(x)}{\partial x} - \frac{\partial^{2} M(x)}{\partial x^{2}}\right)dx \\ &+ \int_{L}\left(\frac{1}{k_{1}}\right)\left(\frac{\partial^{2} \delta M(x)}{\partial x^{2}}\right)\left(-p_{y}(x) - \frac{\partial V_{\tau}(x)}{\partial x} + \frac{\partial^{2} M(x)}{\partial x^{2}}\right)dx\end{aligned} \tag{3.25}$$

ทำการอินทิเกรต (Integration by pass) พจน์ที่ 4 หนึ่งครั้งและพจน์ที่ 5 สองครั้งในสมการที่ (3.25) จะได้

$$\begin{aligned}&\int_{L} \delta M(x)\left(\frac{M(x)}{EI_{eff}} + \frac{1}{k_{1}}\left(\frac{\partial^{4} M(x)}{\partial x^{4}} - \frac{\partial^{3} V_{\tau}(x)}{\partial x^{3}} - \frac{\partial^{2} p_{y}(x)}{\partial x^{2}}\right)\right)dx \\ &+ \int_{L} \delta V_{\tau}(x)\left(\frac{V_{\tau}(x)}{GA_{eff}} + \frac{1}{k_{1}}\left(\frac{\partial^{3} M(x)}{\partial x^{3}} - \frac{\partial^{2} V_{\tau}(x)}{\partial x^{2}} - \frac{\partial p_{y}(x)}{\partial x}\right)\right)dx \\ &+ \left[\left(\frac{\partial \delta M(x)}{\partial x} - \delta V_{\tau}(x)\right)\left(\frac{1}{k_{1}}\right)\left(\frac{\partial^{2} M(x)}{\partial x^{2}} - \frac{\partial V_{\tau}(x)}{\partial x} - p_{y}(x)\right)\right]_{0}^{L} \\ &+ \left[\delta M(x)\left(\frac{1}{k_{1}}\right)\left(\frac{\partial p_{y}(x)}{\partial x} + \frac{\partial^{2} V_{\tau}(x)}{\partial x^{2}} - \frac{\partial^{3} M(x)}{\partial x^{3}}\right)\right]_{0}^{L} - \delta\mathbf{P}^{T}\mathbf{U} = 0\end{aligned} \tag{3.26}$$

ดังนั้นจากสมการ (3.26) จะได้สมการอนุพันธ์ของระบบโครงสร้างมาสองสมการคือ

$$\frac{M(x)}{EI_{eff}}+\frac{1}{k_1}\left(\frac{\partial^4 M(x)}{\partial x^4}-\frac{\partial^3 V_\tau(x)}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 p_y(x)}{\partial x^2}\right)=0$$
$$\frac{V_\tau(x)}{GA_{eff}}+\frac{1}{k_1}\left(\frac{\partial^3 M(x)}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 V_\tau(x)}{\partial x^2}-\frac{\partial p_y(x)}{\partial x}\right)=0 \tag{3.27}$$

จะเห็นได้ว่า สมการอนุพันธ์ (3.27) ทั้งสองสมการมีความเหมือนกันกับสมการอนุพันธ์ของแบบจำลองต้นแบบ สมการ (3.2) ดังนั้นใช้หลักการเดียวกับแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปร จะสามารถเขียนสมการอนุพันธ์ทั้งสองสมการในรูปแบบสมการเดียวกันได้ ดังนี้

$$\frac{\partial^4 M(x)}{\partial x^4}+\lambda_1 M(x)-\lambda_2\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 p_y(x)}{\partial x^2} \tag{3.28}$$

โดย $\lambda_1 = k_1 / EI_{eff}$ และ $\lambda_2 = GA_{eff} / EI_{eff}$

ในส่วนของแบบจำลองที่ 2 จะใช้กระบวนการเดียวกันกับแบบจำลองที่ 1 ในการสร้างเมตริกความแข็งแกร่งของระบบโครงสร้าง แต่ในแบบจำลองที่ 2 สมการอนุพันธ์ของระบบโครงสร้างที่ได้มาจะแตกต่างจากแบบจำลองที่ 1 ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{1}{IE_{eff}}\left(M(x)-(e_0a)^2\frac{\partial^2 M(x)}{dx^2}\right)+$$
$$\frac{1}{k_1}\left(\frac{\partial^4 M(x)}{\partial x^4}-\frac{\partial^2 p_y(x)}{\partial x^2}-\frac{\partial^3 V_\tau(x)}{\partial x^3}\right)=0 \tag{3.29}$$
$$\frac{V_\tau(x)}{GA_{eff}}+\frac{1}{k_1}\left(\frac{\partial^3 M(x)}{\partial x^3}-\frac{\partial p_y(x)}{\partial x}-\frac{\partial^2 V_\tau(x)}{\partial x^2}\right)=0$$

โดยในแบบจำลองที่ 2 จะมีผลเนื่องจากขนาดของโครงสร้างตามทฤษฎี *Nonlocal elastic theory* ร่วมด้วย นั่นคือตัวพารามิเตอร์ (e_0a) แต่กระบวนการในการรวมทั้งสองสมการให้เป็นหนึ่งสมการยังคงเดิม ดังนั้นจะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$\frac{\partial V_\tau(x)}{\partial x}=GA_{eff}\frac{\partial \gamma(x)}{\partial x}=\frac{GA_{eff}}{IE_{eff}}\left(M(x)-(e_0a)^2\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}\right) \tag{3.30}$$

แทนค่าสมการ (3.30) ดังนั้น สมการอนุพันธ์ของระบบโครงสร้างในแบบจำลองที่ 2 สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^4 M(x)}{\partial x^4}+\lambda_1 M(x)-\lambda_2\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}=\lambda_3\frac{\partial^2 p_y(x)}{\partial x^2} \tag{3.31}$$

โดย $\lambda_1=\dfrac{k_1}{IE_{eff}+(e_0a)^2 GA_{eff}},\lambda_2=\dfrac{(GA)_{eff}+(e_0a)^2 k_1}{IE_{eff}+(e_0a)^2 GA_{eff}},\lambda_3=\dfrac{IE_{eff}}{IE_{eff}+(e_0a)^2 GA_{eff}}$

จะเห็นได้ว่า สมการอนุพันธ์ของทั้งสามแบบจำลอง สมการ (3.4), (3.28), และ (3.31) มีความเหมือนกัน แต่จะมีความแตกต่างกันตรงค่าพารามิเตอร์ λ ดังนั้น แบบจำลองที่ 1 และ 2 จะใช้

หลักการเดียวกันกับแบบจำลองต้นแบบในการสร้างเมตริกความแข็งแกร่ง (Stiffness matrix) ของระบบโครงสร้าง พิจารณาสมการ (3.5) ซึ่งเป็นผลเฉลยที่ถูกต้องของสมการอนุพันธ์ข้างต้น ค่าตัวแปรคงที่ c_1, c_2, c_3 และ c_4 สามารถหาได้จากเงื่อนไขความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} &-\left[\frac{\partial M(x)}{\partial x}-V_\tau(x)\right]_{x=0}=P_1;\ -M(0)=P_2; \\ &\left[\frac{\partial M(x)}{\partial x}-V_\tau(x)\right]_{x=L}=P_3;\ M(L)=P_4 \end{aligned} \tag{3.32}$$

ดังนั้น จากสมการที่ (3.5) และ (3.32) สามารถเขียนสมการโมเมนต์ดัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$M(x)=\mathbf{N}_{BB}(x)\mathbf{P} \tag{3.33}$$

โดย $\mathbf{N}_{BB}(x)$ คือ เมตริกซ์สมการฟังค์ชั่นรูปร่าง (Interpolation shape function) ของโมเมนต์ดัด ในหลักการเดียวกันจะสามารถเขียนสมการแรงเฉือนและแรงในชั้นรองรับให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} V_\tau(x)&=\mathbf{N}_{VV}(x)\mathbf{P} \\ D_1(x)&=\mathbf{N}_{DD}(x)\mathbf{P} \end{aligned} \tag{3.34}$$

โดย $\mathbf{N}_{VV}(x),\mathbf{N}_{DD}(x)$ คือ เมตริกซ์สมการฟังค์ชั่นรูปร่างของแรงเฉือนและแรงในชั้นรองรับ ตามลำดับ ซึ่งในแบบจำลองที่ 1 สามารถหาค่าแรงเฉือนและแรงในชั้นรองรับได้จากความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัด ดังนี้

$$\begin{aligned} V_\tau(x)&=\frac{GA_{eff}^2}{k_1 EI_{eff}}\frac{\partial M(x)}{\partial x}-\frac{GA_{eff}}{k_1}\frac{\partial^3 M(x)}{\partial x^3} \\ D_1(x)&=\left(\frac{GA_{eff}^2}{k_1 EI_{eff}}-1\right)\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}-\frac{GA_{eff}}{k_1}\frac{\partial^4 M(x)}{\partial x^4} \end{aligned} \tag{3.35}$$

ในทำนองเดียวกัน กรณีของแบบจำลองที่ 2 ค่าแรงเฉือนและแรงในชั้นรองรับ สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัด ดังนี้

$$\begin{aligned} V_\tau(x)&=\frac{GA_{eff}}{k_1}\left(\frac{GA_{eff}}{EI_{eff}}\left(\frac{\partial M(x)}{dx}-(e_0a)^2\frac{\partial^3 M(x)}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial^3 M(x)}{\partial x^3}\right) \\ D_1(x)&=\frac{GA_{eff}}{EI_{eff}}\left(M(x)-(e_0a)^2\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^3} \end{aligned} \tag{3.36}$$

แทนค่าสมการ (3.33) และ (3.34) ลงในสมการ (3.24) ดังนั้นในกรณีแบบจำลองที่ 1 จะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างเมตริกซ์ความยืดหยุ่น (Flexibility matrix) และการเคลื่อนตัวดังนี้

$$\left(\mathbf{F}_{BB}+\mathbf{F}_{DD}+\mathbf{F}_{VV}\right)\mathbf{P}=\mathbf{FP}=\mathbf{U}+\mathbf{U}_{p_y} \tag{3.37}$$

โดย เมตริกซ์ความยืดหยุ่นแต่ละตัวมีนิยามดังนี้

$$\mathbf{F}_{BB} = \int_L \mathbf{N}_{BB}^T(x)\left(\frac{1}{EI_{eff}}\right)\mathbf{N}_{BB}(x)\,dx$$
$$\mathbf{F}_{DD} = \int_L \mathbf{N}_{DD}^T(x)\left(\frac{1}{k_1}\right)\mathbf{N}_{DD}(x)\,dx \tag{3.38}$$
$$\mathbf{F}_{VV} = \int_L \mathbf{N}_{VV}^T(x)\left(\frac{1}{GA_{eff}}\right)\mathbf{N}_{VV}(x)\,dx$$

ดังนั้นเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบโครงสร้าง สามารถหาได้จากเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ความยืดหยุ่นของระบบ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{P} = \mathbf{KU} + \mathbf{KU}_{p_y} \tag{3.39}$$

โดย $\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1}$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งของโครงสร้าง และ $\mathbf{KU}_{p_y}$ คือ เมตริกซ์ของแรงที่ปลายทั้งสองข้างเนื่องมาจากแรงกระจายภายนอก $p_y(x)$

ด้วยหลักการเดียวกับแบบจำลองที่ 1 ความสมพันธ์ระหว่างเมตริกซ์ความยืดหยุ่นและการเคลื่อนตัวของแบบจำลองที่ 2 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left(\mathbf{F}_{BB} + \mathbf{F}_{DD} + \mathbf{F}_{VV} + \mathbf{F}_{BB}^{NL}\right)\mathbf{P} = \mathbf{FP} = \mathbf{U} + \mathbf{U}_{p_y} \tag{3.40}$$

โดย เมตริกซ์ความยืดหยุ่นแต่ละตัวมีนิยามดังนี้

$$\mathbf{F}_{BB} = \int_L \mathbf{N}_{BB}^T(x)\left(\frac{1}{EI_{eff}}\right)\mathbf{N}_{BB}(x)\,dx$$
$$\mathbf{F}_{DD} = \int_L \mathbf{N}_{DD}^T(x)\left(\frac{1}{k_1}\right)\mathbf{N}_{DD}(x)\,dx$$
$$\mathbf{F}_{VV} = \int_L \mathbf{N}_{VV}^T(x)\left(\frac{1}{GA_{eff}}\right)\mathbf{N}_{VV}(x)\,dx \tag{3.41}$$
$$\mathbf{F}_{BB}^{NL} = \int_L \mathbf{N}_{BB}^T(x)\left(\frac{(e_0 a)^2}{EI_{eff}}\right)\frac{d^2\mathbf{N}_{BB}(x)}{dx^2}\,dx$$

จะเห็นได้ว่า เมตริกซ์ความยืดหยุ่นของแบบจำลองที่ 2 จะมีความแตกต่างจากแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองต้นแบบอยู่ โดยจะมีเมตริกซ์ความยืดหยุ่นเพิ่มเติมเข้ามาอีกหนึ่งเมตริกซ์ ซึ่งเป็นผลมาจากทฤษฎี *Nonlocal elastic theory*

3.2.2 แบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้น

ในส่วนนี้จะเป็นการสร้างแบบจำลองที่ 3 ซึ่งเป็นแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้น โดยลักษณะโครงสร้างทางกายภาพจะเหมือนกับแบบจำลองที่ 1 และ 2 ดังรูปที่ 3.2 แต่จะมีความแตกต่างในส่วนของทฤษฎีที่ใช้ในชั้นรองรับ โดยในแบบจำลองนี้จะใช้ทฤษฎี *Van der Waals force theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับแทนทฤษฎี *Winkler foundation theory* ดังนั้น สมการสมดุลของแรงในแบบจำลองนี้ จะยังคงเหมือนกับแบบจำลองที่ 1 และ 2 ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}-\frac{\partial V_\tau(x)}{\partial x}+D_S(x)-p_y(x)=0 \tag{3.42}$$

ในส่วนของความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัวของแบบจำลองที่ 3 จะมีความคล้ายคลึงกับแบบจำลองที่ 2 เนื่องจากใช้ทฤษฎีเดียวกันในการอธิบายพฤติกรรมของคาน แต่จะแตกต่างกันในส่วนของทฤษฎีของชั้นรองรับ ดังนั้นในแบบจำลองที่ 3 นิยามความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัวสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} M(x) &= EI_{eff}\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}+(e_0a)^2\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} \\ V_\tau(x) &= GA_{eff}\frac{\partial v(x)}{\partial x} \\ D_S(x) &= k_1 v(x)+k_3 v(x)^3 \end{aligned} \tag{3.43}$$

เนื่องจากแบบจำลองที่ 3 นี้ จะเป็นแบบจำลองที่มีความไม่เชิงเส้นร่วมอยู่ ทำให้หลักการในการสร้างเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของแบบจำลองที่ 1 และ 2 จะไม่สามารถใช้ในแบบจำลองนี้ได้ ดังนั้นในแบบจำลองที่ 3 นี้ จะใช้หลักการไฟไนต์อิลิเมนต์ (Finite element model) ในการสร้างเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของแบบจำลอง เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์บนหลักการของไฟไนต์อิลิเมนต์ สมการสมดุลของแรงในแบบจำลองนี้ สมการ (3.42) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\partial_B^T\mathbf{M}_B(x)+\partial_\tau^T\mathbf{V}_\tau(x)+\mathbf{D}_S(x)-\mathbf{P}_y(x)=0 \tag{3.44}$$

โดย $\mathbf{M}_B(x)$ คือ เมตริกซ์ของโมเมนต์ดัด, $\mathbf{V}_\tau(x)$ คือ เมตริกซ์ของแรงเฉือน, $\mathbf{D}_S(x)$ คือ เมตริกซ์ของแรงในชั้นรองรับ, $\mathbf{P}_y(x)$ คือ เมตริกซ์ของแรงกระจายภายนอก และ ∂_B,∂_τ มีนิยามดังนี้

$$\partial_B^T=\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}^T,\partial_\tau^T=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\right\}^T \tag{3.45}$$

บนหลักการของไฟไนต์อิลิเมนต์ ค่าการเคลื่อนตัวของโครงสร้างสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\{v(x)\} = \mathbf{v}(x) = \mathbf{N}_{CC}(x)\mathbf{V} \tag{3.46}$$

โดย $\mathbf{N}_{CC}(x)$ คือ เมตริกซ์สมการฟังค์ชั่นรูปร่าง โดยในแบบจำลองนี้จะใช้สมการพหุนามกำลังสาม (Cubic interpolation function) ในการประมาณค่าการเคลื่อนตัวของโครงสร้าง มีนิยามดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{CC}(x) &= \{N_{C1}(x) \quad N_{C2}(x) \quad N_{C3}(x) \quad N_{C4}(x)\} \\
N_{C1}(x) &= \left(\frac{1}{L^3}\right)(L+2x)(L-x)^2 \\
N_{C2}(x) &= \left(\frac{x}{L^2}\right)(L-x)^2 \\
N_{C3}(x) &= \left(\frac{x^2}{L^3}\right)(3L-2x) \\
N_{C4}(x) &= \left(\frac{x^2}{L^2}\right)(x-L)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

จากสมการความสัมพันธ์ของแรงและการเคลื่อนตัว สมการ (3.43) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ความสัมพันธ์กับการเคลื่อนตัวของระบบโครงสร้าง สมการ (3.46) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_B(x) &= \partial_B \mathbf{v}(x) + \frac{(e_0 a)^2}{EI_{eff}}\left[+\partial_\tau \mathbf{V}_\tau(x) - \mathbf{D}_S(x) + \mathbf{P}_y(x)\right] \\
\mathbf{v}_\tau(x) &= \partial_\tau \mathbf{v}(x) \\
\mathbf{v}_S(x) &= \mathbf{v}(x)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

ในแบบจำลองนี้จะเป็นแบบจำลองไม่เชิงเส้น (Nonlinear finite element model) ดังนั้น เพื่อให้ง่ายต่อการสร้างแบบจำลองจะทำการประมาณความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัวให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น (Linearization) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_B(x) &= \mathbf{M}_B^0(x) + \mathbf{k}_B \Delta \mathbf{v}_B(x) \\
\mathbf{V}_\tau(x) &= \mathbf{V}_\tau^0(x) + \mathbf{k}_\tau \Delta \mathbf{v}_\tau(x) \\
\mathbf{D}_S(x) &= \mathbf{D}_S^0(x) + \mathbf{k}_S \Delta \mathbf{v}_S(x)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

โดย $\mathbf{M}_B^0(x), \mathbf{V}_\tau^0(x), \mathbf{D}_S^0(x)$ คือ ค่าตั้งต้นของ โมเมนต์ดัด, แรงเฉือน, และแรงในชั้นรองรับ ตามลำดับ, $\mathbf{k}_B, \mathbf{k}_\tau, \mathbf{k}_S$ คือ ค่าความแข็งแกร่งสัมผัส (Tangent stiffness) ของ โมเมนต์ดัด, แรงเฉือน, และแรงในชั้นรองรับ ตามลำดับ

ในแบบจำลองที่ 3 นี้จะใช้หลักการ Weighted integral method ในการสร้างเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบโครงสร้าง ดังนั้นจากสมการสมดุลของแรง จะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\int_L \delta \mathbf{v}^T(x)\left[\partial_B^T \mathbf{M}_B(x) + \partial_\tau^T \mathbf{V}_\tau(x) + \mathbf{D}_S(x) - \mathbf{P}_y(x)\right]dx = 0 \tag{3.50}$$

อิทิเกรต (Integration by pass) สองครั้งในพจน์ของโมเมนต์ดัด และหนึ่งครั้งในพจน์ของแรงเฉือน และแทนค่าสมการ (3.49) ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}
&\int_L \partial_B \delta \mathbf{v}^T(x)\left[\mathbf{M}_B^0(x)+\mathbf{k}_B \Delta \mathbf{v}_B(x)\right]dx \\
&+\int_L \partial_\tau \delta \mathbf{v}^T(x)\left[\mathbf{V}_\tau^0(x)+\mathbf{k}_\tau \Delta \mathbf{v}_\tau(x)\right]dx \\
&+\int_L \delta \mathbf{v}^T(x)\left[\mathbf{D}_S^0(x)+\mathbf{k}_S \Delta \mathbf{v}_S(x)\right]dx=\int_L \delta \mathbf{v}^T(x)\mathbf{P}_y dx
\end{aligned} \tag{3.51}$$

แทนค่าสมการ (3.46) และ (3.48) ลงในสมการ (3.51) ดังนั้น จะได้

$$\left(\mathbf{K}_B+\mathbf{K}_\tau+\mathbf{K}_S+\mathbf{K}_{NL}\right)\Delta \mathbf{V}=\mathbf{P}+\mathbf{P}_M^0+\mathbf{P}_\tau^0+\mathbf{P}_S^0+\mathbf{P}_{P_y} \tag{3.52}$$

โดย ตัวแปรแต่ละตัวมีนิยามดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_B &= \int_L \partial_B \mathbf{N}_{CC}^T(x)\mathbf{k}_B \partial_B \mathbf{N}_{CC}(x)dx \\
\mathbf{K}_\tau &= \int_L \mathbf{N}_{CC}^T(x)\mathbf{k}_\tau \mathbf{N}_{CC}(x)dx \\
\mathbf{K}_S &= \int_L \mathbf{N}_{CC}^T(x)\mathbf{k}_S \mathbf{N}_{CC}(x)dx \\
\mathbf{K}_{NL} &= -\int_L \partial_B \mathbf{N}_{CC}^T(x)\left(\frac{(e_0a)^2\,\mathbf{k}_B\mathbf{k}_S}{EI_{eff}}\right)\mathbf{N}_{CC}(x)dx \\
\mathbf{P}_M^0 &= -\int_L \partial_B \mathbf{N}_{CC}^T(x)\mathbf{M}_B^0 dx \\
\mathbf{P}_\tau^0 &= -\int_L \partial_\tau \mathbf{N}_{CC}^T(x)\mathbf{V}_\tau^0 dx \\
\mathbf{P}_S^0 &= -\int_L \left(\partial_B \mathbf{N}_{CC}^T(x)\mathbf{D}_S^0-\partial_B \mathbf{N}_{CC}^T(x)\left(\frac{(e_0a)^2\,\mathbf{k}_B}{EI_{eff}}\right)\mathbf{D}_S^0\right)dx \\
\mathbf{P}_{P_y} &= \int_L \left(\mathbf{N}_{CC}^T(x)\mathbf{P}_y-\partial_B \mathbf{N}_{CC}^T(x)\left(\frac{(e_0a)^2\,\mathbf{k}_B}{EI_{eff}}\right)\mathbf{P}_y\right)dx
\end{aligned} \tag{3.53}$$

บทที่ 4
การวิเคราะห์โครงสร้าง

4.1 แบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น

การวิเคราะห์โครงสร้างในงานวิจัยนี้ จะใช้พารามิเตอร์เกี่ยวกับความแข็งแกร่ง (Stiffness) ของโครงสร้าง ในการวิเคราะห์ผลการตอบสนองต่อแรงกระทำ โดยพารามิเตอร์ตัวนี้เรียกว่า Contact stiffness ซึ่งอ้างอิงจาก Khajeansari et al. [37] และ Jiang and Yan [38] โดยมีนิยามดังนี้

$$K_{end} = \frac{P_{end}}{u_{end}} \tag{4.1}$$

โดย K_{end} คือ Contact stiffness ของโครงสร้าง, P_{end} และ u_{end} คือ ค่าแรงกระทำและค่าการเคลื่อนตัวที่ปลายของโครงสร้างตามลำดับ โดยในงานวิจัยนี้จะมีการนิยามค่าความแข็งแกร่งมาตรฐาน (Normalize contact stiffness) ขึ้นมาสองตัว เพื่อใช้ในการวิเคราะห์และเปรียบเทียบความแข็งแกร่งของโครงสร้างเนื่องจากปัจจัยต่างๆ โดยตัวแรกจะเป็นค่าความแข็งแกร่งมาตรฐานเนื่องจากแกนโครงสร้าง มีนิยามดังนี้

$$K_{core}^{end} = \frac{K_{core-surf}^{end}}{K_{surf}^{end}} \tag{4.2}$$

โดย K_{core}^{end} คือ ความแข็งแกร่งของโครงสร้างเนื่องจากแกนโครงสร้าง, $K_{core-surf}^{end}$ คือ ความแข็งแกร่งของโครงสร้างเมื่อคิดผลเนื่องจากแกนโครงสร้างและชั้นผิวโครงสร้างร่วมกัน, K_{surf}^{end} คือ ความแข็งแกร่งของโครงสร้างเมื่อคิดเฉพาะผลเนื่องจากชั้นผิวโครงสร้าง ส่วนค่าความแข็งแกร่งมาตรฐานอีกตัวจะเป็นค่าความแข็งแกร่งมาตรฐานเนื่องจากชั้นผิวโครงสร้าง มีนิยามดังนี้

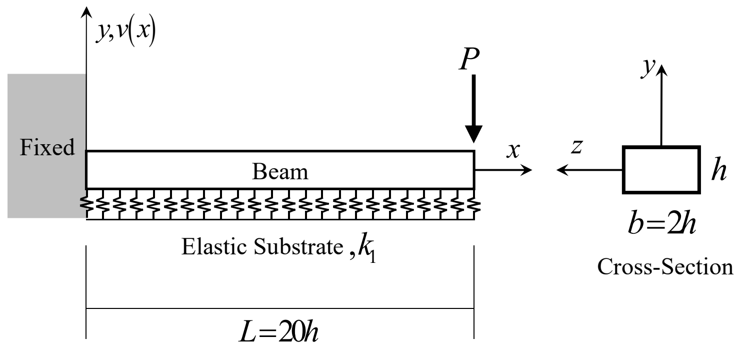
$$K_{surface}^{end} = \frac{K_{core-surf}^{end}}{K_{core}^{end}} \tag{4.3}$$

โดย $K_{surface}^{end}$ คือ ความแข็งแกร่งของโครงสร้างเนื่องจากชั้นผิวโครงสร้าง, K_{core}^{end} คือ ความแข็งแกร่งของโครงสร้างเมื่อคิดเฉพาะผลเนื่องจากแกนโครงสร้าง

4.1.1 แบบจำลองที่ 1 (Modified couple stress and Surface elastic theories)

ในแบบจำลองที่ 1 นี้ จะเป็นแบบจำลองคานขนาดเล็กบนบนหลักการของทฤษฎี *Modified couple stress theory* และ *Surface elastic theory* จะมีตัวอย่างการวิเคราะห์ 2 ตัวอย่าง โดยตัวอย่างที่หนึ่งจะเป็นการวิเคราะห์พฤติกรรมการรับแรงของโครงสร้างและเปรียบเทียบกับแบบจำลอง

คานพื้นฐาน ส่วนในตัวอย่างที่สองจะเป็นการวิเคราะห์ผลเนื่องจากแกนโครงสร้างและชั้นผิวโครสร้างต่อพฤติกรรมการรับแรงของโครงสร้าง



รูปที่ 4.1 คานยื่นบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้นรับแรงกระทำที่ปลาย

ตัวอย่างที่หนึ่ง จะวิเคราะห์การตอบสนองต่อแรงกระทำของแบบจำลองคานยื่นบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น รับแรงกระทำที่ปลายดังรูปที่ 4.1 โดยค่าพารามิเตอร์ต่างๆ อ้างอิงจาก Gao and Mahmoud [22] และ Liu and Rajapakse [39] มีดังนี้

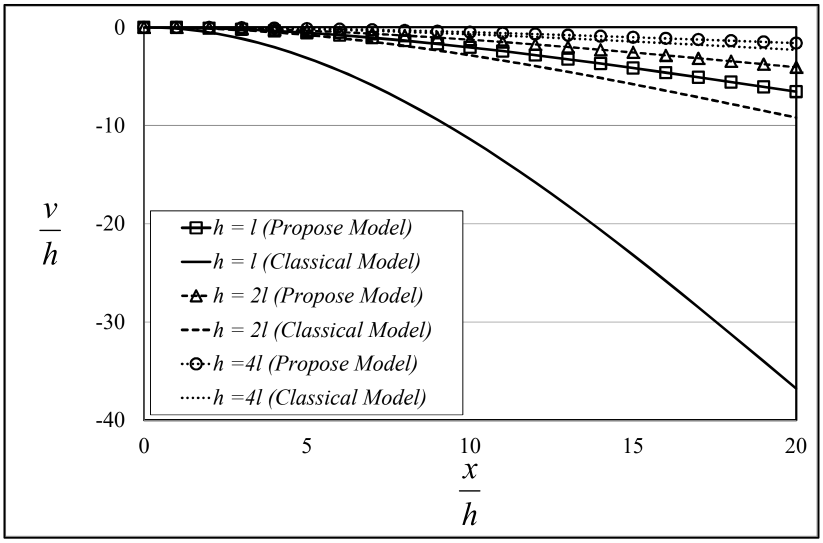
The bulk modulus	$E = 90GPa$
Poisson's ratio	$\nu = 0.23$
The residual surface stress	$\tau_0 = 0.5689\, N/m$
The surface elastic constants	$\lambda_0 = 3.4939,\ \mu_0 = -5.4251\, N/m$
The length-scale parameter	$l = 6.58mm$

ในการวิเคราะห์นี้ จะใช้พารามิเตอร์แบบไม่มีหน่วย 2 ตัวเพื่อช่วยในการกำหนดค่าของพารามิเตอร์ตัวนั้นในการวิเคราะห์ โดยพารามิเตอร์ตัวแรกคือ ความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่มีหน่วย (Normalized substrate stiffness) ส่วนพารามิเตอร์อีกตัวคือ แรงกระทำที่ปลายแบบไม่มีหน่วย (Normalized concentrate load) ซึ่งในการวิเคราะห์นี้ จะกำหนดค่าแรงกระทำที่ปลายแบบไม่มีหน่วยเท่ากับ *1* และค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่มีหน่วยมีค่าระหว่าง *0.2* ถึง *10* โดยนิยามของพารามิเตอร์ทั้งสองตัว มีนิยามดังนี้

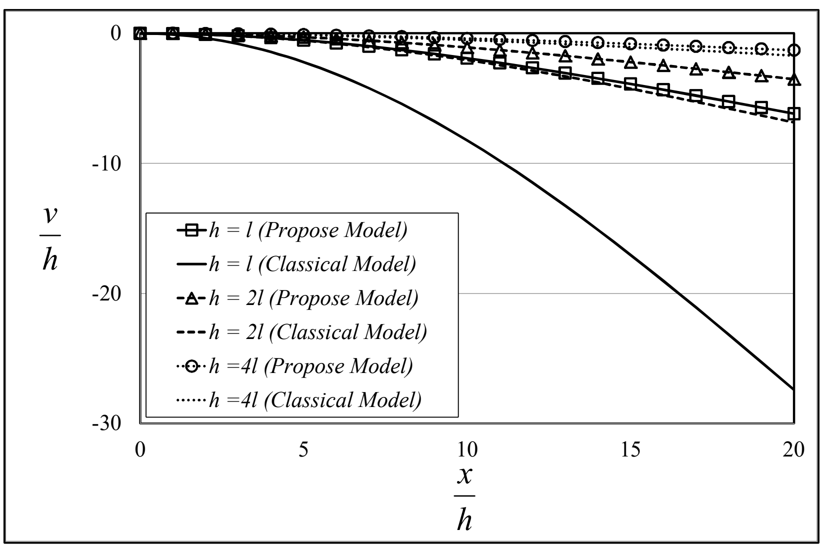
Normalized substrate-stiffness
$$\bar{k}_1 = \frac{k_1 L^4}{(EI)_{eff}} \tag{4.4}$$

Normalized concentrated load
$$\bar{P} = \frac{PL^2}{(EI)_{eff}} \tag{4.5}$$

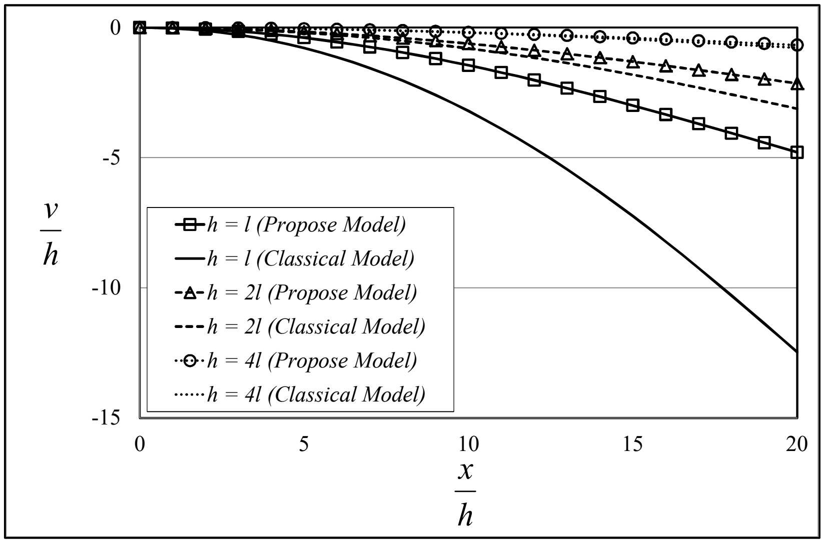
รูปที่ 4.2(ก-ง) แสดงการเปรียบเทียบผลการรับแรงกระทำของคานบนชั้นรองรับที่มีค่าความแข็งแกร่งแตกต่างกัน โดยจะเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองในงานวิจัยและแบบจำลองคานพื้นฐาน (Euler-Bernoulli beam)



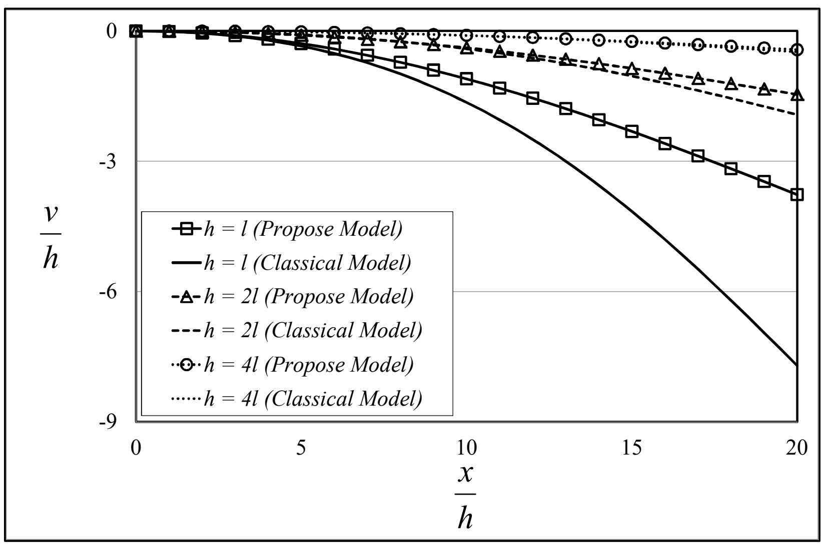
รูปที่ 4.2(ก) พฤติกรรมของคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น, $\overline{k_1} = 0.2$



รูปที่ 4.2(ข) พฤติกรรมของคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น, $\overline{k_1} = 1$



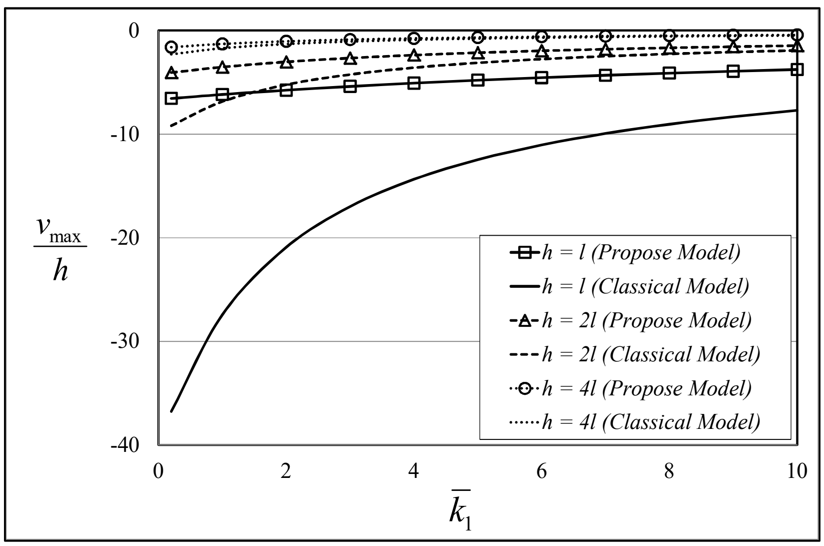
รูปที่ 4.2(ค) พฤติกรรมของคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น, $\overline{k_1} = 5$



รูปที่ 4.2(ง) พฤติกรรมของคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น, $\overline{k_1} = 10$

พิจารณารูปที่ 4.2(ก-ง) จะเห็นได้ชัดเจนว่าผลการตอบสนองต่อแรงกระทำของแบบจำลองคานพื้นฐานจะมากกว่าผลการตอบสนองต่อแรงกระทำของแบบจำลองในงานวิจัยที่คิดผลเนื่องจากขนาดโครงสร้าง ดังนั้นจากผลที่ได้สามารถสรุปได้ว่า ในการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็กแบบจำลองคานในงานวิจัยจะมีความแข็งมากกว่าแบบจำลองคานพื้นฐาน นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าเมื่อขนาดของหน้าตัดคานมีขนาดเล็กมากจนเข้าใกล้ค่าความยาวเฉพาะของวัสดุ (Length-scale parameter, $h=l$) ผลการตอบสนองของแบบจำลองทั้งสองจะแตกต่างกันมากอย่างเห็นได้ชัด แต่ผลการตอบสนองของ

ทั้งสองแบบจำลองจะมีค่าใกล้เคียงกันเมื่อขนาดหน้าตัดคานมีขนาดใหญ่ขึ้น และจะใกล้เคียงกันมากเมื่อขนาดหน้าตัดมีค่าเป็น 4 เท่าของค่าความยาวเฉพาะของวัสดุ ($h=4l$) ในส่วนของชั้นรองรับจะส่งผลให้แบบจำลองมีความแข็งมากขึ้นเมื่อค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับมีค่าสูง โดยผลตอบสนองของโครงสร้างเนื่องจากขนาดหน้าตัดและความแข็งแกร่งของชั้นรองรับ สามารถสรุปได้ดังรูปที่ 4.2(จ) ดังนั้นจากผลการวิเคราะห์ทั้งหมด สามารถสรุปได้ว่าขนาดโครงสร้างจะมีความสำคัญและส่งผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างมากขึ้น เมื่อโครงสร้างมีขนาดเล็กและชั้นรองรับมีความอ่อนตัวมาก นอกจากนี้ ยิ่งโครงสร้างมีขนาดใหญ่มากขึ้น แบบจำลองในงานวิจัยนี้และแบบจำลองพื้นฐานจะให้ผลตอบสนองที่ใกล้เคียงกัน



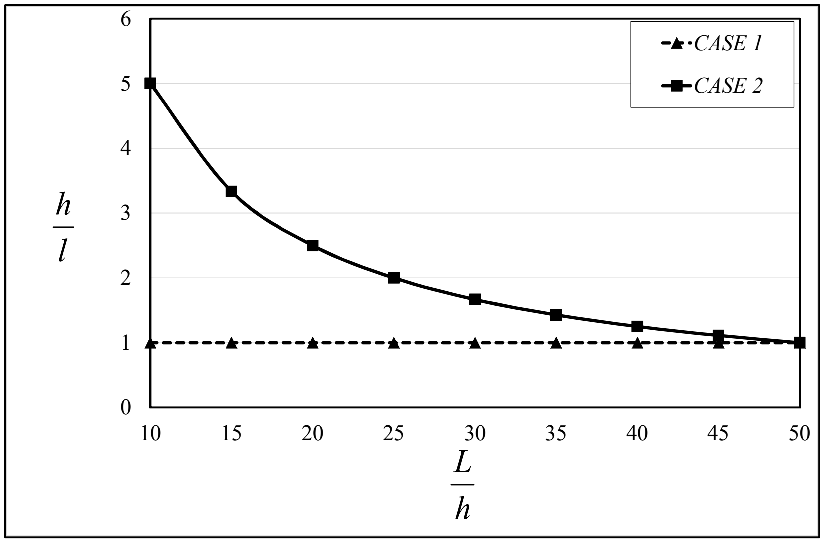
รูปที่ 4.2(จ) พฤติกรรมของโครงสร้างต่อความแข็งแกร่งของชั้นรองรับและขนาดหน้าตัด

ตัวอย่างที่สอง จะเป็นการวิเคราะห์พฤติกรรมของโครงสร้างเนื่องจากแกนโครงสร้างและชั้นผิวโครงสร้าง โดยในตัวอย่างนี้จะกำหนดให้ค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่มีหน่วยมีค่าเท่ากับ *1* ($\overline{k}_s = 1$) และกำหนดค่าความชะลูด (Slenderness ratio) ของโครงสร้างมีค่าระหว่าง *10-50*

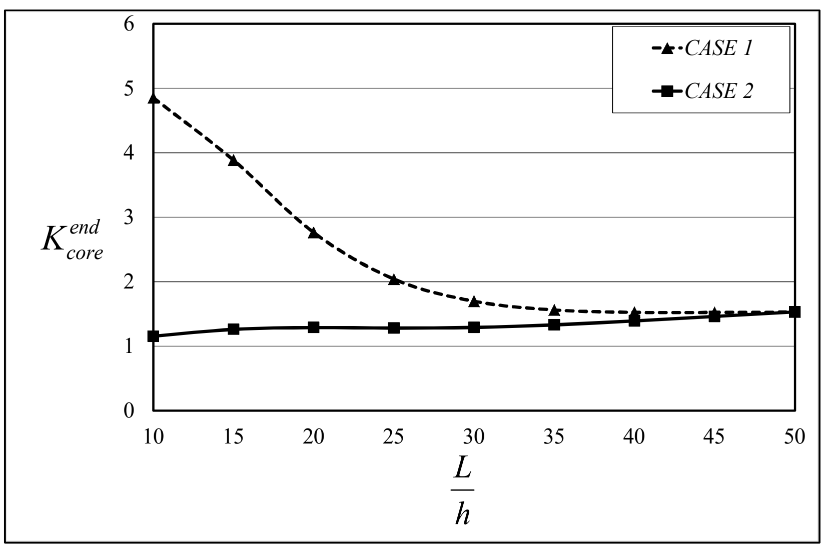
ขนาดของโครงสร้างคานที่ใช้ในตัวอย่างนี้ จะมีสองกรณี คือกรณีที่ 1 จะกำหนดให้คานมีขนาดหน้าตัดคงที่และปรับเปลี่ยนค่าความยาวของคานโดยให้มีอัตราส่วนความชะลูดอยู่ระหว่าง *10-50* ส่วนกรณีที่ 2 จะกำหนดให้คานมีความยาวคงที่และปรับเปลี่ยนขนาดหน้าตัดคานโดยให้มีค่าอัตราส่วนความชะลูดอยู่ระหว่าง *10-50* โดยขนาดของคานที่ใช้ทั้งสองกรณีจะแสดงดังรูปที่ 4.3(ก) ส่วนผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่สอง จะแสดงดังรูปที่ 4.3(ข)-(ค)

พิจารณารูปที่ 4.3(ข) ในกรณีที่ 1 จะเห็นได้ว่าแกนของโครงสร้างจะมีผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างอย่างมากเมื่อค่าอัตราส่วนความชะลูดของโครงสร้างมีค่าน้อย และจะมีผลต่อพฤติกรรม

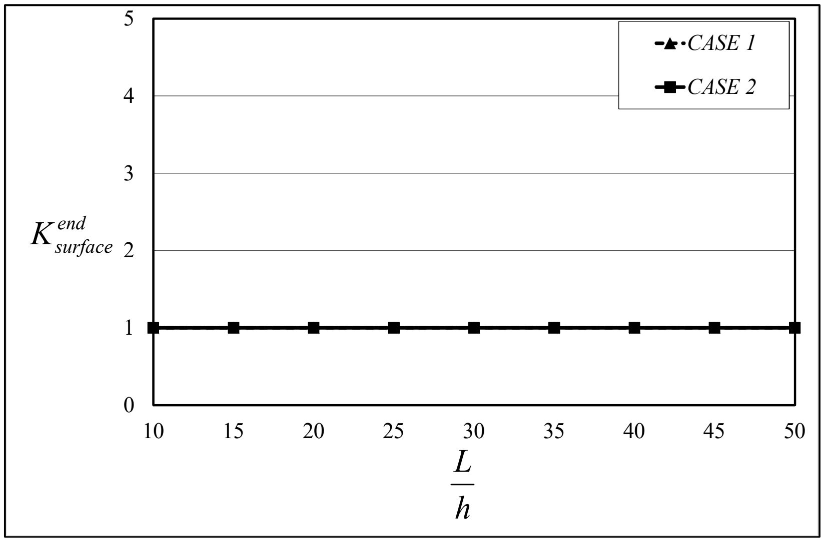
โครงสร้างน้อยลงเมื่ออัตราส่วนความชะลูดมีค่ามากขึ้น ส่วนในกรณีที่ 2 จะเห็นได้ว่าแกนของโครงสร้างจะส่งผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างน้อยมาก เนื่องจากในกรณีนี้ หน้าตัดของคานจะมีขนาดใหญ่ขึ้นเรื่อยๆ โดยจะมีค่าระหว่าง ($h=l$) ถึง ($h=5l$) ดังรูปที่ 4.3(ก)



รูปที่ 4.3(ก) ขนาดหน้าตัดคานต่ออัตราส่วนความชะลูดของโครงสร้าง



รูปที่ 4.3(ข) ผลเนื่องจากแกนโครงสร้างต่ออัตราส่วนความชะลูดของโครงสร้าง



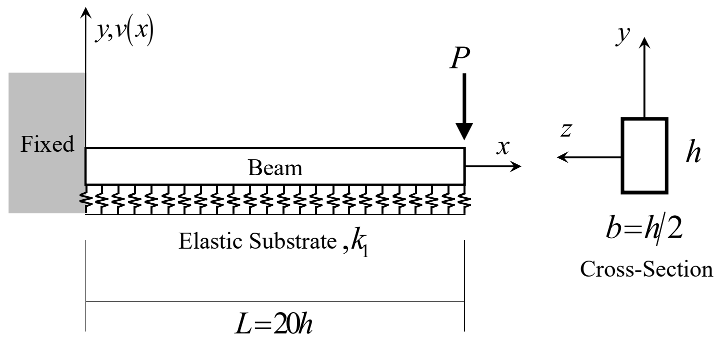
รูปที่ 4.3(ค) ผลเนื่องจากผิวโครงสร้างต่ออัตราส่วนความชะลูดของโครงสร้าง

ในส่วนของผลเนื่องจากชั้นผิวโครงสร้างต่อพฤติกรรมการรับแรงของโครงสร้าง สามารถดูได้จากรูปที่ 4.3(ค) ซึ่งจะเห็นได้ว่า ในตัวอย่างนี้ชั้นผิวโครงสร้างไม่ได้มีผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างแต่อย่างใด ทั้งนี้เนื่องจากขนาดของโครงสร้างในตัวอย่างนี้อยู่ในหน่วยไมโครเมตร อย่างไรก็ตามชั้นผิวของโครงสร้างจะมีผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างเมื่อโครงสร้างนั้นมีขนาดอยู่ในหน่วยนาโนเมตร ในจุดนี้นั้นสามารถยืนยันได้ในตัวอย่างต่อไป

4.1.2 แบบจำลองที่ 2 (Nonlocal elastic and Surface elastic theories)

ในแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับ (แบบจำลองที่ 2) นี้ จะเป็นแบบจำลองคานบนหลักการของทฤษฎี *Nonlocal elastic theory* และ *Surface elastic theory* โดยจะมีตัวอย่างการวิเคราะห์ 2 ตัวอย่างเหมือนแบบจำลองที่ 1 โดยตัวอย่างแรกจะเป็นการวิเคราะห์พฤติกรรมการรับแรงของโครงสร้างและเปรียบเทียบกับแบบจำลองพื้นฐาน ส่วนในตัวอย่างที่สองจะเป็นการวิเคราะห์ผลเนื่องจากแกนโครงสร้างและชั้นผิวโครงสร้างต่อพฤติกรรมการรับแรงของโครงสร้าง

ตัวอย่างที่หนึ่ง คานยื่นบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้นรับแรงกระทำที่ปลายคาน ดังรูปที่ 4.4 โดยขนาดและค่าพารามิเตอร์ต่างๆของคานอ้างอิงจาก He and Lilly [40] ค่าพารามิเตอร์ของชั้นผิวโครงสร้างอ้างอิงจาก Shenoy [41] และค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ผลเนื่องจากขนาดโครงสร้างอ้างอิงจาก Yang and Lim [42] โดยพารามิเตอร์ที่ใช้มีดังนี้

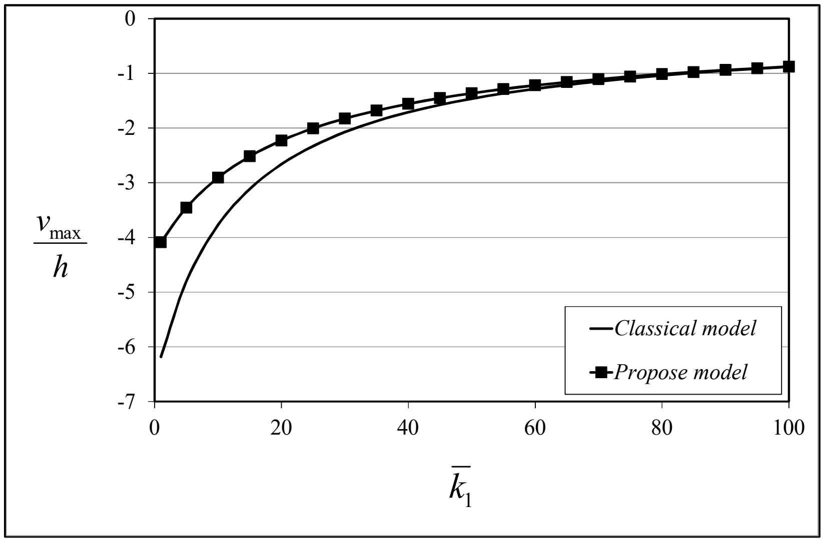


รูปที่ 4.4 คานยื่นบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น รับแรงกระทำที่ปลายคาน

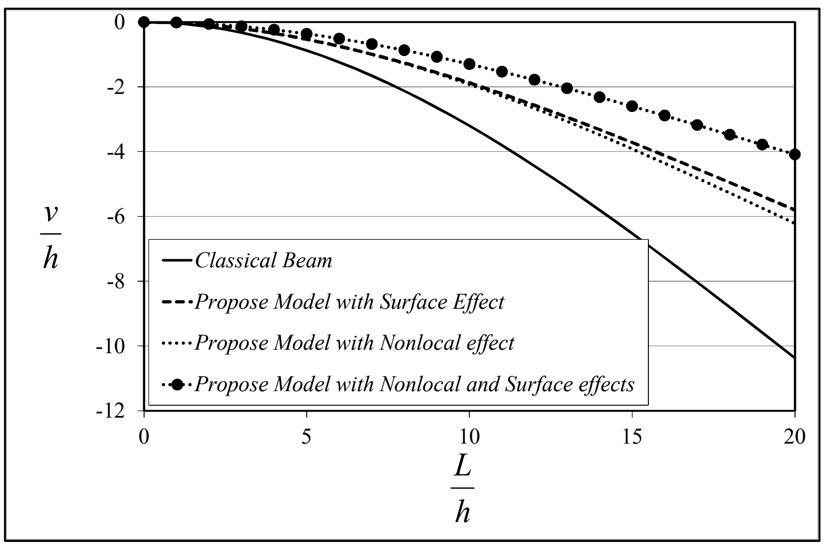
The bulk modulus	$E = 76GPa$
Poisson’s ratio	$\nu = 0.37$
The residual surface stress	$\tau_0 = 1.22\, nN/nm$
The surface modulus	$E^s = 0.89\, nN/nm$
The nonlocal parameter	$e_0 a = 200nm$

ในการวิเคราะห์นี้จะใช้สมการค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่มีหน่วยและค่าแรงกระทำแบบไม่มีหน่วย อ้างอิงจากสมการ (4.4)-(4.5) ในการวิเคราะห์ด้วย โดยค่าพารามิเตอร์แรงกระทำที่ปลายแบบไม่มีหน่วยจะใช้เท่ากับ *1* และค่าพารามิเตอร์ความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่มีหน่วยจะมีค่าระหว่าง *1-100* และค่าความยาวคานและขนาดหน้าตัดคานจะใช้ *1,000nm*. และ *50nm*. ตามลำดับ

ในส่วนแรกจะเป็นการวิเคราะห์ความแข็งแกร่งของชั้นรองรับต่อพฤติกรรมการรับแรงกระทำของโครงสร้าง ซึ่งผลที่ได้แสดงดังรูปที่ 4.5(ก) โดยจะเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่ปลายคานระหว่างแบบจำลองในงานวิจัยนี้และแบบจำลองพื้นฐาน จากรูปจะเห็นได้ว่าแบบจำลองในงานวิจัยนี้จะให้ค่าการโก่งตัวของคานน้อยกว่าแบบจำลองพื้นฐาน และค่าการโก่งตัวของคานจากทั้งสองแบบจำลองจะแตกต่างกันมากเมื่อชั้นรองรับมีค่าความแข็งแกร่งที่น้อย แต่ค่าความแตกต่างของการโก่งตัวของคานจากทั้งสองแบบจำลองที่ได้จะลดน้อยลงเมื่อค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับมีค่ามากขึ้น ดังนั้นจากผลที่ได้สามารถสรุปได้ว่า ในการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็กแบบจำลองในงานวิจัยนี้จะมีความแข็งมากกว่าแบบจำลองพื้นฐาน และจะให้ผลที่แตกต่างจากแบบจำลองพื้นฐานมากขึ้นเมื่อชั้นรองรับมีความอ่อนนุ่ม แต่เมื่อค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับมีค่าสูง แบบจำลองในงานวิจัยนี้จะให้ผลที่ไม่แตกต่างจากแบบจำลองพื้นฐาน



รูปที่ 4.5(ก) พฤติกรรมการรับแรงของโครงสร้างต่อความแข็งแกร่งของชั้นรองรับ



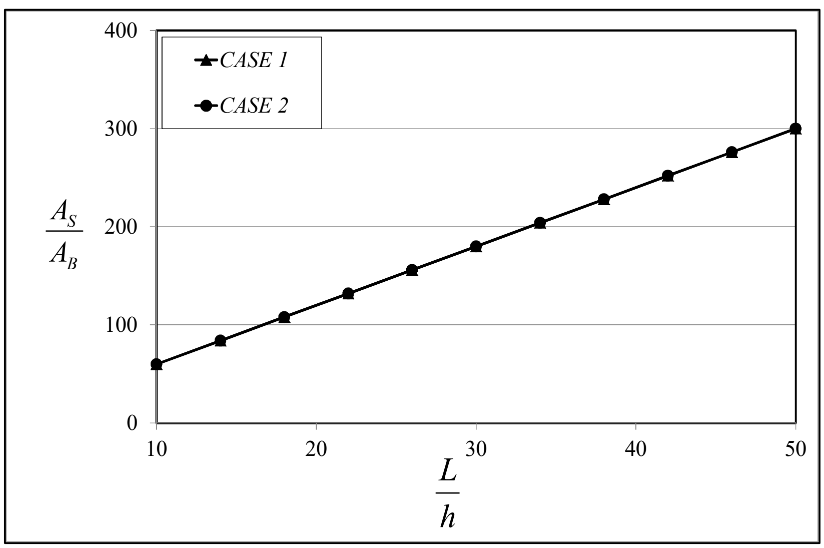
รูปที่ 4.5(ข) การโก่งตัวของคานของแบบจำลองต่างๆ

รูปที่ 4.5(ข) แสดงค่าการโก่งตัวของคานโดยเปรียบเทียบค่าที่ได้จากแบบจำลองต่างๆ ซึ่งในการวิเคราะห์นี้ จะใช้ค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่มีหน่วยเท่ากับ *1* เพื่อให้ผลเนื่องจากปัจจัยอื่นที่มีต่อพฤติกรรมสามารถเห็นได้ชัดเจน จากรูปจะเห็นได้ว่าค่าการโก่งตัวของคานที่ได้จากแบบจำลองพื้นฐานมีค่ามากที่สุด และค่าการโก่งตัวของคานจากแบบจำลองที่คิดผลเนื่องจากแกนโครงสร้างและชั้นผิวโครงสร้างร่วมกันจะมีค่าน้อยที่สุด และนอกจากนี้จะเห็นได้ว่าแบบจำลองที่คิดเฉพาะผลเนื่องจากแกนโครงสร้างและแบบจำลองที่คิดเฉพาะผลเนื่องจากชั้นผิวโครงสร้าง จะให้ค่า

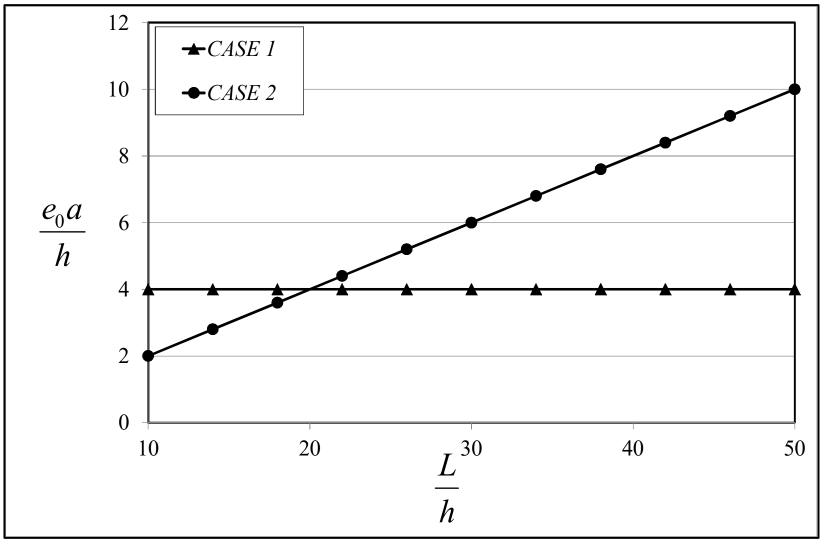
การโก่งตัวที่ใกล้เคียงกัน แต่ชั้นผิวโครงสร้างจะส่งผลต่อพฤติกรรมการโก่งตัวของคานมากกว่าแกนโครงสร้าง และทั้งสองแบบจำลองจะให้ค่าการโก่งตัวที่มากกว่าแบบจำลองที่คิดผลเนื่องจากแกนโครงสร้างและผิวโครงสร้างร่วมกัน

ตัวอย่างที่สอง จะศึกษาผลเนื่องจากแกนโครงสร้างและชั้นผิวโครงสร้างต่อพฤติกรรมของโครงสร้าง โดยในการวิเคราะห์นี้จะใช้ค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่มีหน่วยเท่ากับ 1 และขนาดของโครงสร้างคานที่ใช้ในตัวอย่างนี้ จะมีสองกรณี คือกรณีที่ 1 จะกำหนดให้คานมีขนาดหน้าตัดคงที่ $h = 50\ nm.$ และปรับเปลี่ยนค่าความยาวของคานโดยให้มีอัตราส่วนความชะลูดอยู่ระหว่าง *10-50* ส่วนกรณีที่ 2 จะกำหนดให้คานมีความยาวคงที่ $L = 1{,}000\ nm.$ และปรับเปลี่ยนขนาดหน้าตัดคานโดยให้มีค่าอัตราส่วนความชะลูดอยู่ระหว่าง *10-50* นอกจากนี้จะมีพารามิเตอร์สองตัวเพื่อช่วยในการอธิบายผลเนื่องจากชั้นผิวโครงสร้างและผลเนื่องจากแกนโครงสร้าง โดยพารามิเตอร์ทั้งสองตัวนี้จะแสดงดังรูปที่ 4.6(ก)-(ข)

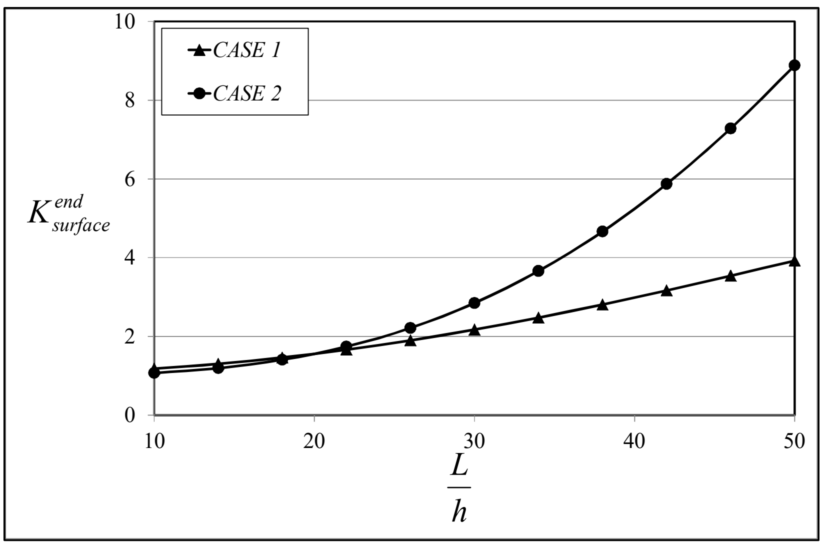
รูปที่ 4.6(ก) แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างพื้นที่ผิวโครงสร้างต่อขนาดหน้าตัดคาน $\left(A_S/A_B\right)$ ของคานทั้งสองกรณี ซึ่งจากรูปจะเห็นได้ว่าทั้งสองกรณีมีค่าอัตราส่วนเท่ากัน ส่วนรูปที่ 4.6(ข) จะแสดงค่าอัตราส่วน Nonlocal parameter ต่อขนาดหน้าตัดคาน $\left(e_0a/h\right)$โดยทั้งสองรูปนี้จะใช้ประกอบในการวิเคราะห์ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ ซึ่งแสดงในรูปที่ 4.6(ค)-(ง)



รูปที่ 4.6(ก) อัตราส่วนระหว่างชั้นผิวโครงสร้างต่อขนาดหน้าตัดคาน $\left(A_S/A_B\right)$

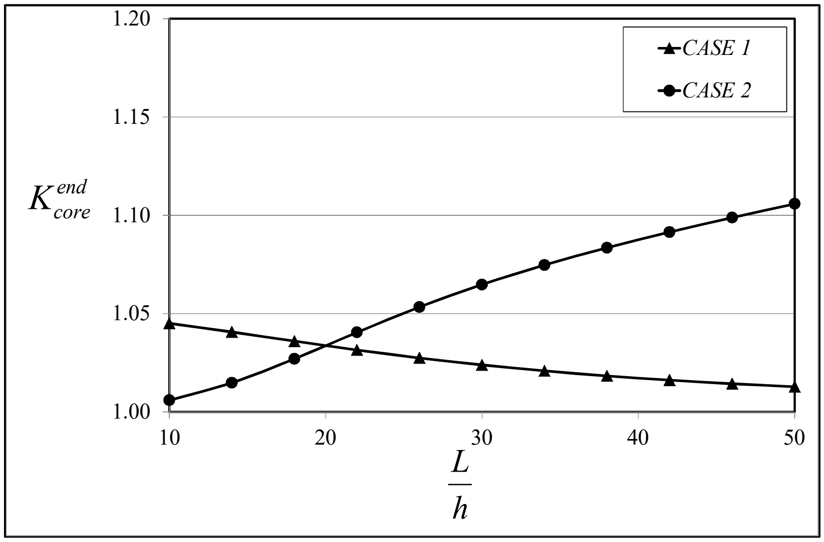


รูปที่ 4.6(ข) อัตราส่วนระหว่าง Nonlocal parameter ต่อขนาดหน้าตัดคาน$\left(e_0 a/h\right)$



รูปที่ 4.6(ค) ผลเนื่องจากชั้นผิวโครงสร้างต่อการโก่งตัวของคาน

พิจารณารูปที่ 4.6(ค) จะเห็นได้ว่าชั้นผิวโครงสร้างจะส่งผลต่อการโก่งตัวของคานมากขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนความชะลูดของโครงสร้างมีค่าสูงขึ้น นอกจากนี้คานในกรณีที่ 2 ชั้นผิวโครงสร้างจะส่งผลต่อการโก่งตัวของคานมากกว่าคานในกรณีที่ 1 ทั้งนี้เนื่องจากกรณีที่ 2 หน้าตัดคานมีขนาดลดลงทำให้ค่าต้านทานการดัดตัวของคาน (EI) ลดลง ส่งผลให้คานเกิดการโก่งตัวมากยิ่งขึ้น ดังนั้นจากผลที่ได้สามารถสรุปได้ว่า ชั้นผิวโครงสร้างจะมีผลต่อพฤติกรรมการรับแรงกระทำของโครงสร้างมากยิ่งขึ้นเมื่อโครงสร้างมีค่าอัตราส่วนความชะลูดสูงและโครงสร้างมีขนาดหน้าตัดที่เล็ก



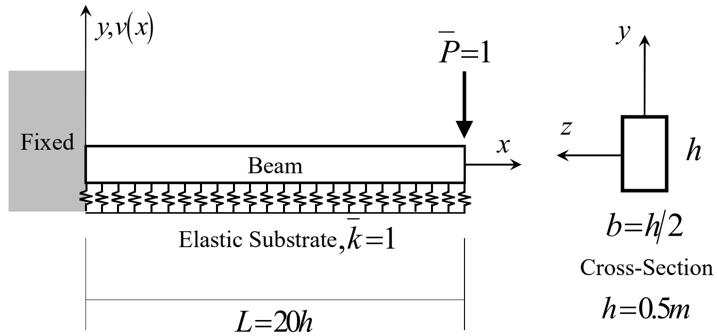
รูปที่ 4.6(ง) ผลเนื่องจากแกนโครงสร้างต่อการโก่งตัวของคาน

ในส่วนของผลเนื่องจากแกนของโครงสร้าง จะแสดงในรูปที่ 4.6(ง) จากรูปจะเห็นได้ว่าในกรณีที่ 1 แกนโครงสร้างจะส่งผลต่อการโก่งตัวของคานลดลงเมื่ออัตราส่วนความชะลูดของคานสูงขึ้น ส่วนในกรณีที่ 2 แกนโครงสร้างจะส่งผลต่อการโก่งตัวของโครงสร้างเพิ่มขึ้นเมื่ออัตราส่วนความชะลูดของโครงสร้างเพิ่มขึ้น เนื่องจากอัตราส่วนของ nonlocal parameter ต่อหน้าตัดคานเพิ่มขึ้นดังรูปที่ 4.6(ข) แต่จะเห็นได้ว่าผลที่เพิ่มขึ้นจะเพิ่มขึ้นในอัตราส่วนที่ลดลง ทั้งนี่เนื่องจากแกนของโครงสร้างจะส่งผลต่อการโก่งตัวของคานลดลงเมื่ออัตราส่วนความชะลูดของโครงสร้างมีค่าสูงขึ้น เช่นเดียวกับกรณีที่ 1 และตัวอย่างที่สองในแบบจำลองที่ 1 (หัวข้อ 4.1.1)

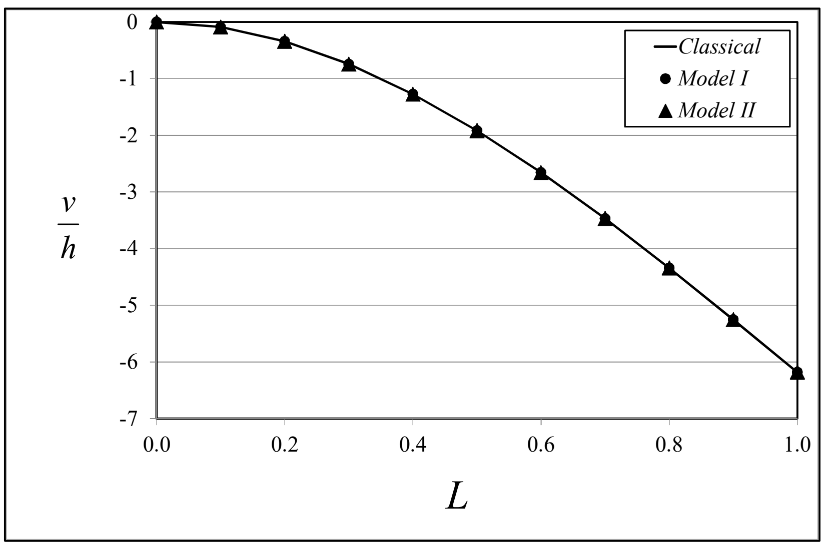
ดังนั้นจากผลการวิเคราะห์โครงสร้างที่ได้ สามารถสรุปได้ว่า ยิ่งโครงสร้างมีขนาดหน้าตัดที่เล็กลง แกนของโครงสร้างและชั้นผิวโครงสร้างจะส่งผลต่อการโก่งตัวของคานมากยิ่งขึ้น

4.1.3 คานขนาดใหญ่บนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น

ในส่วนนี้จะเป็นการเปรียบเทียบแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 กับแบบจำลองคานพื้นฐาน (Euler-Bernoulli beam) ในโครงสร้างคานที่มีขนาดใหญ่ดังรูป 4.7 โดยคุณสมบัติของคานและชั้นรองรับจะใช้ข้อมูลเดียวกับ ตัวอย่างที่หนึ่งของทั้งสองแบบจำลอง ซึ่งผลที่ได้จากการวิเคราะห์จะแสดงดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.7 คานยื่นขนาดใหญ่บนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น



รูปที่ 4.8 การโก่งตัวของคานเปรียบเทียบกับแบบจำลองพื้นฐาน

โดยจากผลการวิเคราะห์ดังรูปที่ 4.8 จะเห็นได้ว่า เมื่อขนาดของโครงสร้างมีขนาดใหญ่ขึ้นในระดับ เมตร ผลที่ได้จากแบบจำลองในงานวิจัยทั้งแบบจำลองที่ 1 และ แบบจำลองที่ 2 จะให้ค่าที่เท่ากับแบบจำลองพื้นฐาน ดังนั้นสรุปได้ว่า ขนาดของโครงสร้างจะไม่มีผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างในการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดใหญ่

4.2 แบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้น

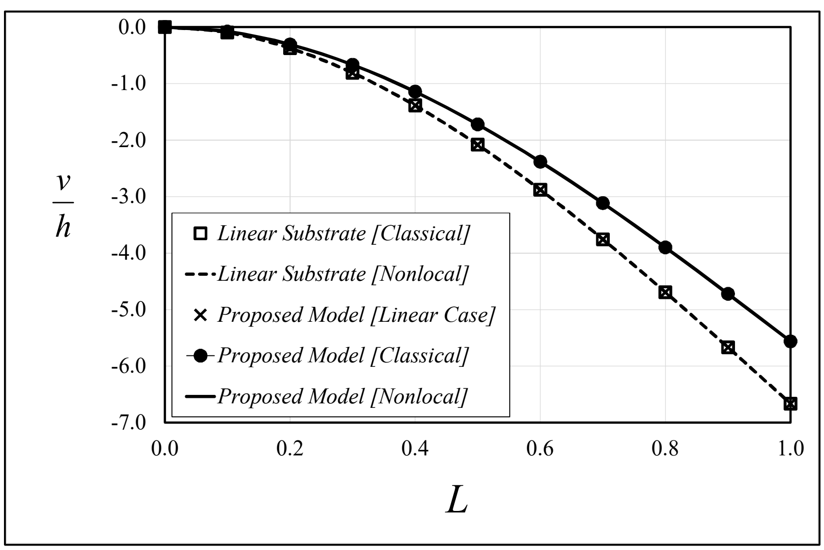
ในส่วนของการวิเคราะห์คานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้น จะใช้แบบจำลองคานแบบที่ 3 ที่สร้างในงานวิจัยนี้ในการวิเคราะห์และจะเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากแบบจำลองอื่นๆ ในกรณีที่มีชั้นรองรับแบบเชิงเส้น เพื่อศึกษาผลเนื่องจากพฤติกรรมของชั้นรองรับที่ส่งผลต่อการโก่งตัว

ของโครงสร้าง รวมไปถึงศึกษาผลเนื่องจากแรงกระทำภายนอกต่อการโก่งตัวของโครงสร้างเมื่อตั้งอยู่บนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งในการวิเคราะห์แบบจำลองนี้จะมีตัวอย่างการวิเคราะห์ 2 ตัวอย่าง โดยตัวอย่างที่หนึ่งจะศึกษาผลเนื่องจากพฤติกรรมของโครงสร้าง และในตัวอย่างที่สองจะศึกษาผลกระทบเนื่องจากแรงกระทำภายนอกต่อแบบจำลอง

ในการวิเคราะห์คานบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นนี้ จะใช้แบบจำลองคานยื่นบนชั้นรองรับซึ่งมีลักษณะทางกายภาพดังรูปที่ 4.4 โดยวัสดุคานทำจากคาร์บอนและวัสดุชั้นรองรับทำจากพอลิเมอร์ ค่าพารามิเตอร์ต่างๆในตัวอย่างนี้อ้างอิงจาก Jomehzadeh [35]. มีดังนี้

The bulk modulus	$E = 1.949TPa$
Poisson’s ratio	$\nu = 0.201$
The nonlocal parameter	$e_0 a = 0.27nm$
Substrate stiffness	$k_1 = 28.4941 GPa/nm$
Substrate stiffness	$k_3 = 12825.3287 GPa/nm^3$

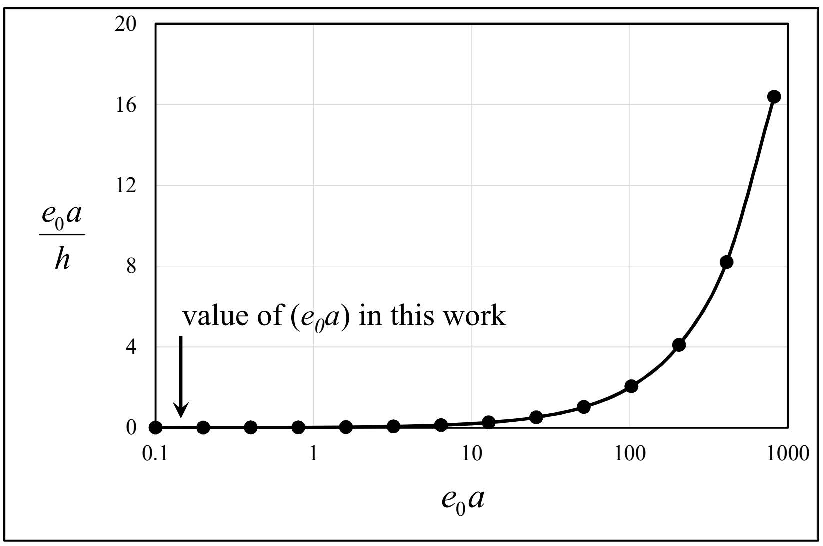
ตัวอย่างที่หนึ่ง ในการวิเคราะห์นี้จะใช้ค่าพารามิเตอร์แรงกระทำแบบไม่มีหน่วยนิยามโดยสมการ (4.5) ให้มีค่าเท่ากับ 1 ในส่วนของกรณีคานบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น จะใช้ผลเฉลยถูกต้องที่ได้จากแบบจำลองที่สองในงานวิจัยนี้ และผลที่ได้จากแบบจำลองที่สามโดยจะกำหนดให้ค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นมีค่าเท่ากับศูนย์ ($k_3 = 0$) ซึ่งผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงดังรูปที่ 4.9(ก)



รูปที่ 4.9(ก) การโก่งตัวของคานบนชั้นรองรับในแบบจำลองต่างๆ

พิจารณารูปที่ 4.9(ก) จะเห็นได้ว่าผลการโก่งตัวของคานในแบบจำลองที่ 3 กรณีค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นมีค่าเท่ากับศูนย์ มีค่าตรงกับผลการโก่งตัวของคานที่ได้จากแบบจำลองที่มีผลเฉลยถูกต้อง ดังนั้นสามารถยืนยันความถูกต้องของแบบจำลองที่ 3 ในงานวิจัยนี้ได้ และนอกจากนี้การโก่งตัวของคานบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นจะมีค่าน้อยกว่าการโก่งตัวของคานบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นจะส่งผลให้โครงสร้างมีความแข็งมากกว่าชั้นรองรับแบบเชิงเส้น

นอกจากนี้ในการวิเคราะห์ แกนของโครงสร้างจะไม่ส่งผลต่อการโก่งตัวของโครงสร้างทั้งในกรณีชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นและชั้นรองรับแบบเชิงเส้น ทั้งนี้เนื่องจากค่าอัตราส่วนระหว่าง Nonlocal parameter ต่อขนาดหน้าตัดมีค่าน้อยมาก ดังรูปที่ 4.9(ข) ทำให้แกนโครงสร้างไม่มีผลต่อพฤติกรรมการรับแรงของโครงสร้าง

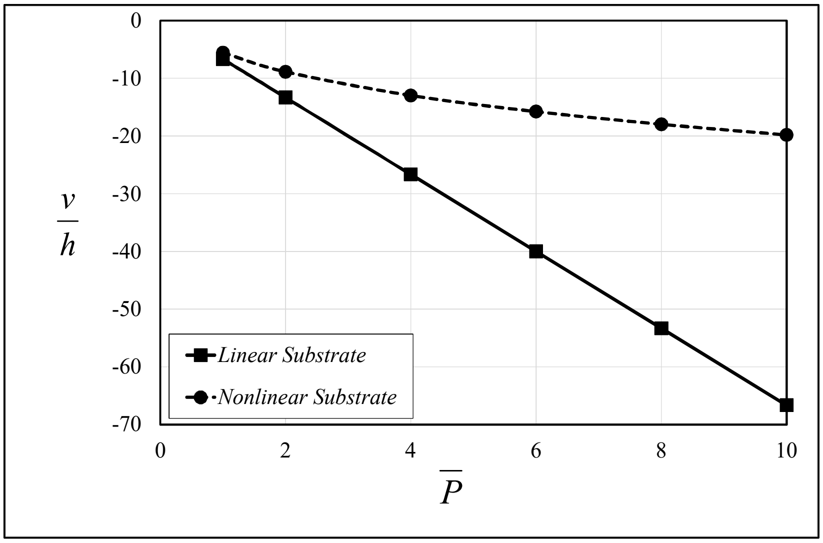


รูปที่ 4.9(ข) อัตราส่วน Nonlocal parameter ต่อขนาดหน้าตัดคาน

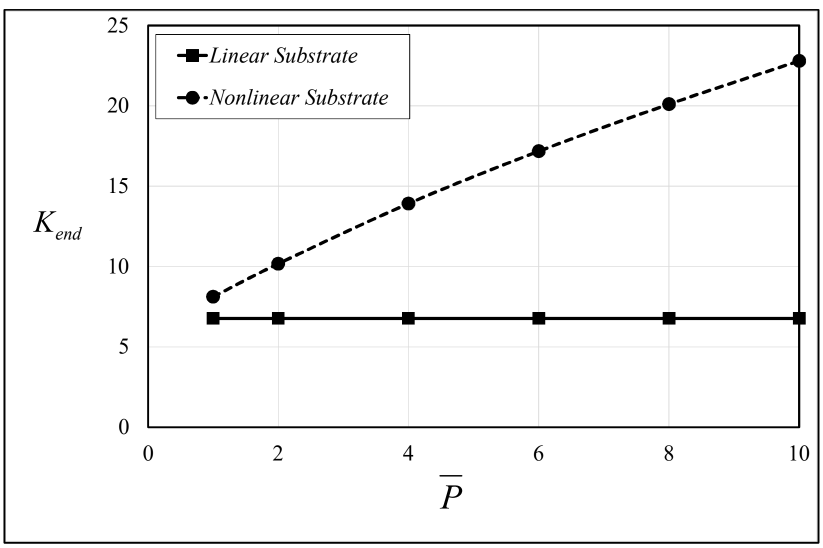
ตัวอย่างที่สอง จะเป็นการวิเคราะห์ผลเนื่องจากชั้นรองรับต่อพฤติกรรมของคานในการรับแรงกระทำภายนอก โดยในการวิเคราะห์นี้จะกำหนดให้ค่าแรงกระทำภายนอกแบบไม่มีหน่วย สมการ (4.5) มีค่าระหว่าง 1-10 เพื่อศึกษาผลเนื่องจากชั้นรองรับโดยเปรียบเทียบระหว่างชั้นรองรับแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น โดยผลที่ได้แสดงดังรูปที่ 4.10(ก)-(ข)

พิจารณารูปที่ 4.10(ก) จะเห็นได้ว่า ในกรณีคานบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้นการโก่งตัวของคานจะเพิ่มขึ้นในอัตราส่วนคงที่เมื่อแรงกระทำภายนอกมีค่าเพิ่มขึ้น ในขณะที่การโก่งตัวของคานบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นจะเพิ่มขึ้นในอัตราส่วนที่ลดลง เมื่อพิจารณารูปที่ 4.10(ข) ร่วมด้วย จะเห็นได้ว่าในกรณีคานบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น ค่าความแข็งแกร่งของระบบโครงสร้างมีค่าคงที่เมื่อแรงกระทำมี

ค่าเพิ่มขึ้น ส่วนในกรณีคานบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นจะเห็นได้ว่า ค่าความแข็งแกร่งของระบบโครงสร้างจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อแรงกระทำมีค่าสูงขึ้น ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า เมื่อแรงกระทำภายนอกมีค่าสูงขึ้นชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นจะส่งผลให้ระบบโครงสร้างมีความแข็งมากยิ่งขึ้น



รูปที่ 4.10(ก) การโก่งตัวของคานต่อแรงกระทำขนาดต่างๆ



รูปที่ 4.10(ข) Contact stiffness ของคานต่อแรงกระทำขนาดต่างๆ

บทที่ 5
สรุปผลงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้ จะเป็นการสร้างแบบจำลองคานบนชั้นรองรับ โดยจะมีระบบคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรเป็นต้นแบบในการสร้างแบบจำลองในงานวิจัยนี้ ซึ่งในระบบคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรนั้นจะใช้ทฤษฎี *Euler-Bernoulli beam theory* เป็นแบบจำลองที่ใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของคาน และใช้ทฤษฎี *Winkler-Pasternak foundation theory* เป็นแบบจำลองที่ใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับ และใช้หลักการของแรง (Force-based derivation) ในการสร้างเมตริกซ์ความแข็งแกร่ง (Stiffness matrix) ของระบบคานบนชั้นรองรับ ซึ่งเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรนั้นจะสร้างจากผลเฉลยถูกต้องของสมการอนุพันธ์ของระบบโครงสร้าง ทำให้ระบบคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรนี้สามารถอธิบายพฤติกรรมในการรับแรงของระบบโครงสร้างได้ถูกต้องและใช้ทรัพยากรในการวิเคราะห์ที่น้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองอื่นๆ

ในส่วนของการสร้างแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้นในงานวิจัยนี้ ลักษณะทางกายภาพของแบบจำลองจะมีความคล้ายคลึงกับแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปร โดยจะมีชั้นผิวของคานในแบบจำลองคานขนาดเล็กทำหน้าที่เสมือนกับชั้นแรงเฉือนในชั้นรองรับแบบสองตัว และชั้นรองรับแบบเชิงเส้นทำหน้าที่เสมือนกับชั้นรองรับใต้ชั้นแรงเฉือนในชั้นรองรับแบบสองตัวแปร ดังนั้นจึงใช้กระบวนการในการสร้างแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรเป็นต้นแบบในการสร้างแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับในงานวิจัยนี้ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะสร้างแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น 2 แบบจำลอง โดยแบบจำลองแรกจะใช้ทฤษฎี *Modified couple stress theory* และ *Surface elastic theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของคานบนชั้นรองรับ ส่วนแบบจำลองที่สองจะใช้ทฤษฎี *Nonlocal elastic theory* และ *Surface elastic theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของคานบนชั้นรองรับ ในส่วนของชั้นรองรับของทั้งสองแบบจำลองจะใช้ทฤษฎี *Winkler foundation theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของชั้นรองรับแบบเชิงเส้น

โดยทั้งสองแบบจำลองนี้จะมีตัวอย่างการใช้แบบจำลองดังกล่าวในการวิเคราะห์โครงสร้างและเปรียบเทียบกับแบบจำลองพื้นฐาน ซึ่งจากตัวอย่างในการวิเคราะห์สามารถสรุปได้ว่า ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีขนาดเล็กแบบจำลองที่สร้างในงานวิจัยนี้จะส่งผลให้โครงสร้างมีพฤติกรรมที่แข็งกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองพื้นฐาน ในส่วนของผลเนื่องจากแกนโครงสร้าง จะพบว่าเมื่อโครงสร้างมีค่าอัตราส่วนความชะลูดที่สูงขึ้น แกนโครงสร้างจะมีผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างลดลงทั้งในระดับไมโครและนาโนเมตร ส่วนชั้นผิวโครงสร้างจะมีผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างเมื่อโครงสร้างมีขนาดในระดับนาโนเมตร และจะยิ่งมีผลต่อพฤติกรรมมากขึ้นเมื่อโครงสร้างมีอัตราส่วน

ความชะลูดที่สูงขึ้น แต่เมื่อโครงสร้างมีขนาดใหญ่ขึ้นจนอยู่ในระดับไมโครเมตร ชั้นผิวโครงสร้างจะไม่มีผลต่อพฤติกรรมของโครงสร้างแต่อย่างใด นอกจากนี้จากผลที่ได้จะเห็นได้ว่า ยิ่งโครงสร้างมีขนาดที่เล็กลงมากๆ แบบจำลองในงานวิจัยจะให้ผลที่แตกต่างกันอย่างมากเมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองพื้นฐาน แต่จะให้ผลที่เหมือนกันเมื่อโครงสร้างมีขนาดที่ใหญ่ขึ้น ในส่วนของชั้นรองรับโครงสร้างต่อพฤติกรรมของโครงสร้าง ยิ่งชั้นรองรับมีความอ่อนตัวมากแบบจำลองในงานวิจัยนี้จะให้ผลที่แตกต่างจากแบบจำลองพื้นฐานที่เป็นอย่างมาก แต่ถ้าชั้นรองรับมีความแข็งแกร่งมากยิ่งขึ้น ความแตกต่างของผลที่ได้จากแบบจำลองในงานวิจัยนี้และแบบจำลองพื้นฐานจะยิ่งลดลง

เนื่องจากแบบจำลองทั้งสองที่กล่าวมาในข้างต้น เป็นแบบจำลองที่ตั้งอยู่บนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น ดังนั้นขั้นต่อไปในงานวิจัยนี้จึงเป็นการสร้างแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งในแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นในงานวิจัยนี้จะมีความคล้ายคลึงกับแบบจำลองที่สองในงานวิจัยนี้ นั่นคือจะใช้ทฤษฎี *Nonlocal elastic theory* และ *Surface elastic theory* ในการอธิบายพฤติกรรมของคาน ส่วนชั้นรองรับจะใช้ทฤษฎี *Van der Waals force theory* ซึ่งเป็นทฤษฎีที่อธิบายพฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้นแทนทฤษฎี *Winkler foundation theory* โดยในแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นนี้ จะมีตัวอย่างในการใช้แบบจำลองวิเคราะห์โครงสร้างและเปรียบเทียบความถูกต้องกับผลที่ได้กับแบบจำลองอื่นๆด้วย ซึ่งจากผลการวิเคราะห์สามารถสรุปได้ว่า แบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นในงานวิจัยนี้ จะมีความแข็งมากกว่าแบบจำลองคานขนาดเล็กบนชั้นรองรับแบบเชิงเส้น ทั้งนี้เนื่องมาจากค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นที่เพิ่มเติมเข้าไป และแบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นจะยิ่งมีความแข็งมากขึ้นเมื่อแรงกระทำภายนอกที่กระทำต่อระบบโครงสร้างมีค่าสูงขึ้น ดังนั้นยิ่งแรงกระทำมีค่าสูงมากแบบจำลองบนชั้นรองรับแบบไม่เชิงเส้นและแบบเชิงเส้น จะยิ่งให้ผลตอบสนองที่แตกต่างกันมากยิ่งขึ้น

ในส่วนของการพัฒนาขั้นต่อไปในงานวิจัยนี้ ควรจะวิเคราะห์พฤติกรรมของคานเป็นแบบไม่เชิงเส้นหรืออาจจะใช้ทฤษฎีในการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดเล็กอื่นๆ รวมไปถึงใช้ทฤษฎีอื่นในชั้นรองรับเพื่อให้มีความหลากหลายและใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น สุดท้ายนี้ หวังว่างานวิจัยนี้สามารถเป็นประโยชน์และนำไปประยุกต์ใช้ในทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ได้ต่อไป.

เอกสารอ้างอิง

[1] Lee, J.K., Jeong, S., and Lee, J. (2014). Natural frequencies for flexural and torsional vibrations of beams on Pasternak foundation. *Soils and foundation.*, **54**(6), p 1202-1211.

[2] Lee. J.K., and Jeong, S. (2016). Flexural and torsional free vibrations of horizontally curved beams on Pasternak foundations. *Applied mathematical modeling.*, **40**, p 2242-2256.

[3] Zhang, H., Wang, C.M., Ruocco, E., and Challamel, N. (2016). Hencky bar-chain model for buckling and vibration analyses of non-uniform beams on variable elastic foundation. *Engineering structure.*, **126**, p 252-263.

[4] Mullapudi, R., and Ayoub, A. (2010). Nonlinear finite element modeling of beams on two-parameter foundations. *Computers and geotechnics*., **37**, p 334-342.

[5] Najafi, F., Shojaeefard, M.H., and Saeidi Googarchin, H. (2017). Nonlinear dynamic response of FGM beams with Winkler–Pasternak foundation subject to noncentral low velocity impact in thermal field. *Composite structure.*, **167**, p 132-143.

[6] Zhao, L.S., Zhou, W.H., Fatahi, B., Li, X.B., and Yuen, K.V. (2016). A dual beam model for geosynthetic-reinforced granular fill on an elastic foundation. *Applied mathematical modeling*., **40**, p 9254-9268.

[7] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., and Tong, P. (2002). Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, **39**, p 91-98.

[8] Koiter, W.T. (1964). Couple-stresses in the theory of elasticity: I and II. *Proc. of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Series B*, **67**(1), p 17-44.

[9] Mindlin, R.D. (1963). Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Experimental Mechanics*., **3**, p 1-7.

[10] Mindlin, R.D., and Tiersten, H.F. (1962). Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*., **11**, p 415-448.

[11] Toupin, R.A. (1964). Theories of elasticity with couple stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*., **17**, p 85-112.

[12] Ma, H.M., Gao, X.L., and Reddy, J.N. (2010), A nonclassical Reddy-Levinson beam model based on a modified couple stress theory. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*., **8**(2), p 167-180.

[13] Ma, H.M., Gao, X.L., and Reddy, J.N. (2011), A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory. *Acta Mechanica*., **220**(1), p 217-235.

[14] Eringen, A.C. (1972). Nonlocal polar elastic continua. *International Journal of Engineering Science.*, **10**, p 1–16.

[15] Eringen, A.C. (2002). *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer-Verlag, New York.

[16] Yang, Y., and Lim, C.W. (2012). Non-classical stiffness strengthening size effects for free vibration of a nonlocal nanostructure. *International Journal of Mechanical Sciences*., **54**, p 57–68.

[17] Alshorbagy, A.E., Eltaher, M.A., and Mahmoud, F.F., (2013). Static analysis of nanobeams using nonlocal FEM. *Journal of Mechanical Science and Technology*., **27**(7), p 2035-2041.

[18] Pradhan, S.C. (2012). Nonlocal finite element analysis and small scale effects of CNTs with Timoshenko beam theory. *Finite Elements in Analysis and Design*., **50**, p 8-20.

[19] Reddy, J.N. (2007). Nonlocal Theories for Bending Buckling and Vibration of Beams. *International Journal of Engineering Science*., **45**(2-8), p 288-307.

[20] Gurtin, M.E. (1975). Murdoch, I.: A continuum theory of elastic material surface. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.*, **57**(4), p 291-323.

[21] Gurtin, M.E. (1978). Murdoch, I.: Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures.*, **14**(6), p 431-440.

[22] Gao, X.L., Mahmoud, F.F. (2014). A new Bernoulli-Euler beam model incorporating microstructure and surface energy effects. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.*, **65**, p 393-404.

[23] Shaat, M. (2015). Iterative nonlocal elasticity for Kirchhoff plates. *International Journal of Mechanical Sciences*., **90**, p 162-170.

[24] Malekzadeh, P., and Shojaee, M. (2013). Surface and nonlocal effects on the nonlinear free vibration of non-uniform nanobeams. *Composites: Part B engineering*., **52**, p 84-92.

[25] Eltaher, M.A., Mahmoud, F.F., Assie, A.E., and Meletis, E.I. (2013). Coupling effects of nonlocal and surface energy on vibration analysis of nanobeams. *Applied mathematics and computation*., **224**, p 760-774.

[26] Winkler, E. (1867). *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Dominicus, Prag

[27] Zhaohua, F., and Cook, R. D. (1983). Beam elements on two-parameter elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics.*, **109**(6), p 1390-1402.

[28] Limkatanyu, S., Kuntiyawichai, K., Spacone, E., and Kwon, M. (2012). Natural stiffness matrix for beams on Winkler foundation: exact force-based derivation. *Structural Engineering and Mechanics*., **42**(1), p 39–53.

[29] Jones, J.E. (1924). On the determination of molecular fields. I. from the variation of the viscosity of a gas with temperature. *Proceedings of the Royal Society of London: A*, **106**(738), p 441-462.

[30] Mahdavi, M. H., Jiang, L. Y., and Sun, X. (2009). Nonlinear vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in a polymer matrix aroused by interfacial van der Waals forces. *Journal of Applied Physics*., **106**, p 1143-09.

[31] Mahdavi, M. H., Jiang, L. Y., and Sun, X. (2011). Nonlinear vibration of a double-walled carbon nanotube embedded in a polymer matrix. *Physica E*., **43**, p 1813-1819.

[32] He, X. Q., Kitipornchai, S., and Liew, K. M. (2005). Buckling analysis of multi-walled carbonnanotubes: a continuum model accounting for van der Waals interaction. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*., **53**, p 303-326.

[33] Mahdavi, M. H., Jiang, L. Y., and Sun, X. (2012). Nonlinear vibration and postbuckling analysis of a single layer graphenesheet embedded in a polymer matrix. *Physica E*., **44**, p 1708-1715.

[34] Khosrozadeh, A., and Hajabasi, M. A. (2012). Free vibration of embedded double-walled carbon nanotubesconsidering nonlinear interlayer van der Waals forces. *Applied Mathematical Modelling*., **36**, p 997-1007.

[35] Jomehzadeh, E., Saidi, A.R., and Pugno, N.M. (2012). Large amplitude vibration of a bilayer grapheme embedded in a nonlinear polymer matrix. *Physica E.*, **44**, p 1973-1982.

[36] Limkatanyu, S., Damrongwiriyanupap, N., Kwon, M., and Ponbunyanon, P. (2013). Force-based derivation of exact stiffness matrix for beams on Winkler-Pasternak foundation. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **95**(2), p 140-155.

[37] Khajeansari, A., Baradaran, G.H., and Yvonnet, J. (2012). An explicit solution for bending of nanowires lying on Winkler-Pasternak elastic substrate medium based on the Euler-Bernoulli beam theory. *International Journal of Engineering Science.*, **52**, p 115-128.

[38] Jiang, L.Y., Yan, Z. (2010). Timoshenko beam model for static bending of nanowires with surface effects. *Physica E.*, **42**(9), p 2274–2279.

[39] Liu, C., and Rajapakse, R.K.N.D. (2010). Continuum models incorporating surface energy for static and dynamic response of nanoscale beams, *IEEE Transactions on Nanotechnology.*, **9**, p 422-431.

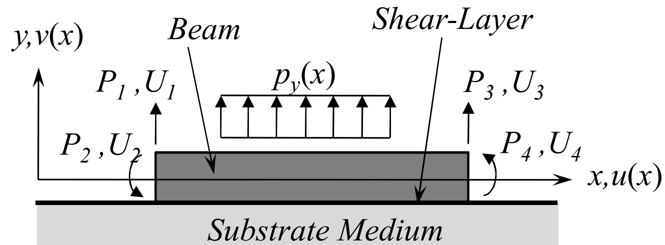
[40] He, J., and Lilley, C.M. (2008). Surface effect on the elastic behavior of static bending nanowires. *Nano Letters.*, **8**(7), p 1798–1802.

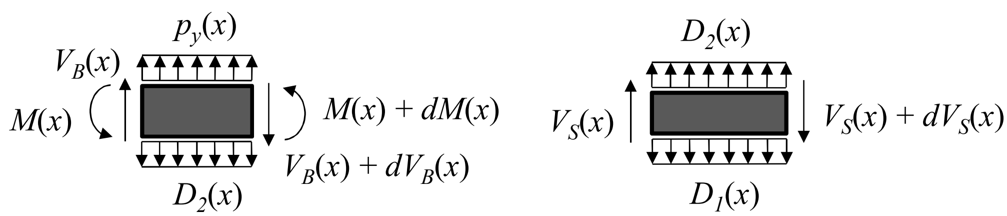
[41] Shenoy, V.B. (2005). Atomistic calculations of elastic properties of metallic FCC ctrytal surfaces. *Physical Review B.*, **79**(1), art. no. 094104.

[42] Yang, Y., Lim, C.W. (2012). Non-classical stiffness strengthening size effects for free vibration of a nonlocal nanostructure. *International Journal of Mechanical Sciences.*, **54**(1), p 57–68.

ภาคผนวก

สมการสมดุลของระบบ (Differential Equilibrium Equation)





Differential Segment of Beam *Differential Segment of Shear-Layer*

พิจารณาสมดุลของแรงในแนวดิ่งของชิ้นส่วนคาน:

$$\frac{dV_B(x)}{dx} + p_y(x) - D_2(x) = 0 \quad \text{(A-1)}$$

โดย $V_B(x)$ คือ แรงเฉือนในหน้าตัดคาน; $p_y(x)$ คือแรงกระจายภายนอก; และ $D_2(x)$ แรงเฉือนที่เกิดขึ้นระหว่างชั้นแรงเฉือนและคาน

พิจารณาสมดุลของโมเมนต์ดัดของชิ้นส่วนคาน:

$$\frac{dM(x)}{dx} + V_B(x) = 0 \quad \text{(A-2)}$$

โดย $M(x)$ คือ โมเมนต์ดัดในหน้าตัดคาน

แทนค่าสมการ (A-1) ใน สมการ (A-2):

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} - p_y(x) + D_2(x) = 0 \quad \text{(A-3)}$$

พิจารณาสมดุลของแรงในแนวดิ่งของชิ้นส่วนชั้นแรงเฉือน:

$$\frac{dV_s(x)}{dx} + D_2(x) - D_1(x) = 0 \quad \text{(A-4)}$$

โดย $V_s(x)$ คือ แรงเฉือนในหน้าตัดชั้นแรงเฉือน; และ $D_1(x)$ แรงในชั้นรองรับที่กระทำต่อชั้นแรงเฉือน แทนค่าสมการ (A-4) ในสมการ (A-3), จะได้สมการสมดุลของระบบ (Equilibrium equation):

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} - p_y(x) + D_1(x) - \frac{dV_s(x)}{dx} = 0 \quad \text{(A-5)}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัว (Force-Deformation Relations)

$$\kappa(x)=\frac{M(x)}{IE},\ v_1(x)=\frac{D_1(x)}{k_1},\ \gamma_s(x)=\frac{V_s(x)}{k_2} \tag{A-6}$$

โดย $\kappa(x)$ คือ ค่าความโค้งของคาน; $v_1(x)$ คือ การทรุดตัวของชั้นรองรับ; $\gamma_s(x)$ คือ ความเครียดในชั้นแรงเฉือน; IE คือ ค่าความต้านทานการดัดตัวของคาน; k_1 คือ ค่าความแข็งแกร่งของชั้นรองรับ; และ k_2 คือ ค่าความแข็งแกร่งของชั้นแรงเฉือน

สมการความเข้ากันได้ของระบบ (Differential Compatibility Equations)

ในส่วนของการสร้างสมการความเข้ากันได้ของระบบ จะสร้างอยู่บนหลักการของแรง (Force based) จากทฤษฎีงานเสมือนของแรง (Virtual force principle) มีรูปแบบทั่วไปดังนี้:

$$\delta W^* = \delta W^*_{int} + \delta W^*_{ext} = 0 \tag{A-7}$$

โดย δW^* คือ ผลรวมของงานทั้งหมดของระบบ; δW^*_{int} คือ งานภายในของระบบ; และ δW^*_{ext} คือ งานภายนอกของระบบ

ในกรณีของคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปร งานภายในและงานภายนอก เขียนได้ดังนี้:

$$\begin{aligned}\delta W^*_{int} &= \int_L \delta M(x)\kappa(x)\,dx + \int_L \delta D_1(x)v_1(x)\,dx + \int_L \delta V_s(x)\gamma_s(x)\,dx\\ \delta W^*_{ext} &= -\int_L \delta p_y(x)v_B(x)\,dx - \delta\mathbf{P}^T\mathbf{U}\end{aligned} \tag{A-8}$$

โดย $v_B(x)$ คือ ค่าการโก่งตัวของคาน ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าการทรุดตัวของชั้นรองรับ $v_1(x)$; $\mathbf{P}$ คือ เวกเตอร์ของแรงที่ปลายทั้งสองของคาน; $\mathbf{U}$ คือ เวกเตอร์ของค่าการเคลื่อนตัวที่ปลายทั้งสองของคาน, $\delta p_y(x)=0$

ดังนั้นสมการ (A-7) สามารถเขียนได้ดังนี้:

$$\begin{aligned}\delta W^* &= \int_L \delta M(x)\kappa(x)\,dx + \int_L \delta D_1(x)v_1(x)\,dx\\ &\quad+\int_L \delta V_s(x)\gamma_s(x)\,dx - \delta\mathbf{P}^T\mathbf{U} = 0\end{aligned} \tag{A-9}$$

แทนค่าสมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัว สมการ (A-6) จะได้:

$$\begin{aligned}\delta W^* &= \int_L \delta M(x)\frac{M(x)}{IE}\,dx + \int_L \delta D_1(x)\frac{D_1(x)}{k_1}\,dx\\ &\quad+\int_L \delta V_s(x)\frac{V_s(x)}{k_2}\,dx - \delta\mathbf{P}^T\mathbf{U} = 0\end{aligned} \tag{A-10}$$

แทนค่าสมการสมดุลของระบบ สมการ (A-5) เพื่อกำจัดตัวแปร $D_1(x)$ และ $\delta D_1(x)$:

$$
\begin{aligned}
0 = -\delta\mathbf{P}^{T}\mathbf{U} + \int_{L}\delta M(x)\frac{M(x)}{IE}dx + \int_{L}\delta V_{s}(x)\frac{V_{s}(x)}{k_{2}}dx + \\
\int_{L}\frac{d\delta V_{s}(x)}{dx}\left(\frac{1}{k_{1}}\right)\left(-\frac{d^{2}M(x)}{dx^{2}} + p_{y}(x) + \frac{dV_{s}(x)}{dx}\right)dx + \\
\int_{L}\frac{d^{2}\delta M(x)}{dx^{2}}\left(\frac{1}{k_{1}}\right)\left(\frac{d^{2}M(x)}{dx^{2}} - p_{y}(x) - \frac{dV_{s}(x)}{dx}\right)dx
\end{aligned}
\qquad \text{(A-11)}
$$

อินทิเกรตทีละส่วน (Integration by parts) หนึ่งครั้งในพจน์ที่ 4 และสองครั้งในพจน์ที่ 5 ของสมการ (A-11) จะได้:

$$
\begin{aligned}
&\int_{L}\delta M(x)\left(\frac{M(x)}{IE} + \frac{1}{k_{1}}\left(\frac{d^{4}M(x)}{dx^{4}} - \frac{d^{2}p_{y}(x)}{dx^{2}} - \frac{d^{3}V_{s}(x)}{dx^{3}}\right)\right)dx + \\
&\int_{L}\delta V_{s}(x)\left(\frac{V_{s}(x)}{k_{2}} + \frac{1}{k_{1}}\left(\frac{d^{3}M(x)}{dx^{3}} - \frac{dp_{y}(x)}{dx} - \frac{d^{2}V_{s}(x)}{dx^{2}}\right)\right)dx + \\
&\left[\left(\frac{d\delta M(x)}{dx} - \delta V_{s}(x)\right)\frac{1}{k_{1}}\left(\frac{d^{2}M(x)}{dx^{2}} - p_{y}(x) - \frac{dV_{s}(x)}{dx}\right)\right]_{0}^{L} + \\
&\left[\delta M(x)\frac{1}{k_{1}}\left(\frac{dp_{y}(x)}{dx} - \frac{d^{3}M(x)}{dx^{3}} + \frac{d^{2}V_{s}(x)}{dx^{2}}\right)\right]_{0}^{L} - \delta\mathbf{P}^{T}\mathbf{U} = 0
\end{aligned}
\qquad \text{(A-12)}
$$

ดังนั้นจะได้สมการความเข้ากันได้ของระบบในรูปของโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนในชั้นรองรับมาสองสมการ:

$$
\frac{M(x)}{IE} + \frac{1}{k_{1}}\left(\frac{d^{4}M(x)}{dx^{4}} - \frac{d^{2}p_{y}(x)}{dx^{2}} - \frac{d^{3}V_{s}(x)}{dx^{3}}\right) = 0 : for\ x \in (0, L) \qquad \text{(A-13)}
$$

$$
\frac{V_{s}(x)}{k_{2}} + \frac{1}{k_{1}}\left(\frac{d^{3}M(x)}{dx^{3}} - \frac{dp_{y}(x)}{dx} - \frac{d^{2}V_{s}(x)}{dx^{2}}\right) = 0 : for\ x \in (0, L) \qquad \text{(A-14)}
$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัวในสมการ (A-6), สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือนในชั้นรองรับและโมเมนต์ดัดได้ดังนี้:

$$
\frac{dV_{s}(x)}{dx} = \frac{k_{2}}{IE}M(x) \qquad \text{(A-15)}
$$

แทนค่าสมการ (A-15) ดังนั้นสมการความเข้ากันได้ของระบบ (Compatibility equation) เขียนในรูปของโมเมนต์ดัดได้ดังนี้:

$$
\frac{d^{4}M(x)}{dx^{4}} + \lambda_{1}M(x) - \lambda_{2}\frac{d^{2}M(x)}{dx^{2}} = \frac{d^{2}p_{y}(x)}{dx^{2}} : for\ x \in (0, L) \qquad \text{(A-16)}
$$

โดย $\lambda_{1} = k_{1} / IE$ และ $\lambda_{2} = k_{2} / IE$.

เมตริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบ (ผลเฉลยถูกต้อง)

ผลเฉลยถูกต้อง (homogeneous solution) ของสมการความเข้ากันได้ สมการ (A-16) จะแบ่งได้ทั้งหมด 3 กรณีโดยขึ้นอยู่กับค่า λ_1 และ λ_2 ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} M(x) = c_1\cosh\alpha x\cos\beta x + c_2\sinh\alpha x\cos\beta x + \\ c_3\cosh\alpha x\sin\beta x + c_4\sinh\alpha x\sin\beta x \end{aligned}\right\} for\ \lambda_2 < 2\sqrt{\lambda_1} \tag{A-17}$$

$$M(x) = c_1 e^{\sqrt[4]{\lambda_1}x} + c_2 x e^{\sqrt[4]{\lambda_1}x} + c_3 e^{-\sqrt[4]{\lambda_1}x} + c_4 x e^{-\sqrt[4]{\lambda_1}x}\Big\}\ for\ \lambda_2 = 2\sqrt{\lambda_1} \tag{A-18}$$

$$\left.\begin{aligned} M(x) = c_1\cosh\alpha x\cosh\beta x + c_2\sinh\alpha x\cosh\beta x + \\ c_3\cosh\alpha x\sinh\beta x + c_4\sinh\alpha x\sinh\beta x \end{aligned}\right\} for\ \lambda_2 > 2\sqrt{\lambda_1} \tag{A-19}$$

โดยค่า α และ β มีนิยาม:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2} + \frac{\lambda_2}{4}}\ ,\ \beta = \left|\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2} - \frac{\lambda_2}{4}}\right| \tag{A-20}$$

และค่าคงที่ $c_1, c_2, c_3,$ และ c_4 หาได้จากสมการเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ดังนี้:

$$\begin{aligned} -\left[\frac{dM}{dx} - V_s\right]_{x=0} = P_1;\ -M(0) = P_2; \\ \left[\frac{dM}{dx} - V_s\right]_{x=L} = P_3;\ M(L) = P_4 \end{aligned} \tag{A-21}$$

จากสมการ (A-6) และ (A-14) ค่าแรงเฉือนจากชั้นรองรับ $V_s(x)$ สามารถเขียนในรูปของค่าโมเมนต์ดัด $M(x)$ ได้ดังนี้:

$$V_s(x) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{d^3M(x)}{dx^3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{dp_y(x)}{dx} + \frac{\lambda_2^{\,2}}{\lambda_1}\frac{dM(x)}{dx} \tag{A-22}$$

จากสมการเงื่อนไขขอบเขต สมการ (A-21) สามารถเขียนโมเมนต์ดัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ดังนี้:

$$M(x) = \mathbf{N}_{BB}(x)\mathbf{P} \tag{A-23}$$

โดย $\mathbf{N}_{BB}(x)$ คือ เมตริกซ์สมการฟังค์ชั่นรูปร่างของโมเมนต์ดัด

จากสมการ (A-22) และ (A-5) ค่าแรงเฉือนในชั้นแรงเฉือน $V_s(x)$ และค่าแรงในชั้นรองรับ $D_1(x)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ดังนี้:

$$V_s(x) = \mathbf{N}_{V_sB}(x)\mathbf{P} \tag{A-24}$$

$$D_1(x) = \mathbf{N}_{D_1B}(x)\mathbf{P} \tag{A-25}$$

โดย $\mathbf{N}_{V_sB}(x), \mathbf{N}_{D_1B}(x)$ คือ เมตริกซ์สมการฟังค์ชั่นรูปร่างของแรงเฉือนในชั้นแรงเฉือนและแรงในชั้นรองรับ ตามลำดับ

แทนค่าสมการ (A-23), (A-24), และ (A-25) ในสมการ (A-10) จะได้สมการเมตริกซ์ความยืดหยุ่นของระบบดังนี้:

$$\mathbf{F}\mathbf{P} = \mathbf{U} + \mathbf{U}_{p_y} \tag{A-26}$$

โดย $\mathbf{F}$ คือ เมตริกซ์ความยืดหยุ่นของระบบ นิยามดังนี้:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{BB} + \mathbf{F}_{D_1D_1} + \mathbf{F}_{V_sV_s} \tag{A-27}$$

โดย $\mathbf{F}_{BB}$, $\mathbf{F}_{D_1D_1}$, และ $\mathbf{F}_{V_sV_s}$ คือ เมตริกซ์ความยืดหยุ่นของระบบที่ได้จาก แรงในคาน, แรงในชั้นรองรับ, และแรงในชั้นแรงเฉือน มีนิยามดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{BB} &= \int_L \mathbf{N}_{BB}{}^T \left(\frac{1}{IE}\right) \mathbf{N}_{BB}\, dx \\
\mathbf{F}_{D_1D_1} &= \int_L \mathbf{N}_{D_1B}{}^T \left(\frac{1}{k_1}\right) \mathbf{N}_{D_1B}\, dx \\
\mathbf{F}_{V_sV_s} &= \int_L \mathbf{N}_{V_sB}{}^T \left(\frac{1}{k_2}\right) \mathbf{N}_{V_sB}\, dx
\end{aligned} \tag{A-29}$$

ดังนั้นสมการเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบ สามารถเขียนได้ดังนี้:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_N \mathbf{U} + \mathbf{P}_{p_y}^{FE} \tag{A-30}$$

โดย เมตริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบ $\mathbf{K}_N$ หาได้จาก $\mathbf{F}^{-1}$

ในส่วนของรายละเอียดต่างๆ นอกเหนือจากนี้ และตัวอย่างการวิเคราะห์โครงสร้างโดยใช้แบบจำลองคานบนชั้นรองรับแบบสองตัวแปรนี้ สามารถดูเพิ่มเติมได้จาก Limkatanyu et.al. [36]

การเผยแพร่ผลงานวิทยานิพนธ์

Limkatanyu S., Ponbunyanon P., Prachasaree W. Kuntiyawichai K., and Kwon M. 2014. Correlation between beam on Winkler-Pasternak foundation and beam on elastic substrate medium with inclusion of microstructure and surface effects. *J. Mech. Sci. Tech.* **28**(9):3653-3665.

Springer

KSME

Journal of Mechanical Science and Technology 28 (9) (2014) 3653~3665
www.springerlink.com/content/1738-494x
DOI 10.1007/s12206-014-0827-6

Correlation between beam on Winkler-Pasternak foundation and beam on elastic substrate medium with inclusion of microstructure and surface effects †

Suchart Limkatanyu[1,*], Paitoon Ponbunyanon[1], Woraphot Prachasaree[1], Kittisak Kuntiyawichai[2] and Minho Kwon[3]

[1]*Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Prince of Songkla University, Songkhla, 90112, Thailand*
[2]*Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Ubonratchathani University, Ubonratchathani, Thailand*
[3]*Department of Civil Engineering, ERI, Gyeongsang National University, Jinju, Korea*

(Manuscript Received January 22, 2014; Revised May 13, 2014; Accepted May 22, 2014)

Abstract

A novel beam-elastic substrate element with inclusion of microstructure and surface energy effects is proposed in this paper. The modified couple stress theory is employed to account for the microstructure-dependent effect of the beam bulk material while Gurtin-Murdoch surface theory is used to capture the surface energy-dependent size effect. Interaction mechanism between the beam and the surrounding substrate medium is represented by the Winkler foundation model. The governing differential equilibrium and compatibility equations of the beam-elastic substrate system are consistently derived based on virtual displacement and virtual force principles, respectively. Both essential and natural boundary conditions of the system are also obtained. Two modified Tonti's diagrams are presented to provide the big picture of both displacement-based and force-based formulations of the system. Due to similarity between the current problem and the one related to the beam on Winkler-Pasternak foundation, the so-called "natural" beam-Winkler-Pasternak foundation element coined by the authors is employed to perform two numerical simulations to study the characteristics and behaviors of a beam-substrate system with inclusion of microstructure and surface effects.

Keywords: Finite beam element; Winkler-Pasternak foundation; Modified couple stress theory; Surface elasticity theory; Displacement-based formulation; Force-based formulation; Virtual displacement principle; Virtual force principle

1. Introduction

Micro- and nano-sized beams have found a wide spectrum of applications in micro- and nano-scale mechanical devices and systems; such as micro and nano beams, microfilms, biosensors, atomic force microscopes, nanotubes, nanowires, micro/nano electro-mechanical systems (M/NEMS) [1-10]. To fully take advantage of these micro- and nano-sized beams on the development of powerful micro- and nano-scale mechanical devices and systems, profound understanding on their behavior and characterization at such very small scale is essential and imposes a significant challenge to the research community. Both experimental and analytical researches on beam responses at micro- and nano- scales have been studied comprehensively by many scientists and engineers. At micro and nano level, experimental work on such small beams is extremely difficult to be conducted and is prohibitively expensive due to necessity of high precision testing devices and unique testing procedures. Therefore, numerical simulation has been widely used in the research community as an alternative to characterize the structural response at micro- and nano-scales. Several numerical models with different degrees of complexity have been developed in literatures to study the micro and nano structural system. Generally, these numerical models can be categorized broadly into two groups: atomistic model and continuum-mechanics model [11]. The atomistic approach emphasizes on atomic modeling and embraces several techniques such as: classical molecular dynamics [12], tight binding molecular dynamics [13], and density functional theory [14]. Simulation performed with the atomistic approach provides comprehensive details but are hampered by high computational costs, thus only a system with small numbers of molecule and atom can be realistically investigated using this approach [15]. The continuum-mechanics approach serves as an attractive alternative to characterize the micro and nano structural responses and is applicable to model large-scale structural systems. However, size-dependent effect and small-scale effect inherent to micro- and nano-sized structures are not included in the classical continuum-mechanics theory. The size-dependent effect is a result from energy correspondent to the atoms at the free surface of micro- and nano-sized struc-

*Corresponding author. Tel.: +66 7428 7129, Fax.: +66 7445 9396
E-mail address: suchart.l@psu.ac.th
† Recommended by Editor Maenghyo Cho

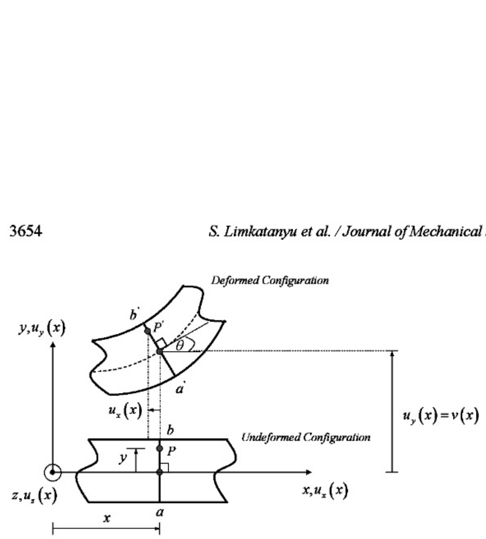


Fig. 1. Kinematics description of the cross section point for Euler-Bernoulli beam.

tures while the small-scale effect is caused by long-range inter-atomic interactions. To account for these two effects, surface elasticity theory and higher-order continuum-mechanics theory have been incorporated into the classical continuum-mechanics theory.

The surface elasticity theory was first proposed by Gurtin and Murdoch [16, 17] and has been employed to represent the size-dependent effect caused by surface stress and surface elasticity at micro- and nano- scales. As the size of a structure gets smaller, the surface free energy caused by the surface stress and surface elasticity could no longer be neglected in comparison with the bulk energy as that in the classical continuum-mechanics theory due to the high surface-to-volume ratio.

To include the material-length scale effect, several higher-order continuum-mechanics theories have been proposed in literatures. In the micropolar elasticity theory proposed in the early twentieth century by Cosserat and Cosserat [18], additional rotational degrees of freedom at each material point are appended to include the intrinsic length scale into the continuum body. As a special case of the Cosserat micropolar elasticity theory, classical couple stress theory was proposed by several researchers in the Sixties [19-22] which contains four material parameters (two classical and two nonclassical) for an elastic isotropic body. The modified strain gradient elasticity theory was proposed by Lam et al. [23], introducing a new equilibrium equation in addition to the classical equilibrium equations. Thus, this higher-order continuum-mechanics theory requires two classical and three nonclassical material parameters for an elastic isotropic body. Another widely employed higher-order continuum-mechanics theory is the nonlocal elasticity theory proposed by Eringen [24-26] and Eringen and Edelen [27]. The essence of this theory is in its assertion that the stress at a reference point depends on the strain not only at a particular point but also at all other points throughout the elastic body to account for the material-length scale effect. Two nonclassical material parameters are required in this higher-order continuum-mechanics theory besides two classical material parameters for an elastic isotropic body.

Several researchers have formulated various beam models with and without surface effect based on the aforementioned higher-order continuum-mechanics theories. For example, Anthoine [28] studied the pure bending behavior of a circular cylinder using the beam model based on the classical couple stress theory. Papargyri-Beskou et al. [29] developed a higher-order beam model using strain gradient elasticity theory and surface energy of Vardoulakis and Sulem [30]. Kong et al. [31] performed static and dynamic analysis of micro beams using the strain gradient elasticity theory. Alshorbagy et al. [7] formulated the finite beam element based on nonlocal elasticity theory and later Mahmoud et al. [32] enhanced this beam element by incorporating Gurtin-Murdoch surface effect into the element.

Considering the complexities in calibrating the material length-scale parameter [23, 33, 34] and the approximate nature inherent to the beam theory, the beam model with minimal material parameters is desirable from the practical point of view. The modified couple stress theory proposed by Yang et al. [35] makes such a beam model possible since only one material length-scale parameter is required. The very first beam model based on the modified couple stress theory was proposed by Park and Gao [4] using the Euler-Bernoulli beam theory. Later, Ma et al. [5] extended this beam model to include shear deformation using Timoshenko beam theory. Recently, Gao and Mahmoud [36] combined the modified couple stress theory with the Gurtin-Murdoch surface theory to formulate the Euler-Bernoulli beam model with inclusion of microstructure and surface effects.

In micro- and nano-scale mechanical devices and systems, beams are usually integrated into larger structures through substrate media. Therefore, interaction mechanism between the beam and the surrounding substrate media plays a crucial role in controlling the performance and characterizing the response of those systems. Several researchers have recently investigated the problem of beams resting on elastic substrate media. For example, Zhang and Zhao [37] developed a nanowire model lying on an adhesive receding contact foundation; Khajeansari et al. [38] performed parametric studies of silver nanowires resting on Winkler-Pasternak elastic substrate media using an analytical solution to the problem; Malekzadeh and Shojaee [39] investigated surface and nonlocal effects on nonlinear free vibration of nanowires supported by an elastic medium using both Euler-Bernoulli beam theory and Timoshenko beam theory.

In this research, the problem of beams on elastic substrate media with inclusion of microstructure and surface effects is of main interest due its wide spectrum of applications in micro- and nano-scale mechanical devices and systems and the corresponding beam model is formulated using the virtual force principle. The general idea of the model formulation stems from the beam-foundation model developed by Limkatanyu et al. [40] and the beam model incorporating the microstructure and surface effects proposed by Gao and Mahmoud [36]. The modified couple stress theory [35] is used to account for the microstructure-dependent effect of the bulk beam material while the Gurtin-Murdoch surface theory [16, 17] is employed to characterize the beam surface layer. The interaction between the beam and the surrounding substrate media is represented by the Winkler foundation [41].

Organization of this paper is as follows: The Euler-Bernoulli beam hypothesis, the modified couple stress theory, and the surface elasticity theory forming a set of basic ingredients for the model formulation are firstly described. Then, the governing differential equilibrium and compatibility equations of the problem are derived based on virtual displacement and virtual force principles, respectively. Both natural and essential boundary conditions of the problem are also obtained. The sectional force-deformation relations are subsequently established. Two modified Tonti's diagrams are presented to provide the big picture of both displacement-based and force-based formulations of the problem. Due to similarity between the current problem and the one related to the beam on Winkler-Pasternak foundation, the so-called "natural" element stiffness model formulated by Limkatanyu et al. [40] is finally employed to perform two numerical simulations to study the characteristics and behaviors of a beam-substrate system with inclusion of microstructure and surface effects. The first simulation involves investigation of the response of the beam resting on an elastic substrate. The second simulation examines the influences of several system parameters on contact stiffness and demonstrates the size-dependent effect on the system response.

2. Basic ingredients

2.1 Euler-Bernoulli beam kinematics

The kinematics description of a generic point P on the Euler-Bernoulli beam cross-section is shown in Fig. 1. The cross-section *ab* is normal to the longitudinal axis of the undeformed beam. In the deformed configuration, the deformed cross-section *a'b'* remains plane and is normal to the longitudinal axis. This simply implies that the displacement at the point P with a distance y form the reference axis x is:

$$u_x(x,y) = -y\frac{dv(x)}{dx};u_y(x)=v(x)\text{; and } u_z(x)=0 \tag{1}$$

where $u_x(x,y)$, $u_y(x)$, and $u_z(x)$ are the displacement components of the point P along the x, y, and z axes, respectively; and $v(x)$ is the transverse displacement of the point on the reference axis x.

2.2 Modified couple stress theory

In this paper, the modified couple stress theory proposed by Yang et al. [35] is employed to describe the length-scale effect inherent to micro- and nano-sized structures. This theory stems from the classical couple stress theory proposed by several researchers in the Sixties [19-22]. The modified couple stress theory is in preference to the classical couple stress theory due to its requirement of only one additional material length-scale parameter and its inclusion of a symmetric couple stress tensor.

In the classical elasticity theory, the constitutive relation between the symmetric stress tensor σ_{ij} and the infinitesimal strain tensor ε_{ij} reads [42]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2}$$

where λ and μ are Lame constants; δ_{ij} is the Kronecker delta; and ε_{ij} is defined as the symmetric part of the displacement gradient tensor $u_{i,j}$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right). \tag{3}$$

In the modified couple stress theory, one additional constitutive relation between the deviatoric part of the couple stress tensor m_{ij} and the symmetric curvature tensor χ_{ij} is supplied to account for the length-scale effect and is defined as:

$$m_{ij} = 2l^2\mu\chi_{ij} \tag{4}$$

where l is the material length-scale parameter and χ_{ij} is defined as the symmetric part of the rotation gradient tensor $\theta_{i,j}$:

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\theta_{i,j}+\theta_{j,i}\right) \tag{5}$$

with the rotation vector θ_i being defined as:

$$\theta_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j} \tag{6}$$

where e_{ijk} is the permutation symbol.

Following the sectional kinematics of Eq. (1), the non-zero components of the strain tensor ε_{ij} and the symmetric curvature tensor χ_{ij} are expressed in terms of the beam transverse displacement $v(x)$ as:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x,y) &= -y\frac{d^2v(x)}{dx^2} \\ \chi_{xz}(x) &= \chi_{zx}(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2v(x)}{dx^2} \end{aligned}. \tag{7}$$

Substituting Eq. (7) into the constitutive relations of Eqs. (2) and (4), the non-zero components of the stress tensor σ_{ij} and the deviatoric part of the couple stress tensor m_{ij} are expressed in terms of the beam transverse displacement $v(x)$ as:

$$\sigma_{xx}(x,y) = -\frac{yE(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right)$$

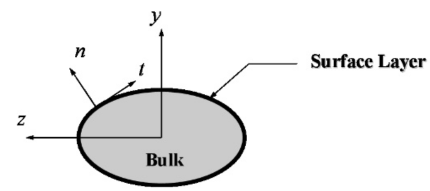


Fig. 2. An arbitrary beam cross-section: beam bulk and surface layer.

$$\sigma_{yy}(x,y)=\sigma_{zz}(x,y)=\frac{\nu\sigma_{xx}(x,y)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)}$$
$$m_{xz}(x)=m_{zx}(x)=l^2\mu\frac{d^2v(x)}{dx^2} \tag{8}$$

where E and ν are the Young's modulus and the Poisson's ratio, respectively, and are expressed in terms of Lame constants λ and μ as:

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{and} \quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{9}$$

2.3 Surface elasticity theory

To account for surface effect on the micro- and nano-sized structures, the Gurtin-Murdoch continuum model [16, 17] is employed. In this nonclassical continuum model, the beam cross section is considered to be consisted of a solid core and an outer surface shell perfectly bonded to its core, as shown in Fig. 2. Following the surface theory proposed by Cammarata [43], the outer surface is considered a mathematically-zero thickness layer with a distinct elastic modulus from its core material. The constitutive relations of the surface proposed by Gurtin and Murdoch [16, 17] are:

$$\tau_{xx}-\tau_0=(\lambda_0+2\mu_0)\varepsilon_{xx}^s \quad \text{and} \quad \tau_{nx}=\tau_0\varepsilon_{nx}^s \tag{10}$$

where τ_0 is the residual surface stress under unconstrained conditions; λ_0 and μ_0 are surface Lame constants and can be obtained via atomistic simulations [44]; τ_{xx} and τ_{nx} are non-zero membrane stresses in the elastic surface; and ε_{xx}^s and ε_{nx}^s are elastic surface deformations and are defined as [36]:

$$\varepsilon_{xx}^s(x,y)=\frac{du_x(x,y)}{dx} \quad \text{and} \quad \varepsilon_{nx}^s(x,y)=n_y\frac{du_y(x)}{dx} \tag{11}$$

with n_y being the y-component of the unit outward normal vector to the beam-section lateral surface.

Substituting Eq. (1) into Eq. (11) and then into Eq. (10), the non-zero membrane stresses in the elastic surface τ_{xx} and τ_{nx} can be expressed in terms of the beam transverse displacement $v(x)$ as:

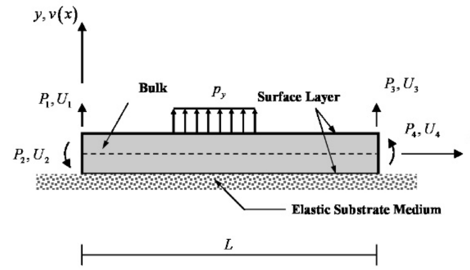


Fig. 3. Micro beam on elastic substrate medium.

$$\tau_{xx}(x,y)-\tau_0=-y(\lambda_0+2\mu_0)\frac{d^2v(x)}{dx^2}$$
$$\tau_{nx}(x)=\tau_0 n_y\frac{dv(x)}{dx} \tag{12}$$

3. Governing equations of beams on elastic substrate media with inclusion of microstructure and surface effects

3.1 Differential equilibrium equation: the virtual displacement approach

The virtual displacement principle is employed to consistently derive the governing differential equilibrium equations and natural boundary conditions of a beam resting on elastic substrate medium with inclusion of microstructure and surface effects as shown in Fig. 3. Interaction between the beam and the surrounding substrate media is represented by the Winkler foundation [41]. The general form of the virtual displacement principle is written as:

$$\delta W=\delta W_{int}+\delta W_{ext}=0 \tag{13}$$

where δW is the system total virtual work; δW_{int} is the system internal virtual work; and δW_{ext} is the system external virtual work.

In the case of the beam on elastic substrate medium with inclusion of microstructure and surface effects, δW_{int} and δW_{ext} can be expressed as:

$$\delta W_{int}=\int_L D_s(x)\delta\Delta_s(x)dx$$
$$+\int_L\left(\iint_A\left(\sigma_{xx}(x,y)\delta\varepsilon_{xx}(x,y)+2m_{xz}(x)\delta\chi_{xz}(x)\right)dA\right)dx$$
$$+\int_L\left(\oint_\Gamma\left((\tau_{xx}(x,y)-\tau_0)\delta\varepsilon_{xx}^s(x,y)+\tau_{nx}(x)\delta\varepsilon_{nx}^s(x)\right)d\Gamma\right)dx \tag{14}$$

$$\delta W_{ext}=-\int_L p_y(x)\delta v(x)dx-\delta\mathbf{U}^T\mathbf{P} \tag{15}$$

where $D_s(x)$ is the elastic-substrate force; $\Delta_s(x)$ is the elastic-substrate deformation and is equal to the beam transverse displacement $v(x)$ following the Winkler foundation hypothesis [41]; $p_y(x)$ is the transverse distributed load; the vector $\mathbf{P} = \{P_1 \ \ P_2 \ \ P_3 \ \ P_4\}^T$ contains shear forces and moments acting at element ends; and the vector $\mathbf{U} = \{U_1 \ \ U_2 \ \ U_3 \ \ U_4\}^T$ contains their conjugate-work displacements and rotations. It is noted that the first, second, and third terms in Eq. (14) represent the contributions of the underlying elastic substrate, the bulk material, and the surface layer to the system internal virtual work, respectively.

Using Eqs. (1), (7) and (11), Eq. (14) can be expressed as:

$$\begin{aligned}\delta W_{int} &= \int_L D_s(x)\delta v(x)dx + \int_L \left(\oint_\Gamma n_y \tau_{nx}(x) d\Gamma \right) \frac{d\delta v(x)}{dx} \\ &+ \int_L \left(-\iint_A y\sigma_{xx}(x,y)dA + \iint_A m_{xz}(x)dA \right) \frac{d^2\delta v(x)}{dx^2}dx \\ &+ \int_L \left(-\oint_\Gamma y\left(\tau_{xx}(x,y) - \tau_0\right)d\Gamma \right) \frac{d^2\delta v(x)}{dx^2}dx\end{aligned} \quad . \ (16)$$

In Eq. (16), the following sectional-moment contributions and sectional shear force can be defined:

$$\begin{aligned}M_{\sigma_{xx}}(x) &= -\iint_A y\sigma_{xx}(x,y)dA; \\ M_{m_{xz}}(x) &= \iint_A m_{xz}(x)dA; \\ M_{\tau_{xx}-\tau_0}(x) &= -\oint_\Gamma y\left(\tau_{xx}(x,y) - \tau_0\right)d\Gamma;\end{aligned} \qquad (17)$$

$$V_{\tau_{nx}}(x) = \oint_\Gamma n_y \tau_{nx}(x) d\Gamma \qquad (18)$$

where $M_{\sigma_{xx}}(x)$, $M_{m_{xz}}(x)$, and $M_{\tau_{xx}-\tau_0}(x)$ are the sectional moments contributed from the normal stress $\sigma_{xx}(x,y)$ on the beam section, the couple stress $m_{xz}(x)$ on the beam section, and the normal surface and residual surface stresses $\tau_{xx}(x)$, τ_0 along the beam section perimeter, respectively; and $V_{\tau_{nx}}(x)$ is the sectional shear force contributed from the transverse surface stress $n_y\tau_{nx}(x)$ along the beam section perimeter.

With Eqs. (17) and (18), the virtual work expression of Eq. (13) can be rewritten as:

$$\begin{aligned}&\int_L M(x)\frac{d^2\delta v(x)}{dx^2}dx + \int_L V_{\tau_{nx}}(x)\frac{d\delta v(x)}{dx}dx + \\ &\int_L D_s(x)\delta v(x)dx - \int_L p_y(x)\delta v(x)dx - \delta\mathbf{U}^T\mathbf{P} = 0\end{aligned} \qquad (19)$$

where $M(x) = M_{\sigma_{xx}}(x) + M_{m_{xz}}(x) + M_{\tau_{xx}-\tau_0}(x)$ is the total section moment. It is clear from the first two terms in Eq. (19) that the total section moment $M(x)$ and the surface shear force $V_{\tau_{nx}}(x)$ are conjugate-work pairs of the section curvature $\kappa(x) = d^2v(x)/dx^2$ and the section rotation $\gamma(x) = dv(x)/dx$.

In order to move all differential operators to the bending moment $M(x)$ and the surface shear force $V_{\tau_{nx}}(x)$, integration by parts is applied twice to the first term and once to the second term of Eq. (19), respectively, resulting hence in the following expression:

$$\begin{aligned}&\int_L \left(\frac{d^2M(x)}{dx^2} - \frac{dV_{\tau_{nx}}(x)}{dx} + D_s(x) - p_y(x) \right)\delta v(x)dx \\ &+ \left[\left(\underbrace{-\frac{dM(x)}{dx}}_{V_B(x)} + V_{\tau_{nx}}(x) \right)\delta v(x) \right]_0^L + \left[M(x)\frac{d\delta v(x)}{dx} \right]_0^L \\ &-\delta\mathbf{U}^T\mathbf{P} = 0\end{aligned} \quad . \ (20)$$

The boundary terms in Eq. (20) reveal that the total section shear force $V(x)$ is not simply equal to the first derivative of the beam-section moment $M(x)$ like in the classical Euler-Bernoulli beam theory but is also contributed from the surface shear force $V_{\tau_{nx}}(x)$. Thus, the total section shear force is defined as:

$$V(x) = -\frac{dM(x)}{dx} + V_{\tau_{nx}}(x) \ . \qquad (21)$$

Following the Cartesian sign convention, Eq. (20) can be rewritten as:

$$\begin{aligned}&\int_L \left(\frac{d^2M(x)}{dx^2} - \frac{dV_{\tau_{nx}}(x)}{dx} + D_s(x) - p_y(x) \right)\delta v(x)dx \\ &-\delta U_1\left[P_1 + \left(-\frac{dM(x)}{dx} + V_{\tau_{nx}}(x) \right)_{x=0} \right] \\ &-\delta U_2\left[P_2 + \left(M(x) \right)_{x=0} \right] \\ &-\delta U_3\left[P_3 - \left(-\frac{dM(x)}{dx} + V_{\tau_{nx}}(x) \right)_{x=L} \right] \\ &-\delta U_4\left[P_4 - \left(M(x) \right)_{x=L} \right] = 0 \ .\end{aligned} \qquad (22)$$

Due to arbitrariness of $\delta v(x)$, the governing differential equilibrium equation of the beam-foundation system is obtained as:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} - \frac{dV_{\tau_{nx}}(x)}{dx} + D_s(x) - p_y(x) = 0 \ . \qquad (23)$$

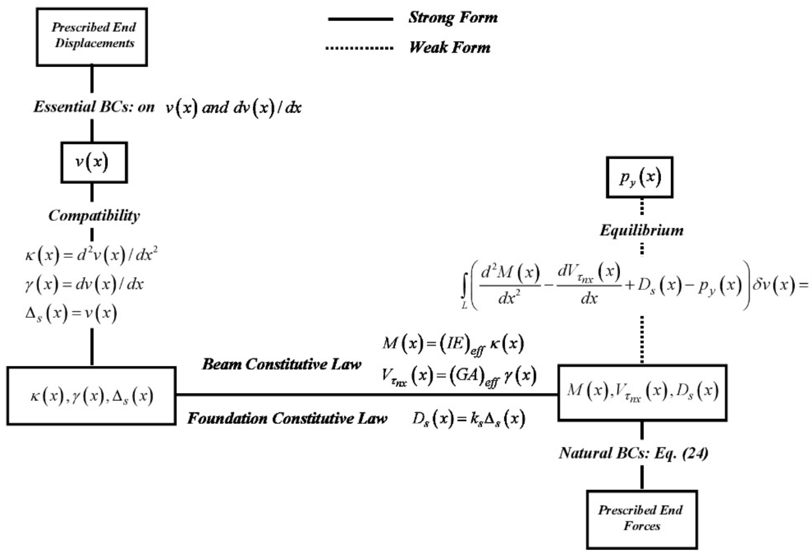


Fig. 4. Tonti's diagram for displacement-based beam on elastic substrate medium with inclusion of microstructure and surface effects.

Accounting for the arbitrariness of $\delta \mathbf{U}$, the end-boundary force conditions (natural boundary conditions) are obtained as:

$$P_1 = -\left(-\frac{dM(x)}{dx} + V_{\tau_{nx}}(x) \right)_{x=0} ; P_2 = -\left(M(x)\right)_{x=0}$$
$$P_3 = \left(-\frac{dM(x)}{dx} + V_{\tau_{nx}}(x) \right)_{x=L} ; P_4 = \left(M(x)\right)_{x=L} . \tag{24}$$

It is noted that when compared to the governing differential equilibrium equation of the beam on Winkler-Pasternak foundation as given by Limkatanyu et al. [40], Eq. (23) and the one derived by Limkatanyu et al. [40] are the same. Thus, the problem of beams on elastic-substrate media with inclusion of microstructure and surface effects is equivalent to the problem of beams on Winkler-Pasternak foundation.

3.2 Sectional force- deformation relations

In order to establish the sectional constitutive relations, Eqs. (8) and (12) are substituted into Eqs. (17) and (18) as suggested by Gao and Mahmoud [36].

$$M(x) = (IE)_{eff}\, \kappa(x) \text{ and } V_{\tau_{nx}}(x) = (GA)_{eff}\, \gamma(x) \tag{25}$$

where the effective sectional flexural rigidity $(IE)_{eff}$ and the effective sectional shear rigidity $(GA)_{eff}$ are defined as:

$$(IE)_{eff} = \frac{IE(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + (\lambda_0 + 2\mu_0) I_P + \mu l^2 A$$
$$(GA)_{eff} = \tau_0 S_P \tag{26}$$

with $A = \iint_A dA$ being the section area; $I = \iint_A y^2 dA$ being the second moment area; $I_P = \oint_\Gamma y^2 d\Gamma$ being the second moment perimeter; and $S_P = \oint_\Gamma n_y^{\,2} d\Gamma$. It is noted in Eq. (26) that besides the microstructure and surface-energy effects, the effective sectional flexural rigidity $(IE)_{eff}$ also accounts for the effect of Poisson's ratio.

The constitutive relation of the elastic-substrate spring is:

$$D_s(x) = k_s \Delta_s(x) \tag{27}$$

where k_s is the elastic-substrate modulus known as subgrade-reaction coefficient [45].

It is noted that the governing differential equilibrium equation of Eq. (23), the end-force boundary conditions of Eq. (24), and the system constitutive relations of Eqs. (25) and (26) form a complete set of basic equations required for the displacement-based finite element formulation of the problem as summarized in the displacement-based Tonti's diagram of Fig. 4 [46].

3.3 Differential compatibility equations and end compatibility conditions: the virtual force principle

The virtual force principle is an alternative way to express the system compatibility equations. The general form of the virtual force equation is written as:

$$\delta W^{*} = \delta W^{*}_{int} + \delta W^{*}_{ext} = 0 \tag{28}$$

where δW^{*} is the system total complementary virtual work; δW^{*}_{int} is the system internal complementary virtual work; and δW^{*}_{ext} is the system external complementary virtual work.

In the case of the beam on Winkler foundation with inclusion of microstructure and surface effects as shown in Fig. 3, δW^{*}_{int} and δW^{*}_{ext} can be expressed as:

$$\delta W^{*}_{int} = \int_L \delta M(x)\kappa(x)dx + \int_L \delta D_s(x)\Delta_s(x)dx + \int_L \delta V_{\tau_{nx}}(x)\gamma(x)dx \tag{29}$$

$$\delta W^{*}_{ext} = -\int_L \delta p_y(x)v(x)dx - \delta\mathbf{P}^{T}\mathbf{U}\,. \tag{30}$$

Following the procedure employed by Limkatanyu et al. [40] and enforcing the governing differential equilibrium of Eq. (23) to eliminate the elastic-substrate force $D_s(x)$ and its virtual counterpart $\delta D_s(x)$, the governing differential compatibility equations of the beam-section curvature and beam-section rotation are obtained as:

$$\frac{M(x)}{(IE)_{eff}} + \frac{1}{k_s}\left(\frac{d^4M(x)}{dx^4} - \frac{d^2p_y(x)}{dx^2} - \frac{d^3V_{\tau_{nx}}(x)}{dx^3}\right) = 0 \tag{31}$$

$$\frac{V_{\tau_{nx}}(x)}{(GA)_{eff}} + \frac{1}{k_s}\left(\frac{d^3M(x)}{dx^3} - \frac{dp_y(x)}{dx} - \frac{d^2V_{\tau_{nx}}(x)}{dx^2}\right) = 0\,. \tag{32}$$

Furthermore, accounting for the arbitrariness of $\delta\mathbf{P}$ yields the end-boundary compatibility conditions (essential boundary conditions):

$$\begin{aligned}
U_1 &= -\frac{1}{k_s}\left(\frac{d^2M(x)}{dx^2} - \frac{dV_{\tau_{nx}}(x)}{dx}\right)_{x=0} + \frac{1}{k_s}\left(p_y(x)\right)_{x=0} \\
U_2 &= \frac{1}{k_s}\left(\frac{d^2V_{\tau_{nx}}(x)}{dx^2} - \frac{d^3M(x)}{dx^3}\right)_{x=0} + \frac{1}{k_s}\left(\frac{dp_y(x)}{dx}\right)_{x=0} \\
U_3 &= -\frac{1}{k_s}\left(\frac{d^2M(x)}{dx^2} - \frac{dV_{\tau_{nx}}(x)}{dx}\right)_{x=L} + \frac{1}{k_s}\left(p_y(x)\right)_{x=L} \\
U_4 &= \frac{1}{k_s}\left(\frac{d^2V_{\tau_{nx}}(x)}{dx^2} - \frac{d^3M(x)}{dx^3}\right)_{x=L} + \frac{1}{k_s}\left(\frac{dp_y(x)}{dx}\right)_{x=L}\,.
\end{aligned} \tag{33}$$

The governing differential compatibility equations of Eqs. (31) and (32) can be combined into one single expression as (see Ref. [40]):

$$\frac{d^4M(x)}{dx^4} + \lambda_1 M(x) - \lambda_2\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{d^2p_y(x)}{dx^2} \tag{34}$$

where $\lambda_1 = k_s/(IE)_{eff}$ and $\lambda_2 = (GA)_{eff}/(IE)_{eff}$. When compared to the governing differential equilibrium equation derived earlier, Eqs. (23) and (34) are dual. This confirms the dualism of the virtual displacement and virtual force principles. As expected, the combined governing differential compatibility equation of Eq. (34) and the one given by Limkatanyu et al. [40] for the beam on Winkler-Pasternak foundation are in the same form. Furthermore, when the effects of microstructure, Poisson's ratio, and surface energy are all neglected ($l = \nu = \lambda_0 = \mu_0 = \tau_0 = 0$), Eq. (34) is reduced to the governing differential compatibility equation of the beam on Winkler foundation as given by Limkatanyu et al. [47].

It is noted that the governing differential compatibility equations of Eqs. (31) and (32), the end-boundary compatibility conditions of Eq. (33), and the system constitutive relations of Eqs. (25) and (26) form a complete set of basic equations required for the force-based finite element formulation of the problem as summarized in the force-based Tonti's diagram of Fig. 5 [46].

4. "Exact" element stiffness matrix: reused

Due to similarity between the current problem and the one related to the beam on Winkler-Pasternak foundation, the "exact" element stiffness equation derived by Limkatanyu et al. [40] can be applied and is briefly discussed herein. The exact element stiffness matrix given by Limkatanyu et al. [40] is formulated based on the exact element flexibility matrix via the natural approach [48]. The matrix virtual force approach with the exact moment interpolation functions is employed to derive the exact element flexibility matrix. The analytical solution to the governing differential compatibility equation of Eq. (34) is central to obtain the exact moment interpolation functions. More details on the derivation of the exact element stiffness equation can be found in Limkatanyu et al. [40] and the element configuration of the beam element on Winkler-Pasternak foundation is shown in Fig. 6.

5. Numerical examples

Two numerical simulations employing the proposed model are performed to study the characteristics and behaviors of a beam-substrate system with inclusion of microstructure and surface effects. The first simulation involves investigation of the response of the beam resting on an elastic substrate. The second simulation examines the influences of several system parameters on contact stiffness and shows the size-dependent effect on the system response.

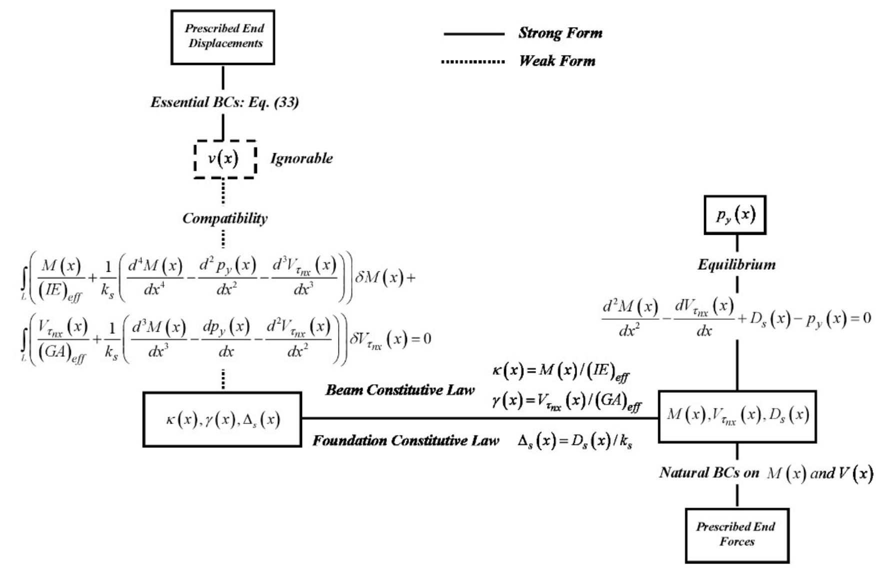


Fig. 5. Tonti's diagram for force-based beam on elastic substrate medium with inclusion of microstructure and surface effects.

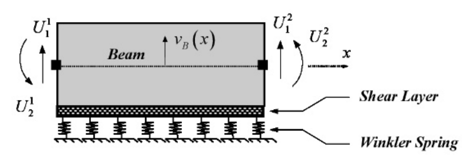


Fig. 6. Beam-Winkler Pasternak foundation element [40].

5.1 Example I

A cantilever aluminum beam resting on an elastic substrate is subjected to a concentrated load P at its free end as shown in Fig. 7. Geometric properties of the aluminum beam follow those used by Gao and Mahmoud [36]. In all analysis cases, the beam cross-section shape is rectangular with a constant width-to-depth ratio b/h of 2 and the beam length L is kept to be $20h$. Bulk material and surface properties of the aluminum beam come from those used by Liu and Rajapakse [49] and Gao and Mahmoud [36]. The bulk modulus E and Poisson ratio ν of the aluminum beam are 90 GPa and 0.23, respectively, while its residual surface stress τ_0 is 0.5689 N/m and surface elastic constants λ_0 and μ_0 are 3.4939 and -5.4251 N/m, respectively. The length-scale parameter l for the bulk beam material (aluminum) is equal to 6.58 μm as given by Gao and Mahmoud [36]. Effects of the length-scale parameter l on the beam-deflection responses with different elastic-substrate stiffnesses k_s are investigated by varying the beam depth h as a function of l. Thus, the effective sectional flexural rigidity $(IE)_{eff}$, effective sectional shear rigidity $(GA)_{eff}$, and beam length L are also related to the value of l.

For a rectangular beam section with width b and height h, the sectional geometric properties are:

$$A = bh; I = \frac{bh^3}{12}; I_P = \frac{h^3}{6} + \frac{bh^2}{2}; S_P = 2b; . \tag{35}$$

For convenience and generality, the following two non-dimensional variables are defined:

$$\bar{k}_s = \frac{k_s L^4}{(IE)_{eff}} \text{ and } \bar{P} = \frac{PL^2}{(IE)_{eff}}. \tag{36}$$

The first one reflects the substrate-stiffness effect while the second one normalizes different values of the applied load P. In this numerical example, the value of the normalized load parameter $\bar{P}$ is kept to be 1 while the normalized elastic-substrate stiffness parameter $\bar{k}_s$ varies from 0.2 to 10.

Fig. 8 compares the beam deflection responses with different normalized substrate-stiffness parameters $\bar{k}_s$ obtained

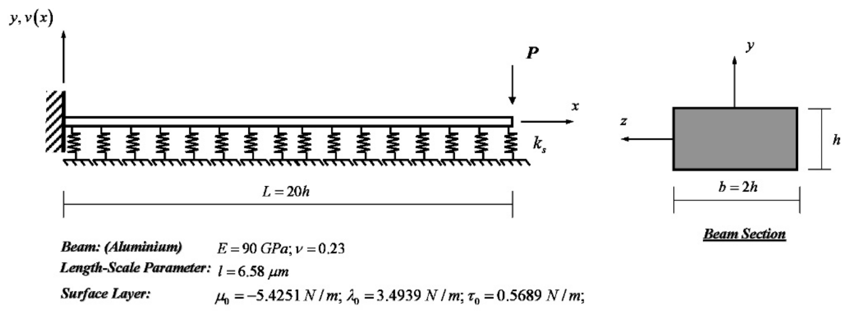


Fig. 7. Example I: cantilever beam on elastic substrate medium.

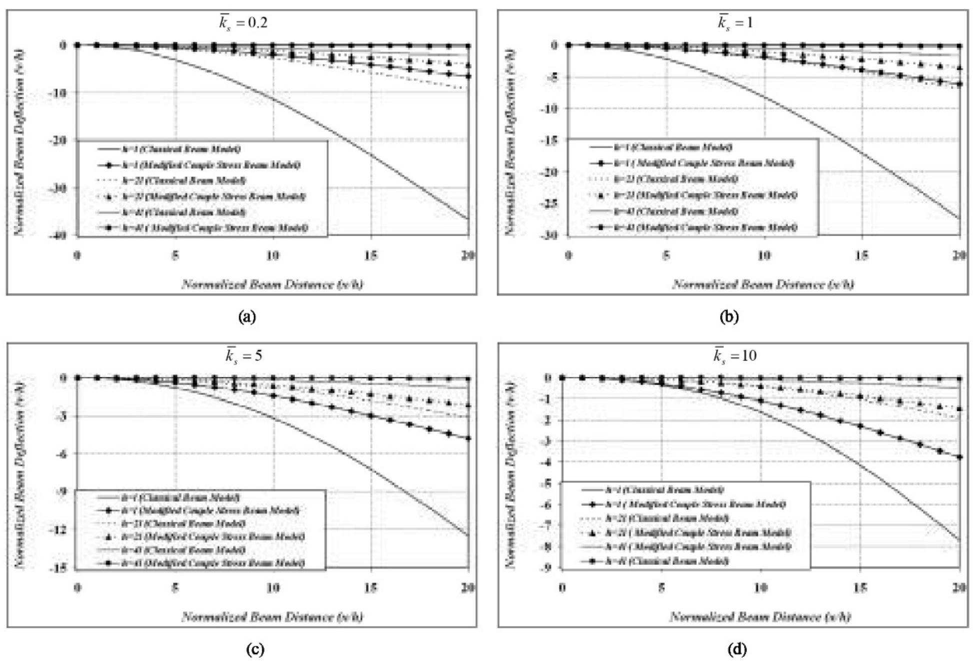


Fig. 8. Normalized beam deflection vs. normalized beam distance for various normalized elastic substrate stiffness.

with the proposed model and the classical beam model. The beam depth h is expressed in terms of the length-scale parameter l and varies from l to $4l$. The classical beam response is simply obtained by neglecting the microstructure ($l = 0$) and surface-energy effects ($\lambda_0 = \mu_0 = \tau_0 = 0$). It is clear from Fig. 8 that when compared to the classical beam model, accounting for the microstructure and surface-energy effects consistently results in a stiffer beam-elastic substrate system. Fig. 8 also indicates that the beam deflection responses obtained with the proposed model and the classical beam model are significantly different when the beam depth h approaches the length-scale parameter l ($h = l = 6.58\ \mu m$). However, this difference in the beam deflection responses decreases when the beam depth gets larger ($h = 4\,l = 26.32\ \mu m$), especially with a stiff elastic substrate medium. Thus, the microstructure and surface-energy effects become dominant when the beam depth approaches the value of the material length-scale parameter, especially with a weak elastic substrate medium. This finding is in good agreement with that numerically observed by Park and Gao [4] and Gao and Mahmoud [36] and experimentally observed by McFarland and Colton [50].

5.2 Example II

Sensitivity of the model parameters on contact stiffness is investigated by performing parametric studies of the cantilever beam-substrate system in Fig. 7. The same beam bulk material and surface properties of the aluminum beam are employed in this example. The width-to-depth ratio b/h is kept at 2 for all analysis cases. Model parameters investigated herein include the beam depth, the beam length, and the substrate stiffness. The slenderness ratio L/h is used to define the beam-depth and beam-length effects. The substrate-stiffness effect is studied by varying the normalized elastic-substrate stiffness parameter $\bar{k}_s$ from 0.2 to 50. Sensitivity analysis of model parameters on the contact stiffness is performed to measure essence of the microstructure and surface effects on the system response. Following the definition by Khajeansari et al. [38] and Jiang and Yan [51], the contact stiffness of a beam-substrate system is simply defined as:

$$K^{end} = \frac{P_{end}}{u_{end}} \tag{37}$$

where P_{end} and u_{end} are the imposed force and the induced displacement at an end point, respectively.

In this study, two types of normalized contact stiffness are defined and used to assess the essence of the microstructure and surface effects on the system contact stiffness. The first normalized contact stiffness is used to represent the attribution of the microstructure effect and is defined as:

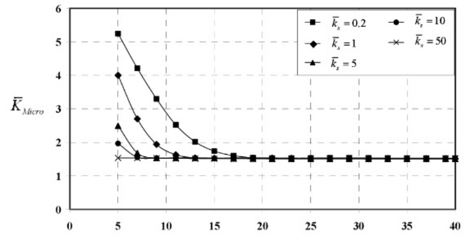
$$\bar{K}_{Micro} = \frac{K^{end}_{Micro\_Sur}}{K^{end}_{Sur}} \tag{38}$$

where $K^{end}_{Micro\_Sur}$ is the contact stiffness accounting for both the microstructure and surface effect; and K^{end}_{Sur} is the contact stiffness accounting for only the surface effect. The second normalized contact stiffness is employed to represent the ascription of the surface effect and is defined as:

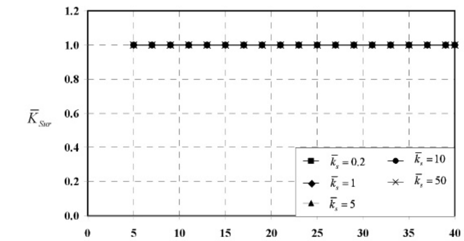
$$\bar{K}_{Sur} = \frac{K^{end}_{Micro\_Sur}}{K^{end}_{Micro}} \tag{39}$$

where K^{end}_{Micro} is the contact stiffness accounting for only the microstructure effect.

Figs. 9(a) and (b) shows influences of the beam length L on the normalized microstructure contact stiffness $\bar{K}_{Micro}$ and the normalized surface contact stiffness $\bar{K}_{Sur}$ for beams resting on substrate media with different normalized substrate-stiffness parameter $\bar{k}_s$, respectively. The beam length L is varied by changing the slenderness ratio L/h from 5 to 40 while the beam depth h is retained equal to the microstructure length-scale parameter $l = 6.58\ \mu m$. Fig. 9(a) illustrates that the beam length L has a significant effect on the normalized microstructure contact stiffness $\bar{K}_{Micro}$, especially for lower



(a)

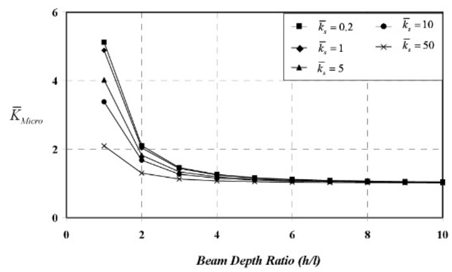


(b)

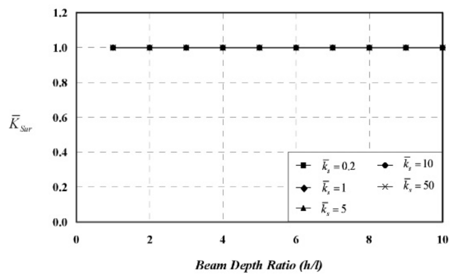
Fig. 9. Variation of normalized stiffness $\bar{K}_{Micro}$ and $\bar{K}_{Sur}$ with L/h for various normalized elastic substrate stiffness.

values of normalized substrate-stiffness parameters. Thus, it can be deduced that the shorter the beam is and the softer the elastic substrate medium is, the larger the normalized microstructure contact stiffness $\bar{K}_{Micro}$ will be. Fig. 9(b) shows that the beam length L practically has no effect on the normalized surface contact stiffness $\bar{K}_{Sur}$. Thus, it can be deduced that for these particular values of model parameters, influences of the microstructure effect are more pronounced than those of the surface effect. Furthermore, it is worth remarking that the surface effect would become more pronounced when the system dimension is in the order of nanometer. However, the system dimension investigated in this study is governed by the microstructure length-scale parameter $l = 6.58\ \mu m$. Thus, the system dimension is in the order of micrometer.

Figs. 10(a) and (b) shows influences of the beam depth h on the normalized microstructure contact stiffness $\bar{K}_{Micro}$ and the normalized surface contact stiffness $\bar{K}_{Sur}$ for beams resting on substrate media with different normalized substrate-stiffness parameter $\bar{k}_s$, respectively. The beam depth h is expressed in terms of the microstructure length-scale parameter l while the beam length L is retained at 25 h. Fig. 10(a) shows that the microstructure size effect is significant when the beam depth h approaches the microstructure length-scale parameter l, especially for lower values of substrate-stiffness parameters and diminishes when the beam depth h approaches a threshold value around $6l$. Similar to the observation for Fig. 9(b), Fig. 10(b) indicates that the beam depth h has no effect



(a)



(b)

Fig. 10. Variation of normalized stiffness $\overline{K}_{Micro}$ and $\overline{K}_{Sur}$ with h/l for various normalized elastic substrate stiffness.

on the normalized surface contact stiffness $\overline{K}_{Sur}$. However, this aspect is worth revisiting when the system dimension is in the range of nanoscale.

Based on those observations from Figs. 9 and 10, it can be deduced that microstructure effect is relatively more influential than surface effect for the range of model parameters investigated herein.

6. Summary and conclusions

In this paper, the micro-scale and surface effects on flexural responses of micro-sized beams on elastic substrate media is investigated. The microstructure effect of the beam bulk is introduced through the modified couple stress theory while the surface energy of the surface layer is included using the Gurtin-Murdoch surface theory. Winkler foundation model is employed to represent the interaction mechanism between the beam and the surrounding substrate medium. The governing differential equilibrium equation of the problem and its associated natural boundary conditions are consistently derived from the virtual displacement principle. The dual set of the governing differential compatibility equations to the problem and its associated essential boundary conditions are also consistently obtained using the virtual force principle. Sectional force-deformation relations that include the effects of microstructure, Poisson's ratio, and surface energy are established. Similarity between the current problem and the one related to the beam on Winkler-Pasternak foundation is observed. Consequently, the "natural" Winkler-Pasternak-based beam element previously proposed by the authors can be reused to study the problem of beams resting on elastic substrate media with inclusion of microstructure and surface effects. Two numerical simulations are performed to study characteristics and behaviors of the micro-sized beam-substrate system.

The first simulation indicates that accounting for the microstructure and surface-energy effects consistently results in a stiffer beam-elastic substrate system in the same way as increasing the beam flexural rigidity when compared to the classical beam model. The beam deflection responses obtained with the proposed model and the classical beam model are significantly different when the beam depth h approaches the length-scale parameter l ($h = l = 6.58\ \mu m$). However, this difference in the beam deflection responses decreases when the beam depth gets larger ($h = 4l = 26.32\ \mu m$), especially with a stiff elastic substrate medium.

The second simulation points out that influences of the microstructure effect are more pronounced than those of the surface effect when the system dimension is in the order of micrometer. A stiff elastic substrate medium tends to diminish the size-dependent characteristic of the beam-substrate medium system.

One next step in this research direction is to include nonlinearities into both the beam and the substrate medium. It is anticipated that the beam-substrate medium element developed herein will be useful to scientists and engineers working in the area of nanoscience and nanoengineering.

Acknowledgment

This study was partially supported by the Thai Ministry of Education (MOE), by the Thailand Research Fund (TRF) under Grant MRG4680109 and Grant RSA5480001, and by the STREAM Research Group under Grant ENG-51-2-7-11-022-S, Faculty of Engineering, Prince of Songkla University. All opinions expressed in this paper are those of the authors and do not reflect the views of the sponsoring agencies. Special thanks go to a senior lecturer Mr. Wiwat Sutiwipakorn for reviewing and correcting the English of this paper and to Professor X.L. Gao of the Mechanical Engineering Department of the University of Texas, Dallas for his fruitful discussion on theoretical issues. In addition, the authors would also like to thank two anonymous reviewers for their valuable and constructive comments.

References

[1] R. S. Pereira, Atomic force microscopy as a novel pharmacological tool, *Biochem. Pharmacol.*, 62 (2001) 975-983.

[2] X. Li, B. Bhushan, K. Takashima, C.-W. Baek and Y.-K. Kim, Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation

techniques, *Ultramicroscopy*, 97 (2003) 481-494.

[3] J. Pei, F. Tian and T. Thundat, Glucose biosensor based on the microcantilever, *Anal. Chem*, 76 (2004) 292-297.

[4] S. K. Park and X. L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *J. Micromech. Microeng.*, 16 (2006) 2355-2359.

[5] H. M. Ma, X.L. Gao and J. N. Reddy, A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory, *J. Mech. Phys. Solids*, 56 (2008) 3379-3391.

[6] Y. Fu, J. Zhang and Y. Jiang, Influences of the surface energies on the nonlinear static and dynamic behaviors of nanobeams, *Physica E Low Dimens. Syst. Nanostruct.*, 42 (2010) 2268-2273.

[7] A. E. Alshorbagy, M. A. Eltaher and F. F. Mahmoud, Static analysis of nanobeams using nonlocal FEM, *J. Mech. Sci. Technol.*, 27 (7) (2013) 2035-2041.

[8] M. A. Kazemi-Lari, E. Ghavanloo and S. A. Fazelzadeh, Structural instability of carbon nanotubes embedded in viscoelastic medium and subjected to distributed tangential load, *J. Mech. Sci. Technol.*, 27 (7) (2013) 2085-2091.

[9] R. Vatankhah, A. Najafi, H. Salarieh and A. Alasty, Asymptotic decay rate of non-classical strain gradient Timoshenko micro-cantilevers by boundary feedback, *J. Mech. Sci. Technol.*, 28 (2) (2014) 627-635.

[10] M. Fathalilou, M. Sadeghi and G. Rezazadeh, Nonlinear behavior of capacitive micro-beams based on strain gradient theory, *J. Mech. Sci. Technol.*, 28 (4) (2014) 1141-1151.

[11] B. I. Yakobson, C. J. Brabec and J. Bernholc, Nanomechanics of carbon tubes: instabilities beyond linear response, *Phys. Rev. Lett.*, 76 (14) (1996) 2511-2514.

[12] C. Z. Wang and K. M. Ho, Tight-binding molecular dynamics for materials simulations, *J. Comput. Aided Mater. Des.*, 3 (1-3) (1996) 139-148.

[13] L. J. D. Frink, A. G. Salinger, M. P. Sears, J. D. Weinhold and A. L. Frischknecht, Numerical challenges in the application of density functional theory to biology and nanotechnology, *J. Phys-Condens. Mat.*, 14 (46) (2002) 12167-12187.

[14] Q. Wang and V. K. Varadan, Stability analysis of carbon nanotubes via continuum models, *Smart. Mater. Struct.*, 14 (1) (2005) 281-286.

[15] J. Peddieson, G. R. Buchanan and R. P. McNitt, Application of nonlocal continuum models to nanotechnology, *Int. J. Eng. Sci.*, 41 (3-5) (2003) 305-312.

[16] M. E. Gurtin and I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surface, *Arch. Ration. Mech. An.*, 57 (4) (1975) 291-323.

[17] M. E. Gurtin and I. Murdoch, Surface stress in solids, *Int. J. Solids. Struct.*, 14 (6) (1978) 431-440.

[18] E. Cosserat and F. Cosserat, *Theory of deformable bodies. In: Delphenich DH editor*, Scientific Library, Paris (1909).

[19] R. D. Mindlin and H. F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Arch. Ration. Mech. An.*, 11 (1962) 415-448.

[20] R. D. Mindlin, Influence of couple-stresses on stress concentrations, *Exp. Mech.*, 3 (1963) 1-7.

[21] R. A. Toupin, Theories of elasticity with couple stress, *Arch. Ration. Mech. An.*, 17 (1964) 85-112.

[22] W. T. Koiter, Couple-stresses in the theory of elasticity: I and II, *P. K. Ned. Akad. B.*, 67 (1) (1964) 17-44.

[23] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang and P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 51 (2003) 1477-1508.

[24] A. C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, *Inter. J. Eng. Sci.*, 10 (1) (1972) 1-16.

[25] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *J. Appl. Phys.*, 54 (9) (1983) 4703-4710.

[26] A. C. Eringen, *Nonlocal continuum field theories*, Springer-Verlag, New York (2002).

[27] A. C. Eringen and D. G. B. Edelen, On nonlocal elasticity, *Inter. J. Eng. Sci.*, 10 (3) (1972) 233-248.

[28] A. Anthoine, Effect of couple-stresses on elastic bending of beam, *Int. J. Solids Struct.*, 37 (2000) 1003-1018.

[29] S. Papargyri-Beskou, K. G. Tsepoura, D. Polyzos and D. E. Beskos, Bending and stability analysis of gradient elastic beams, *Int. J. Solids Struct.*, 40 (2003) 385-400.

[30] I. Vardoulakis and J. Sulem, *Bifurcation analysis in geomechanics*, Blackie/Chapman & Hall, London (1995).

[31] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie and K. Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *Inter. J. Eng. Sci.*, 47 (2009) 487-498.

[32] F. F. Mahmoud, M. A. Eltaher, A. E. Alshorbagy and E. I. Meletis, Static analysis of nanobeams including surface effect by nonlocal finite element, *J. Mech. Sci. Technol.*, 26 (11) (2012) 3555-3563.

[33] J. F. C. Yang and R. S. Lakes, Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending, *J. Biomech.*, 15 (1982) 91-98.

[34] R. Maranganti and P. Sharma, A novel atomistic approach to determine strain-gradient elasticity constants: tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (ir) relevance for nanotechnologies, *J. Mech. Phys. Solids*, 55 (2007) 1823-1852.

[35] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam and P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 39 (2002) 91-98.

[36] X. L. Gao and F. F. Mahmoud, A new Bernoulli-Euler beam model incorporating microstructure and surface energy effects, *Z. Angew. Math. Phys.*, 65 (2014) 393-404.

[37] Y. Zhang and Y. P. Zhao, Adhesive contact of nanowires in three-point bending test, *J. Adhes. Sci. Technol.*, 25 (2011) 1107-1129.

[38] A. Khajeansari, G. H. Baradaran and J. Yvonnet, An explicit solution for bending of nanowires lying on Winkler-pasternak elastic substrate medium based on the Euler-Bernuolli beam theory, *Inter. J. Eng. Sci.*, 52 (2012) 115-128.

[39] P. Malekzadeh and M. Shojaee, Surface and nonlocal effects on the nonlinear free vibration of non-uniform nanobeams, *Compos. Part B-Eng.*, 52 (2013) 84-92.

[40] S. Limkatanyu, N. Damrongwiriyanupap, M. Kwon and P. Ponbunyanon, Force-based derivation of exact stiffness matrix for beams on Winkler-Pasternak foundation, *Z. Angew.*

Math. Mech. (2013) doi: 10.1002/zamm.201300030.
[41] E. Winkler, *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Dominicus*, Prag (1867).
[42] Y. C. Fung, *A first course in continuum mechanics*, 2nd edition, Prentice-Hall, New York (1977).
[43] R. C. Cammarata, Surface and interface stress in thin films, *Prog. Surf. Sci.*, 46 (1) (1994) 1-38.
[44] R. E. Miller and V. B. Shenoy, Size-dependent elastic properties of nanosized structureal elements, *Nanotechnology*, 11 (2000) 139-147.
[45] K. Terzaghi, Evaluation of coefficients of subgrade reaction, *Geotechnique*, 5 (4) (1977) 297-326.
[46] E. Tonti, The reason for analogies between physical theories, *Appl. Math. Model.*, 1 (1) (1975) 37-50.
[47] S. Limkatanyu, K. Kuntiyawichai, E. Spacone and M. Kwon, Natural stiffness matrix for beams on Winkler foundation: exact force-based derivation, *Struct. Eng. Mech.*, 42 (1) (2012) 39-53.
[48] J. H. Argyris and S. Kelsey, *Energy theorems and structural analysis*, Butterworth & Co Ltd., London (1960).
[49] C. Liu and R. K. N. D. Rajapakse, Continuum models incorporating surface energy for static and dynamic response of nanoscale beams, *IEEE T. Nanotechnol.*, 9 (2010) 422-431.
[50] A. W. McFarland and J. S. Colton, Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors, *J. Micromech. Microeng.*, 15 (2005) 1060-1067.
[51] L. Y. Jiang and Z. Yan, Timoshenko beam model for static bending of nanowires with surface effects, *Physica E Low Dimens. Syst. Nanostruct.*, 42 (9) (2010) 2274-2279.

Suchart Limkatanyu is an Associate Professor in the Department of Civil Engineering at Prince of Songkla University, Thailand. He received his Ph.D. in Structural Engineering and Structural Mechanics (SESM) from the University of Colorado, Boulder. His research interests center on the seismic analysis, design and retrofitting of reinforced concrete structures, earthquake engineering, computational mechanics, nonlinear frame analysis, nano-engineering and technology, and multi-physics systems.

Paitoon Ponbunyanon is currently a Ph.D. student at the Department of Civil Engineering, Prince of Songkla University, Thailand. He concerns in modeling micro- and nano-sized beam systems.

Woraphot Prachasaree is an Associate Professor in the Department of Civil Engineering at Prince of Songkla University, Thailand. He received his Ph.D. in Structural Engineering from the West Virginia University. His research interests center on Fiber Reinforced Polymer (FRP) composite structures, bridge assessment and design, concrete technology, and nanotechnology.

Kittisak Kuntiyawichai is an Associate Professor in the Department of Civil Engineering at Ubonratchathani University, Thailand. He received his Ph.D. in Structural Engineering from the University of Manchester Institute of Science and Technology. His research interests center on the structural assessment, quality assurance of structures and fracture and fatigue of cracked structures.

Minho Kwon is Professor in the Department of Civil Engineering at Gyeongsang National University, South Korea. He received his Ph.D. in Structural Engineering and Structural Mechanics (SESM) from the University of Colorado, Boulder. His research interests center on finite element analysis of reinforced concrete structures, earthquake engineering, and computational mechanics of micro and nano-sized systems.

Ponbunyanon P., Limkatanyu S., Kaewjuea W.,Prachasaree W., and Chub-Uppakarn T. 2016. A novel beam-elastic substrate model with inclusion of nonlocal elasticity and surface energy effects. *Arab. J. Sci. Eng*. **41**(10): 4099-4113

Arab J Sci Eng (2016) 41:4099–4113
DOI 10.1007/s13369-016-2085-7

RESEARCH ARTICLE - CIVIL ENGINEERING

A Novel Beam-Elastic Substrate Model with Inclusion of Nonlocal Elasticity and Surface Energy Effects

Paitoon Ponbunyanon[1] · Suchart Limkatanyu[1] · Wichairat Kaewjuea[1] · Woraphot Prachasaree[1] · Tanan Chub-Uppakarn[1]

Received: 16 September 2015 / Accepted: 17 February 2016 / Published online: 19 March 2016

Abstract A force-based beam-elastic substrate model incorporating nonlocal elasticity and surface energy effects is developed. The nonlocal elasticity theory is used to capture the nanosized-dependent effect of the beam bulk material while Gurtin–Murdoch surface theory is used to account for the surface energy-dependent size effect. Interaction mechanism between the beam and the surrounding substrate medium is represented by the Winkler-like model. Similarity between the current system and the beam-Winkler–Pasternak foundation system is observed. Consequently, the beam-Winkler–Pasternak foundation element previously proposed by the first two authors can be employed to perform three numerical simulations to investigate the characteristics and behaviors of a beam-substrate system with inclusion of nonlocal elasticity and surface effects.

Keywords Beam elements · Winkler–Pasternak foundation · Force-based formulation · Virtual work principle · Nanobeam · Nonlocal elasticity · Surface elasticity

1 Introduction

Owing to exceptional thermal, electrical, chemical, and mechanical properties of nanosized structures as well as their wide spectrum of novel applications [1], many scientists and engineers worldwide have comprehensively conducted both experimental and analytical research works on nanosized structures. Unfortunately, there are extreme difficulties in carrying out experiments at nanolevel and high computational costs of atomic studies using atomistic models [2]. Therefore, several types of structural elements are widely employed as an attractive alternative to characterize the nanosized structural response due to good compromise between model accuracy and model efficiency. However, conventional structural elements formulated based on the classical continuum mechanics theory have not accounted for small-scale effect and size-dependent effect inherent to nanosized structures. Long-range inter-atomic interactions are responsible for the small-scale effect, while energy associated with the atoms at the free surface of the nanosized structure is responsible for the size-dependent effect. To take into account these two effects, two nonclassical elasticity theories, viz. the nonlocal elasticity theory and the surface elasticity theory, are incorporated into the classical continuum mechanics theory.

When structural dimensions are on the order of a nanometer, the long-range inter-atomic interactions (nonlocality) associated with the discrete nature of matter become essential [3]. This lies in the fact that the structural dimensions at nanoscale are comparable to their inter-atomic distances, thus inducing a nonlocal response of the beam bulk material. Several researchers have recognized this small-scale effect and proposed various constitutive models containing information about inter-atomic forces (long-range interaction) and the material length-scale parameter [4–10]. Chief among others is nonlocal elasticity theory proposed by Eringen [7–9] and Eringen and Edelen [10]. The essence of this theory is in its affirmation that the stress state at a reference point is regarded as being computed from the strain state of all other points throughout the elastic body, and not just at a particular point like that used in the classical elasticity theory. Interatomic forces and atomic length scale are considered in the material constitutive relation as nonlocal model parameters.

With the size of a structure approaching a nanoscale regime, the energy corresponding to atoms at the free sur-

✉ Suchart Limkatanyu
suchart.l@psu.ac.th

1 Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Prince of Songkla University, Songkhla 90112, Thailand

face becomes different from that associated with atoms in the beam bulk material. Thus, the excess energy associated with surface atoms, known as "surface free energy," could no longer be neglected in comparison with the bulk energy as that in the classical continuum mechanics theory due to high surface-to-volume ratio [11]. The earliest research work on the concept of surface phenomenon was conducted by Gibbs [12] within the framework of thermodynamics. A comprehensive literature survey on Gibbsian formulation of the thermodynamics of surfaces can be found in Cammarata [13,14] and Fischer et al. [15]. To incorporate the concept of surface phenomenon into the classical continuum mechanics theory, Gurtin and Murdoch [16,17] proposed the surface elasticity theory. This continuum-based surface elasticity model commonly known as the Gurtin–Murdoch surface elasticity model is widely used to account for the influence of surface free energy on the mechanical behavior of nanosized structures.

Nanobeams have gained their popularity due to their exceptional electrical, mechanical, and thermal performances, thus drawing considerable interests in nanoscience and nanoengineering. A wide spectrum of nanobeam applications has appeared in micro/nanoelectromechanical systems (M/NEMS), biosensors, optoelectronics, and biotechnology [18–22]. For example, Cui et al. [18] formulated silicon nanowires model for nanoelectronic devices; Wang and Song [19] converted nanoscale mechanical energy into electrical energy by means of piezoelectric zinc oxide nanowire arrays; Feng et al. [20] demonstrated very high frequency nanomechanical resonators based on single-crystal silicon nanowires; Shaat and Abdelkefi [21] studied the pull-in instability behavior of actuated nanobeams made from nanocrystalline silicon (Nc-Si); and Gupta et al. [22] developed cantilever beam-based model for biosensor with inclusion of novel microfabrication technique of merged epitaxial lateral overgrowth and chemical mechanical polishing. Furthermore, several researchers have formulated various nanobeam models with inclusion of small-scale and surface energy effects to investigate bending, buckling, vibration, and wave propagation of nanosized structures. For example, Peddieson et al. [23] incorporated the nonlocal elasticity theory into the Euler–Bernoulli beam model to study the small-scale effect on the bending behavior of nanobeams; He and Lilley [24] integrated Gurtin–Murdoch surface model with Euler–Bernoulli beam model to study surface effect on the bending behavior of nanowires; Reddy [25] formulated several nonlocal beam models in conjunction with various beam theories to investigate the nonlocal effect on beam deflections, buckling loads, and natural frequencies; Jiang and Yan [26] modified the nanowire model of He and Lilley [24] using Timoshenko beam theory to account for shear deformation; Liu et al. [27] combined the elastica theory with the Gurtin–Murdoch surface model to perform large-displacement analyses of nanowires with inclusion of the surface effect; Alshorbagy et al. [28] formulated a finite beam element based on the nonlocal elasticity theory and later Mahmoud et al. [29] enhanced this beam element by incorporating the Gurtin–Murdoch surface effect into the element.

In nanocomposites, nanobeams are frequently embedded in a metal matrix or a polymer to serve as reinforcing components. Furthermore, they are usually integrated into larger structures through substrate media in nanoscale mechanical devices and systems. Therefore, profound understanding of the interaction mechanism between the beam and the surrounding substrate media is necessary for controlling the performance and characterizing the response of nanobeam-elastic substrate systems. Recently, several researchers have turned their attention to the problem of nanosized beams resting on elastic substrate media. For example, Xiao et al. [30] analytically studied buckling of carbon nanotubes (CNTs) resting on elastomeric substrates; Zhang and Zhao [31] formulated a nanowire model lying on an adhesive receding contact foundation; Khajeansari et al. [32] conducted parametric studies of silver nanowires resting on Winkler–Pasternak elastic substrate media using an analytical solution to the problem; Malekzadeh and Shojaee [33] assessed surface and nonlocal effects on nonlinear free vibration of nanowires supported by an elastic medium using both Euler–Bernoulli beam theory and Timoshenko beam theory; Zhao et al. [34] performed buckling analysis of a nanowire resting on Winkler–Pasternak substrate medium using the Timoshenko beam theory.

The main objective of this research work is to develop an exact beam-elastic substrate model considering the small-scale and surface effects within the framework of the force-based beam formulation. The proposed beam element is naturally extended from the beam-Winkler–Pasternak foundation model developed by Limkatanyu et al. [35] and the beam-elastic substrate model incorporating the microstructure and surface effects proposed by Limkatanyu et al. [36]. The nonlocal elasticity theory (Eringen [7–9] and Eringen and Edelen [10]) is used to account for the small-scale effect of the bulk beam material while the Gurtin–Murdoch surface theory (Gurtin and Murdoch [16,17]) is employed to characterize the beam surface layer. The effect of the surrounding substrate media on beams is described by the Winkler-like model [37].

The content of this paper is as follows: Sectional force–deformation relations accounting for the nonlocal and surface effects are firstly presented. Then, virtual displacement and virtual force principles are employed to consistently derive the governing differential equilibrium and compatibility equations of the problem, respectively. Both natural and essential boundary conditions of the problem are obtained as well. Similarity between the current problem and the one related to the beam on Winkler–Pasternak foundation is recognized. As a result, the so-called natural beam-Winkler–Pasternak foundation element formulated by Limkatanyu et al. [35] can be modified to study the problem of beams resting on elastic substrate media with inclusion of nonlocal elasticity and surface energy effects. Finally, three simulation cases are performed to investigate the nanoscale and surface effects on flexural responses of nanosized beams resting on elastic substrate media.

2 Sectional Force–Deformation Relations: Nonlocal Beams on Elastic Substrate Media with Inclusion of Surface Energy Effect

2.1 Local Beam-Section Constitutive Model with Inclusion of Surface Energy Effect

In this paper, the rectangular beam section is considered to be composed of a solid core and an outer surface shell perfectly bonded to its core, as shown in Fig. 1. Following Gao et al. [38], the Poisson effect on the beam-section response is naturally accounted for when the three-dimensional constitutive relation between symmetric stress tensor σ_{ij} and infinitesimal strain tensor ε_{ij} is employed:

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij} \tag{1}$$

where E and ν are the Young's modulus and the Poisson's ratio, respectively, and δ_{ij} is the Kronecker delta. Based on the planar Euler–Bernoulli beam theory, Limkatanyu et al. [36] shows that the nonzero components of the stress tensor σ_{ij} can be written in terms of the beam-section curvature $\kappa(x) = \mathrm{d}^2 v(x)/\mathrm{d}x^2$ as:

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{yE(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\kappa(x) \tag{2}$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \sigma_{zz}(x, y) = -\frac{yE\nu}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\kappa(x) \tag{3}$$

where y represents a distance from the reference axis x and $v(x)$ defines the beam vertical displacement.

To account for surface effect on the beam-section response, the Gurtin–Murdoch continuum model (Gurtin and Murdoch

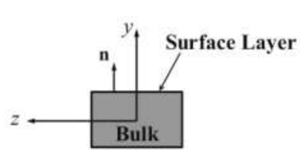


Fig. 1 Rectangular beam cross section: beam bulk and surface layer

[16,17]) is employed. Following the derivation by Gao and Mahmoud [38], the two components of nonvanishing surface stress tensor are given as:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta} &= \left[\tau_0 + (\lambda_0 + \tau_0)\, u_{\gamma,\gamma}\right]\delta_{\alpha\beta} + \mu_0\left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\right) \\ &\quad - \tau_0 u_{\beta,\alpha} \\ \tau_{n\alpha} &= \tau_0 u_{n,\alpha}\end{aligned} \tag{4}$$

where $\tau_{\alpha\beta}$ is the in-plane component of the surface stress tensor; $\tau_{n\alpha}$ is the out-of-plane component of the surface stress tensor; u is the surface layer deformation; τ_0 is the residual surface stress under unconstrained conditions; μ_0 and λ_0 are the surface elastic constants. It is noted that, due to the residual surface stress, the finite change in surface area should be considered up to second-order products of strains/displacement gradients as pointed out by Ru [39] and Shaat et al. [40]. Following Limkatanyu et al. [36] and Gao and Mahmoud [38], the constitutive relations of surface layer of the rectangular cross-sectional beam can be expressed in terms of the beam-section curvature $\kappa(x) = \mathrm{d}^2 v(x)/\mathrm{d}x^2$ and the beam-section rotation $\gamma(x) = \mathrm{d}v(x)/\mathrm{d}x$ as:

$$\tau_{xx}(x, y) - \tau_0 = -yE^s_{xx}\kappa(x) \quad \text{and} \quad \tau_{nx}(x) = \tau_0 n_y \gamma(x) \tag{5}$$

where $\tau_{xx}(x, y)$ is the in-plane component of the surface stress tensor; $\tau_{nx}(x)$ is the out-of-plane component of the surface stress tensor; E^s_{xx} is surface elastic constant and can be obtained via atomistic simulations [41]; and n_y is the y-component of the unit outward normal vector to the beam-section lateral surface. It is worth pointing out that for the planar Euler–Bernoulli beam theory, the out-of-plane shear stress component on the two lateral surfaces of a beam can be omitted. More details of this issue can be found in Gao [42] and Gao et al. [43].

Imposing the beam-section equilibrium conditions and employing the beam bulk and surface constitutive relations of Eqs. (2) and (5), the beam-section constitutive relations are:

$$M(x) = (IE)_{\text{eff}}\,\kappa(x) \quad \text{and} \quad V_{\tau_{nx}}(x) = (GA)_{\text{eff}}\,\gamma(x) \tag{6}$$

where $M(x)$ and $V_{\tau_{nx}}(x)$ are the beam-section moment and surface shear force, respectively, and the effective sectional flexural rigidity $(IE)_{\text{eff}}$ and the effective sectional shear rigidity $(GA)_{\text{eff}}$ are defined as:

$$\begin{aligned}(IE)_{\text{eff}} &= \frac{IE(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + E^s_{xx} I_P \quad \text{and} \quad (GA)_{\text{eff}} \\ &= \tau_0 S_P\end{aligned} \tag{7}$$

with $I = \iint_A y^2 \mathrm{d}A$ being the second moment area; $I_P = \oint_\Gamma y^2 \mathrm{d}\Gamma$ being the second moment perimeter; and $S_P =$

$\oint_\Gamma n_y^2 d\Gamma$. It is worth remarking that the effective sectional flexural rigidity $(IE)_{\mathrm{eff}}$ in Eq. (7) also considers the effect of Poisson's ratio in addition to the surface energy effect.

2.2 Nonlocal Beam-Section Constitutive Model with Inclusion of Poisson and Surface Energy Effects

In contrast to the classical elasticity theory, nonlocality in the nonlocal elasticity theory implies that the stress field at a generic point **x** in an elastic body is not only a function of strain at that point but also a function of strains at other points throughout the body [9]. Based on a nonlocal elasticity theory proposed by Eringin [7–9], the constitutive relation between nonlocal stress tensor and local stress tensor of Eq. (1) can be written as:

$$\left[1-(e_0a)^2\nabla^2\right]t_{ij}=\sigma_{ij}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij} \tag{8}$$

where (e_0a) represents the nonlocal scale parameter and can be obtained from correlation between the model results and analytical or experimental results; ∇^2 is the Laplacian operator; and t_{ij} is the nonlocal stress tensor.

Following a similar derivation performed by Peddieson et al. [23] and Lu et al. [44], the bending constitutive model for nonlocal beam-section with inclusion of Poisson and surface effects is:

$$\kappa(x)=\frac{M(x)}{(IE)_{\mathrm{eff}}}=\frac{M^{\mathrm{NL}}(x)}{(IE)_{\mathrm{eff}}}-\frac{(e_0a)^2}{(IE)_{\mathrm{eff}}}\frac{\mathrm{d}^2M^{\mathrm{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^2} \tag{9}$$

where $M(x)$ represents the local bending moment associated with the local stress tensor σ_{ij} while $M^{\mathrm{NL}}(x)$ represents the nonlocal bending moment corresponding to the nonlocal stress tensor t_{ij}.

It can be observed that the nonlocal constitutive relation of Eq. (9) nicely separates the beam-section curvature and beam-section nonlocal moment on each side of the equation. This feature is well suited to the proposed model derived based on the force interpolation function which is not available in the displacement-based model. Furthermore, the beam-section curvature $\kappa(x)$ is expressed in terms of the nonlocal bending moment $M^{\mathrm{NL}}(x)$. This is an essential feature when the virtual force principle is collaborated with the nonlocal elasticity theory to formulate the nonlocal beam model as presented in the present paper.

2.3 Elastic Substrate Medium

In this paper, interaction between the beam and underlying elastic substrate medium is represented by the Winkler foundation model [37]. Following the Winkler-like model, the elastic substrate medium is replaced by a set of continuously distributed noninterconnected elastic substrate springs. The constitutive relation of the elastic substrate spring is:

$$D_s(x)=k_s\Delta_s(x) \tag{10}$$

where k_s is the elastic substrate modulus known as subgrade reaction coefficient [45]; $D_s(x)$ is the elastic substrate force; and $\Delta_s(x)$ is the elastic substrate deformation and is equal to the beam transverse displacement $v(x)$ following the Winkler foundation hypothesis [37].

3 Governing Differential Equations of Nonlocal Beams on Elastic Substrate Media with Inclusion of Surface Energy Effect

3.1 Differential Equilibrium Equation: The Virtual Displacement Approach

In this paper, the virtual displacement principle is used to consistently work out the governing differential equilibrium equation as well as natural boundary conditions of a nonlocal beam resting on elastic substrate medium with inclusion of surface effect as shown in Fig. 2. The virtual displacement equation reads:

$$\delta W=\delta W_{\mathrm{int}}+\delta W_{\mathrm{ext}}=0 \tag{11}$$

where δW is the system total virtual work; and δW_{int} and δW_{ext} are the system internal and external virtual work expressions, respectively, and can be written as (Limkatanyu et al. [35,36]):

$$\delta W_{\mathrm{int}}=\int_L M(x)\delta\kappa(x)\,\mathrm{d}x+\int_L V_{\tau_{nx}}(x)\delta\gamma(x)\,\mathrm{d}x+\int_L D_s(x)\,\delta\Delta_s(x)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

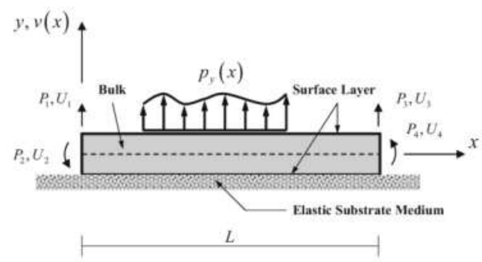


Fig. 2 Nonlocal beam on elastic substrate medium with inclusion of surface effect

$$\delta W_{\text{ext}} = -\int_L p_y(x)\,\delta v(x)\,\mathrm{d}x - \delta\mathbf{U}^T\mathbf{P} \tag{13}$$

where $p_y(x)$ is the transverse distributed load; the vector $\mathbf{P} = \{P_1\ P_2\ P_3\ P_4\}^T$ contains shear forces and moments acting at element ends; and the vector $\mathbf{U} = \{U_1\ U_2\ U_3\ U_4\}^T$ contains their conjugate work displacements and rotations.

Imposing the beam and elastic substrate compatibility conditions, the virtual work expression of Eq. (10) can be rewritten as:

$$\int_L M(x)\frac{\mathrm{d}^2\delta v(x)}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x + \int_L V_{\tau_{nx}}(x)\frac{d\delta v(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \int_L D_s(x)\,\delta v(x)\,\mathrm{d}x - \int_L p_y(x)\,\delta v(x)\,\mathrm{d}x - \delta\mathbf{U}^T\mathbf{P} = 0 \tag{14}$$

Following the derivation by Limkatanyu et al. [35], the governing differential equilibrium equation of the beam-elastic substrate system is obtained as:

$$\frac{\mathrm{d}^2 M(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{dV_{\tau_{nx}}(x)}{\mathrm{d}x} + D_s(x) - p_y(x) = 0: \quad for\ x \in (0, L) \tag{15}$$

The end-boundary force conditions (natural boundary conditions) are also obtained as:

$$P_1 = -\left(-\frac{dM(x)}{\mathrm{d}x} + V_{\tau_{nx}}(x)\right)_{x=0};\ P_2 = -(M(x))_{x=0};$$
$$P_3 = \left(-\frac{dM(x)}{\mathrm{d}x} + V_{\tau_{nx}}(x)\right)_{x=L};\ P_4 = (M(x))_{x=L} \tag{16}$$

It can be observed that the governing differential equilibrium equation of Eq. (15) and the end-force conditions of Eq. (16) are the same as those obtained by Limkatanyu et al. [36] for local beams on elastic substrate media with inclusion of microstructure and surface effects. This is to be expected since the system constitutive relations of Eqs. (6, 9), and (10) have not been employed so far. Thus, the governing differential equilibrium equation and the end-force conditions derived herein are valid for beams on elastic substrate media with inclusion of surface effects regardless of the beam bulk material models (e.g., classical elastic model, modified couple stress model, nonlocal model, etc.).

3.2 Differential Compatibility Equations and End Compatibility Conditions: The Virtual Force Principle

As an alternative way to express the system compatibility equations, the virtual force principle is employed to consistently derive the governing differential compatibility equations as well as end-boundary compatibility conditions of a nonlocal beam resting on elastic substrate medium with inclusion of surface effect.

The virtual force equation reads:

$$\delta W^* = \delta W^*_{\text{int}} + \delta W^*_{\text{ext}} = 0 \tag{17}$$

where δW^* is the system total complementary virtual work; and δW^*_{int} and δW^*_{ext} are the system internal and external complementary virtual work expressions, respectively, and can be written as (Limkatanyu et al. [35,36]):

$$\delta W^*_{\text{int}} = \int_L \delta M(x)\,\kappa(x)\mathrm{d}x + \int_L \delta D_s(x)\,\Delta_s(x)\mathrm{d}x + \int_L \delta V_{\tau_{nx}}(x)\,\gamma(x)\mathrm{d}x \tag{18}$$

$$\delta W^*_{\text{ext}} = -\int_L \delta p_y(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x - \delta\mathbf{P}^T\mathbf{U} \tag{19}$$

Following the procedure employed by Limkatanyu et al. [35], enforcing the governing differential equilibrium of Eq. (15) to eliminate the elastic substrate force $D_s(x)$ and its virtual counterpart $\delta D_s(x)$, and imposing the system constitutive relations of Eqs. (6), (9), and (10), the governing differential compatibility equations of the beam-section curvature and beam-section rotation are obtained as:

$$\frac{1}{(IE)_{\text{eff}}}\left(M^{\text{NL}}(x) - (e_0a)^2\frac{\mathrm{d}^2M^{\text{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^2}\right) + \frac{1}{k_s}\left(\frac{\mathrm{d}^4M^{\text{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^4} - \frac{\mathrm{d}^2p_y(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3V_{\tau_{nx}}(x)}{\mathrm{d}x^3}\right) = 0: \quad \text{for } x \in (0, L) \tag{20}$$

$$\frac{V_{\tau_{nx}}(x)}{(GA)_{\text{eff}}} + \frac{1}{k_s}\left(\frac{\mathrm{d}^3M^{\text{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^3} - \frac{dp_y(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}^2V_{\tau_{nx}}(x)}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0: \quad \text{for } x \in (0, L) \tag{21}$$

The end-boundary compatibility conditions (essential boundary conditions) are also obtained as:

$$U_1 = -\frac{1}{k_s}\left(\frac{\mathrm{d}^2M^{\text{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}V_{\tau_{nx}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} + \frac{1}{k_s}(p_y(x))_{x=0}$$

$$U_2 = \frac{1}{k_s}\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{\tau_{nx}}(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3M^{\text{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^3}\right)_{x=0} + \frac{1}{k_s}\left(\frac{\mathrm{d}p_y(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}$$

$$U_3 = -\frac{1}{k_s}\left(\frac{\mathrm{d}^2 M^{\mathrm{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}V_{\tau_{nx}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L} + \frac{1}{k_s}\left(p_y(x)\right)_{x=L}$$

$$U_4 = \frac{1}{k_s}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V_{\tau_{nx}}(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3 M^{\mathrm{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^3}\right)_{x=L} + \frac{1}{k_s}\left(\frac{\mathrm{d}p_y(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L} \quad (22)$$

It is essential to point out that the governing differential compatibility equations of Eqs. (20) and (21) as well as the end-boundary compatibility conditions of Eq. (22) are expressed in terms of the nonlocal moment $M^{\mathrm{NL}}(x)$. This feature is an important aspect in the nonlocal elasticity since the natural (force) boundary conditions are needed to be expressed in terms of nonlocal resultant forces as remarked by Ma et al. [46] and Shaat [47].

To combine the governing differential compatibility equations of Eqs. (20) and (21) into a single expression, the following relation between the first derivative of the surface shear force $V_{\tau_{nx}}(x)$ and nonlocal bending moment $M^{\mathrm{NL}}(x)$ is needed:

$$\frac{\mathrm{d}V_{\tau_{nx}}(x)}{\mathrm{d}x} = (GA)_{\mathrm{eff}}\frac{\mathrm{d}\gamma(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{(GA)_{\mathrm{eff}}}{(IE)_{\mathrm{eff}}}\left(M^{\mathrm{NL}}(x) - (e_0a)^2\frac{\mathrm{d}^2M^{\mathrm{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^2}\right) \quad (23)$$

Employing Eq. (23), the governing differential compatibility equations of Eqs. (20) and (21) can be written together in a single expression as:

$$\frac{\mathrm{d}^4M^{\mathrm{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^4} + \lambda_1 M^{\mathrm{NL}}(x) - \lambda_2\frac{\mathrm{d}^2M^{\mathrm{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = \lambda_3\frac{\mathrm{d}^2p_y(x)}{\mathrm{d}x^2}: \quad for\ x \in (0, L) \quad (24)$$

where

$$\lambda_1 = \frac{k_s}{(IE)_{\mathrm{eff}} + (e_0a)^2(GA)_{\mathrm{eff}}}$$
$$\lambda_2 = \frac{(GA)_{\mathrm{eff}} + (e_0a)^2 k_s}{(IE)_{\mathrm{eff}} + (e_0a)^2(GA)_{\mathrm{eff}}}$$
$$\lambda_3 = \frac{(IE)_{\mathrm{eff}}}{(IE)_{\mathrm{eff}} + (e_0a)^2(GA)_{\mathrm{eff}}}$$

It is noted that the governing differential compatibility equation of Eq. (24) is in the same form as that obtained by Limkatanyu et al. [35] for beams on Winkler–Pasternak foundation. Consequently, the current problem and the problem of beams on Winkler–Pasternak foundation are closely related. Furthermore, when the effects of nonlocality, Poisson's ratio, and surface energy are all neglected ($(e_0a) = \nu = E^s_{xx} = \tau_0 = 0$), Eq. (24) is reduced to the governing differential compatibility equation of the beam on Winkler foundation as given by Limkatanyu et al. [48].

4 "Exact" Element Stiffness Matrix: Natural Approach

As mentioned earlier, the current problem and the one related to the beam on Winkler–Pasternak foundation are similar. Therefore, the three cases for the homogeneous solution given in Limkatanyu et al. [35] are applicable to Eq. (24). For the sake of completeness, it is worth repeating them here:

$$\left.\begin{aligned} M^{\mathrm{NL}}(x) = {} & c_1\cosh\alpha x\cos\beta x + c_2\sinh\alpha x\cos\beta x \\ & + c_3\cosh\alpha x\sin\beta x + c_4\sinh\alpha x\sin\beta x \end{aligned}\right\} \quad \text{for } \lambda_2 < 2\sqrt{\lambda_1} \quad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} M^{\mathrm{NL}}(x) = {} & c_1e^{\sqrt[4]{\lambda_1}x} + c_2xe^{\sqrt[4]{\lambda_1}x} \\ & + c_3e^{-\sqrt[4]{\lambda_1}x} + c_4xe^{-\sqrt[4]{\lambda_1}x} \end{aligned}\right\} \quad \text{for } \lambda_2 = 2\sqrt{\lambda_1} \quad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} M^{\mathrm{NL}}(x) = {} & c_1\cosh\alpha x\cosh\beta x + c_2\sinh\alpha x\cosh\beta x \\ & + c_3\cosh\alpha x\sinh\beta x + c_4\sinh\alpha x\sinh\beta x \end{aligned}\right\} \quad \text{for } \lambda_2 > 2\sqrt{\lambda_1} \quad (27)$$

where the auxiliary variables α and β are defined as:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2} + \frac{\lambda_2}{4}} \quad \text{and} \quad \beta = \left|\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2} - \frac{\lambda_2}{4}}\right| \quad (28)$$

and c_1, c_2, c_3, and c_4 are constants of integration to be determined by imposing the following force boundary conditions:

$$-\left[\frac{\mathrm{d}M^{\mathrm{NL}}}{\mathrm{d}x} - V_{\tau_{nx}}\right]_{x=0} = P_1; \quad -M^{\mathrm{NL}}(0) = P_2;$$
$$\left[\frac{\mathrm{d}M^{\mathrm{NL}}}{\mathrm{d}x} - V_{\tau_{nx}}\right]_{x=L} = P_3; \quad M^{\mathrm{NL}}(L) = P_4 \quad (29)$$

The analytical solution to the governing differential compatibility equation of Eq. (24) is central to derive the exact moment interpolation functions. The matrix virtual force approach with the exact moment interpolation functions is employed to derive the exact element flexibility matrix, thus resulting in the exact element stiffness matrix via the natural approach (Argyris and Kelsey [49]). Following the aforementioned procedure, Limkatanyu et al. [35] formulated the exact beam-Winkler–Pasternak foundation element and subsequently applied this beam-foundation element to the problem of beams on elastic substrate media with inclusion of microstructure and surface effects (Limkatanyu et al. [36]).

In this paper, the exact beam-Winkler–Pasternak foundation element developed by Limkatanyu et al. [35] is cooperated with the nonlocal elasticity theory and the surface elasticity theory to account for the small-scale effect and size-dependent effect inherent to nanosized structures. The natural approach to construct the exact stiffness equation for nonlocal beams on elastic substrate media with inclusion of surface effect is presented as follows:

The boundary conditions of Eq. (29) need to be imposed to construct the exact force interpolation functions. However, first and third boundary conditions of Eq. (29) need the relation between $V_{\tau_{nx}}(x)$ and $M^{\mathrm{NL}}(x)$ since the nonlocal beam-section bending moment $M^{\mathrm{NL}}(x)$ is the only variable field in the governing differential compatibility equation of Eq. (24). Following the procedure presented in Limkatanyu et al. [35], the surface shear force $V_{\tau_{nx}}(x)$ can be written in terms of the nonlocal beam-section bending moment $M^{\mathrm{NL}}(x)$ as:

$$V_{\tau_{nx}}(x) = \frac{(GA_{\mathrm{eff}})}{k_s}\left(\frac{(GA_{\mathrm{eff}})}{(IE_{\mathrm{eff}})}\left(\frac{dM^{\mathrm{NL}}(x)}{\mathrm{d}x} - (e_0a)^2\frac{\mathrm{d}^3M^{\mathrm{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^3}\right) - \frac{\mathrm{d}^3M^{\mathrm{NL}}(x)}{\mathrm{d}x^3}\right) \tag{30}$$

Enforcing the force boundary conditions of Eq. (29) with the help of Eq. (30), the moment interpolation relation can be written as:

$$M^{\mathrm{NL}}(x) = \mathbf{N}_{BB}(x)\,\mathbf{P} \tag{31}$$

where $\mathbf{N}_{BB}(x) = \lfloor N_{BB1}(x)\ N_{BB2}(x)\ N_{BB3}(x)\ N_{BB4}(x)\rfloor$ is an array containing the moment interpolation functions. The expression of each moment interpolation function for each solution case is given in Appendix "Exact moment interpolation functions". Enforcing the expression of Eq. (30) and differential equilibrium equation of Eq. (15), the surface shear force $V_{\tau_{nx}}(x)$ and elastic substrate force $D_s(x)$ can be written in terms of $\mathbf{P}$ as:

$$V_{\tau_{nx}}(x) = \mathbf{N}_{V_{\tau_{nx}}B}(x)\,\mathbf{P} \tag{32}$$

$$D_s(x) = \mathbf{N}_{D_sB}(x)\,\mathbf{P} \tag{33}$$

where $\mathbf{N}_{V_{\tau_{nx}}B}(x)$ and $\mathbf{N}_{D_sB}(x)$ are arrays containing the surface shear force and elastic substrate force interpolation functions, respectively, and can be expressed in terms of $\mathbf{N}_{BB}(x)$ as:

$$\mathbf{N}_{V_{\tau_{nx}}B}(x) = \frac{(GA_{\mathrm{eff}})}{k_s}\left(\frac{(GA_{\mathrm{eff}})}{(IE_{\mathrm{eff}})}\left(\frac{d\mathbf{N}_{BB}(x)}{\mathrm{d}x} - (e_0a)^2\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{N}_{BB}(x)}{\mathrm{d}x^3}\right) - \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{N}_{BB}(x)}{\mathrm{d}x^3}\right) \tag{34}$$

$$\mathbf{N}_{D_sB}(x) = \frac{(GA_{\mathrm{eff}})}{(IE_{\mathrm{eff}})}\left(\mathbf{N}_{BB}(x) - (e_0a)^2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{N}_{BB}(x)}{\mathrm{d}x^2}\right) - \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{N}_{BB}(x)}{\mathrm{d}x^2} \tag{35}$$

Applying the virtual force expression of Eq. (17), substituting Eqs. (31, 32), and (33), and accounting for the arbitrariness of $\delta\mathbf{P}$ yield the following element flexibility equation:

$$\mathbf{FP} = \mathbf{U} + \mathbf{U}_{p_y} \tag{36}$$

where $\mathbf{F}$ is the element flexibility matrix, defined as:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{BB} + \mathbf{F}_{V_{\tau_{nx}}V_{\tau_{nx}}} + \mathbf{F}_{D_sD_s} - \mathbf{F}_{BB}^{\mathrm{NL}} \tag{37}$$

where $\mathbf{F}_{BB}$, $\mathbf{F}_{V_{\tau_{nx}}V_{\tau_{nx}}}$, $\mathbf{F}_{D_sD_s}$, and $\mathbf{F}_{BB}^{\mathrm{NL}}$ are the beam, residual surface stress, elastic substrate, and nonlocal contributions to the element flexibility matrix, respectively.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{BB} &= \int_L \mathbf{N}_{BB}^T\left(\frac{1}{(IE_{\mathrm{eff}})}\right)\mathbf{N}_{BB}\,\mathrm{d}x\\
\mathbf{F}_{V_{\tau_{nx}}V_{\tau_{nx}}} &= \int_L \mathbf{N}_{V_{\tau_{nx}}B}^T\left(\frac{1}{(GA_{\mathrm{eff}})}\right)\mathbf{N}_{V_{\tau_{nx}}B}\,\mathrm{d}x\\
\mathbf{F}_{D_sD_s} &= \int_L \mathbf{N}_{D_sB}^T\left(\frac{1}{k_s}\right)\mathbf{N}_{D_sB}\,\mathrm{d}x\\
\mathbf{F}_{BB}^{\mathrm{NL}} &= \int_L \mathbf{N}_{BB}^T\left(\frac{(e_0a)^2}{(IE_{\mathrm{eff}})}\right)\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{N}_{BB}}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{38}$$

It is observed that unlike the expressions of the beam $\mathbf{F}_{BB}$, residual surface stress $\mathbf{F}_{V_{\tau_{nx}}V_{\tau_{nx}}}$, and elastic substrate $\mathbf{F}_{D_sD_s}$ flexibility matrices, the nonlocal flexibility matrix $\mathbf{F}_{BB}^{\mathrm{NL}}$ does not possess a symmetric congruential-transformation form. Therefore, the resulting flexibility matrix $\mathbf{F}$ is unsymmetric. This is in opposition to the element flexibility matrix derived by Limkatanyu et al. [50] for a nonlocal bar embedded in elastic foundation medium. Even though the nonlocal contribution to the element flexibility matrix for a nonlocal bar embedded in elastic foundation medium has also an unsymmetric congruential-transformation form, its resulting nonlocal flexibility matrix is still symmetric due to the invariant nature of its exact force shape functions to the differentiation, thus rendering the total flexibility matrix symmetric. Furthermore, it is worth pointing out that the Poisson's ratio and surface effects are included into the proposed beam-elastic substrate model at the section level through the beam-section rigidities ((IE_{eff}) and (GA_{eff})) while the nonlocal effect is incorporated into the proposed beam-elastic substrate model at the element level through the nonlocal flexibility matrix $\mathbf{F}_{BB}^{\mathrm{NL}}$.

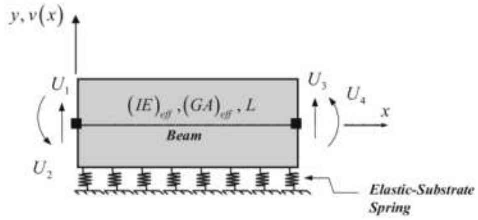


Fig. 3 Beam-elastic substrate element

For the beam-elastic substrate system, it is feasible to derive the complete element stiffness equation simply by inverting the element flexibility equation of Eq. (36). This lies in the fact that the system does not encounter any rigid body motion due to the presence of the underlying elastic substrate medium. Consequently, the element stiffness equation can be derived from Eq. (36) as:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_N\mathbf{U} + \mathbf{P}_{p_y}^{FE} \tag{39}$$

where $\mathbf{K}_N = \mathbf{F}^{-1}$ denotes the complete element stiffness matrix and $\mathbf{P}_{p_y}^{FE} = \mathbf{K}_N\mathbf{U}_{p_y}$ denotes the fixed-end force vector due to $p_y(x)$. It is worth mentioning that the subscript N stands for "Natural". This is due to the fact that the approach employed herein to obtain the element stiffness matrix is known as the natural approach [49]. Furthermore, it should be noted that even though the resulting flexibility matrix $\mathbf{F}$ of the proposed beam-elastic substrate model is unsymmetric, its inversion can be computed efficiently with the computer software Mathematica [51]. This is based on the fact that any square matrix can be decomposed into symmetric and antisymmetric matrices.

Figure 3 shows the configuration of the natural nonlocal beam element on an elastic substrate medium with inclusion of surface effect.

5 Numerical Examples

The cantilever beam-foundation system shown in Fig. 4 is employed in this paper to study the characteristics and behaviors of a silver nanobeam resting on an elastic substrate medium. Influences of several system parameters on contact stiffness and the size-dependent effect on the system response are also investigated. The beam cross section is rectangular with a constant depth-to-width ratio h/b of 2. Material and surface properties of the silver nanobeam come from those used by He and Lilley [24]. The bulk modulus E_{xx} and Poisson ratio ν of the silver nanobeam are 76 and 0.37 GPa, respectively, while its residual surface stress τ_0 and elastic surface modulus E_{xx}^s are 0.89 and 1.22 nN/nm, respectively. These surface properties correspond to the crystallographic direction of [001] as reported by Shenoy [52]. The nonlocal scale parameter, taken as $(e_0a) = 200$ nm, corresponds to the one used by Yang and Lim [53]. These beam bulk material and surface properties of the silver nanobeam are employed in all subsequent simulation cases.

For a rectangular beam section with width b and height h, the sectional geometric properties are:

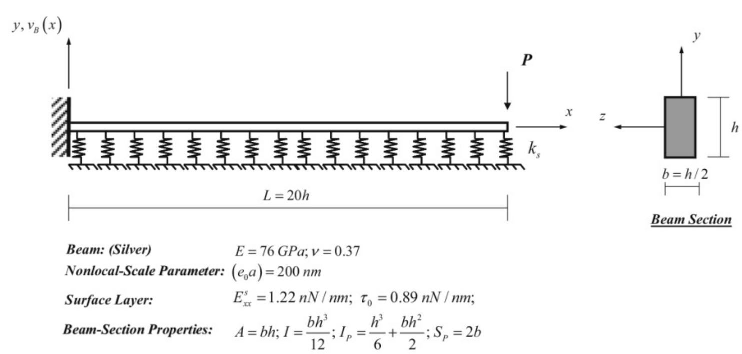
$$A = bh;\ I = \frac{bh^3}{12};\ I_P = \frac{h^3}{6} + \frac{bh^2}{2};\ S_P = 2b \tag{40}$$

For convenience and generality, the following two dimensionless variables are defined:

$$\overline{k}_s = \frac{k_s L^4}{(IE)_{\text{eff}}} \quad \text{and} \quad \overline{P} = \frac{PL^2}{(IE)_{\text{eff}}} \tag{41}$$

The first reflects the substrate stiffness effect while the second normalizes different values of the applied load P. The value of the normalized load parameter $\overline{P} = PL^2/(IE)_{\text{eff}}$ is set to be 1 for all simulation cases.

Fig. 4 Cantilever nanobeam on elastic substrate medium



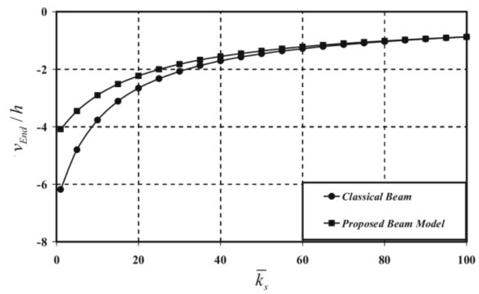


Fig. 5 Normalized beam-end displacements with various normalized substrate stiffness parameters $\bar{k}_s$

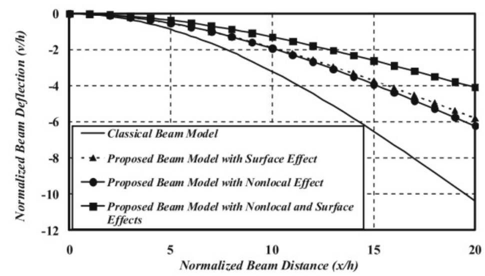


Fig. 6 Normalized beam deflection versus normalized beam distance

5.1 Simulation Case I: Effects of Elastic Substrate Stiffness

The effects of elastic substrate stiffness on the nanobeam-substrate responses are investigated in this simulation case. The beam length L and beam height h are kept at 1000 and 50 , respectively. Different elastic substrate stiffnesses k_s are obtained by varying the normalized elastic substrate stiffness parameter $\bar{k}_s$ from 1 to 100.

Figure 5 compares the beam-end displacements with various normalized substrate stiffness parameters $\bar{k}_s$ computed from the classical beam model and the proposed beam model. The classical beam response is computed merely by neglecting the nonlocal ($(e_0a) = 0$) and surface ($E^s_{xx} = \tau_0 = 0$) effects. Clearly, Fig. 5 indicates that considering the nonlocal and surface effects consistently leads to a stiffer beam-elastic substrate system. However, Fig. 5 also shows that beam-end displacements obtained with the proposed beam model asymptotically approach those obtained with the classical beam model when the elastic substrate medium becomes stiffer. Thus, a stiff elastic substrate medium can diminish the nonlocal and surface effects.

5.2 Simulation Case II: Bending Responses of Beam-Elastic Substrate Systems

In this simulation case, different bending responses of beam-elastic substrate systems with inclusion of nonlocal and/or surface effects are presented. The beam length L and beam height h are 1000 and 50 nm, respectively. To magnify the nonlocal and surface effects, a relatively soft elastic substrate medium ($\bar{k}_s = 1$) is selected. The result is in accordance with observation made in Simulation Case I.

Figure 6 compares the beam deflection responses of beam-elastic substrate systems with inclusion of nonlocal and/or surface effects. The beam deflection response obtained with the classical beam model is also superimposed in the same diagram. It is clear from the figure that either accounting for the nonlocal or the surface effects results in a stiffer beam bending response when compared to the classical beam bending response. Figure 6 also points out that for a set of system parameters given in this simulation case, the influence of beam nonlocality is slightly less than that of surface elasticity.

5.3 Simulation Case III: Comparative Study of Nonlocal and Surface Energy Effects

In this simulation case, comparison between nonlocal and surface effects on system contact stiffness is conducted through parametric studies of the cantilever beam-substrate system shown in Fig. 4. To magnify both nonlocal and surface effects, a relatively soft elastic substrate medium ($\bar{k}_s = 1$) is employed. This is in accordance with observation made in Simulation Case I. Model parameters investigated herein include the beam depth h and the beam length L. The slenderness ration L/h is used to define the beam depth and beam length parameters and varies from 10 to 50. A specified value of slenderness ratio L/h can be obtained by either keeping $L = 1000$ nm and varying h, or keeping $h = 50$ nm and varying L. Figure 7a, b shows the variations of beam surface area/section area ratio (A_S/A_B) and nonlocal scale parameter/beam depth ratio ($(e_0a)/h$) with slenderness ratio L/h, respectively. Subsequently, these two plots are found to be helpful in explaining the simulation results obtained from parametric studies.

Sensitivity analysis of model parameters on the contact stiffness is conducted to compare essence of the nonlocal and surface effects on the system response. Based on the definition by Khajeansari et al. [32] and Jiang and Yan [26], the contact stiffness of a beam-substrate system is simply defined as:

$$K^{\text{end}} = \frac{P_{\text{end}}}{u_{\text{end}}} \tag{42}$$

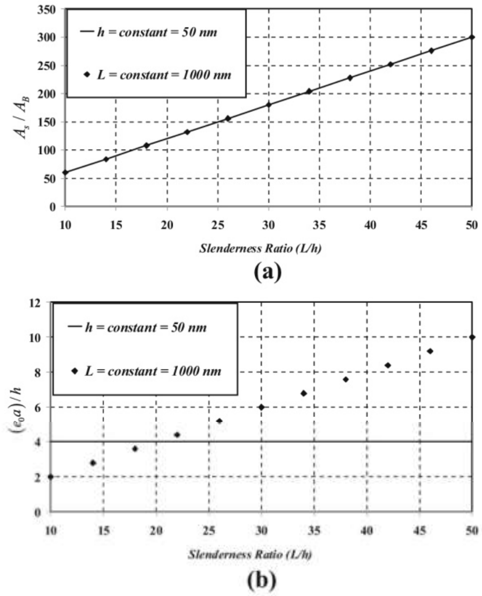


Fig. 7 Variation of beam surface area/section area ratio (A_S/A_B) and nonlocal scale parameter/beam depth ratio ($(e_0a)/h$) with slenderness ratio L/h

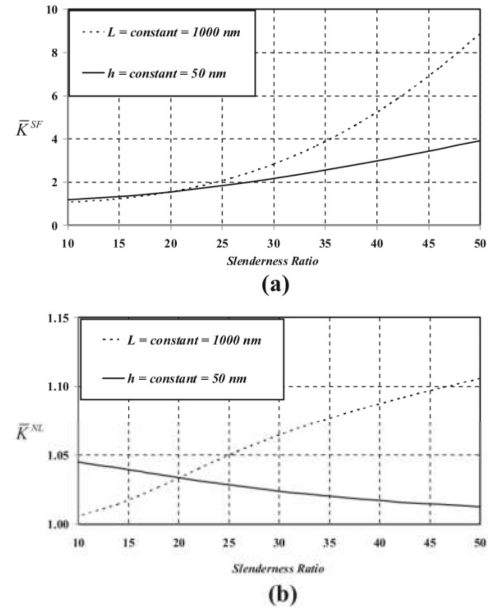


Fig. 8 Variation of normalized stiffness $\overline{K}^{SF}$ and $\overline{K}^{\mathrm{NL}}$ with L/h

where P_{end} and u_{end} are the imposed force and the induced displacement at an end point, respectively.

In this simulation case, two types of normalized contact stiffness are defined and used to measure the essence of the nonlocal and surface effects on the system contact stiffness. The first normalized contact stiffness is used to represent the attribution of the nonlocal effect, and is defined as:

$$\overline{K}^{\mathrm{NL}} = \frac{K^{\mathrm{end}}_{\mathrm{NL\_Sur}}}{K^{\mathrm{end}}_{\mathrm{Sur}}} \tag{43}$$

where $K^{\mathrm{end}}_{\mathrm{NL\_Sur}}$ is the contact stiffness accounting for both the nonlocal and surface effect; and $K^{\mathrm{end}}_{\mathrm{Sur}}$ is the contact stiffness accounting for only the surface effect. The second normalized contact stiffness is employed to represent the ascription of the surface effect, and is defined as:

$$\overline{K}^{SF} = \frac{K^{\mathrm{end}}_{NL\_\mathrm{Sur}}}{K^{\mathrm{end}}_{\mathrm{NL}}} \tag{44}$$

where $K^{\mathrm{end}}_{\mathrm{NL}}$ is the contact stiffness accounting for only the nonlocal effect.

Figure 8a shows influences of the beam length L and beam depth h on the normalized surface contact stiffness $\overline{K}^{SF}$. Generally, it indicates that surface effect becomes more pronounced when the beam slenderness ratio L/h increases. This is in accordance with the observation from Fig. 7a that the beam surface area/section area ratio (A_S/A_B) increases with the beam slenderness ratio L/h, thus rendering the surface effect more dominant. It is worth mentioning that although either increasing the beam length L but retaining the beam depth h at 50 nm, or decreasing the beam depth h but retaining the beam length L at 1000 nm can increase the beam slenderness ratio L/h, their associated magnification of the surface effect is at different rates. The normalized surface contact stiffness $\overline{K}^{SF}$ drastically increases when the beam depth h is reduced with the constant beam length L of 1000 nm. On the other hand, the normalized surface contact stiffness $\overline{K}^{SF}$ gradually increases when the beam length L is lengthened with the constant beam depth h of 50 nm.

Figure 8b shows influences of the beam length L and beam depth h on the normalized nonlocal contact stiffness $\overline{K}^{\mathrm{NL}}$. It is observed that when the beam length L is lengthened with the constant beam depth h of 50 nm, the normalized nonlocal contact stiffness $\overline{K}^{\mathrm{NL}}$ gradually decreases. This is due to the dominance of surface effect with increasing beam surface area/section area ratio (A_S/A_B) when the beam becomes more slender, thus rendering the nonlocal effect less pronounced. On the other hand, the normalized nonlocal contact stiffness $\overline{K}^{\mathrm{NL}}$ increases when the beam depth h is reduced with the constant beam length L of 1000 nm. This resulting magnification of the nonlocal effect is due to the increase in nonlocal scale parameter/beam depth ratio $((e_0a)/h)$ with slenderness ratio L/h as shown in Fig. 7b. However, it is observed that the normalized nonlocal contact stiffness $\overline{K}^{\mathrm{NL}}$ increases with decreasing rate (concave downward). The reduction in the rate of increase in the normalized nonlocal contact stiffness $\overline{K}^{\mathrm{NL}}$ is caused by a more dominant nonlocal effect when the beam depth h is reduced with the constant beam length L of 1000 nm as shown in Fig. 8a.

6 Summary and Conclusions

In this paper, the beam-Winkler–Pasternak foundation model is enhanced with the ability to account for the nanoscale and surface effects. The nonlocal elasticity theory is used to capture the nanosized structure-dependent effect of the beam bulk material, while Gurtin–Murdoch surface theory is employed to account for the surface energy-dependent size effect. Interaction mechanism between the beam and the underlying substrate medium is represented by the Winkler foundation model. A set of governing equations for a nanobeam-elastic substrate system, viz. equilibrium, compatibility, and sectional constitutive relations, are consistently derived. The virtual displacement principle is employed to derive the governing differential equilibrium equation of the nanobeam-elastic substrate system and its associated natural boundary conditions while the virtual force principle is used to work out the governing differential compatibility equations of the nanobeam-elastic substrate system and its associated essential boundary conditions. Sectional force–deformation relations that account for the effects of Poisson's ratio and surface energy are formulated. Similarity between the current problem and the one related to the beam on Winkler–Pasternak foundation is noticed and expedite the model formulation. Therefore, the "natural" Winkler–Pasternak-based beam element previously proposed by the first two authors can be modified to study the problem of beams resting on elastic substrate media with inclusion of nanosized structure and surface effects. Three simulation cases are performed to investigate the nanoscale and surface effects on flexural responses of nanosized beams on elastic substrate media.

In the first simulation case, it points out that considering together the effects of beam nonlocality and surface energy consistently leads to a stiffer beam-elastic substrate system when compared to the classical beam model. However, this stiffening effect diminishes when an underlying elastic substrate medium becomes stiffer.

In order to magnify the nonlocal and surface effects, a relatively soft elastic substrate medium is considered in the second simulation case. It shows that both nonlocal and surface effects result in a stiffer flexural response when compared to the classical beam model with a slightly more dominance of surface effect for a set of system parameters investigated in this simulation case.

In the third simulation case, the essences of nonlocal and surface effects are assessed and compared through parametric studies of beam slenderness ratio by varying the beam height h and/or the beam length L. The simulation results conclude that surface effect is generally more pronounced than nonlocal effect when the beam becomes more slender especially with a constant beam length L and a reduced beam depth h. This is due to the increase in the beam surface area/section area ratio (A_S/A_B) with the beam slenderness ratio L/h. It is worth mentioning the finding by Limkatanyu et al. [35] that the surface effect is less pronounced than the small-scale effect of the beam bulk material when the system dimension is in the order of micrometer.

One next step in this research direction is to include nonlinearities into both the beam and the substrate medium. Another challenging topic worth investigating in future works is the derivation of consistent mass and geometric stiffness matrices based on proposed beam-substrate medium. Finally, it is anticipated that the beam-substrate medium element developed herein will be useful to scientists and engineers working in the area of nanoscience and nanoengineering.

Acknowledgments This study was partially supported by the Thai Ministry of Education, by the Thailand Research Fund (TRF) under Grant MRG4680109 and Grant RSA5480001, and by the STREAM Research Group under Grant ENG-51-2-7-11-022-S, Faculty of Engineering, Prince of Songkla University. Any opinions expressed in this paper are those of the authors and do not reflect the views of the sponsoring agencies. Special thanks go to a senior lecturer Mr. Wiwat Sutiwipakorn for reviewing and correcting the English of this paper.

Compliance with ethical standards

Conflict of interest

The authors declare that there is no conflict of interests regarding the publication of this article.

Appendix: Exact Moment Interpolation Functions

The moment interpolation functions case $A < 2\sqrt{B}$may be written as:

$$
\begin{aligned}
N_{BB1}(x) &= \frac{-k_s\,(EI)_{\text{eff}}\,2\phi_1 \cosh(\alpha x)\sin(\beta x)\sinh^2(\alpha L)}{-\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3+\phi_1^2\cosh(2\alpha L)+\phi_2^2\cos(2\beta L)} \\
&\quad+\frac{k_s\,(EI)_{\text{eff}}\,[2\phi_2\sin(\beta L)\sin(\beta(L-x))+\phi_1\sin(\beta x)\sinh(2\alpha L)]\sinh(\alpha x)}{-\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3+\phi_1^2\cosh(2\alpha L)+\phi_2^2\cos(2\beta L)} \\
N_{BB2}(x) &= -\cos(\beta x)\cosh(\alpha x)+\frac{-\phi_2\cosh(\alpha x)\sin(\beta x)\,[-\phi_2\sin(2\beta L)-\phi_1\sinh(2\alpha L)]}{\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3-\phi_1^2\cosh(2\alpha L)-\phi_2^2\cos(2\beta L)} \\
&\quad+\frac{\alpha\beta\phi_4\,[\cos(2\beta L)-\cosh(2\alpha L)]\sin(\beta x)\sinh(\alpha x)}{\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3-\phi_1^2\cosh(2\alpha L)-\phi_2^2\cos(2\beta L)}+\frac{\phi_1\,[\phi_2\sin(2\beta L)+\phi_1\sinh(2\alpha L)]\cos(\beta x)\sinh(\alpha x)}{-\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3+\phi_1^2\cosh(2\alpha L)+\phi_2^2\cos(2\beta L)} \\
N_{BB3}(x) &= -\frac{2k_s\,(EI)_{\text{eff}}\,[-\phi_2\cosh(\alpha x)\sin(\beta L)\sin(\beta x)\sinh(\alpha L)]}{-\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3+\phi_1^2\cosh(2\alpha L)+\phi_2^2\cos(2\beta L)} \\
&\quad-\frac{2k_s(EI)_{\text{eff}}\,[\phi_2\cosh(\alpha L)\sin(\beta L)\sin(\beta x)+\phi_1\sin(\beta(L-x))\sinh(\alpha L)]\sinh(\alpha x)}{-\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3+\phi_1^2\cosh(2\alpha L)+\phi_2^2\cos(2\beta L)} \\
N_{BB4}(x) &= \frac{-2\phi_2\cosh(\alpha x)\sin(\beta x)\,[-\phi_2\cosh(\alpha L)\sin(\beta L)-\phi_1\cos(\beta L)\sinh(\alpha L)]}{\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3-\phi_1^2\cosh(2\alpha L)-\phi_2^2\cos(2\beta L)} \\
&\quad+\frac{2\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3\sin(\beta L)\sin(\beta x)\sinh(\alpha L)\sinh(\alpha x)}{-\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3+\phi_1^2\cosh(2\alpha L)+\phi_2^2\cos(2\beta L)} \\
&\quad-\frac{2\phi_1\sinh(\alpha x)\cos(\beta x)\,[-\phi_2\cosh(\alpha L)\sin(\beta L)-\phi_1\cos(\beta L)\sinh(\alpha L)]}{-\left[\alpha^2+\beta^2\right]\phi_3+\phi_1^2\cosh(2\alpha L)+\phi_2^2\cos(2\beta L)}
\end{aligned}
$$

The moment interpolation functions case $A > 2\sqrt{B}$ may be written as:

$$
\begin{aligned}
N_{BB1}(x) &= \frac{k_s\,(EI)_{\text{eff}}\left[-2\phi_5\cosh(\beta x)\sinh(\alpha x)\sinh^2(\beta L)\right]}{-\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7-\phi_6^2\cosh(2\alpha L)+\phi_5^2\cosh(2\beta L)}-\frac{k_s\,(EI)_{\text{eff}}\,[\sinh(\alpha x)\,[\phi_6\sinh(2\alpha L)-\phi_5\sinh(2\beta L)]]\sinh(\beta x)}{-\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7-\phi_6^2\cosh(2\alpha L)+\phi_5^2\cosh(2\beta L)} \\
&\quad+\frac{k_s\,(EI)_{\text{eff}}\left[2\phi_6\cosh(\alpha x)\sinh^2(\alpha L)\right]\sinh(\beta x)}{-\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7-\phi_6^2\cosh(2\alpha L)+\phi_5^2\cosh(2\beta L)} \\
N_{BB2}(x) &= -\cosh(\beta x)\cosh(\alpha x)+\frac{-\phi_6\sinh(\alpha x)\cosh(\beta x)\,[-\phi_6\sinh(2\alpha L)-\phi_5\sinh(2\beta L)]}{\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7+\phi_6^2\cosh(2\alpha L)-\phi_5^2\cosh(2\beta L)} \\
&\quad+\frac{\alpha\beta\phi_8\,[\cosh(2\alpha L)-\cosh(2\beta L)]\sinh(\beta x)\sinh(\alpha x)}{\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7+\phi_6^2\cosh(2\alpha L)-\phi_5^2\cosh(2\beta L)}-\frac{-\phi_5\sinh(\beta x)\cosh(\alpha x)\,[-\phi_6\sinh(2\alpha L)-\phi_5\sinh(2\beta L)]}{\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7+\phi_6^2\cosh(2\alpha L)-\phi_5^2\cosh(2\beta L)} \\
N_{BB3}(x) &= \frac{2k_s\,(EI)_{\text{eff}}\,[-\phi_6\cosh(\beta x)\sinh(\alpha L)\sinh(\alpha x)\sinh(\beta L)]}{\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7+\phi_6^2\cosh(2\alpha L)-\phi_5^2\cosh(2\beta L)} \\
&\quad-\frac{2k_s\,(EI)_{\text{eff}}\,[-\phi_6\cosh(\beta L)\sinh(\alpha L)\sinh(\alpha x)]\sinh(\beta x)}{\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7+\phi_6^2\cosh(2\alpha L)-\phi_5^2\cosh(2\beta L)} \\
&\quad-\frac{2k_s\,(EI)_{\text{eff}}\,[-\phi_5\sinh(\alpha(L-x))\sinh(\beta L)]\sinh(\beta x)}{\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7+\phi_6^2\cosh(2\alpha L)-\phi_5^2\cosh(2\beta L)} \\
N_{BB4}(x) &= \frac{-2\phi_6\cosh(\beta x)\sinh(\alpha x)\,[-\phi_6\cosh(\beta L)\sinh(\alpha L)-\phi_5\cosh(\alpha L)\sinh(\beta L)]}{\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7+\phi_6^2\cosh(2\alpha L)-\phi_5^2\cosh(2\beta L)} \\
&\quad+\frac{2\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7\sinh(\alpha L)\sinh(\alpha x)\sinh(\beta L)\sinh(\beta x)}{\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7+\phi_6^2\cosh(2\alpha L)-\phi_5^2\cosh(2\beta L)} \\
&\quad-\frac{-2\phi_5\sinh(\beta x)\cosh(\alpha x)\,[-\phi_6\cosh(\beta L)\sinh(\alpha L)-\phi_5\cosh(\alpha L)\sinh(\beta L)]}{\left[\alpha^2-\beta^2\right]\phi_7+\phi_6^2\cosh(2\alpha L)-\phi_5^2\cosh(2\beta L)}
\end{aligned}
$$

The moment interpolation functions case $A = 2\sqrt{B}$ may be written as:

$$
\begin{aligned}
&N_{BB1}(x) \\
&= \frac{1}{\phi_9}\Big[e^{-\sqrt[4]{B}x} k_s (EI)_{\text{eff}} \Big[3\sqrt{B}\phi_{10}\eta_2 (GA)_{\text{eff}} (EI)_{\text{eff}}\, x \\
&\quad + \phi_{10}\eta_2 \Big[k_s (EI)_{\text{eff}} - (GA)^2_{\text{eff}}\Big] x\Big]\Big] \\
&\quad + \frac{1}{\phi_9}\Big[e^{-\sqrt[4]{B}x} k_s (EI)_{\text{eff}} [\phi_{11}\eta_1 L [L - x] \\
&\quad + \phi_{12}\eta_1 L [L - x]]\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&N_{BB2}(x) \\
&= \frac{1}{\phi_9}\Big[e^{-\sqrt[4]{B}x} e^{-2\sqrt[4]{B}x}\Big[(EI)^2_{\text{eff}}\Big[B (GA)^2_{\text{eff}}\,\eta_5 \\
&\quad + k_s\eta_7 + k_s^2\eta_3\Big]\Big]\Big] + \frac{1}{\phi_9}\Big[e^{-\sqrt[4]{B}x} e^{-2\sqrt[4]{B}x} \\
&\quad \times \Big[-2 (EI)_{\text{eff}} (GA)^2_{\text{eff}} [\eta_{12} + k_s\eta_3] + (GA)^4_{\text{eff}}\,\eta_3\Big]\Big] \\
&\quad + \frac{1}{\phi_9}\Big[e^{-\sqrt[4]{B}x}\Big[e^{2\sqrt[4]{B}L}\Big[(GA)^4_{\text{eff}}\,\eta_4 \\
&\quad - 2 (EI)_{\text{eff}} (GA)^2_{\text{eff}} [\eta_{11} + k_s\eta_4]\Big]\Big]\Big] \\
&\quad + \frac{1}{\phi_9}\Big[e^{-\sqrt[4]{B}x}\Big[e^{2\sqrt[4]{B}L}\Big[(EI)^2_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[(GA)^2_{\text{eff}}\,\eta_4 + k_s\eta_8 + B (GA)^2_{\text{eff}}\,\eta_6\Big]\Big]\Big]\Big] \\
&\quad + \frac{1}{\phi_9}\Big[e^{-\sqrt[4]{B}x}\Big[e^{-2\sqrt[4]{B}x}\phi_{13}\eta_9 - e^{-\sqrt[4]{B}L}\phi_{13}\eta_{10}\Big]\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&N_{BB3}(x) \\
&= -\frac{1}{\phi_9}\Big[e^{\sqrt[4]{B}(L-x)} k_s (EI)_{\text{eff}}\Big[(EI)_{\text{eff}} [k_s [\phi_{10}\eta_1 x + L\eta_{13}] \\
&\quad + \sqrt{B} (GA)_{\text{eff}} [3\phi_{10}\eta_1 x + L\eta_{14}]]\Big]\Big] \\
&\quad - \frac{1}{\phi_9}\Big[e^{\sqrt[4]{B}(L-x)} k_s (EI)_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[-(GA)^2_{\text{eff}} [\phi_{10}\eta_1 x + L\eta_{13}]\Big]\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&N_{BB4}(x) \\
&= \frac{1}{\phi_9}\Big[e^{\sqrt[4]{B}(L-x)}\Big[-(GA)^4_{\text{eff}}\,\eta_{15} \\
&\quad + 2 (GA)^2_{\text{eff}} (EI)_{\text{eff}}\Big[k_s\eta_{15} + \sqrt{B} (GA)_{\text{eff}}\,\eta_{16}\Big]\Big]\Big] \\
&\quad \times \frac{1}{\phi_9}\Big[e^{\sqrt[4]{B}(L-x)}\Big[-(EI)^2_{\text{eff}}\Big[k_s^2\eta_{15} \\
&\quad + 2\sqrt{B} k_s (GA)_{\text{eff}}\,\eta_{16} + B (GA)^2_{\text{eff}}\,\eta_{17}\Big]\Big]\Big]
\end{aligned}
$$

where

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \beta\Big[(GA)^2_{\text{eff}} - (EI)_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[k_s + 3 (GA)_{\text{eff}}\,\alpha^2 - (GA)_{\text{eff}}\,\beta^2\Big]\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &= \alpha\Big[(GA)^2_{\text{eff}} - (EI)_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[k_s + (GA)_{\text{eff}}\,\alpha^2 - 3 (GA)_{\text{eff}}\,\beta^2\Big]\Big] \\
\phi_3 &= (GA)^2_{\text{eff}} - 2 (EI)_{\text{eff}} (GA)^4_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[k_s + (GA)_{\text{eff}}\Big[\alpha^2 - \beta^2\Big]\Big] \\
&\quad + (EI)^2_{\text{eff}}\Big[k_s^2 + 2k_s (GA)_{\text{eff}}\Big[\alpha^2 - \beta^2\Big] \\
&\quad + (GA)^2_{\text{eff}}\Big[\alpha^2 + \beta^2\Big]^2\Big] \\
\phi_4 &= (GA)^4_{\text{eff}} - 2 (EI)_{\text{eff}} \\
&\quad \times (GA)^2_{\text{eff}}\Big[k_s + 2 (GA)_{\text{eff}}\Big[\alpha^2 - \beta^2\Big]\Big] \\
&\quad + (EI)^2_{\text{eff}}\Big[k_s^2 + 4k_s (GA)_{\text{eff}}\Big[\alpha^2 - \beta^2\Big] \\
&\quad + (GA)^2_{\text{eff}}\Big[3\alpha^4 - 10\alpha^2\beta^2 + 3\beta^4\Big]\Big] \\
\phi_5 &= \alpha\Big[(GA)^2_{\text{eff}} - (EI)_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[k_s + (GA)_{\text{eff}}\,\alpha^2 + 3 (GA)_{\text{eff}}\,\beta^2\Big]\Big] \\
\phi_6 &= \beta\Big[(GA)^2_{\text{eff}} - (EI)_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[k_s + 3 (GA)_{\text{eff}}\,\alpha^2 + (GA)_{\text{eff}}\,\beta^2\Big]\Big] \\
\phi_7 &= (GA)^4_{\text{eff}} - 2 (EI)_{\text{eff}} (GA)^2_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[k_s + (GA)_{\text{eff}}\Big[\alpha^2 + \beta^2\Big]\Big] \\
&\quad + (EI)^2_{\text{eff}}\Big[k_s^2 + 2k_s (GA)_{\text{eff}}\Big[\alpha^2 + \beta^2\Big] \\
&\quad + (GA)^2_{\text{eff}}\Big[\alpha^2 - \beta^2\Big]^2\Big] \\
\phi_8 &= (GA)^4_{\text{eff}} - 2 (EI)_{\text{eff}} (GA)^2_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[k_s + 2 (GA)_{\text{eff}}\Big[\alpha^2 + \beta^2\Big]\Big] \\
&\quad + (EI)^2_{\text{eff}}\Big[k_s^2 + 4k_s (GA)_{\text{eff}}\Big[\alpha^2 + \beta^2\Big] \\
&\quad + (GA)^2_{\text{eff}}\Big[3\alpha^4 + 10\alpha^2\beta^2 + 3\beta^4\Big]\Big] \\
\phi_9 &= -2 (GA)^2_{\text{eff}} (EI)_{\text{eff}}\Big[k_s\Big[1 + e^{4\sqrt[4]{B}L} \\
&\quad - 2e^{2\sqrt[4]{B}L}\Big[1 + 2\sqrt{B}L^2\Big]\Big]\Big] \\
&\quad + 2 (GA)^2_{\text{eff}} (EI)_{\text{eff}}\Big[\sqrt{B} (GA)_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[-3 - 3e^{4\sqrt[4]{B}L} + e^{2\sqrt[4]{B}L}\Big[6 + 4\sqrt{B}L^2\Big]\Big]\Big] \\
&\quad - 2\sqrt{B} k_s (GA)_{\text{eff}} (EI)^2_{\text{eff}} \\
&\quad \times \Big[-3 - 3e^{4\sqrt[4]{B}L} + e^{2\sqrt[4]{B}L}\Big[6 + 4\sqrt{B}L^2\Big]\Big] \\
&\quad + (EI)^2_{\text{eff}}\Big[-B (GA)^2_{\text{eff}}\Big[-9 - 9e^{4\sqrt[4]{B}L} \\
&\quad + 2e^{2\sqrt[4]{B}L}\Big[9 + 2\sqrt{B}L^2\Big]\Big]\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (EI)^2_{\mathrm{eff}} \left[k_s^2\left[1 + e^{4\sqrt[4]{B}L}\right.\right.\\
&\left.\left.-2e^{2\sqrt[4]{B}L}\left[1+2\sqrt{B}L^2\right]\right]\right]\\
&+ (GA)^4_{\mathrm{eff}} \left[1 + e^{4\sqrt[4]{B}L}\right.\\
&\left.-2e^{2\sqrt[4]{B}L}\left[1+2\sqrt{B}L^2\right]\right]
\end{aligned}
$$

$$\phi_{10} = -1 + e^{2\sqrt[4]{B}L};$$

$$\phi_{11} = -2\,(GA)_{\mathrm{eff}}\,(EI)_{\mathrm{eff}}\,\sqrt[4]{B^3}e^{2\sqrt[4]{B}L};$$

$$\phi_{12} = -2\sqrt[4]{B}e^{2\sqrt[4]{B}L}\left[k_s\,(EI)_{\mathrm{eff}} - (GA)^2_{\mathrm{eff}}\right];$$

$$\phi_{13} = -\,(GA)^2_{\mathrm{eff}} + (EI)_{\mathrm{eff}}\left[k_s + 3\sqrt{B}\,(GA)_{\mathrm{eff}}\right]$$

$$\eta_1 = -1 + e^{2\sqrt[4]{B}x};$$

$$\eta_2 = e^{2\sqrt[4]{B}L} - e^{2\sqrt[4]{B}x};$$

$$\eta_3 = 1 + 2\sqrt{B}L\,[L-x] + \sqrt[4]{B}\,[2L-x];$$

$$\eta_4 = 1 + 2\sqrt{B}L\,[L-x] + \sqrt[4]{B}\,[-2L+x];$$

$$\eta_5 = 9 + 2\sqrt{B}L\,[L-x] + \sqrt[4]{B}\,[6L-3x];$$

$$\eta_6 = 9 + 2\sqrt{B}L\,[L-x] + \sqrt[4]{B}\,[-6L+3x]$$

$$
\begin{aligned}
\eta_7 &= 6\,(GA)_{\mathrm{eff}}\sqrt{B} + 4B\,(GA)_{\mathrm{eff}}\,L\,[L-x]\\
&\quad + (GA)_{\mathrm{eff}}\sqrt[4]{B^3}\,[8L-4x]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_8 &= 6\,(GA)_{\mathrm{eff}}\sqrt{B} + 4B\,(GA)_{\mathrm{eff}}\,L\,[L-x]\\
&\quad + (GA)_{\mathrm{eff}}\sqrt[4]{B^3}\,[-8L+4x]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_9 &= (GA)^2_{\mathrm{eff}}\left[1-\sqrt[4]{B}x\right] + (EI)_{\mathrm{eff}}\left[\sqrt{B}\,(GA)_{\mathrm{eff}}\right.\\
&\quad\left.\times\left[-3+\sqrt[4]{B}x\right] + k_s\left[-1+\sqrt[4]{B}x\right]\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{10} &= -\,(GA)^2_{\mathrm{eff}}\left[1+\sqrt[4]{B}x\right]\\
&\quad + (EI)_{\mathrm{eff}}\left[k_s + k_s\sqrt[4]{B}x + (GA)_{\mathrm{eff}}\sqrt{B}\left[3+\sqrt[4]{B}x\right]\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{11} &= 3\,(GA)_{\mathrm{eff}}\sqrt{B} + 2B\,(GA)_{\mathrm{eff}}\,L\,[L-x]\\
&\quad + 2\,(GA)_{\mathrm{eff}}\sqrt[4]{B^3}\,[-2L+x]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{12} &= 3\,(GA)_{\mathrm{eff}}\sqrt{B} + 2B\,(GA)_{\mathrm{eff}}\,L\,[L-x]\\
&\quad + 2\,(GA)_{\mathrm{eff}}\sqrt[4]{B^3}\,[2L-x]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{13} &= -1 - e^{2\sqrt[4]{B}(L+x)} + e^{2\sqrt[4]{B}x}\left[1-2\sqrt[4]{B}x\right]\\
&\quad + e^{2\sqrt[4]{B}L}\left[1+2\sqrt[4]{B}x\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{14} &= -3 - 3e^{2\sqrt[4]{B}(L+x)} + e^{2\sqrt[4]{B}x}\left[3-2\sqrt[4]{B}x\right]\\
&\quad + e^{2\sqrt[4]{B}L}\left[3+2\sqrt[4]{B}x\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{15} &= -1 + \sqrt[4]{B}\,[L-x]\\
&\quad + e^{2\sqrt[4]{B}(L+x)}\left[-1+\sqrt[4]{B}\,[-L+x]\right]\\
&\quad + e^{2\sqrt[4]{B}x}\left[1+2\sqrt{B}Lx-\sqrt[4]{B}\,[L+x]\right]\\
&\quad + e^{2\sqrt[4]{B}L}\left[1+2\sqrt{B}Lx+\sqrt[4]{B}\,[L+x]\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{16} &= -3 + 2\sqrt[4]{B}\,[L-x]\\
&\quad + e^{2\sqrt[4]{B}(L+x)}\left[-3-2\sqrt[4]{B}\,[L-x]\right]\\
&\quad + e^{2\sqrt[4]{B}x}\left[3+2\sqrt{B}Lx-2\sqrt[4]{B}\,[L+x]\right]\\
&\quad + e^{2\sqrt[4]{B}L}\left[3+2\sqrt{B}Lx+2\sqrt[4]{B}\,[L+x]\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{17} &= -9 + 3\sqrt[4]{B}\,[L-x]\\
&\quad - 3e^{2\sqrt[4]{B}(L+x)}\left[3+\sqrt[4]{B}\,[L-x]\right]\\
&\quad + e^{2\sqrt[4]{B}x}\left[9+2\sqrt{B}Lx-3\sqrt[4]{B}\,[L+x]\right]\\
&\quad + e^{2\sqrt[4]{B}L}\left[9+2\sqrt{B}Lx+3\sqrt[4]{B}\,[L+x]\right]
\end{aligned}
$$

References

1. Bhushan, B.: Springer Handbook of Nanotechnology. 3rd edn. Springer, New York (2010)
2. Lee, U.; Oh, H.: Evaluation of the structural properties of single-walled carbon nanotubes using a dynamic continuum modeling method. Mech. Adv. Mater. Struct. **15**(2), 79–87 (2008)
3. Truesdell, C.; Noll, W.: The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Springer, Berlin (1992)
4. Mindlin, R.D.; Tiersten, H.F.: Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. **11**, 415–448 (1962)
5. Kröner, E.: Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. Int. J. Solids Struct. **3**(5), 731–742 (1967)
6. Edelen, D.G.B.; Green, A.E.; Laws, N.: Nonlocal continuum mechanics. Arch. Ration. Mech. Anal. **43**(1), 36–44 (1971)
7. Eringen, A.C.: Nonlocal polar elastic continua. Int. J. Eng. Sci. **10**(1), 1–16 (1972)
8. Eringen, A.C.: On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. J. Appl. Phys. **54**(9), 4703–4710 (1983)
9. Eringen, A.C.: Nonlocal Continuum Field Theories. Springer, New York (2002)
10. Eringen, A.C.; Edelen, D.G.B.: On nonlocal elasticity. Int. J. Eng. Sci. **10**(3), 233–248 (1972)
11. Pinyochotiwong, Y.; Rungamornrat, J.; Senjuntichai, T.: Rigid frictionless indentation on elastic half space with influence of surface stresses. Int. J. Eng. Sci. **71**, 15–35 (2013)
12. Gibbs, J.W.: The Scientific Papers of J. Willard Gibbs. vol. 1. Longmans Green, London (1906)
13. Cammarata, R.C.: Surface and interface stress effects in thin films. Prog. Surf. Sci. **46**(1), 1–38 (1994)
14. Cammarata, R.C.: Surface and interface stress effects on interfacial and nanostructured materials. Mat. Sci. Eng. A **237**(2), 180–184 (1997)
15. Fischer, F.D.; Waitz, T.; Vollath, D.; Simha, N.K.: On the role of surface energy and surface stress in phase-transforming nanoparticles. Prog. Mater. Sci. **53**(3), 481–527 (2008)
16. Gurtin, M.E.; Murdoch, I.: A continuum theory of elastic material surface. Arch. Ration. Mech. Anal. **57**(4), 291–323 (1975)
17. Gurtin, M.E.; Murdoch, I.: Surface stress in solids. Int. J. Solids Struct. **14**(6), 431–440 (1978)
18. Cui, Y.; Zhong, Z.; Wang, D.; Wang, W.U.; Lieber, C.M.: High performance silicon nanowire field effect transistors. Nano. Lett. **3**(2), 149–152 (2003)
19. Wang, Z.L.; Song, J.: Piezoelectric nanogenerators based on zinc oxide nanowire arrays. Science **312**(5771), 242–246 (2006)

20. Feng, X.L.; He, R.; Yang, P.; Roukes, M.L.: Very high frequency silicon nanowire electromechanical resonators. Nano. Lett. **7**(7), 1953–1959 (2007)
21. Shaat, M.; Abdelkefi, A.: Pull-in instability of multi-phase nanocrystalline silicon beams under distributed electrostatic force. Int. J. Eng. Sci. **90**, 58–75 (2015)
22. Gupta, A.; Akin, D.: Detection of bacterial cells and antibodies using surface micromachined thin silicon cantilever resonators. J. Vac. Sci. Technol. **22**(6), 2785–2791 (2004)
23. Peddieson, J.; Buchanan, G.R.; McNitt, R.P.: Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. Int. J. Eng. Sci. **41**(3-5), 305–312 (2003)
24. He, J.; Lilley, C.M.: Surface effect on the elastic behavior of static bending nanowires. Nano. Lett. **8**(7), 1798–1802 (2008)
25. Reddy, J.N.: Nonlocal theories for bending buckling and vibration of beams. Int. J. Eng. Sci. **45**(2-8), 288–307 (2007)
26. Jiang, L.Y.; Yan, Z.: Timoshenko beam model for static bending of nanowires with surface effects. Phys. E **42**(9), 2274–2279 (2010)
27. Liu, J.L.; Mei, Y.; Xia, R.; Zhu, W.L.: Large displacement of a static bending nanowire with surface effects. Phys. E **44**(10), 2050–2055 (2012)
28. Alshorbagy, A.E.; Eltaher, M.A.; Mahmoud, F.F.: Static analysis of nanobeams using nonlocal FEM. J. Mech. Sci. Technol. **27**(7), 2035–2041 (2013)
29. Mahmoud, F.F.; Eltaher, M.A.; Alshorbagy, A.E.; Meletis, E.I.: Static analysis of nanobeams including surface effects by nonlocal finite element. J. Mech. Sci. Technol. **26**(11), 3555–3563 (2012)
30. Xiao, J.; Jiang, H.; Khang, D.Y.; Wu, J.; Huang, Y.; Rogers, J.A.: Mechanics of buckled carbon nanotubes on elastomeric substrates. J. Appl. Phys. **104**(3), art. no. 033543 (2008)
31. Zhang, Y.; Zhao, Y.P.: Adhesive contact of nanowires in three-point bending test. J. Adhes. Sci. Technol. **25**, 1107–1129 (2011)
32. Khajeansari, A.; Baradaran, G.H.; Yvonnet, J.: An explicit solution for bending of nanowires lying on Winkler–Pasternak elastic substrate medium based on the Euler–Bernoulli beam theory. Int. J. Eng. Sci. **52**, 115–128 (2012)
33. Malekzadeh, P.; Shojaee, M.: Surface and nonlocal effects on the nonlinear free vibration of non-uniform nanobeams. Compos. Part B Eng. **52**, 84–92 (2013)
34. Zhao, T.; Luo, J.; Xiao, Z.: Buckling analysis of a nanowire lying on Winkler–Pasternak elastic foundation. Mech. Adv. Mater. Struct. **22**(5), 394–401 (2015)
35. Limkatanyu, S.; Damrongwiriyanupap, N.; Kwon, M.; Ponbunyanon, P.: Force-based derivation of exact stiffness matrix for beams on Winkler–Pasternak foundation. Z. Angew. Math. Mech. **95**(2), 140–155 (2015)
36. Limkatanyu, S.; Ponbunyanon, P.; Prachasaree, W.; Kuntiyawichai, K.; Kwon, M.: Correlation between beam onWinkler–Pasternak foundation and beam on elastic substrate medium with inclusion of microstructure and surface effects. J. Mech. Sci. Technol. **28**(9), 3653–3665 (2014)
37. Winkler, E.: Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Dominicus, Prag (1867)
38. Gao, X.L.; Mahmoud, F.F.: A new Bernoulli–Euler beam model incorporating microstructure and surface energy effects. Z. Angew. Math. Phys. **65**, 393–404 (2014)
39. Ru, C.Q.: Simple geometrical explanation of Gurtin–Murdoch model of surface elasticity with clarification of its related versions. J. Phys. Mech. Astron. **53**(3), 536–544 (2010)
40. Shaat, M.; Eltaher, M.A.; Gad, A.I.; Mahmound, F.F.: Nonlinear size-dependent finite element analysis of functionally graded elastic tiny-bodies. Int. J. Mech. Sci. **77**, 356–364 (2013)
41. Miller, R.E.; Shenoy, V.B.: Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. Nanotechnology **11**, 139–147 (2000)
42. Gao, X.L.: A new Timoshenko beam model incorporating microstructure and surface energy effects. Acta. Mech. **226**, 457–474 (2015)
43. Gao, X.L.; Zhang, G.Y.: A microstructure- and surface energy-dependent third-order shear deformation beam model. Z. Angew. Math. Phay. **66**, 1871–1894 (2015)
44. Lu, P.; Lee, H.P.; Lu, C.; Zhang, P.Q.: Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes. Int. J. Solids Struct. **44**(16), 5289–5300 (2007)
45. Terzaghi, K.: Evaluation of coefficients of subgrade reaction. Geotechnique **5**(4), 297–326 (1977)
46. Ma, H.M.; Gao, X.L.; Reddy, J.N.: A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. J. Mech. Phys. Solids **56**, 3378–3391 (2008)
47. Shaat, M.: Iterative nonlocal elasticity for Kirchhoff plates. Int. J. Mech. Sci. **90**, 162–170 (2015)
48. Limkatanyu, S.; Kuntiyawichai, K.; Spacone, E.; Kwon, M.: Natural stiffness matrix for beams on Winkler foundation: exact force-based derivation. Struct. Eng. Mech. **42**(1), 39–53 (2012)
49. Argyris, J.H.; Kelsey, S.: Energy Theorems and Structural Analysis. Butterworths & Co. Ltd., London (1960)
50. Limkatanyu, S.; Prachasaree, W.; Damrongwiriyanupap, N.; Kwon, M.: Exact stiffness matrix for nonlocal bars embedded in elastic foundation media: the virtual force approach. J. Eng. Math. **89**(1), 163–176 (2014)
51. Wolfram, S.: Mathematica Reference Guide. Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City (1992)
52. Shenoy, V.B.: Atomistic calculations of elastic properties of metallic FCC ctrytal surfaces. Phys. Rev. B. **79**(1), art. no. 094104 (2005)
53. Yang, Y.; Lim, C.W.: Non-classical stiffness strengthening size effects for free vibration of a nonlocal nanostructure. Int. J. Mech. Sci. **54**(1), 57–68 (2012)

Ponbunyanon T., Limkatanyu S., and Sae-Long W. 2017. Nano-Sized Beam-Substrate Element with Inclusion of Nonlinear Substrate. *The 1st international (NIC- 2017) KU CSC conference "Innovation and Technology for Quality of Life and Sustainable Society"*. Kasetsart University Chalermphrakiat Sakon Nakhon Province Campus (KUCSC)

Nano-Sized Beam-Substrate Element with Inclusion of Nonlinear Substrate

Thaksakorn Ponbunyanon[1*], Suchart Limkatanyu[1], and Worathep Sae-Long[1]

[1]*Department of Civil Engineering, Prince of Songkla University, 15 Karnjanavanit Soi 7 Rd, Kho Hong, Hat Yai, Songkhla, 90110, Thailand*

**Corresponding author: e-mail: Thaksakorn.p@outlook.co.th*

Abstract

This work presents a beam-substrate system with considering the nano-sized and the nonlinear substrate effects. The nonlocal elasticity theory is used to capture the nanosized-dependent effect of the beam. The interaction between beam and substrate is introduced through the Van der Waals (vdW) force theory based on the Lennard-Jones potential. The finite-element method is employed to obtain the stiffness matrix of the beam on nonlinear elastic substrate element. Consequently, two numerical simulations of a nano-sized beam are used to ascertain the accuracy of this model as well as investigate characteristics and behaviors of the beam-substrate system with inclusion and nonlinear substrate effects.

Keywords: Beam-Substrate Elements; Nonlocal Elasticity; Van der Waals Interaction Force; Finite Element; Nano-Size Beam

ที่ ศธ ๐๕๑๓. ๔๐๑๐๔/๒๓๕๘

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
วิทยาเขตเฉลิมพระเกียรติ จังหวัดสกลนคร
๕๙ หมู่ ๑ ตำบลเชียงเครือ อำเภอเมือง
จังหวัดสกลนคร

๑๒ ธันวาคม ๒๕๖๐

เรื่อง รับรองการนำเสนอบทความทางวิชาการในงานประชุมวิชาการระดับชาติ

เรียน Mr. Thaksakorn Ponbunyanon

ตามที่ท่านได้สมัครเข้าร่วมนำเสนอผลงาน ในการประชุมวิชาการการระดับนานาชาติ ครั้งที่ ๑ "นวัตกรรมและเทคโนโลยีเพื่อคุณภาพชีวิตและสังคมที่ยั่งยืน" (Innovation and Technology for Quality of Life and Sustainable Society) ที่จัดขึ้นในวันที่ ๒๖ พฤศจิกายน ๒๕๖๐ ณ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตเฉลิมพระเกียรติ จังหวัดสกลนคร นั้น

ในการนี้ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตเฉลิมพระเกียรติ จังหวัดสกลนคร ขอรับรองว่าท่านได้นำเสนอผลงานเรื่อง "Nano-Sized Beam-Substrate Element with Inclusion of Nonlinear Substrate" ในการประชุมวิชาการการระดับนานาชาติ ครั้งที่ ๑ "นวัตกรรมและเทคโนโลยีเพื่อคุณภาพชีวิตและสังคม ที่ยั่งยืน" ซึ่งได้รับการพิจารณาคุณภาพผลงานจากคณะกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อตีพิมพ์ใน Proceeding ทั้งนี้กำหนดเสร็จสิ้นกระบวนการในเดือน ธันวาคม ๒๕๖๐

จึงเรียนมาเพื่อโปรดทราบ

ขอแสดงความนับถือ

(ดร.วุธิพงศ์ ภักดีกุล)
รักษาการแทนผู้ช่วยอธิการบดีฝ่ายวิจัยและบริการวิชาการ
ประธานคณะกรรมการอำนวยการโครงการประชุมวิชาการระดับชาติและนานาชาติ ประจำปี ๒๕๖๐

โครงการประชุมวิชาการระดับชาติและนานาชาติ
งานเกษตรแฟร์นนทรีอีสาน ประจำปี ๒๕๖๐
โทรศัพท์ ๐-๔๒๗๒-๕๐๒๓
โทรสาร ๐-๔๒๗๒-๕๐๒๒

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ สกุล นายทักษกร พรบุญญานนท์

รหัสประจำตัวนักศึกษา 5510130009

วุฒิการศึกษา

วุฒิ	ชื่อสถาบัน	ปีที่สำเร็จการศึกษา
วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมโยธา)	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์	2551
วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมโยธา)	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์	2554

ทุนการศึกษา

ทุนบัณฑิตศึกษาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ปีการศึกษา 2555 - 2557

การตีพิมพ์เผยแพร่ผลงาน

Limkatanyu S., Damrongwiriyanupap N., Kwon M., and **Ponbunyanon P**. 2013. Force-based derivation of exact stiffness matrix for beams on Winkler-Pasternak foundation. ZAMM-Z. Angew. Math. Me. 95(2):140-155.

Limkatanyu S., **Ponbunyanon P**., Prachasaree W. Kuntiyawichai K., and Kwon M. 2014. Correlation between beam on Winkler-Pasternak foundation and beam on elastic substrate medium with inclusion of microstructure and surface effects. J. Mech. Sci. Tech. 28(9):3653-3665.

Ponbunyanon P., Limkatanyu S., Kaewjuea W., Prachasaree W., and Chub-Uppakarn T. 2016. A Novel Beam-Elastic Substrate Model with Inclusion of Nonlocal Elasticity and Surface Energy Effects. Arab. J. Sci. Eng. 41(10):4099-4113

Ponbunyanon T., Limkatanyu S., and Sae-Long W. 2017. Nano-Sized Beam-Substrate Element with Inclusion of Nonlinear Substrate. The 1st international (NIC- 2017) KU CSC conference “Innovation and Technology for Quality of Life and Sustainable Society”. Kasetsart University Chalermphrakiat Sakon Nakhon Province Campus (KUCSC).