วิธีเชิงตัวเลขบางแบบสำหรับการคำนวณความผันผวนแฝง

On some Numerical Methods for Implied Volatility Calculation

Prince of Songkla University
Pattani Campus

รอสเมาะห์ นิสะนิ

Rosmoh Nisani

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of

Master of Science in Applied Mathematics

Prince of Songkla University

2560

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

ชื่อวิทยานิพนธ์ วิธีเชิงตัวเลขบางแบบสำหรับการคำนวณความผันผวนแฝง

ผู้เขียน นางสาวรอสเมาะห์ นิสะนิ

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

.....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ อินทรสิทธิ์)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

.....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อารียุทธ สมาแอ)

.....

(ดร.นิฟาตมะห์ มะกาเจ)

คณะกรรมการสอบ

.....ประธานกรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สัตยธรรม)

.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ อินทรสิทธิ์)

.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อารียุทธ สมาแอ)

.....กรรมการ

(ดร.นิฟาตมะห์ มะกาเจ)

.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ครรชิต เชื้อขำ)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

.....

(รองศาสตราจารย์ ดร.ธีระพล ศรีชนะ)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

Prince of Songkla University Pattani Campus

ขอรับรองว่า ผลงานวิจัยนี้มาจากการศึกษาวิจัยของนักศึกษาเอง และได้แสดงความขอบคุณบุคคลที่มีส่วนช่วยเหลือแล้ว

ลงชื่อ.....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ อินทรสิทธิ์)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ลงชื่อ.....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อารียุทธ สมาแอ)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

ลงชื่อ.....

(ดร.นิฟาตมะห์ มะกาเจ)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

ลงชื่อ.....

(นางสาวรอสเมาะห์ นิสะนิ)

นักศึกษา

Prince of Songkla University Pattani Campus

ข้าพเจ้าขอรับรองว่า ผลงานวิจัยนี้ไม่เคยเป็นส่วนหนึ่งในการอนุมัติปริญญาในระดับใดมาก่อน และไม่ได้ถูกใช้ในการยื่นขออนุมัติปริญญาในขณะนี้

ลงชื่อ.....

(นางสาวรอสเมาะห์ นิสะนิ)

นักศึกษา

Prince of Songkla University
Pattani Campus

ชื่อวิทยานิพนธ์ วิธีเชิงตัวเลขบางแบบสำหรับการคำนวณความผันผวนแฝง

ผู้เขียน นางสาวรอสเมาะห์ นิสะนิ

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

ปีการศึกษา 2560

บทคัดย่อ

การคำนวณหาความผันผวนเป็นปัญหาที่สำคัญในทางการเงิน ความผันผวนแฝงเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญตัวหนึ่งที่ใช้ในการหาราคาออปชันทางการเงิน โดยปกติแล้วจะไม่มีสูตรหาความผันผวนแฝงโดยตรง การคำนวณความผันผวนแฝงจัดได้ว่าเป็นการแก้ปัญหาผกผัน งานวิจัยนี้ได้ศึกษาและวิเคราะห์การประมาณหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีเชิงตัวเลข ได้แก่ วิธีนิวตัน วิธีเส้นตัด และวิธีแบ่งครึ่งช่วง หาความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดและวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน โดยประยุกต์ใช้กับข้อมูล SET50 index option จากการศึกษาพบว่า วิธีนิวตันลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็ว แต่ในการคำนวณต้องทราบค่าอนุพันธ์ของออปชันที่มีความซับซ้อน ส่วนวิธีเส้นตัดถ้าเลือกค่าเริ่มต้นไม่ดี อาจจะไม่ลู่เข้าก็ได้ ในขณะที่วิธีแบ่งครึ่งช่วงลู่เข้าสู่ผลเฉลยช้า แต่ลู่เข้าเสมอ นอกจากนี้ได้นำเสนอการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด และวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน

Prince of Songkla University Pattani Campus

Thesis Title	On some Numerical Methods for Implied Volatility Calculation
Author	Miss Rosmoh Nisani
Major Program	Applied Mathematics
Academic Year	2017

ABSTRACT

Volatility calculation is one importance financial problem. Implied volatility is one of the most important parameters used to find options. Normally, there is no direct implied volatility formula. Calculating implied volatility is an inverse problem. In this paper, we study some numerical methods for implied volatility calculation such as Newton's method, secant method and bisection method. We also study the least squares method and the regularization method for the problem of implied volatility calculation. We applying the SET50 index option. We found that the Newton's method converges to a solution fastest but the calculation must know the derivative of option that very complicate. The secant method converges slow and if the initial guesses is not suitable, it may not converge to an exact solution. Finally, the bisection method converges to a solution very slow but always converges. In addition, we showed how to calculate implied volatility by the least squares method and the regularization method.

Prince of Songkla University Pattani Campus

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ อินทรสิทธิ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อารียุทธ สมาแอ และดร.นิฟาตมะห์มะกาเจ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ที่ให้คำแนะนำ ชี้แนะแนวทางการแก้ไขปัญหาต่างๆ จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้เขียนขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบคุณแหล่งทุนสนับสนุนงานวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ ทุนยกเว้นค่าธรรมเนียมการศึกษา จากคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และทุนอุดหนุนการวิจัยเพื่อวิทยานิพนธ์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

ขอขอบพระคุณบุคลากร รวมทั้งนักศึกษา ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่าน ที่มีส่วนช่วยเหลืองานวิจัย และอำนวยความสะดวกในการทำงานตลอดมา อีกทั้งขอขอบคุณกำลังใจที่สำคัญจากครอบครัว ท้ายนี้ขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนช่วยเหลือในงานครั้งนี้

รอสเมาะห์ นิสะนิ

Prince of Songkla University Pattani Campus

สารบัญ

หัวข้อ			หน้า
บทคัดย่อ			(5)
ABSTRACT			(6)
กิตติกรรมประกาศ			(7)
สารบัญ			(8)
รายการตาราง			(11)
รายการรูป			(12)
บทที่ 1	**บทนำ**		1
	1.1	ตราสารอนุพันธ์ทางการเงิน (financial derivative)	1
	1.2	ตราสารสิทธิ (option)	2
	1.3	ผลตอบแทน (payoff) ของออปชันแบบยูโรเปียน	3
	1.4	SET50 index option	6
	1.5	การตั้งราคาออปชัน	7
	1.6	ตัวแบบแบล็ค-โชล (Black-Scholes model)	8
		1.6.1 การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิต (gBm)	8
		1.6.2 การหาผลเฉลยของ SDE	9
		1.6.3 สูตรแบล็ค-โชล	13
		1.6.4 การคำนวณ SET50 index option โดยใช้สูตรแบล็ค-โชล	16
	1.7	สมบัติของสูตรแบล็ค-โชล ($C_{BS}(\sigma)$)	17
		1.7.1 อนุพันธ์ของ $C_{BS}(\sigma)$	17
		1.7.2 $C_{BS}(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้	19
		1.7.3 $C_{BS}(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต	19
	1.8	ความผันผวนแฝง	22

Prince of Songkla University Pattani Campus

สารบัญ (ต่อ)

หัวข้อ		หน้า
	1.9 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	26
บทที่ 2	**ปัญหาผกผันสำหรับการคำนวณความผันผวนแฝง**	27
	2.1 ปัญหาผกผัน	27
	2.2 ปัญหาผกผันสำหรับการคำนวณความผันผวนแฝง	30
	2.3 การมีอยู่และมีหนึ่งเดียวของความผันผวนแฝง	31
	2.4 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเชิงตัวเลข	32
	2.4.1 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตัน	33
	2.4.2 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัด	35
	2.4.3 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วง	37
	2.4.4 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด	40
บทที่ 3	**วิธีเรกูลาร์ไรเซชันสำหรับการคำนวณความผันผวนแฝง**	43
	3.1 ปัญหาที่ตั้งขึ้นมาอย่างดี	43
	3.2 ทิกโฮนอฟเรกูลาร์ไรเซชัน	45
	3.3 วิธีเรกูลาร์ไรเซชันในการคำนวณความผันผวน	46
บทที่ 4	**การคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 index option**	50
	4.1 ข้อมูล SET50 index option	50
	4.2 การคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 ด้วยวิธีเชิงตัวเลข	50
	4.3 ความผันผวนรูปรอยยิ้ม (volatility smile)	52
	4.4 พื้นผิวของความผันผวน (volatility surface)	53
	4.5 การคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด	54
	4.6 การคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 ด้วยวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน	56

Prince of Songkla University Pattani Campus

สารบัญ (ต่อ)

หัวข้อ		หน้า
บทที่ 5	**อภิปรายผลการคำนวณและสรุปผลการวิจัย**	61
5.1	ผลการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเชิงตัวเลข	61
5.2	ผลการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด	62
5.3	ผลการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน	62
63	สรุปผลการวิจัย	63
บรรณานุกรม		65
ภาคผนวก		68
ประวัติผู้เขียน		82

Prince of Songkla University Pattani Campus

รายการตาราง

ตารางที่		หน้า
4.1	ผลการคำนวณความผันผวนแฝงเชิงตัวเลข	51
4.2	ค่าความผันผวนแฝงเชิงตัวเลขใน 6 ช่วงระยะเวลาก่อนวันครบกำหนด	51
4.3	ราคาใช้สิทธิ อายุคงเหลือ และราคา SET50	54
4.4	ราคาเสนอซื้อและเสนอขาย	55
4.5	ค่า v_{ij}	55
4.6	ค่า w_{ij}	56
4.7	ค่า $\varphi_0(m\Delta K, n\Delta T)$	57
4.8	ค่า V และ $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	58
4.9	ค่า φ_1	59
4.10	ค่า φ_8	59

Prince of Songkla University Pattani Campus

รายการรูป

รูปที่		หน้า
1.1	ผลตอบแทนของคอลออปชันแบบยูโรเปียนที่ $K = 100$	4
1.2	ผลตอบแทนของพุตออปชันแบบยูโรเปียนที่ $K = 100$	5
1.3	ราคาของ SET50 index option ตั้งแต่วันที่ 1 ตุลาคม 2557 ถึงวันที่ 31 มีนาคม 2558	6
2.1	ความสัมพันธ์เชิงปริมาณในกระบวนการของตัวแบบ	27
2.2	ลักษณะของปัญหาตรงและปัญหาผกผัน	28
2.3	การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตัน	34
2.4	แผนภูมิสายงานของการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตัน	35
2.5	การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัด	36
2.6	แผนภูมิสายงานของการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัด	37
2.7	การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วง	38
2.8	แผนภูมิสายงานของการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วง	39
4.1	ความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนแฝง (σ) กับ $\hat{C}$	50
4.2	ความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนแฝงกับราคาใช้สิทธิของ SET50	52
4.3	ความผันผวนรูปรอยยิ้มของ SET50	53
4.4	พื้นผิวของความผันผวนของ SET50	54
4.5	ความผันผวน $\varphi_0(K,T)$	57
4.6	ความผันผวน φ_8	60
5.1	ความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma_{imp})$ กับ C_{mkt} จากวิธีเชิงตัวเลข	61
5.2	ความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ v_{ij} จากวิธีกำลังสองน้อยสุด	62
5.3	ความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ v_{ij} จากวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน	63

Prince of Songkla University Pattani Campus

บทที่ 1

บทนำ

ความผันผวน (volatility) มีความหมายเฉพาะในทางคณิตศาสตร์การเงิน ในช่วงที่ตลาดการเงินการลงทุนมีการเปลี่ยนแปลงอย่างมากในราคาสินทรัพย์ที่ลงทุนก็จะกล่าวว่า ตลาดมีความผันผวนมาก ในทางตรงกันข้ามหากตลาดการเงินการลงทุนมีการเปลี่ยนแปลงแต่เพียงเล็กน้อยในราคาสินทรัพย์ที่ลงทุนก็จะกล่าวว่า ตลาดมีความผันผวนน้อย การคำนวณหาค่าความผันผวนเป็นโจทย์วิจัยที่สำคัญข้อหนึ่งที่ได้รับความสนใจเสมอมา ความผันผวนจะเกี่ยวข้องกับราคาของหุ้นและตราสารอนุพันธ์ทางการเงิน โดยเฉพาะออปชันทางการเงิน

Prince of Songkla University Pattani Campus

1.1 ตราสารอนุพันธ์ทางการเงิน (financial derivative)

ตราสารอนุพันธ์ เป็นตราสารทางการเงินประเภทหนึ่งที่มีลักษณะเป็นสัญญาหรือข้อตกลงที่จะซื้อหรือขายสินทรัพย์หรือทรัพย์สินทางการเงินในราคา ปริมาณ และเวลาตามเงื่อนไขที่ตกลงกันไว้ โดยจะทำการมอบทรัพย์สินกันในอนาคต ซึ่งมูลค่าของตราสารอนุพันธ์จะขึ้นกับกระแสเงินของสินทรัพย์อ้างอิง (underlying asset) เช่น เงินตราต่างประเทศ ตราสารหนี้ ตราสารทุน สินค้าโภคภัณฑ์ เช่น โลหะมีค่า สินค้าเกษตร น้ำมัน เป็นต้น

ชาญณรงค์ (2557) ได้แบ่งตราสารอนุพันธ์ทางการเงินออกเป็น 4 ประเภทดังนี้

1. สัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบมาตรฐาน (futures) เป็นสัญญาซื้อขายล่วงหน้าที่ซื้อขายกันในตลาดซื้อขายล่วงหน้าหรือตลาดอนุพันธ์ซึ่งเป็นตลาดที่จัดตั้งขึ้นอย่างเป็นทางการ มีการกำหนดกฎเกณฑ์และเงื่อนไขรายละเอียดของสัญญาที่เป็นมาตรฐานและมีความแน่นอน และประกาศให้ทราบทั่วกัน ผู้ซื้อและผู้ขายจะเจรจาต่อรองการซื้อขายกันเฉพาะราคาที่ระบุในสัญญามาตรฐานนี้เท่านั้น

2. สัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบไม่มาตรฐาน (forward) เป็นสัญญาซื้อขายล่วงหน้าที่เป็น

ข้อตกลงระหว่างผู้ซื้อและผู้ขาย โดยตกลงรายละเอียดต่างๆ ของสัญญาระหว่างกันเอง และเป็นการดำเนินการระหว่างผู้ซื้อและผู้ขายโดยตรง หรือที่เรียกว่า การซื้อขายตลาด OTC (over the counter)

3. ตราสารแลกเปลี่ยน (swap) เป็นสัญญาในการแลกเปลี่ยนสินทรัพย์หรือตัวแปรทางการเงิน เช่น เงินตราต่างประเทศหรืออัตราดอกเบี้ย เป็นต้น

4. ตราสารสิทธิ (option) เป็นสัญญาสิทธิที่จะซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิง ในราคา และระยะเวลาที่กำหนดไว้

งานวิจัยนี้มีส่วนเกี่ยวข้องกับตราสารสิทธิซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.2 ตราสารสิทธิ (option)

ตราสารสิทธิ หรือออปชัน เป็นสัญญาสิทธิระหว่าง 2 ฝ่าย คือ ผู้ตราหรือผู้ขายออปชัน และผู้ซื้อออปชัน ผู้ขายออปชันให้สัญญาว่าจะซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงให้กับผู้ซื้อออปชันตามจำนวน ราคา และเวลาที่กำหนดไว้ ผู้ซื้อออปชันต้องจ่ายพรีเมียม (premium) ให้ผู้ขายออปชันเพื่อแลกกับสิทธิในออปชันที่ต้องการ พรีเมียมออปชันเป็นราคาซื้อขายออปชันนั่นเอง

โดยทั่วไปออปชันแบ่งได้เป็น 2 ชนิด ได้แก่

1. คอลออปชัน (call option) เป็นออปชันที่ให้สิทธิผู้ซื้อในการซื้อสินทรัพย์อ้างอิงในอนาคต

2. พุตออปชัน (put option) เป็นออปชันที่ให้สิทธิผู้ซื้อในการขายสินทรัพย์อ้างอิงในอนาคต

นอกจากนี้ยังสามารถแบ่งออปชันได้เป็น 2 รูปแบบ ได้แก่

1. ออปชันแบบยูโรเปียน (european option) เป็นออปชันที่ผู้ซื้อออปชันใช้สิทธิเมื่อถึงกำหนดเวลาใช้สิทธิตามที่ระบุไว้เท่านั้น

2. ออปชันแบบอเมริกา (american option) เป็นออปชันที่ผู้ซื้อออปชันใช้สิทธิเมื่อไหร่ก็ได้ก่อนครบกำหนดอายุออปชัน

Prince of Songkla University Pattani Campus

เมื่อถึงกำหนดเวลาใช้สิทธิออปชัน ผู้ซื้อออปชันอาจใช้สิทธิหรือไม่ก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับผลต่างของราคาตลาดของสินทรัพย์อ้างอิงกับราคาใช้สิทธิ (strike price) ตามที่ระบุไว้ในออปชัน อย่างไรก็ตามผู้ตราออปชันมีพันธะผูกพันต้องปฏิบัติตามข้อตกลงเมื่อผู้ซื้อออปชันใช้สิทธิในออปชัน

ผู้ตราและผู้ซื้อออปชันมีความเสี่ยงที่จะสูญเสียเงินในการซื้อหรือขายออปชันด้วยกันทั้งสองฝ่าย เมื่อพิจารณาในมุมมองของผู้ตราออปชัน ผู้ตราออปชันอาจจำหน่ายออปชันไม่ได้หากตั้งราคาออปชันสูงมาก แต่หากตั้งราคาออปชันต่ำไป ผู้ตราออปชันอาจต้องขาดทุนจนไม่สามารถปฏิบัติตามสัญญาได้ เช่นเมื่อครบกำหนดใช้สิทธิคอลออปชัน ถ้าราคาตลาดของสินทรัพย์อ้างอิงสูงกว่าราคาใช้สิทธิของสินทรัพย์อ้างอิง ผู้ซื้อออปชันจะใช้สิทธิซื้อสินทรัพย์อ้างอิงตามราคาใช้สิทธิซึ่งต่ำกว่าราคาตลาด ผลต่างของราคาดังกล่าวนี้และจำนวนการใช้สิทธิซื้อสินทรัพย์หากมีจำนวนยิ่งมากเท่าไหร่ จะส่งผลให้ผู้ตราคอลออปชันขาดทุนหรือมีความเสี่ยงมากยิ่งขึ้น ในทางตรงกันข้าม ถ้าราคาตลาดของสินทรัพย์อ้างอิงต่ำกว่าราคาใช้สิทธิของสินทรัพย์อ้างอิงผู้ตราออปชันจะได้รับเพียงค่าพรีเมียมออปชันเท่านั้น โดยที่ผู้ซื้อออปชันจะไม่ใช้สิทธิของออปชันนั้น

เมื่อพิจารณาในมุมมองของผู้ซื้อออปชัน ออปชันเป็นทั้งเครื่องมือป้องกันความเสี่ยงและใช้ในการเก็งกำไรก็ได้ ในแง่มุมแรก ผู้ซื้อออปชันใช้ออปชันในการป้องกันความเสี่ยงจากความสูญเสียที่เกิดจากความผันผวนของสินทรัพย์อ้างอิง เช่นซื้อพุตออปชันเพื่อป้องกันความเสี่ยง ซึ่งคาดการณ์ว่าหุ้นอาจเคลื่อนที่ลดลงในอนาคต หากหุ้นมีราคาลดต่ำลงกว่าราคาใช้สิทธิของออปชัน ผู้ซื้อพุตออปชันจะใช้สิทธิโดยการขายหุ้นให้กับผู้ตราออปชัน เพื่อลดความสูญเสียที่จะเกิดจากการที่หุ้นจะมีราคาลดลงไปอีก ในอีกแง่มุมหนึ่ง ผู้ซื้อออปชันอาจซื้อออปชันเพื่อทำกำไรจากผลต่างของราคาใช้สิทธิกับราคาตลาดของสินทรัพย์อ้างอิง เป็นต้น

ในงานวิจัยฉบับนี้เน้นการศึกษาออปชันแบบยูโรเปียน

1.3 ผลตอบแทน (payoff) ของออปชันแบบยูโรเปียน

กำหนดให้ ψ แทนมูลค่ายุติธรรมของออปชันในเวลา $0 \leq t \leq \infty$ S แทนราคาสินทรัพย์อ้างอิงและ K แทนราคาใช้สิทธิ ออปชันแบบยูโรเปียนเป็นออปชันที่ให้สิทธิผู้ถือออปชันใช้สิทธิได้ในเวลาครบกำหนด $t = T$ เท่านั้น

Prince of Songkla University Pattani Campus

สิทธิในการซื้อคอลออปชันแบบยูโรเปียนแบ่งเป็น 3 กรณี

1. กรณี $S > K$ หมายถึงราคาสินทรัพย์อ้างอิงสูงกว่าราคาใช้สิทธิ ถ้าไม่คำนึงถึงต้นทุนในการทำธุรกรรม ผู้ซื้อออปชันจะทำกำไรได้ $\psi(S,T) = S - K > 0$ ดังนั้นผู้ซื้อออปชันควรเลือกใช้สิทธิในการซื้อสินทรัพย์อ้างอิงนั้นในราคาใช้สิทธิ

2. กรณี $S < K$ หมายถึงราคาสินทรัพย์อ้างอิงต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ ถ้าผู้ซื้อออปชันใช้สิทธินี้จะต้องจ่ายในราคาสูงกว่าราคาตลาด ผู้ซื้อออปชันอาจไม่ใช้สิทธิตามออปชันนี้มักปล่อยให้สัญญาหมดอายุไป จะได้ $\psi(S,T) = 0$

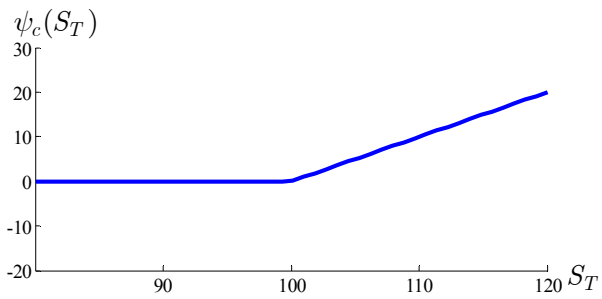
3. กรณี $S = K$ หมายถึงราคาสินทรัพย์อ้างอิงเท่ากับราคาใช้สิทธิ ผู้ซื้อออปชันจะไม่ได้กำไรและไม่ขาดทุนจากการใช้สิทธิซื้อที่ราคานี้ จะได้ $\psi(S,T) = 0$

สรุปได้ว่ามูลค่าของคอลออปชัน ณ เวลาครบกำหนด T เป็นดังนี้

$$\psi_c(S_T) = \max\{S_T - K, 0\} =: (S_T - K)^+$$

เรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันผลตอบแทน (payoff function) ของคอลออปชันแบบยูโรเปียน

ตัวอย่างเช่น คอลออปชันหนึ่งมีราคาใช้สิทธิเท่ากับ 100 บาท เมื่อครบกำหนดใช้สิทธิ ถ้าราคาสินทรัพย์อ้างอิงมากกว่า 100 บาท ผลตอบแทนของออปชันจะเป็นผลต่างระหว่างราคาใช้สิทธิกับสินทรัพย์อ้างอิง ในทางตรงกันข้าม ถ้าราคาสินทรัพย์อ้างอิงต่ำกว่า 100 บาท ผู้ซื้อออปชันจะไม่ใช้สิทธินั้น ปล่อยให้ออปชันหมดอายุไป ทำให้ผลตอบแทนของออปชันเท่ากับ 0 กราฟของฟังก์ชัน $\psi_c(S,T)$ เมื่อ S_T อยู่ในช่วง 0 ถึง 120 แสดงในรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 ผลตอบแทนของคอลออปชันแบบยูโรเปียนที่ $K = 100$

Prince of Songkla University Pattani Campus

จากกราฟ $\psi_c(S,T)$ ในรูปที่ 1.1 เห็นได้ว่า เมื่อ $S_T \in [0,100]$ $\psi_c(S,T)$ จะมีค่าเท่ากับ 0 และเมื่อ $S_T > 100$ $\psi_c(S,T)$ จะมีค่าเท่ากับผลต่างระหว่าง S_T กับ K

ในลักษณะเดียวกันสิทธิในการซื้อพุตออปชันแบบยูโรเปียนแบ่งได้ดังนี้

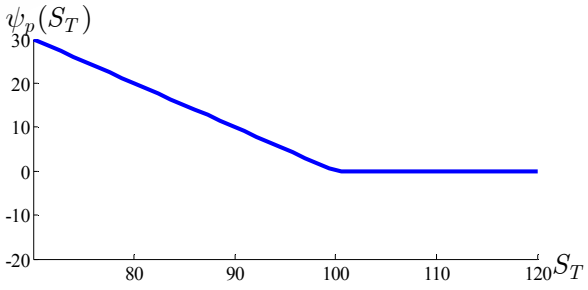
1. กรณี $S \geq K$ หมายถึงราคาสินทรัพย์อ้างอิงสูงกว่าหรือเท่ากับราคาใช้สิทธิ ผู้ถือออปชันจะไม่ใช้สิทธิในการขาย โดยปล่อยให้สัญญาหมดอายุไป ทำให้ $\psi(S,T) = 0$

2. กรณี $S < K$ หมายถึงราคาสินทรัพย์อ้างอิงต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ ถ้าผู้ถือออปชันใช้สิทธิในการขายสินทรัพย์อ้างอิงในราคาใช้สิทธิ จะสามารถทำกำไรได้ $\psi(S,T) = K - S > 0$

ดังนั้นฟังก์ชันผลตอบแทนของพุตออปชันเป็นดังนี้

$$\psi_p(S_T) = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+$$

ตัวอย่างเช่น คอลออปชันหนึ่งมีราคาใช้สิทธิเท่ากับ 100 บาท เมื่อครบกำหนดใช้สิทธิ ถ้าราคาสินทรัพย์อ้างอิงต่ำกว่า 100 บาท ผลตอบแทนของออปชันจะเป็นผลต่างระหว่างราคาใช้สิทธิกับสินทรัพย์อ้างอิง ในทางตรงกันข้าม ถ้าราคาสินทรัพย์อ้างอิงมากกว่า 100 บาท ผู้ซื้อออปชันจะไม่ใช้สิทธินั้น ปล่อยให้ออปชันหมดอายุไป ทำให้ผลตอบแทนของออปชันเท่ากับ 0 กราฟของฟังก์ชัน $\psi_p(S,T)$ เมื่อ S_T อยู่ในช่วง 0 ถึง 120 แสดงในรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 ผลตอบแทนของพุตออปชันแบบยูโรเปียนที่ $K = 100$

จากกราฟ $\psi_p(S,T)$ ในรูปที่ 1.2 เห็นได้ว่า เมื่อ $S_T \in [0,100)$ $\psi_p(S,T)$ จะมีค่าเท่ากับผลต่างระหว่าง S_T กับ K และเมื่อ $S_T \geq 100$ $\psi_c(S,T)$ จะมีค่าเท่ากับ 0

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาออปชันแบบยูโรเปียนที่มี SET50 เป็นหลักทรัพย์อ้างอิง

Prince of Songkla University Pattani Campus

1.4 SET50 index option

ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (2558) ได้จัดทำดัชนี SET50 และ SET100 เพื่อเป็นการส่งเสริมการออกตราสารอนุพันธ์และเครื่องมือวัดสภาวะตลาดสำหรับกองทุนรวมต่างๆ

ดัชนี SET50 และดัชนี SET100 เป็นดัชนีราคาหุ้นที่คำนวณมาจากราคาหุ้นสามัญ 50 ตัวแรก และ 100 ตัวแรก ตามลำดับที่ซื้อขายในตลาดหลักทรัพย์ซึ่งมูลค่าตามราคาตลาดสูง การซื้อขายมีสภาพคล่องอย่างสม่ำเสมอ และมีสัดส่วนผู้ถือหุ้นรายย่อยผ่านเกณฑ์ที่กำหนด นอกจากนี้ตลาดหลักทรัพย์ได้กำหนดให้มีการพิจารณาปรับรายการหลักทรัพย์ที่ใช้ในการคำนวณ SET50 index และ SET100 index ทุก ๆ 6 เดือน ตามภาวะตลาดในตลาดหลักทรัพย์ที่มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา

SET50 index options หมายถึงสัญญาซื้อขายล่วงหน้าที่ผู้ซื้อได้สิทธิในการซื้อ หรือได้สิทธิในการขายดัชนี SET50 จากผู้ขายในเงื่อนไขและราคาที่ตกลงกันไว้ในสัญญาออปชัน SET50 index options เปิดซื้อขายในตลาดสัญญาซื้อขายล่วงหน้า (TFEX) ตั้งแต่เมื่อวันที่ 29 ตุลาคม 2550

ในงานวิจัยนี้ใช้ข้อมูลจากตลาดสัญญาซื้อขายล่วงหน้า ซึ่งได้จัดเก็บและเผยแพร่ผ่านเว็บไซต์ http://www.tfex.co.th โดยเก็บรวบรวมข้อมูลราคา SET50 index options ตั้งแต่วันที่ 1 ตุลาคม 2557 ถึงวันที่ 31 มีนาคม 2558 โดยราคาสูงสุดอยู่ที่ 1,615.89 บาท ราคาต่ำสุดอยู่ที่ 1,461.74 บาท ราคาเฉลี่ยเท่ากับ 1,555.41 บาท ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 36.52 บาท กราฟในรูปที่ 1.3 แสดงราคา SET50 index options ย้อนหลังในช่วงเวลาดังกล่าว

รูปที่ 1.3 ราคาของ SET50 index option ตั้งแต่วันที่ 1 ตุลาคม 2557 ถึงวันที่ 31 มีนาคม 2558

Prince of Songkla University Pattani Campus

1.5 การตั้งราคาออปชัน

แท้จริงแล้วโจทย์วิจัยที่เกี่ยวกับการคำนวณหาความผันผวนของออปชันเป็นโจทย์วิจัยต่อเนื่องจากการการศึกษาและวิจัยในการตั้งราคาตราสารอนุพันธ์ออปชันที่ยุติธรรม ซึ่งบุกเบิกโดย Black, Scholes และ Merton งานวิจัยของ Black และ Scholes (1973) และ Merton (1973) เป็นการคิดวิเคราะห์หาสูตรในรูปแบบปิดของออปชันที่มีหุ้นสามัญเป็นสินทรัพย์อ้างอิง

การศึกษาและผลการวิจัยดังกล่าวมีความสำคัญอย่างมากต่อวงการเศรษฐศาสตร์และการเงิน ตลอดจนการซื้อขายและลงทุนในตลาดหลักทรัพย์ทั่วโลก ราชบัณฑิตยสถานด้านวิทยาศาสตร์แห่งสวีเดนได้มอบรางวัลโนเบลสาขาเศรษฐศาสตร์ ให้แก่ทั้ง 3 ท่าน ในผลงานการวิจัยตัวแบบการตั้งราคาออปชัน Black-Scholes-Merton ถึงแม้ว่า Fischer Black ได้เสียชีวิตไปแล้วในปี ค.ศ. 1995 ก็ตาม

งานวิจัยส่วนใหญ่ในระยะถัดมาที่เกี่ยวข้องกับ Black-Scholes เป็นการขยายความและปรับแก้ข้อสมมติฐานที่ตั้งไว้ในตัวแบบ Black-Scholes และพัฒนาสูตร Black-Scholes ให้ได้ราคาออปชันที่แม่นยำยิ่งขึ้น ในระยะหลัง งานวิจัยส่วนมากจะเป็นการประมาณการแจกแจงของราคาออปชัน เช่น Gencay และ Qi (2001) ได้ใช้ Bayesian regularization กับข้อมูล S&P 500 index call option รายวัน ตั้งแต่เดือนมกราคม ค.ศ.1988 ถึง ธันวาคม ค.ศ.1993 พบว่า ราคาออปชันที่คำนวณโดยวิธี Bayesian regularization มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า Baseline neural network (NN) model และ Black-Scholes model ในบางปี ส่วน Choi et *al.* (2004) ได้ศึกษา Neural network สำหรับราคาออปชัน ซึ่งใช้ระบบนอนพาราเมทริกซ์ (nonparametric) งานวิจัยนี้ได้พัฒนารูปแบบ และเวลาที่ใช้คำนวณราคาออปชัน จากการใช้ข้อมูล KOSPI200 index call option รายวัน ผลการศึกษาพบว่าวิธีนี้มีประสิทธิภาพมาก และค่าที่ได้มีความคลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อยถ้าเทียบกับวิธีอื่น ในขณะที่ Jung et *al.* (2006) ได้ศึกษา leaning network สำหรับราคาออปชัน ซึ่งเป็นระบบนอนพาราเมทริกซ์ (nonparametric) โดยให้หลักการไฮเปอร์พาราเมทริกซ์ (hyper-parametric) ในการเลือกวิธีและการแจกแจงของการประมาณค่า งานวิจัยได้ใช้ข้อมูล KOSPI200 index call option รายวัน พบว่าวิธีนี้ได้ช่วงความเชื่อมั่นที่ดีที่จะประมาณค่าที่ต้องการ และได้ราคาออปชันที่ตรงกับความเป็นจริงมากขึ้น

Prince of Songkla University Pattani Campus

ต่อมา Han และ Lee (2008) ได้ศึกษา Gaussian process (GP) model โดยการรวม kernal สำหรับการตั้งราคาออปชันและการป้องกันความเสี่ยง ซึ่งทดสอบกับ KOSPI200 call ELWs จากเดือนมีนาคมถึงกรกฎาคม ค.ศ. 2006 เปรียบเทียบการใช้งานของ GP model กับ neural network (NN) model ต่าง ๆ พบว่า GP model มีประสิทธิภาพในการทำนายได้ดีกว่า NN model ทั้งการตั้งราคาออปชันและการป้องกันความเสี่ยง

1.6 ตัวแบบแบล็ค-โชล (Black-Scholes model)

พิจารณาพฤติกรรมของสินทรัพย์ทางการเงินหรือตราสารอนุพันธ์ในช่วงเวลา $[0, T^*]$ โดยที่ $0 < T^* < \infty$

กำหนดให้ $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็นที่มีฟิลเตรชัน (filtration) $(\mathbb{F})_{0\leq t\leq T^*}$ ซึ่งก่อกำเนิดโดยการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน (Brownian motion) $(W_t)_{0\leq t\leq T^*}$ ที่นิยามบนปริภูมิ $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ นี้

1.6.1 การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิต (geometric Brownian motion: gBm)

สมมติให้ราคาหุ้น $(S_t)_{0\leq t\leq T^*}$ ปรับตัว (adapted) ไปยัง $(\mathbb{F})_{0\leq t\leq T^*}$ (ไม่มีการจ่ายเงินปันผล) เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิตซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงสโตแคสติก (Stochastic Differential Equation (SDE)) ดังนี้

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma^* dW_t) \tag{1.1}$$

เมื่อ μ แทนอัตราดริฟต์ซึ่งเป็นค่าคงที่ และ σ^* แทนความผันผวน และ $(\sigma^*)^2$ เป็นความแปรปรวน เรียก SDE (1.1) ว่า ตัวแบบแบล็คโชลส์

สมมติว่าตลาดการเงินสามารถทำกำไรได้โดยปราศจากความเสี่ยง (riskless) มีอัตราดอกเบี้ย $r \geq 0$ แล้วราคาสินทรัพย์อ้างอิงที่ปราศจากความเสี่ยงเป็นไปตามตัวแบบดังนี้

$$d\tilde{S}_t = r\tilde{S}_t dt$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

สำหรับ $t \geq 0$ และ $\tilde{S}_t = e^{rt}$ โดยที่ $\tilde{S}_0 = 1$

จาก SDE (1.1) ได้ว่า

$$d\ln(S_t) = (\mu - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2)dt + \sigma^* dW_t. \tag{1.2}$$

เรียก (1.2) ว่า gBm

1.6.2 การหาผลเฉลยของ SDE

พิจารณา SDE (1.1) ในที่นี้ S_t แทนราคาสินทรัพย์อ้างอิงที่ไม่มีการจ่ายเงินปันผลใดๆ สมมติว่า $S_t > 0$ *a.s.* (almost surely) เมื่อนำ S_t ไปหารทั้งสองข้างของสมการ (1.1) ได้ว่า

$$\frac{1}{S_t} dS_t = \mu dt + \sigma^* dW_t$$

อินทิเกรตสมการข้างต้นทำให้ได้รูปดังนี้

$$\int_0^t \frac{dS_u}{S_u} = \int_0^t \mu du + \int_0^t \sigma^* dW_u$$

ในสมการนี้นิพจน์ $\int_0^t \mu du$ เป็นการอินทิเกรตที่ไม่มีพจน์ของตัวแปรสุ่มได้ว่า

$$\int_0^t \mu du = \mu t$$

ส่วนนิพจน์ $\int_0^t \sigma^* dW_u$ มีพจน์ของ W เป็นตัวแปรสุ่ม แต่สัมประสิทธิ์ของ dW_u เป็นเวลาซึ่งเป็นค่าคงที่ ดังนั้นอินทิกรัลนี้สามารถคำนวณได้ตามปรกติ ดังนี้

$$\int_0^t \sigma^* dW_u = \sigma^*[W_t - W_0]$$

จากนิยามของตัวแปรสุ่มแบบบราวเนียนที่ว่า $W_0 = 0$ *a.s.* จึงได้ว่า

$$\int_0^t \frac{1}{S_u} dS_u = \mu t + \sigma^* W_t$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

การหาผลเฉลยของ SDE สามารถทำได้หลายวิธี ในที่นี้จะนำเสนอการหาผลเฉลยโดยอาศัยวิธีการใช้บทแทรกอีโตะ (Ito's Lemma) (Intarasit, 2012)

ต่อไปจะนิยามกระบวนการอีโตะซึ่งจะปรากฏในบทแทรกอีโตะดังนี้

บทนิยาม ให้ $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathbb{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น filter $(W_t)_{t\geq 0}$ และ $\mathbb{F}_t$-Brownian motion $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ เป็น $\mathbb{R}$-valued ของกระบวนการอีโตะถ้าสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \ \mathbb{P} \ a.s. \ \forall t \leq T$$

เมื่อ X_0 เป็น $\mathbb{F}_0$-measurable $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ และ เป็น $\mathbb{F}_t$-adapted processes โดยที่

$$\int_0^T \mid K_s \mid ds < +\infty \ \mathbb{P} \ a.s \text{ และ } \int_0^T \mid H_s \mid^2 \ ds < +\infty \ \mathbb{P} \ a.s$$

บทแทรกของอีโตะเป็นดังนี้

บทแทรก 1.1 (Ito's lemma) กำหนดให้ $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ เป็นกระบวนการอีโตะ

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

และ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับที่สองได้ แล้ว

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\left\langle X, X\right\rangle_s$$

โดยที่ $$\left\langle X, X\right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

และ $$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(t,x) \to f(t,x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับที่สองได้เมื่อเทียบกับ x และหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้เมื่อเทียบกับ t และถ้าอนุพันธ์ย่อยนี้ต่อเนื่องเมื่อเทียบกับ (t,x) (นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันใน $C^{1,2}$) แล้วสูตรอีโตะจะเป็นดังนี้

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\left\langle X, X\right\rangle_s$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

เราต้องการหาผลเฉลย $(S_t)_{t\geq 0}$ ของ (1.1) ในรูป

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu + \sigma^* dW_s) \tag{1.3}$$

ซึ่งมักจะเขียนในรูปสัญลักษณ์ดังนี้

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma^* W_t), \quad S_0 = x_0 \tag{1.4}$$

จริง ๆ แล้วเราต้องการหา Adapted Process $(S_t)_{t\geq 0}$ ที่ทำให้ $\int_0^t S_s ds$ และ $\int_0^t S_s dW_s$ มีอยู่ และ ณ เวลา t ใด ๆ ได้ว่า

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma^* S_s dW_s \ \mathbb{P}\ a.s.$$

เพื่อที่จะคำนวณให้ง่ายขึ้น เราจะสร้างสูตรการคำนวณ โดยกำหนดให้ $\mathrm{Y}_t = \ln(S_t)$ เมื่อ S_t เป็นผลเฉลยของ (1.3) ซึ่ง S_t เป็นกระบวนการอิโตะที่มี $K_s = \mu S_s$ และ $H_s = \sigma^* S_s$

สมมติ S_t เป็นจำนวนบวก ประยุกต์ใช้สูตรอิโตะเมื่อ $f(x) = \ln(x)$ ($f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชัน C^2) จะได้ว่า

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t \left(-\frac{1}{S_s^2}\right)(\sigma^*)^2 S_s^2 ds$$

แทนค่า $\frac{dS_s}{S_s}$ จาก (1.4) และจัดพจน์ จึงได้

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2)dt + \int_0^t \sigma^* dW_t$$

ดังนั้น

$$Y_t = \ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2\right)t + \sigma^* W_t$$

นั่นคือ

$$d\ln(S_t) = (\mu - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2)dt + \sigma^* dW_t$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

หรือ

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2)t + \sigma^* W_t)$$

เป็นผลเฉลยของ (1.1)

การตรวจสอบคำตอบ

เรามี $S_t = f(t, W_t)$ ซึ่ง

$$f(t,x) = x_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2)t + \sigma^* x)$$

จากสูตรอิโตะ ได้ว่า

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, W_t) \\ &= f(0, W_0) + \int_0^t f_s'(s, W_s)ds + \int_0^t f_x'(s, W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, W_s)d\left\langle W, W\right\rangle_s \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\left\langle W, W\right\rangle_t = t$

จะได้ว่า

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s\left(\mu - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2\right)ds + \int_0^t S_s\sigma^* dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t S_s(\sigma^*)^2 ds$$

สรุปได้ว่า

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma^* S_s dW_s$$

เพราะว่า $W_T - W_t$ มีการแจกแจงปกติ $\mathcal{N}(0, T-t)$

ดังนั้น $$\frac{W_T - W_t}{\sqrt{T-t}} = Z; \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

จึงได้ $$S_T = S_t \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma Z\sqrt{T-t}\right), \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1), T \geq t$$

ซึ่ง S_T มีการแจกแจงแบบล็อกปกติ (lognormal) ที่ค่าเฉลี่ยเท่ากับ

$\log(S_t) + (\mu - \sigma^2 \,/\, 2)(T-t)$ และความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma^2(T-t)$

Prince of Songkla University Pattani Campus

ดังนั้น $\log(S_t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma Z\sqrt{T-t}, Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

มีการแจกแจงเช่นเดียวกับ $\log(S_T)$

1.6.3 สูตรแบล็ค-โชล

ภายใต้เงื่อนไขตลาดสมบูรณ์ (market completeness) และการสร้างหลักทรัพย์ด้วยกลยุทธ์การลงทุนเลียนแบบออปชัน (replication strategy) Black, Scholes และ Merton ได้หาราคาคอลออปชันแบบยูโรเปียน ซึ่งเป็นฟังก์ชัน $\tilde{C} = C_{BS}(S,t)$ ที่เป็น $C^{2,1}$ เพียงหนึ่งเดียวของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของแบล็ค-โชล (Black-Scholes partial differential equation: PDE) ดังนี้

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \tilde{C}}{\partial S} - r\tilde{C} = 0 \tag{1.5}$$

โดยที่ $C^{2,1}$ เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์อันดับที่ 2 และ 1 เมื่อเทียบกับตัวแปร S และ t ตามลำดับ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบ $\tilde{C}(0,t;K) = 0$ เงื่อนไขขอบที่จุดปลาย

$$\tilde{C}(S,T;K) = (S-K)^+$$

เมื่ออาศัยทฤษฎีบท discounted Feynman-Kac (Nolen, 2008) แล้วผลเฉลยของ PDE (1.5) เขียนอยู่ในรูปค่าคาดหมาย ดังนี้

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(S_t,t;K,T) &= e^{-r(T-t)}E_{x,t}[(S_T - K)^+] \\
&= e^{-r(T-t)}E_{x,t}[(S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma Z\sqrt{T-t}} - K)^+] \\
&= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}(S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}} - K)^+ p(S,t;z,T)dz \\
&= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}(S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}} - K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz
\end{aligned}$$

เมื่อกำหนดให้ $v = \dfrac{\log(K\,/\,S_t) - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

Prince of Songkla University Pattani Campus

จะได้ $$(S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}} - K)^+ = \begin{cases} 0 & ,z \le v \\ S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}} - K, & z > v \end{cases}$$

เมื่อแทนค่า v ลงใน $\tilde{C}$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(S_t,t;K,T) &= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{v}\left(0\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\right)dz \\
&\quad + e^{-r(T-t)}\int_{v}^{\infty}(S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}} - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz \\
&= e^{-r(T-t)}S_t\int_{v}^{\infty} e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz - e^{-r(T-t)}K\int_{v}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz \\
&= e^{-r(T-t)}S_t\int_{v}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}-z^2/2}dz - e^{-r(T-t)}K[1-\Phi(v)] \\
&= e^{-r(T-t)+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}S_t\int_{v}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(z-\sigma\sqrt{T-t})^2/2}dz - e^{-r(T-t)}K[1-\Phi(v)] \\
&= e^{-r(T-t)+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}S_t\int_{v-\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dz - e^{-r(T-t)}K[1-\Phi(v)] \\
&= e^{-r(T-t)+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}S_t[1-\Phi(v-\sigma\sqrt{T-t})] - e^{-r(T-t)}K[1-\Phi(v)] \\
&= e^{-r(T-t)+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}S_t\Phi(-v+\sigma\sqrt{T-t}) - e^{-r(T-t)}K\Phi(-v) \\
&= e^{-r(T-t)+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}S_t\Phi\left(-\frac{\log(K\,/\,S_t)-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}+\sigma\sqrt{T-t}\right) \\
&\quad - e^{-r(T-t)}K\Phi\left(\frac{-\log(K\,/\,S_t)+\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&= e^{-r(T-t)+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}S_t\Phi\left(\frac{-\log(K\,/\,S_t)+(\mu+\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad - e^{-r(T-t)}K\Phi\left(\frac{-\log(K\,/\,S_t)+(\mu+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&= S_t\Phi\left(\frac{-\log(K\,/\,S_t)+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{-r(T-t)}K\Phi\left(\frac{-\log(K\,/\,S_t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้นมูลค่าออปชันที่ปราศจากอาบิทราจของคอลออปชันจากสูตรแบล็ค-โชลเป็นดังนี้

Prince of Songkla University Pattani Campus

$$\tilde{C}_{BS}(S,t;\sigma,K,\tau,r)=\begin{cases}S\Phi(d_1)-Ke^{-r\tau}\Phi(d_2) & (\sigma>0)\\ (S-Ke^{-r\tau})^{+} & (\sigma=0)\end{cases} \tag{1.6}$$

โดยที่ r แทนอัตราดอกเบี้ย $\tau = T-t \geq 0$

$$d_1 = \frac{-\ln(m)+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{และ} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

เมื่อ $m = K\,/\,S_t$ เป็นภาวะทางการเงิน (moneyness) ของออปชัน และ $\Phi(v) = \int_{-\infty}^{u}\varphi(u)du$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐานที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2} \text{ เมื่อ } v \in \mathbb{R}$$

ภาวะทางการเงินของออปชันเป็นความสัมพันธ์ระหว่างราคาสินทรัพย์อ้างอิงกับราคาใช้สิทธิที่แสดงมูลค่าที่แท้จริง (intrinsic value) ของออปชันเมื่อเลือกใช้สิทธิ

ภาวะทางการเงินของออปชันมี 3 สถานะ ได้แก่ In the money, Out of the money และ At the money

1. In the money (ITM) หมายถึงออปชันที่มีกำไรแฝงอยู่

กรณีคอลออปชัน คือกรณีที่ราคาใช้สิทธิน้อยกว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิง

กรณีพุตออปชัน คือกรณีที่ราคาใช้สิทธิมากกว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิง

2. Out of the money (OTM) หมายถึงออปชันที่มีขาดทุนแฝงอยู่

กรณีคอลออปชัน คือกรณีที่ราคาใช้สิทธิมากกว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิง

กรณีพุตออปชัน คือกรณีที่ราคาใช้สิทธิน้อยว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิง

3. At the money (ATM) หมายถึงออปชันที่ไม่มีกำไรและขาดทุนแฝงอยู่

นั่นคือราคาใช้สิทธิเท่ากับราคาสินทรัพย์อ้างอิง

สูตรการตั้งราคาออปชัน (1.6) อยู่ในรูปแบบปิด (closed form) และมีความสำคัญอย่างมากต่อวงการเศรษฐศาสตร์และการเงิน ตลอดจนการซื้อขายและการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์ทั่วโลก

Prince of Songkla University Pattani Campus

1.6.4 การคำนวณ SET50 index option โดยใช้สูตรแบล็ค-โชล

การคำนวณ SET50 index option โดยใช้สูตร Black-Scholes (1.6) จะต้องทราบค่าของข้อมูลต่อไปนี้

1. ราคาสินทรัพทย์อ้างอิง ณ เวลา t (S_t) นั่นคือ ดัชนี SET50
2. ราคาใช้สิทธิ (K)
3. อัตราดอกเบี้ย (r)
4. ความผันผวน (σ)
5. เวลาที่เหลือก่อนครบกำหนดอายุออปชัน (T)

ตัวอย่าง ถ้าต้องการคำนวณราคาเชิงทฤษฎีของ SET50 index call option ที่มี SET50 index อยู่ที่ 1039.47 จุด ราคาใช้สิทธิ 950 จุด อัตราดอกเบี้ย อยู่ที่ 1% ค่าความผันผวนเท่ากับ 20% และเหลือเวลาอีก 20 วันจะหมดอายุ

ในปัญหานี้เรามี $S_0 = 1039.47,\ K = 950\ r = 0.01\ \sigma = 0.2$ และ $T = 20\ /\ 365 = 0.0548$

คำนวณ $d_1 = \dfrac{-\ln(950\ /\ 1039.47) + (0.01 + \dfrac{0.2^2}{2})0.0548}{0.2\sqrt{0.0548}} = 1.9575$

และ $d_2 = 1.9575 - 0.2\sqrt{0.0548} = 1.9107$

แทนค่า d_1 และ d_2 ลงในสูตร Black-Scholes (1.6) ได้ว่า

$$C_{BS} = 1039.47\Phi(1.9575) - 950e^{-0.01(0.0548)}\Phi(1.9107)$$

ในการหาค่าของ $\Phi(1.917)$ สามารถหาได้จากการเปิดตารางฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน ในที่นี้จะหาค่าของ $\Phi(1.917)$ จากคำสั่งใน Microsoft Excel โดยใช้คำสั่ง NORMSDIST(1.917) ได้ว่า $\Phi(1.9575) = 0.9749$ และ $\Phi(1.9107) = 0.9720$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} C_{BS} &= 1039.47(0.9749) - 950e^{-0.01(0.0548)}(0.9720) \\ &= 90.4607 \end{aligned}$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

เพราะฉะนั้นราคาเชิงทฤษฎีของ SET50 index call option ประมาณ 90.4607 จุด หรือเท่ากับ $90.4607 \times 200 = 18,092.14$ บาท

1.7 สมบัติของสูตรแบล็ค-โชล ($C_{BS}(\sigma)$)

สูตรแบล็ค-โชลมีลักษณะเฉพาะ คือสามารถหาอนุพันธ์ได้ (differentiable) เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นโดยแท้ (strictly increasing function) และมีขอบเขต (bound) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1.7.1 อนุพันธ์ของ $C_{BS}(\sigma)$

อนุพันธ์ของ C_{BS} เมื่อเทียบกับ σ คำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} C'_{BS}(\sigma) &:= \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = S_t \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1} - Ke^{-r\tau} \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial d_1} \\ &= S_t \varphi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r\tau} \varphi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \end{aligned} \tag{1.7}$$

เมื่อ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$

ใน (1.7) ไม่เห็น σ อย่างชัดเจนเพราะพจน์ σ อยู่ใน d_1 และ d_2

คำนวณพจน์ $\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}$ และ $\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$ ใน (1.7) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma}(\frac{-\ln(m) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) \\ &= -\frac{1}{\sigma}(\frac{-\sigma^2\tau\sqrt{\tau} - \ln(m)\sqrt{\tau} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau\sqrt{\tau}}{\sigma\tau}) \\ &= -\frac{1}{\sigma}(\frac{-\sigma^2\tau\sqrt{\tau} - \ln(m)\sqrt{\tau} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau\sqrt{\tau}}{\sigma\tau}) \\ &= -\frac{1}{\sigma}(\frac{-\sigma^2\tau - \ln(m) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) \\ &= -\frac{1}{\sigma}(\frac{-\ln(m) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau}) \\ &= -\frac{1}{\sigma}(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) = -\frac{d_2}{\sigma} \end{aligned}$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

และ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{-\ln(m)+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{-\ln(m)+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&= \frac{\sigma^2\tau\sqrt{\tau} - 2\sigma^2\tau\sqrt{\tau} + \ln(m)\sqrt{\tau} - (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau\sqrt{\tau} + \sigma^2\tau\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau} \\
&= \frac{\ln(m) - (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma^2\sqrt{\tau}}) \\
&= -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{-\ln(m)+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) = -\frac{d_1}{\sigma}
\end{aligned}$$

คำนวณ

$$\begin{aligned}
\varphi(d_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{d_2^2}{2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{d_1^2}{2} + d_1\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2}) \\
&= \varphi(d_1)\exp(d_1\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2}) \\
&= \varphi(d_1)\exp(\left(\frac{-\ln(m)+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2}) \\
&= \varphi(d_1)\exp(-\ln\frac{K}{S_t} + (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau - \frac{\sigma^2\tau}{2}) \\
&= \varphi(d_1)\exp(\ln\frac{S_t}{K} + r\tau) = \varphi(d_1)\frac{S_t}{K}\exp(r\tau)
\end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า $\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}$ $\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$ และ $\varphi(d_2)$ ลงใน (1.7) และจัดรูป $d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{\tau}$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}
C'_{BS}(\sigma) &= -S_t\frac{d_2}{\sigma}\varphi(d_1) + K\frac{d_1}{\sigma}e^{-r(T-t)}\left(\varphi(d_1)\frac{S_t}{K}\exp(r\tau)\right) \\
&= -S_t\frac{d_2}{\sigma}\varphi(d_1) + S_t\frac{d_1}{\sigma}\varphi(d_1) \\
&= S_t\varphi(d_1)\frac{(d_1-d_2)}{\sigma} = S_t\varphi(d_1)\sqrt{\tau} =: \mathcal{V}
\end{aligned}$$

เราเรียก $\mathcal{V}$ ว่า เวก้า (Vega) ของคอลออปชันแบบยูโรเปียน

Prince of Songkla University Pattani Campus

1.7.2 $C_{BS}(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

ในที่นี้จะแสดงว่า $C_{BS}(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้โดยอาศัยบทนิยามและบทแทรกต่อไปนี้

บทนิยาม ให้ $f : I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I ถ้า $f(x) < f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in I$ และ $x < y$ แล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ (strictly increasing function) บน I

บทแทรก 1.2 ให้ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ เมื่อ $[a,b] \in \mathbb{R}$ ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ f หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) ถ้า $f'(t) > 0$ สำหรับทุก $t \in (a,b)$ แล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้บน $[a,b]$

พิจารณา $C'_{BS}(\sigma) = S_t\varphi(d_1)\sqrt{\tau}$ เนื่องจาก $S_t > 0$ และ $\sqrt{\tau} > 0$ ส่งผลให้ $\varphi(d_1) > 0$ จึงทำให้ $C'_{BS}(\sigma) > 0$ ดังนั้น $C_{BS}(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

1.7.3 $C_{BS}(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

$C_{BS}(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก $[0,+\infty] \to [0, S_t - Ke^{-r\tau}]$ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

กรณีที่ 1 สำหรับ $T > 0$ ขณะที่ $\sigma \to 0$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 0} C_{BS}(\sigma) &= \lim_{\sigma\to 0}\Big(S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)\Big)\\ &= \lim_{\sigma\to 0}\Big(S_t\Phi(d_1)\Big) - \lim_{\sigma\to 0}\Big(Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)\Big)\\ &= S_t\lim_{\sigma\to 0}\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\lim_{\sigma\to 0}\Phi(d_2)\end{aligned}$$

ถ้า $S_t > K$

จะได้

$$\lim_{\sigma\to 0} d_1 = \lim_{\sigma\to 0}\left(\frac{-\ln(m) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$= \lim_{\sigma\to 0}\left(\frac{-\ln(m) + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\right) = \infty$$

และ
$$\lim_{\sigma\to 0} d_2 = \lim_{\sigma\to 0}(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) = \infty$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

ได้ว่า $\lim_{d_1\to\infty}\Phi(d_1)=1$ และ $\lim_{d_2\to\infty}\Phi(d_2)=1$

เป็นผลให้ $$\lim_{\sigma\to 0}C_{BS}(\sigma)=S_t\lim_{\sigma\to 0}\Phi(d_1)-Ke^{-r\tau}\lim_{\sigma\to 0}\Phi(d_2)$$
$$=S_t(1)-Ke^{-r\tau}(1)=S_t-Ke^{-r\tau}$$

ถ้า $S_t \le K$

จะได้

$$\lim_{\sigma\to 0}d_1=\lim_{\sigma\to 0}\left(\frac{-\ln(m)+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$
$$=\lim_{\sigma\to 0}\left(\frac{-\ln(m)+r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}+\frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\right)=-\infty$$

และ $\lim_{\sigma\to 0}d_2=\lim_{\sigma\to 0}(d_1-\sigma\sqrt{\tau})=-\infty$

ได้ว่า $\lim_{d_1\to\infty}\Phi(d_1)=0$ และ $\lim_{d_2\to\infty}\Phi(d_2)=0$

เป็นผลให้ $$\lim_{\sigma\to 0}C_{BS}(\sigma)=S_t\lim_{\sigma\to 0}\Phi(d_1)-Ke^{-r\tau}\lim_{\sigma\to 0}\Phi(d_2)$$
$$=S_t(0)-Ke^{-r\tau}(0)=0$$

ดังนั้น $C_{BS}(\sigma)\ge S_t-Ke^{-r\tau}$ เมื่อ $S_t>K$

และ $C_{BS}(\sigma)=0$ เมื่อ $S_t\le K$

กรณีที่ 2 สำหรับ $T>0$ ขณะที่ $\sigma\to\infty$

พิจารณา $$\lim_{\sigma\to\infty}C_{BS}(\sigma)=\lim_{\sigma\to\infty}\left(S_t\Phi(d_1)-Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)\right)$$
$$=\lim_{\sigma\to\infty}\left(S_t\Phi(d_1)\right)-\lim_{\sigma\to\infty}\left(Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)\right)$$
$$=S\lim_{\sigma\to\infty}\Phi(d_1)-Ke^{-r\tau}\lim_{\sigma\to\infty}\Phi(d_2)$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

ถ้า $S_t > K$

$$\lim_{\sigma\to\infty} d_1 = \lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{-\ln(m)+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$= \lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{-\ln(m)+r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}+\frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\right)=\infty$$

และ $\lim_{\sigma\to\infty} d_2 = \lim_{\sigma\to\infty}(d_1-\sigma\sqrt{\tau})=-\infty$

ได้ว่า $\lim_{d_1\to\infty}\Phi(d_1)=1$ และ $\lim_{d_2\to-\infty}\Phi(d_2)=0$

เป็นผลให้ $\lim_{\sigma\to\infty} C_{BS}(\sigma) = S_t \lim_{\sigma\to\infty}\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\lim_{\sigma\to\infty}\Phi(d_2)$

$$= S_t(1) - Ke^{-r\tau}(0) = S_t$$

ถ้า $S_t \le K$

$$\lim_{\sigma\to\infty} d_1 = \lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{-\ln(m)+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$= \lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{-\ln(m)+r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}+\frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\right)=-\infty$$

และ $\lim_{\sigma\to\infty} d_2 = \lim_{\sigma\to\infty}(d_1-\sigma\sqrt{\tau})=-\infty$

ได้ว่า $\lim_{d_1\to\infty}\Phi(d_1)=0$ และ $\lim_{d_2\to-\infty}\Phi(d_2)=0$

เป็นผลให้ $\lim_{\sigma\to\infty} C_{BS}(\sigma) = S_t \lim_{\sigma\to\infty}\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\lim_{\sigma\to\infty}\Phi(d_2)$

$$= S_t(0) - Ke^{-r\tau}(0) = 0$$

ดังนั้น $C_{BS}(\sigma) \le S_t$ เมื่อ $S_t > K$

และ $C_{BS}(\sigma) = 0$ เมื่อ $S_t \le K$

จากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่า $C_{BS}(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต โดยที่

$$(S_t - Ke^{-r\tau})^+ \le C_{BS}(\sigma) \le S_t$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

มูลค่าคอลออปชันเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับสัญญาการซื้อขาย เช่น ราคาการใช้สิทธิ K และระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชัน $T-t$ เมื่อ T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิและ t แทนเวลา ณ ปัจจุบัน เป็นต้น นอกจากนี้มูลค่าคอลออปชันยังสัมพันธ์กับพารามิเตอร์บางประการของสินทรัพย์อ้างอิง ได้แก่ ราคาสินทรัพย์อ้างอิง อัตราดริฟต์และความผันผวนของสินทรัพย์อ้างอิง และอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงอีกด้วย ดังนั้นจึงกำหนดให้ฟังก์ชันของมูลค่าออปชันเป็นดังนี้

$$C(S_t, t; \sigma, \mu; K, T; r)$$

อย่างไรก็ตามในเบื้องต้นเราจะสนใจฟังก์ชันของมูลค่าออปชัน $C(S_t, t)$ ซึ่งขึ้นกับตัวแปร S_t และ t

ในสมการ (1.5) ไม่ปรากฏอัตราดริฟต์ μ จึงมีเพียงความผันผวน σ เท่านั้นที่เป็นปริมาณที่ไม่สามารถเก็บรวบรวมข้อมูลจากการสังเกตได้ ดังนั้นการหาสูตรความผันผวนจึงกลายเป็นโจทย์วิจัยที่ได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก

Prince of Songkla University Pattani Campus

1.8 ความผันผวนแฝง

Mitra (2009) ได้จำแนกความผันผวนออกเป็น 4 ชนิด ได้แก่

1. ความผันผวน σ ที่วัดจากการเคลื่อนที่อย่างสุ่มของผลตอบแทนสินทรัพย์อ้างอิง ความผันผวนชนิดนี้มีอยู่ตลอดเวลาและมีหน่วยเป็นร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ เช่น ความผันผวน 5% 10% 20% เป็นต้น

2. ความผันผวนในอดีต (historical volatility) หรืออาจรู้จักอีกชื่อว่า ความผันผวนที่เกิดขึ้นจริง (realized volatility) เป็นความผันผวนที่วัดได้จากข้อมูลเชิงประจักษ์ในอดีต

กำหนดให้ $S_1, \ldots, S_N$ แทนลำดับของข้อมูลราคาปิดของหุ้นสามัญในอดีต แล้วนิยามผลตอบแทนระหว่างข้อมูล 2 วันที่สืบเนื่องกันดังนี้

$$R_n = \ln(S_{n+1} \,/\, S_n)$$

โดย $\bar{R} = (1 \,/\, N)\sum_{n=0}^{N-1} R_n$ เป็นค่าเฉลี่ยของผลตอบแทน แล้วนิยามความผันผวนในอดีตเป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานรายปี ดังนี้

$$\sigma_{hist} = \sqrt{\frac{252}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}(R_n - \overline{R})^2} \tag{1.8}$$

โดยประมาณว่าใน 1 ปีมี 252 วันในการซื้อขายหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ (Gatheral, 2006)

การคำนวณความผันผวนในอดีตมีความแตกต่างจากการคำนวณความผันผวนแบบแรก คือ ความผันผวนในอดีตคำนวณจากข้อมูลของราคาสินทรัพย์เชิงประจักษ์ในอดีต แต่ความผันผวนแบบแรกคำนวณจากข้อมูลของราคาออปชันเชิงประจักษ์ในอดีต

3. ความผันผวนของสัญญาซื้อขายล่วงหน้า (forward volatility) หมายถึง ความผันผวนที่คำนวณได้มาจากข้อมูลของตราสารอนุพันธ์ประเภทสัญญาซื้อขายล่วงหน้า

4. ความผันผวนแฝง (implied volatility) เป็นความผันผวนที่คำนวณจากข้อมูลตราสารอนุพันธ์ออปชันเชิงประจักษ์

นอกจากนี้ Dupire (1994) ได้เสนอแนวคิดของความผันผวนเฉพาะถิ่น (local volatility) โดยสมมติให้ราคาหุ้นไม่มีเงินปันผลและราคาเป็นไปตามกระบวนการ

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW$$

และกำหนดให้ $\phi(t, \cdot)$ แทนฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของ S_t พิจารณาราคาคอลออปชันแบบยูโรเปียนที่เขียนในรูป T และ K ดังนี้

$$C(T,K) = e^{-rT}\int_K^\infty (x-K)\ \phi(T,x)\ dx \tag{1.9}$$

เพื่อลดความซับซ้อนในการคำนวณสมมติให้

$$\lim_{x\to\infty} x^2\phi(T,x) = 0 \text{ และ } \lim_{x\to\infty} x\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sigma(T,x)^2 x^2 \phi(T,x)\Big) = 0$$

จาก kolmogorov forward equation ได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi + r\frac{\partial}{\partial x}(x\phi) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2 x^2 \phi) = 0 \tag{1.20}$$

จากสมการ (1.9) หาอนุพันธ์ได้ดังนี้

Prince of Songkla University Pattani Campus

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial K} &= e^{-rT}\frac{\partial}{\partial K}\left(\int_K^\infty x\phi(T,x)\ dx - K\int_K^\infty \phi(T,x)\ dx\right)\\ &= -e^{-rT}\left(0 - K\phi(T,K) + \int_K^\infty \phi(T,x)\ dx + K\phi(T,K)\right)\\ &= -e^{-rT}\int_K^\infty \phi(T,x)\ dx\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = e^{-rT}\phi(T,K)$$

นอกจากนี้ จากสมการ (1.20) ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial T} &= -rC + e^{-rT}\int_K^\infty (x-K)\frac{\partial \phi}{\partial T}(T,x)\ dx\\ &= -rC + e^{-rT}\int_K^\infty (x-K)\left(-r\frac{\partial}{\partial x}(x\phi) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2x^2\phi)\right)\ dx\end{aligned}$$

จากสมการ (1.9) เมื่ออินทิเกรตได้ว่า

$$\begin{aligned}-re^{-rT}\int_K^\infty (x-K)\frac{\partial}{\partial x}[x\phi]dx &= re^{-rT}\int_K^\infty x\phi(T,x)\ dx\\ &= r\left(C - K\frac{\partial C}{\partial K}\right)\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{-rT}\int_K^\infty (x-K)\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma^2x^2\phi]dx &= -\frac{1}{2}e^{-rT}\int_K^\infty \frac{\partial}{\partial x}(\sigma^2x^2\phi)\ dx\\ &= \frac{1}{2}e^{-rT}\sigma^2(T,K)K^2\phi(T,K)\\ &= \frac{1}{2}\sigma^2(T,K)K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}\end{aligned}$$

เป็นผลให้

$$\frac{\partial C}{\partial T} = -rK\frac{\partial C}{\partial K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T,K)K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

จากข้างต้นได้สูตรในการหาความผันผวนของ Dupire ดังนี้

Prince of Songkla University Pattani Campus

$$\sigma^2(T,K) = 2\frac{\dfrac{\partial C}{\partial T} + rK\dfrac{\partial C}{\partial K}}{K^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

ในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของแบล็ค-โชล มีสมมติฐานที่สำคัญ 2 ประการ คืออัตราผลตอบแทนของราคาสินทรัพย์มีการแจกแจงปกติ และความผันผวนเป็นค่าคงตัว อย่างไรก็ตามได้มีงานวิจัยเชิงประจักษ์หลายฉบับได้แสดงให้เห็นว่าสมมติฐานทั้งสองนี้ไม่เป็นจริงสำหรับทุกกลุ่มข้อมูล เช่น Derman และ Kani (1994) ได้พัฒนาแนวคิดของความผันผวนเฉพาะถิ่นโดยการพิจารณาให้ความผันผวนเป็นฟังก์ชันของราคาสินทรัพย์อ้างอิงและเวลา และประมาณความผันผวนจากราคาออปชัน โดยความผันผวนที่พัฒนาขึ้นนี้จะแสดงลักษณะ “รอยยิ้มความผันผวน” (volatility smile) อีกด้วย สอดคล้องกับ Lee (1999) ได้ศึกษาความผันผวนเฉพาะถิ่น (local volatility) และความผันผวนแฝงจากสูตร Black-Scholes แล้วพบว่า ความผันผวนเฉพาะถิ่นเป็นฟังก์ชันของ log-moneyness และมีโครงสร้างเป็นรอยยิ้มความผันผวน ขณะที่ความผันผวนแฝงมีโครงสร้างเป็นรอยยิ้มที่เบ้ (volatility skew) เช่นเดียวกันกับ Dumas et *al.* (1998) ได้ศึกษาความผันผวนแฝงจากสูตร Black-Scholes โดยใช้ S&P500 option ตั้งแต่เดือนมิถุนายน ค.ศ.1988 ถึง ธันวาคม ค.ศ.1993 งานวิจัยพบว่า ความผันผวนแฝงแสดงลักษณะรอยยิ้มความผันผวน จะเห็นว่างานวิจัยในช่วงแรกเป็นการพัฒนาและปรับปรุงตัวแบบจากข้อสมมติฐาน 2 ประการดังกล่าวนี้

นอกจากนี้มีงานวิจัยที่แสดงให้เห็นว่าความผันผวนแฝงมีประสิทธิภาพในการคาดการณ์ความผันผวนที่เกิดขึ้นจริง เช่น Christensen และ Prabhala (1998) ได้ศึกษาความผันผวนแฝงของราคา S&P100 index option พบว่าความผันผวนแฝงเป็นค่าคาดการณ์ที่มีประสิทธิภาพและเป็นค่าคาดการณ์ที่ unbiased สอดคล้องกับการศึกษาของ Christensen และ Hansen (2002) ที่ใช้ข้อมูลออปชันของ Danish KFX ตั้งแต่เดือนกันยายน ค.ศ.1995 ถึงเดือนธันวาคม ค.ศ.1999 หาความผันผวนแฝง พบว่า ค่าความผันผวนแฝงของคอลออปชัน unbiased และสามารถคาดการณ์ความผันผวนที่เกิดขึ้นจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่ค่าความผันผวนแฝงของพุตออปชันมี biased และมีความสามารถในการคาดการณ์น้อยกว่าความผันผวนในอดีต

Prince of Songkla University Pattani Campus

รูปแบบของความผันผวนแฝงเป็นอีกปัญหาหนึ่งที่นักวิจัยสนใจศึกษา เช่น Rubinstein (1985) และ Mayhew (1995) พบว่า BS framework ไม่มี Volatility Smile นอกจากนี้ได้เสนอกระบวนการของสินทรัพย์อ้างอิงในการหารูปแบบของความผันผวนแฝง Dupire (1994) Derman และ Kani (1994) และ Rubinstein (1994) นำเสนอ deterministic volatility model ส่วน jump diffusion model นำเสนอโดย Merton (1976) และ stochastic volatility model นำเสนอโดย Hull และ White (1987) และ Heston (1993) นอกจากนี้การรวมของ stochastic volatility และ stochastic interest rate และ jumps นำเสนอโดย Bates (1996) Bates (2000) และ Bakshi et *al.* (1997)

ในสูตร Black-Scholes แท้จริงแล้วเมื่อแทนแฟกเตอร์ทั้ง 4 แฟกเตอร์ คือ ราคาสินทรัพย์อ้างอิง ราคาใช้สิทธิ อัตราดอกเบี้ย และเวลาครบกำหนด นอกเหนือจากความผันผวนจะสามารถหาค่าความผันผวนได้เมื่อทราบค่าราคาตลาดของออปชัน ด้วยเหตุที่เราหาความผันผวนจากการอนุมานจากราคาของออปชัน จึงเรียกความผันผวนดังกล่าวนี้ว่า “ความผันผวนแฝง” (implied volatility) การหาความผันผวนลักษณะเช่นนี้จัดเป็นการแก้ปัญหาผกผันอย่างหนึ่ง อย่างไรก็ตามการหาความผันผวนด้วยการแก้ปัญหาผกผันดังกล่าวนี้ จะไม่สามารถหาความผันผวนแฝงในนิพจน์รูปแบบปิดได้ ด้วยเหตุนี้เราจึงสนใจศึกษาการหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีเชิงตัวเลข

Prince of Songkla University Pattani Campus

1.9 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.9.1 ศึกษาการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเชิงตัวเลขได้แก่ วิธีนิวตัน วิธีเส้นตัด และวิธีแบ่งครึ่งช่วง

1.9.2 ศึกษาการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

1.9.3 ศึกษาการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน

1.9.4 ศึกษา วิเคราะห์ และเปรียบเทียบวิธีการต่าง ๆ ข้างต้นในการคำนวณความผันผวนแฝงภายใต้แนวคิดการแก้ปัญหาผกผัน

1.9.5 ประยุกต์ใช้วิธีการคำนวณความผันผวนแฝงดังกล่าวข้างต้นกับข้อมูลจริงยูโรเปียนออปชันที่มี SET50 เป็นหลักทรัพย์อ้างอิง

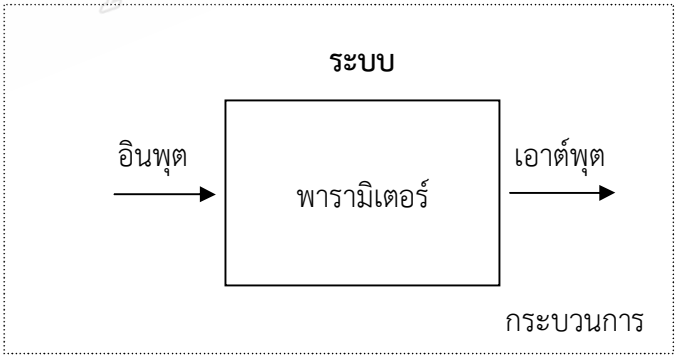
บทที่ 2

ปัญหาผกผันสำหรับการคำนวณความผันผวนแฝง

2.1 ปัญหาผกผัน

ในการศึกษาปรากฏการณ์บางอย่างที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติ มนุษย์อาจสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (กล่าวอย่างสั้น ๆ ว่าตัวแบบ) จากการคิดวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผล และกำหนดตัวแปร เพื่ออธิบายปรากฏการณ์นั้น ๆ ถึงแม้ว่าบ่อยครั้งในการสร้างตัวแบบจะต้องกำหนดข้อสมมติในเชิงอุดมคติที่ไม่เป็นจริงตามปราฏการณ์ธรรมชาติอยู่บ้าง แต่ตัวแบบที่สร้างขึ้นอย่างดี (well defined) จะสามารถอธิบายปรากฏการณ์จริงได้เป็นอย่างดีภายใต้ข้อสมมติเหล่านั้น อันจะก่อให้เกิดประโยชน์ในการศึกษาและวิจัย

ตัวแบบอธิบายถึง ระบบที่มีกระบวนการดำเนินการ เงื่อนไขของการดำเนินการ และอธิบายถึงความสัมพันธ์เชิงปริมาณของ อินพุต พารามิเตอร์ และเอาต์พุต รูปที่ 2.1 แสดงความสัมพันธ์ของปริมาณดังกล่าว

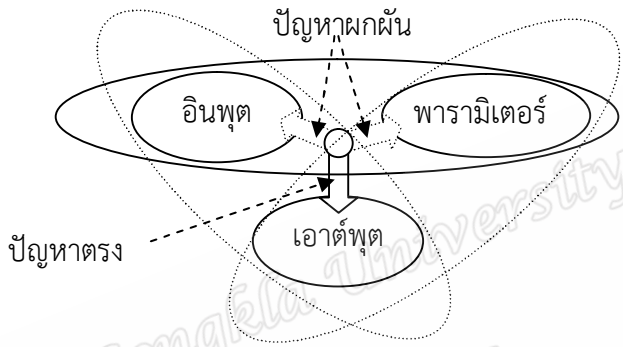


รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์เชิงปริมาณในกระบวนการของตัวแบบ

เราอาจจำแนกตัวแบบออกตามลักษณะของปัญหาที่แตกต่างกัน 3 แบบตามกระบวนการที่พิจารณา ซึ่งได้แก่ ปัญหาตรง (direct problem) ปัญหาย้อนกลับ (backward problem) และปัญหาการหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของตัวแบบ (parameter iIdentification problem)

Prince of Songkla University Pattani Campus

ปัญหาตรง รู้จักกันในอีกชื่อหนึ่งว่า ปัญหาไปข้างหน้า (forward problem) เพราะเป็นปัญหาที่มีกระบวนการพิจารณาจากเหตุไปสู่ผลลัพธ์ ปัญหาย้อนกลับและปัญหาการหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของตัวแบบ จัดเป็นปัญหาที่มีลักษณะตรงกันข้ามกับปัญหาตรง โดยมีกระบวนการพิจารณาจากผลไปสู่เหตุ ซึ่งพิจารณาให้เหตุเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า และให้ผลลัพธ์เป็นตัวทราบค่า จึงเรียกปัญหาลักษณะดังกล่าวนี้ว่า ปัญหาผกผัน ในรูปที่ 2.2 ได้แสดงธรรมชาติของปัญหาตรงและปัญหาผกผัน



รูปที่ 2.2 ลักษณะของปัญหาตรงและปัญหาผกผัน

Prince of Songkla University Pattani Campus

เมื่อกำหนดให้ X แทน ปริภูมิของอินพุต Y แทน ปริภูมิของเอาต์พุต P แทน ปริภูมิของพารามิเตอร์ของระบบ และ $A(p)$ แทน ตัวดำเนินการ (operator) ของระบบจาก X ไปยัง Y ที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ $p \in P$ แล้วจะสามารถอธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณของ X , Y , P และ $A(p)$ ที่สอดคล้องกับปรากฏการณ์ที่ศึกษาได้โดยอาศัยหลักการทางคณิตศาสตร์ เช่น การวิเคราะห์เชิงจริง พีชคณิต การวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน และการวิเคราะห์เชิงสโตแคสติก เป็นต้น

ปัญหาทั้ง 3 แบบดังกล่าวข้างต้นสามารถอธิบายได้ด้วยประพจน์เชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ปัญหาตรง

กำหนดให้ $x \in X$ และ $p \in P$ ต้องการหา $y \in Y$ จากความสัมพันธ์ $y = A(p)(x)$

2. ปัญหาย้อนกลับ

กำหนดให้ $y \in Y$ และ $p \in P$ ต้องการหา $x \in X$ ที่ทำให้ $y = A(p)(x)$

3. ปัญหาการหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของตัวแบบ

กำหนดให้ $x \in X$ และ $y \in Y$ ต้องการหา $p \in P$ ที่ทำให้ $y = A(p)(x)$

ปัญหาสุดท้ายนี้อาจเรียกได้ว่า ปัญหาแคลิเบรชัน (calibration problem)

การหาผลเฉลยของปัญหาแบบ 1 อาจดูง่ายกว่าปัญหาผกผันทั้งแบบ 2 และ 3 อย่างไรก็ตามการหาผลเฉลย y ที่สอดคล้องกับ $y = A(p)(x)$ ในปัญหา 1 นั้นอาจต้องหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์และปริพันธ์ที่ซับซ้อนจนอาจเกิดความยุ่งยากไม่น้อยไปกว่าการแก้ปัญหาผกผันก็ได้

ในการแก้ปัญหาผกผันใด ๆ เป็นการหาผลเฉลยโดยประมาณจากข้อมูลที่ได้จากการสังเกตที่เก็บรวบรวมได้ ซึ่งในปัญหาแบบ 2 และ 3 จะแทนข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากการสังเกตด้วย y, p และ y, x ตามลำดับ ทั้งนี้ในการแก้ปัญหาจริงแบบ 2 ในภาคปฏิบัตินั้น หากมีข้อมูล y จากการสังเกตเพียงค่าเดียวจะไม่เพียงพอที่ประมาณค่า p ได้

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างปัญหาการคำนวณอินทิกรัลของฟังก์ชัน $e^{-pt}x(t)$ ในปัญหาทั้ง 3 แบบดังกล่าวข้างต้น ดังนี้

1. ปัญหาตรง

กำหนดให้ $x : [0,1] \to \Re$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ $p > 0$ เป็นพารามิเตอร์ แล้วต้องการคำนวณหาค่า $y(t)$ โดยที่

$$y(t) \coloneqq \int_0^t e^{-ps}x(s)\,ds,\ t \in [0,1]$$

2. ปัญหาย้อนกลับ

กำหนดให้ $y : [0,1] \to \Re$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และ $p > 0$ แล้วต้องการหา $x : [0,1] \to \Re$ ซึ่งทำให้

$$y(t) = \int_0^t e^{-ps}x(s)\,ds \text{ สำหรับทุก } t \in [0,1]$$

เรียกนิพจน์ e^{-ps} ว่า แฟคเตอร์คิดลด (discount factor)

3. ปัญหาการหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสม

กำหนดให้ $y : [0,1] \to \Re$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และ $x : [0,1] \to \Re$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้วต้องการหาพารามิเตอร์ $p > 0$ ที่ทำให้

Prince of Songkla University Pattani Campus

$$y(t) = \int_0^t e^{-ps} x(s)\ ds \text{ สำหรับทุก } t \in [0,1]$$

เราสามารถหาผลเฉลยของปัญหา 1 ได้ทั้งในเชิงวิเคราะห์หรือเชิงตัวเลข แต่ในที่นี้จะสนใจการแก้ปัญหาผกผันทั้งแบบ 2 และ 3 เป็นสำคัญ เงื่อนไขจำเป็นในการหาผลเฉลยของปัญหาผกผันคือเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$

ปัญหา 2 สมมูลกับ

$$y'(t) = e^{-pt} x(t) \text{ สำหรับทุก } t \in [0,1]$$

เมื่อจัดพจน์ในรูปของฟังก์ชัน x ได้ว่า

$$x(t) = y'(t) e^{pt} \text{ สำหรับทุก } t \in [0,1]$$

ถ้าต้องการคำนวณหาค่าเชิงตัวเลขของ x โดยใช้สูตรนี้ จะต้องทราบค่าอนุพันธ์ของ y

ส่วนปัญหา 3 สมมูลกับ

$$y'(t) = e^{-pt} x(t) \text{ สำหรับทุก } t \in [0,1]$$

เพื่อหาพารามิเตอร์ p จะต้องทราบค่าอนุพันธ์ของ y อย่างไรก็ตามสำหรับทุก $t \in [0,1]$ จะก่อให้เกิดระบบสมการที่มีจำนวนสมการมากกว่าตัวแปร p ซึ่งมีเพียงตัวแปรเดียว จึงเกิดเป็นระบบเกินกำหนด (over-determined system) แต่ในปัญหานี้เราต้องการ $\hat{t} \in (0,1)$ เพียงหนึ่งเดียวที่ทำให้

$$p = -\frac{1}{\hat{t}} \ln\left(\frac{y'(\hat{t})}{x(\hat{t})}\right)$$

เป็นจริง

2.2 ปัญหาผกผันสำหรับการคำนวณความผันผวนแฝง

ในการหาค่าความผันผวนแฝงสำหรับออปชันแบบยูโรเปียนที่มีหลักทรัพย์อ้างอิงเป็นไปตามตัวแบบ Black-Sholes นั้นเราอาจคิดว่าจะสามารถคำนวณความผันผวนแฝงได้โดยตรงจากสูตร

Prince of Songkla University Pattani Campus

รูปแบบปิด (closed-form formula) แต่แท้จริงแล้วไม่มีสูตรรูปแบบปิดของความผันผวนแฝง ขอให้พิจารณาปัญหาการหาความผันผวนแฝงเชิงตัวเลขดังนี้

เมื่อทราบค่าของหลักทรัพย์ S ณ เวลา t และอัตราดอกเบี้ย r ซึ่งทั้งสามค่านี้เป็นค่าคงที่ และทราบค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของยูโรเปียนคอลออปชัน คือ ราคาการใช้สิทธิ K และระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชัน $\tau = T - t$ เมื่อ T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิ แล้วสามารถคำนวณหาความผันผวนแฝง $\sigma := \sigma_{K,\tau}$ ได้จากการแก้สมการ

$$C_{BS}(\sigma; S_t, K, \tau, r) = C_{\text{mkt}}$$

โดยที่ C_{mkt} เป็นราคาตลาดของคอลออปชัน

เมื่อกำหนดให้ $C(\sigma) := C_{BS}(\sigma; S_t, K, \tau, r)$ ตามสมการ (1.6) จะได้

$$C(\sigma) - C_{mkt} = 0$$

ฟังก์ชัน C เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ขึ้นกับตัวแปร σ โดยที่ C เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีผลเฉลยในรูปแบบปิด แต่จะสามารถหาความผันผวน σ ซึ่งเป็นผลเฉลยของ C โดยอาศัยวิธีการเชิงตัวเลข โดยกำหนดให้

$$\hat{C} = C(\sigma) - C_{mkt} \tag{2.1}$$

ทั้งนี้หากทราบค่าราคาตลาด C_{mkt} ของออปชัน จะสามารถหาค่าความผันผวนเมื่อแทนค่าแฟกเตอร์อื่น ๆ ลงในฟังก์ชันมูลค่าออปชัน $C(\sigma)$ ด้วยเหตุที่หาความผันผวนจากการอนุมานจากราคาของออปชัน จึงเรียกความผันผวนดังกล่าวนี้ว่า “ความผันผวนแฝง” (implied volatility)

2.3 การมีอยู่และมีหนึ่งเดียวของความผันผวนแฝง

บทแทรกต่อไปนี้ใช้ในการแสดงถึงการมีอยู่ของตัวผกผันของราคา Black-Scholes (C_{BS}^{-1})

บทแทรก 2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ที่มีโดเมน (domain) อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้วจะได้ว่าภาพ (image) ของ f อยู่ในช่วง $[f(a), f(b)]$ และฟังก์ชัน
$f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ มีตัวผกผัน

Prince of Songkla University Pattani Campus

พิสูจน์ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบทค่ากลางจะได้ว่าสำหรับทุกจำนวน z ที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ จะมีจำนวน $c \in [a,b]$ ที่ทำให้ $z = f(c)$ กล่าวคือ $[f(a), f(b)] \subset \text{Image}(f)$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,b]$ จะได้ $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$ เมื่อ $a \leq t \leq b$ นั่นคือ $\text{Image}(f) \subset [f(a), f(b)]$ เป็นผลให้ $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง (surjective) และเนื่องจากฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (injective) จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง (bijective) เพราะฉะนั้น f มีตัวผกผัน □

C_{BS} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ ที่ขึ้นกับ σ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้บนช่วง $[0, +\infty]$ และ $C_{BS}([0, +\infty]) = [0, S_t - Ke^{-r\tau}]$ โดยบทแทรก 2.1 จะได้ว่า

$$C_{BS} : [0, +\infty] \to [0, S_t - Ke^{-r\tau}] \text{ มีตัวผกผัน}$$

กำหนดให้ Y_1 และ Y_2 เป็นราคาตลาดของคอลออปชันที่มีตัวแปรร่วม $X_1 = (K_1, \tau_1)$ และ $X_2 = (K_2, \tau_2)$ โดยที่ S_t และ r เป็นค่าคงที่ จากสมการ (2.1) ได้ความผันผวนแฝง $\sigma^{imp}(X_1)$ และ $\sigma^{imp}(X_2)$ จะเห็นได้ว่า $\sigma^{imp}(X_1)$ และ $\sigma^{imp}(X_2)$ ไม่เป็นตัวเดียวกัน

ต่อไปจะแสดงความมีหนึ่งเดียวของความผันผวนแฝง เมื่อกำหนด S_t และ r จาก C_{BS} เป็นลำดับเพิ่มขึ้นทางเดียวโดยแท้ที่ขึ้นกับ σ จะได้ว่า สำหรับ $\sigma_1 < \sigma_2$

$$\begin{aligned} C_{BS}(\sigma_1; X_1) &< C_{BS}(\sigma_2; X_2) \\ (Y_1; X_1) &< (Y_2; X_2) \\ C_{BS}^{-1}(Y_1; X_1) &< C_{BS}^{-1}(Y_2; X_2) \\ \sigma_t^{imp}(Y_1; X_1) &< \sigma_t^{imp}(Y_2; X_2) \end{aligned}$$

นั่นคือ C_{BS} ที่แตกต่างกัน 2 ค่า ได้ความผันผวนแฝง 2 ค่าที่แตกต่างกันด้วย

เงื่อนไขเหล่านี้แสดงให้เห็นว่าความผันผวนแฝงมีอยู่ มีหนึ่งเดียว และไม่เป็นจำนวนลบ

2.4 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเชิงตัวเลข

การหาความผันผวนแฝงตามต้องการ คือการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ (2.1) ซึ่งจะสามารถใช้วิธีนิวตัน (Newton's method) สูตรการทำซ้ำของวิธีนิวตันจะมีพจน์อนุพันธ์ของ $C_{BS}(\sigma)$ ซึ่งสามารถหาได้ แต่มีความซับซ้อน อย่างไรก็ตามจะสามารถหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ (2.1) ได้โดยวิธี

Prince of Songkla University Pattani Campus

อื่นเพื่อเลี่ยงการใช้อนุพันธ์ของ $C_{BS}(\sigma)$ เช่น วิธีเส้นตัด (secant method) และวิธีแบ่งครึ่งช่วง (bisection method) ในที่นี้จะนำเสนอการคำนวณความผันผวนแฝงเชิงตัวเลขด้วยวิธีนิวตัน วิธีเส้นตัด และวิธีแบ่งครึ่งช่วง

2.4.1 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตัน

กำหนดให้ σ_0 เป็นค่าประมาณแรกของความผันผวนแฝง ความชันของเส้นสัมผัสของกราฟ $\hat{C}$ ที่จุด $(\sigma_0, \hat{C}(\sigma_0))$ คือ เวก้า $\mathcal{V}(\sigma_0)$ จึงได้สมการเส้นสัมผัส

$$\hat{C} - \hat{C}(\sigma_0) = \mathcal{V}(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0)$$

เนื่องจาก เส้นสัมผัสนี้ตัดแกน σ ที่จุด $(\sigma_1, 0)$ จะได้

$$0 - \hat{C}(\sigma_0) = \mathcal{V}(\sigma_0)(\sigma_1 - \sigma_0)$$

ดังนั้น

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{1}{\mathcal{V}(\sigma_0)}(-\hat{C}(\sigma_0))$$

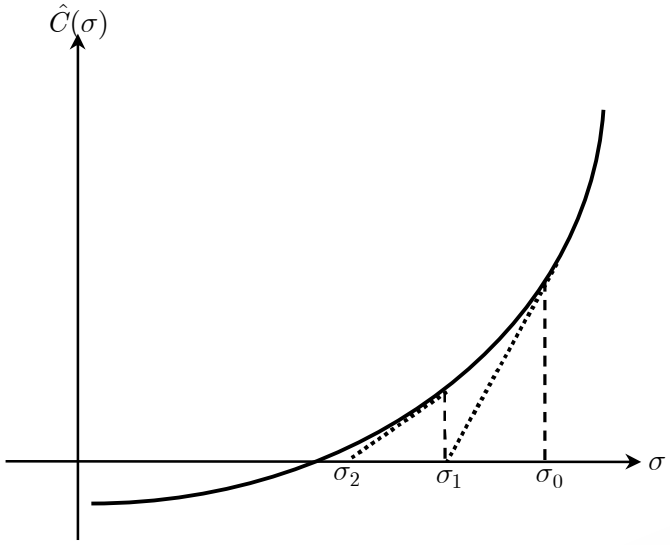
$$\sigma_1 = \sigma_0 - \frac{1}{\mathcal{V}(\sigma_0)}(C(\sigma_0) - C_{mkt})$$

เพราะฉะนั้นค่าประมาณของความผันผวนแฝงค่าต่อไปเป็นดังนี้

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} - \frac{1}{\mathcal{V}(\sigma_{n-1})}\Big(C(\sigma_{n-1}) - C_{mkt}\Big)$$

การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตันแสดงดังรูปที่ 2.3

Prince of Songkla University Pattani Campus



รูปที่ 2.3 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตัน

อัลกอริทึมในการคำนวณคำนวณความผันผวนแฝงโดยวิธีนิวตัน

อัลกอริทึมในการคำนวณหาความผันผวนแฝงโดยวิธีนิวตัน เป็นดังนี้

อินพุต : ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับหลักทรัพย์ ได้แก่ มูลค่าหลักทรัพย์ S_* ณ เวลา t_* และอัตราดอกเบี้ย r ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับคอลออปชันแบบยูโรเปียน ได้แก่ ราคาใช้สิทธิ K และระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชัน $\tau = T - t$ เมื่อ T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิ ราคาตลาด C_{mkt} และความผันผวนแฝงเริ่มต้น σ_0

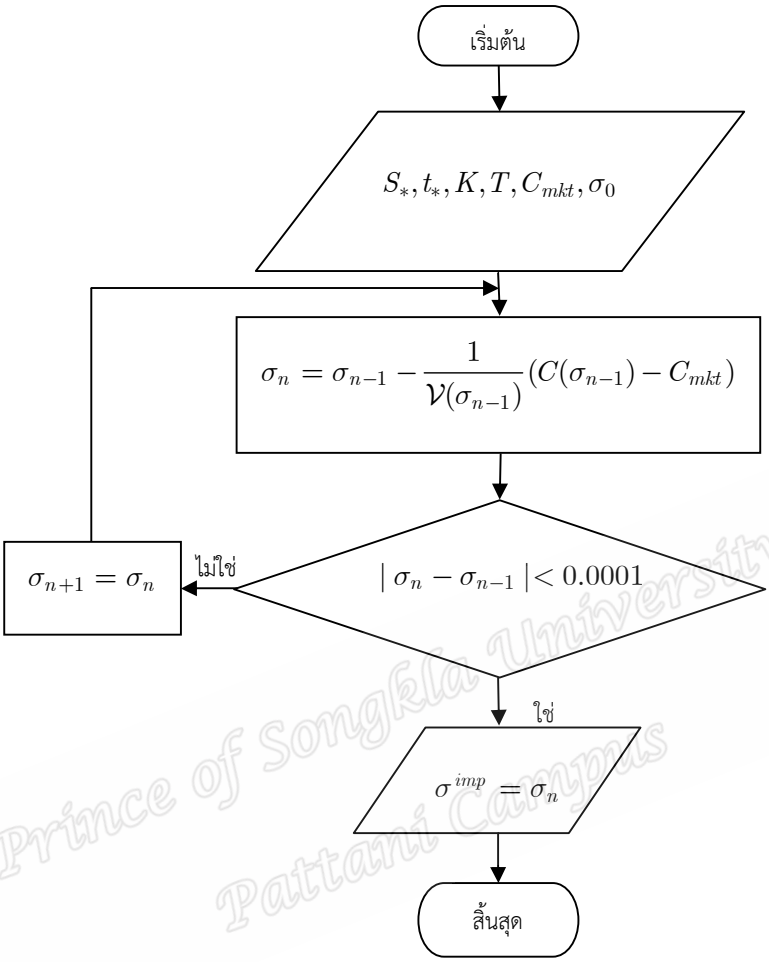
ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหา $C(\sigma_0) \coloneqq C_{BS}(S_*, t_*; K, \tau, r, \sigma)$ และ

$$\mathcal{V}(\sigma_0) \coloneqq \frac{\partial}{\partial \sigma} C_{BS}(S_*, t_*; K, \tau, r, \sigma)$$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่า $\sigma_n = \sigma_{n-1} - \frac{1}{\mathcal{V}(\sigma_{n-1})}(C(\sigma_{n-1}) - C_{mkt})$ โดยวนทำซ้ำจนกว่าค่าคลาดเคลื่อน $| \sigma_n - \sigma_{n-1} | < 0.0001$

เอาท์พุต : σ_n เป็นค่าโดยประมาณของความผันผวนแฝง $\sigma^{imp}(K, \tau)$

แผนภูมิสายงาน (flowchart) ของการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตันเป็นดังรูปที่ 2.4



Prince of Songkla University Pattani Campus

รูปที่ 2.4 แผนภูมิสายงานของการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตัน

2.4.2 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัด

กำหนดให้ σ_0 และ σ_1 เป็นค่าเริ่มต้น 2 ค่าของความผันผวนแฝงที่แตกต่างกัน ความผันผวนแฝงที่ต้องการจะอยู่ในระหว่าง 2 ค่านี้หรือไม่ก็ได้ เส้นตรงระหว่างจุด $(\sigma_0, \hat{C}(\sigma_0))$ และ $(\sigma_1, \hat{C}(\sigma_1))$ เป็นดังนี้

$$\hat{C} - \hat{C}(\sigma_0) = \frac{\hat{C}(\sigma_1) - \hat{C}(\sigma_0)}{\sigma_1 - \sigma_0}(\sigma - \sigma_0)$$

เส้นตรงนี้ตัดแกน σ ที่จุด $(\sigma_2, 0)$ จะได้

$$0 - \hat{C}(\sigma_0) = \frac{\hat{C}(\sigma_1) - \hat{C}(\sigma_0)}{\sigma_1 - \sigma_0}(\sigma_2 - \sigma_0)$$

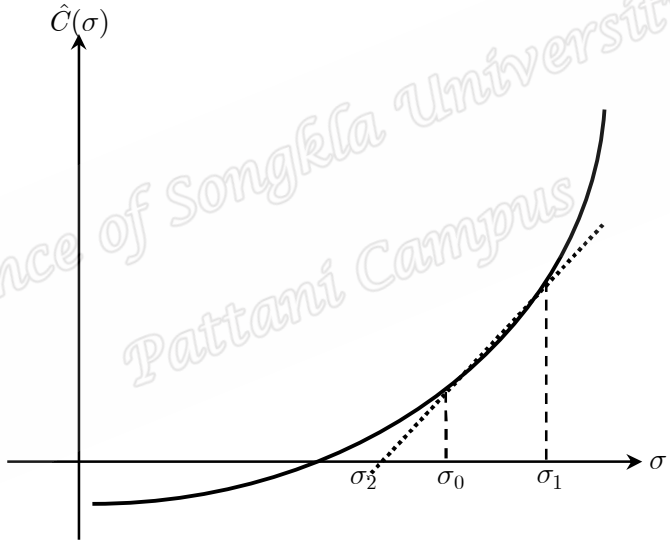
$$\sigma_2 = \sigma_0 + \frac{-\hat{C}(\sigma_0)}{\left(\hat{C}(\sigma_1) - \hat{C}(\sigma_0)\right)}(\sigma_1 - \sigma_0)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + (C_{mkt} - C(\sigma_0))\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{C(\sigma_1) - C(\sigma_0)}$$

เพราะฉะนั้นค่าประมาณของความผันผวนแฝงค่าต่อไปเป็นดังนี้

$$\sigma_n = \sigma_{n-2} + (C_{mkt} - C(\sigma_{n-2}))\frac{\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}}{C(\sigma_{n-1}) - C(\sigma_{n-2})}$$

การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัดแสดงดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัด

อัลกอริทึมในการคำนวณหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัด

อัลกอริทึมในการคำนวณหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัด เป็นดังนี้

อินพุต : ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับหลักทรัพย์ ได้แก่ มูลค่าหลักทรัพย์ S_* ณ เวลา t_* และอัตราดอกเบี้ย r ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับคอลออปชันแบบยูโรเปียน ได้แก่ ราคาการใช้สิทธิ K และระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชัน $\tau = T - t$ เมื่อ T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิ ราคาตลาด C_{mkt} และความผันผวนแฝงเริ่มต้น σ_0 และ σ_1

Prince of Songkla University Pattani Campus

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหา $C(\sigma_0) := C_{BS}(S_*, t_*; K, \tau, r, \sigma)$ และ

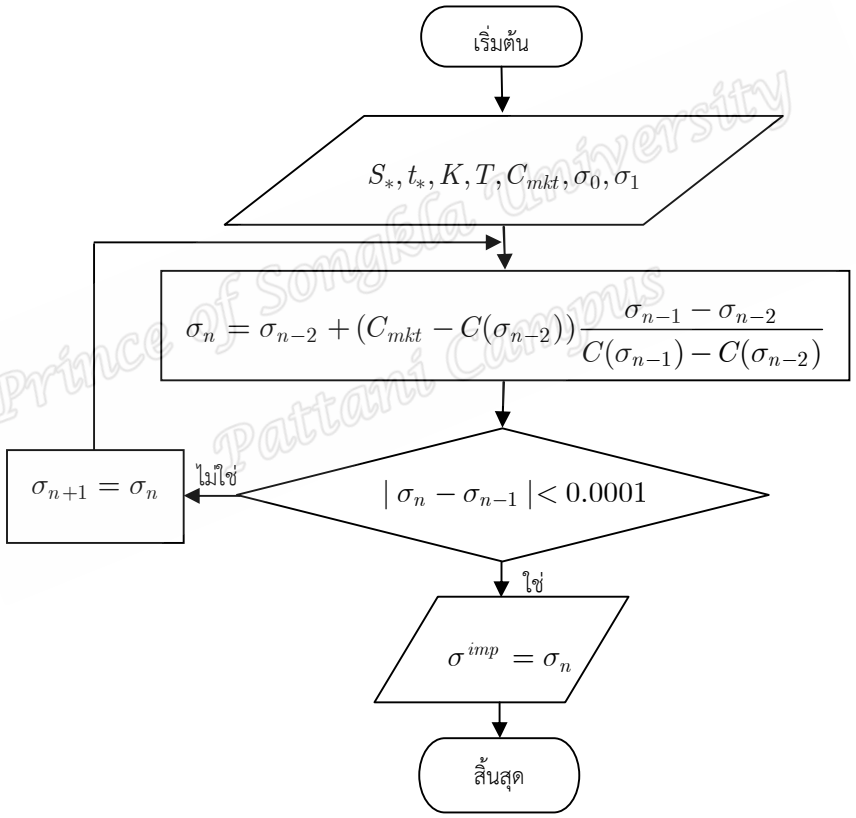
$C(\sigma_1) := C_{BS}(S_*, t_*; K, \tau, r, \sigma)$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่า $\sigma_n = \sigma_{n-2} + (C_{mkt} - C(\sigma_{n-2}))\dfrac{\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}}{C(\sigma_{n-1}) - C(\sigma_{n-2})}$

โดยวนทำซ้ำจนกว่าค่าคลาดเคลื่อน $| \sigma_n - \sigma_{n-1} | < 0.0001$

เอาท์พุต : σ_n เป็นค่าโดยประมาณของความผันผวนแฝง $\sigma^{imp}(K, \tau)$

แผนภูมิสายงานของการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัดเป็นดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 แผนภูมิสายงานของการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัด

2.4.3 การหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วง

วิธีแบ่งครึ่งช่วงเป็นวิธีการหาผลเฉลยของ $f(x) = 0$ ที่มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b) โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

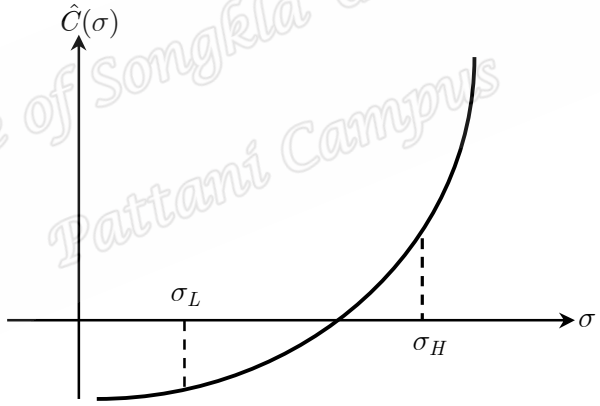
ทฤษฎีบท 2.2 (Bolzano) กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สมการ $f(x)=0$ จะมีรากอย่างน้อยหนึ่งรากอยู่ระหว่าง a และ b ถ้า $f(a)f(b)<0$

การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วงเป็นดังนี้

กำหนดให้ σ_L และ σ_H เป็นค่าเริ่มต้นของความผันผวนแฝง โดยที่ $\hat{C}(\sigma_L)\cdot\hat{C}(\sigma_H)<0$ ค่าประมาณของความผันผวนแฝงค่าต่อไปสามารถคำนวณจากสูตรการทำซ้ำต่อไปนี้

$$\sigma_n=\frac{\sigma_L-\sigma_H}{2}$$

ถ้า $\hat{C}(\sigma_n)\cdot\hat{C}(\sigma_L)<0$ แทน σ_H ด้วย σ_n และถ้า $\hat{C}(\sigma_n)\cdot\hat{C}(\sigma_L)>0$ แทน σ_L ด้วย σ_n



รูปที่ 2.7 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วง

อัลกอริทึมในการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วง

อัลกอริทึมในการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วง เป็นดังนี้

อินพุต : ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับหลักทรัพย์ ได้แก่ มูลค่าหลักทรัพย์ S_* ณ เวลา t_* และอัตราดอกเบี้ย r ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับคอลออปชันแบบยูโรเปียน ได้แก่ ราคาการใช้สิทธิ K และระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชัน $\tau=T-t$ เมื่อ T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิ ราคาตลาด C_{mkt} และความผันผวนแฝงเริ่มต้น σ_L และ σ_H ซึ่งทำให้ $\hat{C}(\sigma_L)\cdot\hat{C}(\sigma_H)<0$

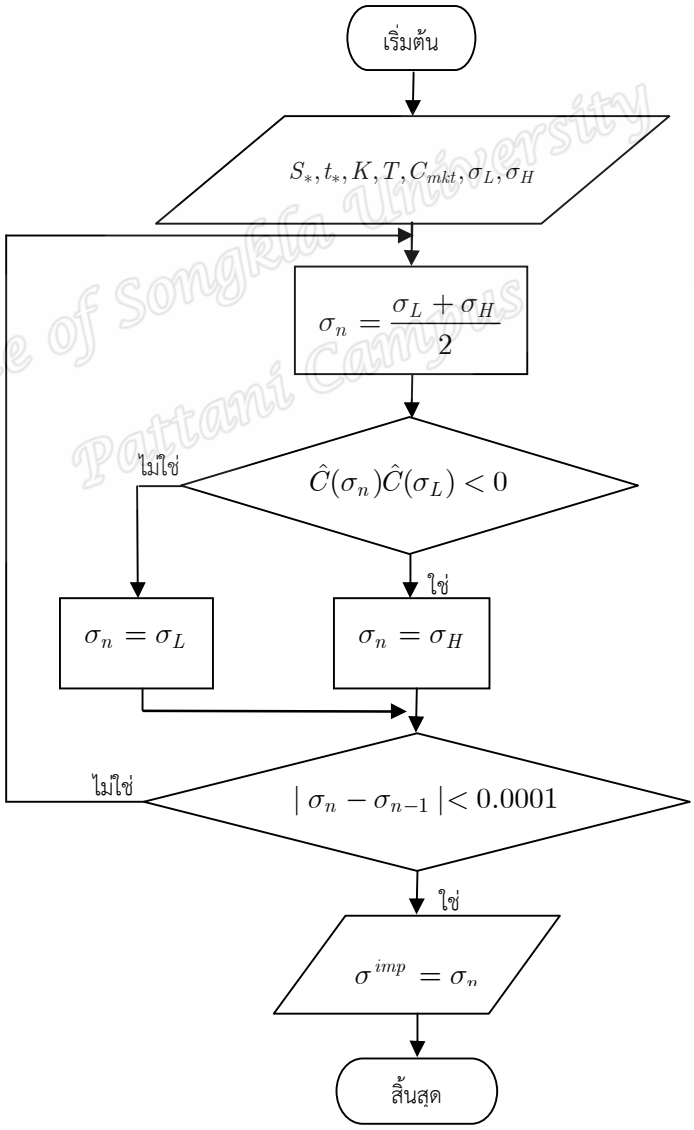
Prince of Songkla University Pattani Campus

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหา $\sigma_n = \frac{\sigma_L + \sigma_H}{2}$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่า $C(\sigma_n) := C_{BS}(S_*, t_*; K, \tau, r, \sigma)$ แล้วพิจารณา ถ้า $C(\sigma_n) < C_{mkt}$ แทน σ_L ด้วย σ_n และถ้า $C(\sigma_n) \geq C_{mkt}$ แทน σ_H ด้วย σ_n และวนทำซ้ำจนกว่าค่าคลาดเคลื่อน $| \sigma_n - \sigma_{n-1} | < 0.0001$

เอาท์พุต : σ_n เป็นค่าโดยประมาณของความผันผวนแฝง $\sigma^{imp}(K, \tau)$

แผนภูมิสายงานของการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วงเป็นดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แผนภูมิสายงานของการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วง

Prince of Songkla University Pattani Campus

2.4.4 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

ในตัวแบบ (1.1) ได้สมมติให้ความผันผวน σ เป็นค่าคงที่ เมื่อสมมติให้ความผันผวนขึ้นกับมูลค่าของหลักทรัพย์ S และเวลา t แล้วกรณีทั่วไปของตัวแบบ (1.1) เป็นดังนี้

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW \tag{2.2}$$

เรียก ฟังก์ชัน $\sigma(t, S_t)$ ว่า ฟังก์ชันความผันผวนเฉพาะถิ่น (local volatility function) ในที่นี้สมมติว่า $\sigma(t, S_t)$ เป็นฟังก์ชันดีเทอร์มินิสติก (deterministic function) คือฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์

ประยุกต์ใช้บทแทรกอิโตะและฟังก์ชันค่าของออปชัน $C_t(t, S)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันสเกลาร์จะอยู่ในรูปของ PDE ของแบล็ค-โชล ในกรณีทั่วไป ดังนี้

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S)S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \tag{2.3}$$

โดยที่ $C^{2,1}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับที่ 2 และ 1 เมื่อเทียบกับตัวแปร S และ t ตามลำดับ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบที่จุดปลาย (terminal boundary condition)

$$C(T, S) = (S - K)^+ \tag{2.4}$$

สมมติว่า เรามีชุดข้อมูลราคาตลาดของคอลออปชันแบบยูโรเปียนที่มีวันครบกำหนดใช้สิทธิ $T_1, \ldots, T_N$ โดยสมมติว่า แต่ละ T_i ออปชันจะมีราคาใช้สิทธิ $K_{i1}, \ldots, K_{im_i}, m_i \in \mathbb{N}$

เมื่อกำหนดให้ V_{ij}^b และ V_{ij}^a แทนราคาเสนอซื้อและเสนอขายคอลออปชันตามลำดับ ที่มีวันครบกำหนดใช้สิทธิ T_i ออปชันจะมีราคาใช้สิทธิ K_{ij}

มูลค่าเชิงทฤษฎีของออปชันที่มีหลักทรัพย์เป็นไปตามตัวแบบ (2.2) เป็นดังนี้

$$c_{ij}(\sigma) = C(S_*, t_*; K_{ij}, T_i; r, \sigma), j = 1, \ldots, m_i, i = 1, \ldots N$$

จุดมุ่งหมายหลักในการแคลิเบรชันโดยใช้ข้อมูลที่เก็บรวบรวมจากตลาดคือการหารูปแบบเชิงฟังก์ชันนอลของ $\sigma : [0, \infty) \times [0, T_{\max}] \to \mathbb{R}$ ซึ่งเป็นความผันผวนเฉพาะถิ่นโดยที่

Thammasat University Rangsit Campus

$$T_{\max} \coloneqq \max_{i=1,\ldots,N} T_i$$

สมมติว่า ข้อมูลราคาตลาดของออปชันในตลาดหลักทรัพย์มีสมบัติว่า

$$\upsilon_{ij} \approx c_{ij} \quad \text{โดยที่ } V_{ij}^b \le \upsilon_{ij} \le V_{ij}^a \quad \text{เมื่อ} \quad j = 1,\ldots,m_i \quad \text{และ } i = 1,\ldots N$$

โดยที่ υ_{ij} แทนค่าเฉลี่ยของราคาเสนอซื้อและราคาเสนอขาย $\upsilon_{ij} = (1/2)(V_{ij}^b + V_{ij}^a)$

กำหนดให้ Σ แทนปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีโดเมน $[0,\infty)\times[0,T_{\max}]$ แล้วปัญหาออปทิไมเซชันของการหาความผันผวนเฉพาะถิ่นคือการหา $\sigma \in \Sigma$ ที่ทำให้

$$G(\sigma) \coloneqq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i} \omega_{ij}(c_{ij}(\sigma) - \upsilon_{ij})^2 \tag{2.5}$$

มีค่าต่ำที่สุด โดยที่ ω_{ij} นิยามดังนี้

$$\omega_{ij} = \frac{1}{|\, V_{ij}^b - V_{ij}^a \,|} \quad \text{หรือ} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{(\mathcal{V}_i)^2}$$

โดยที่ $\mathcal{V}$ คือเวก้าหรืออนุพันธ์ของคอลออปชันแบบยูโรเปียน

นิพจน์แรกเป็นการปรับสมดุลขนาดของความแตกต่างระหว่างราคาเสนอซื้อกับราคาเสนอขาย ส่วนนิพจน์ที่สองแสดงความไวของราคาออปชันที่ควรจะเป็น

อัลกอริทึมในการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

อัลกอริทึมในการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด เป็นดังนี้

อินพุต : ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับหลักทรัพย์ ได้แก่ มูลค่าหลักทรัพย์ S_* ณ เวลา t_* และอัตราดอกเบี้ย r ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับคอลออปชันแบบยูโรเปียน ได้แก่ ราคาการใช้สิทธิ K_{ij} เมื่อ $j = 1,\ldots,m_i$ และ $i = 1,\ldots N$ ระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชัน T_i ราคาเสนอซื้อ V_{ij}^b และเสนอขาย V_{ij}^a

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหา $\upsilon_{ij} = (1/2)(V_{ij}^b + V_{ij}^a)$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่า $\omega_{ij} = \frac{1}{|\, V_{ij}^b - V_{ij}^a \,|}$ หรือ $\omega_{ij} = \frac{1}{(\mathcal{V}_i)^2}$

Prince of Songkla University Pattani Campus

ขั้นตอนที่ 3 หา $\sigma \in \Sigma$ ที่ทำให้ $G(\sigma) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\omega_{ij}(c_{ij}(\sigma)-\upsilon_{ij})^2$ มีค่าต่ำที่สุด

เอาท์พุต : σ เป็นค่าโดยประมาณของความผันผวน

ในทางปฏิบัติจะไม่สามารถหา σ เพียงหนึ่งเดียว (unique) ที่ทำให้ $G(\sigma)$ มีค่าต่ำสุดได้ เนื่องจากการหา σ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $G(\sigma)$ มีค่าต่ำสุดใน (2.5) นั้นโดยปกติแล้วจะไม่ขึ้นกับข้อมูลต่อเนื่อง ส่งผลปัญหาการหา σ จัดเป็นปัญหาที่ตั้งอย่างบกพร่อง ด้วยเหตุนี้จึงต้องใช้เทคนิคที่เรียกว่ากลยุทธ์เรกูลาร์ไรเซชัน (regularization strategies) (Chiarella, et *al.*, 2000)

Prince of Songkla University
Pattani Campus

บทที่ 3

วิธีเรกูลาร์ไรเซชันสำหรับการคำนวณความผันผวนแฝง

โดยทั่วไปการหาผลเฉลยของปัญหาผกผันด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะทำให้เกิดผลเฉลยที่ไร้เสถียรภาพ จึงไม่จัดเป็นปัญหาที่สร้างขึ้นมาอย่างดี การผ่อนปรนความไร้เสถียรภาพของผลเฉลยจะอาศัยวิธีเรกูลาร์ไรเซชันในการประมาณปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่องด้วยปัญหาที่ตั้งขึ้นมาอย่างดี

3.1 ปัญหาที่ตั้งขึ้นมาอย่างดี

กำหนดให้ X และ Y เป็นปริภูมิเชิงเส้น ปัญหาผกผันเป็นดังนี้ กำหนดให้ $y \in Y$ และ $K : X \to Y$ เราต้องการหา $x \in X$ ที่ซึ่ง

$$Kx = y \tag{3.1}$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

บ่อยครั้งในการประยุกต์การส่ง $K : X \to Y$ มักเป็นตัวดำเนินการกระชับ (compact operator) ซึ่งส่งเซตที่มีขอบเขตไปเป็นเซตกระชับ (ซึ่งหมายถึง เป็นเซตปิดและมีขอบเขต) ตัวดำเนินการกระชับมีสมบัติที่ดีในแง่ที่ว่า เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบนปริภูมิที่มีมิติอนันต์ ที่มีสมบัติหลายประการเช่นเดียวกับตัวดำเนินการเชิงเส้น (เช่นเมทริกซ์) บนปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด

จะกล่าวว่า ปัญหา (3.1) เป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างดี ถ้าประพจน์ต่อไปนี้เป็นจริง

1. ผลเฉลย x มีจริง (existence) สำหรับทุก $y \in Y$
2. ผลเฉลย x มีเพียงหนึ่งเดียว (uniqueness) สำหรับทุก $y \in Y$ และ
3. ผลเฉลยมีเสถียรภาพ (stability) หรือ ผลเฉลย x ขึ้นอย่างต่อเนื่องกับข้อมูล y

ปัญหา (3.1) เป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่อง ถ้าไม่เป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างดี

Chiarella et *al.* (2000) กล่าวว่า ปัญหาผกผันส่วนมากจะเป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่อง ในกรณีที่ K เป็นตัวดำเนินการกระชับบนปริภูมิมิติอนันต์แล้วปัญหาผกผันนั้นย่อมเป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่องเสมอ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท (Kirsch, 1996) กำหนดให้ X และ Y เป็นปริภูมินอร์ม (normed spaces) และ $K : X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่กระชับที่มี $\mathcal{N}(K) \coloneqq \{x \in X : Kx = 0\}$ เป็นปริภูมินัล กำหนดให้ $X \,/\, \mathcal{N}(K)$ มีมิติอนันต์ แล้วจะมีลำดับ $(x_n) \subset X$ ที่ซึ่ง $|| \, x_n \, || \to 0$ แต่ $(x_n) \subset X$ เป็นลำดับที่ไม่ลู่เข้า เราสามารถเลือก $(x_n) \subset X$ ที่ซึ่ง $|| \, x_n \, || \to \infty$ ในกรณีที่ K เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วตัวดำเนินการผกผัน $K^{-1} : Y \supset K(X) \to X$ จะไม่มีขอบเขต

จากทฤษฎีนี้กล่าวได้ว่าปัญหาผกผันที่พิจารณาบนตัวดำเนินการกระชับ K บนปริภูมิ X ที่มีมิติอนันต์จะได้ตัวดำเนินการผกผัน K^{-1} จะไม่มีขอบเขต จึงทำให้ K^{-1} ไม่ต่อเนื่อง นั่นคือประพจน์ที่ 3 ไม่เป็นจริง กล่าวคือ ปัญหาผกผันที่พิจารณาบนตัวดำเนินการกระชับบนปริภูมิที่มีมิติอนันต์จะเป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่องเสมอ

ในการแก้ปัญหาผกผันโดยทั่วไปนั้น ตัวดำเนินการผกผันของปัญหาจะไม่ขึ้นอย่างต่อเนื่องกับข้อมูล นอกจากนี้ในภาคปฏิบัติเราไม่ทราบค่าของ y ใน (3.1) แต่จะทราบข้อมูลโดยประมาณของ y ซึ่งจะเขียนแทนด้วย y^{ε} โดยจะทราบถึงระดับความแม่น (degree of precision) ดังนี้ ถ้า $y \in Y$ โดยที่ Y เป็นปริภูมิเชิงเส้นที่มี $||\cdot||$ เป็นนอร์ม แล้วเรามี $y^{\varepsilon} \in Y$ ที่ซึ่ง $|| \, y - y^{\varepsilon} \, || < \varepsilon$ กล่าวคือ เราทราบว่านอร์มของผลต่างระหว่าง y กับ y^{ε} มีค่าไม่เกิน ε

เนื่องจากปัญหาผกผันของ (3.1) เป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นมาอย่างบกพร่อง ดังนั้นจะสมมติว่าเราสามารถหาผลเฉลย x^{ε} เพื่อประมาณปัญหาของ

$$Kx^{\varepsilon} = y^{\varepsilon} \tag{3.2}$$

อย่างไรก็ตามผลเฉลยโดยประมาณ x^{ε} ของปัญหา (3.2) ไม่สามารถการันตีได้ว่าจะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของปัญหา (3.1) นอกจากนี้ยังไม่สามารถการันตีได้อีกว่าข้อมูล y^{ε} จะอยู่ในเรนจ์ (range) ของ K หรือไม่ ด้วยเช่นกัน

Prince of Songkla University Pattani Campus

3.2 ทิกโฮนอฟเรกูลาร์ไรเซชัน

ในการแก้ปัญหาผกผันที่ตั้งขึ้นมาอย่างบกพร่องนั้น ใช้วิธีที่เรียกว่า กลยุทธ์เรกูลาร์ไรเซชัน (regularization strategies) มีแนวคิดเป็นดังนี้

บ่อยครั้งโดยธรรมชาติของปัญหาเองทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยแท้จริง (exact solution) ของปัญหาได้ เราจึงพยายามหาผลเฉลยโดยประมาณที่ใกล้เคียงผลเฉลยที่แท้จริงมากที่สุด โดยที่ปัญหาใหม่ต้องไม่เป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่องที่ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ตามที่กล่าวข้างต้น แนวคิดของกลยุทธ์เรกูลาร์ไรเซชัน คือ พยายามแก้ปัญหาเดิมจากปัญหาใหม่ที่ให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับปัญหาเดิม

กลยุทธ์เรกูลาร์ไรเซชันที่เป็นที่รู้จักกันดีกลยุทธ์หนึ่งคือ ทิกโฮนอฟเรกูลาร์ไรเซชัน (Tikhonov regularisation) แต่เดิมทิกโฮนอฟเรกูลาร์ไรเซชันเป็นวิธีแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับระบบสมการเชิงเส้นที่เกินกำหนด (overdetermined linear system) $Kx = y$ โดยที่ K เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด (เช่น เมทริกซ์) โดยต้องการหา $x \in X$ ที่ทำให้ $|| Kx - y ||$ มีค่าน้อยที่สุดสำหรับบางนอร์มบน Y ในกรณีทั่วไปเราต้องการวิธีเดียวกันนี้สำหรับปัญหาที่มีปริภูมิที่มีมิติอนันต์ด้วยเช่นกัน อย่างไรก็ตามถ้าตัวดำเนินการ K กระชับแล้วปัญหาผกผันจะเป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่อง (Kirsch, 1996)

ส่วนการแก้ปัญหา (3.1) ด้วยวิธีทิกโฮนอฟในกรณีที่ $K : X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต (bounded linear operator) ด้วยการหา x ที่ทำให้ทิกโฮนอฟฟังก์ชันนอล (Tikhonov functional) ต่อไปนี้มีค่าต่ำสุด

$$J_\alpha(x) = || Kx - y ||^2 + \alpha || x ||^2 \tag{3.3}$$

สำหรับ $x \in X$ โดยที่ α เป็นจำนวนจริงบวกที่เรียกว่า พารามิเตอร์เรกูลาไรเซชัน (regularization parameter) (Chiarella et *al.*, 2000) ได้แสดงให้เห็นว่า สำหรับ $K : X \to Y$ ที่เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตระหว่างปริภูมิฮิลเบอร์ต (Hilbert space) และ $\alpha > 0$ แล้ว ฟังก์ชัน

เมื่อแทนที่ฟังก์ชันนอล (3.3) ด้วยฟังก์ชันนอลต่อไปนี้

$$J^1_\alpha(x) = || Kx - y ||^2 + \alpha || x ||^2_1 \tag{3.4}$$

แล้วทฤษฎีบทที่ 2.5 ยังคงเป็นจริง โดยที่ $||\cdot||_1$ เป็นนอร์มที่เข้มกว่า (stronger norm) ที่นิยามบนปริภูมิย่อย $X_1 \subset X$

3.3 วิธีเรกูลาร์ไรเซชันในการคำนวณความผันผวน

Lagnado และ Osher (1997) ได้เสนอกลยุทธ์ทิกโฮนอฟเรกูลาร์ไรเซชันของการหาความผันผวนเฉพาะถิ่นที่ทำให้ฟังก์ชันนอลต่อไปนี้มีค่าต่ำสุดดังนี้

$$F(\sigma) = \lambda G(\sigma) + || \nabla\sigma ||_2^2 \tag{3.5}$$

โดยที่ฟังก์ชัน G เป็นไปตาม

$$G(\sigma) \coloneqq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i} \omega_{ij}(c_{ij}(\sigma) - \upsilon_{ij})^2 \tag{3.6}$$

และ ∇ แทนตัวดำเนินการเกรเดียนต์

ตัวดำเนินการเกรเดียนต์ (gradient operator) ∇ ใน 3 มิตินิยามดังนี้

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right]^T$$

โดยที่สัญลักษณ์ T หมายถึงทรานสโพส์ของเมทริกซ์ ดังนั้น เกรเดียนต์บนฟังชัน 3 ตัวแปร $f(x,y,z)$ เป็นดังนี้

$$\nabla f(x,y,z) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right]^T = \left[f_x\ f_y\ f_z\right]^T$$

โดยที่ $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ และ $f_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$,

แนวคิดของ Lagnado และ Osher (1997) ในการกำหนดฟังก์ชันนอล (3.5) เป็นดังนี้ ปัญหาการหาความผันผวนเฉพาะถิ่น σ แต่เดิมนั้นได้พิจารณาจากฟังก์ชันนอล (3.6) โดยต้องการหา σ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (3.6) มีค่าต่ำที่สุด แต่เนื่องจากฟังก์ชันนอล (3.6) เป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่าง

Prince of Songkla University Pattani Campus

บกพร่องเพราะประพจน์ที่ 3 ที่เกี่ยวข้องกับความต่อเนื่องของผลเฉลย ไม่เป็นจริง ตามที่ได้เหตุผลไปแล้วก่อนหน้านี้ Lagnado และ Osher (1997) ได้ปรับเปลี่ยนทิกโฮนอฟฟังก์ชันนอล (3.4) เล็กน้อย เพื่อหา σ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอลที่อยู่ในรูปต่อไปนี้มีค่าต่ำที่สุด

$$\tilde{F}(\sigma) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}(V(S_0,0,K_{ij},T_i,\sigma) - V_{ij})^2 + \alpha \mid\mid \sigma \mid\mid^2$$

ซึ่งสมมูลกับการหา σ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอลที่อยู่ในรูปต่อไปนี้มีค่าต่ำที่สุด

$$\lambda\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}(V(S_0,0,K_{ij},T_i,\sigma) - V_{ij})^2 + \mid\mid \sigma \mid\mid^2$$

ต่อไปพิจารณาปริภูมิของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอับดับที่สองบน $(0,\infty)\times(0,\infty)$ ที่สามารถหาปริพันธ์กำลังสองได้ (square integrable) ดังนี้

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \mid \sigma(S,t) \mid^2 \, dSdt \leq c\int_0^\infty\int_0^\infty ((\frac{\partial\sigma}{\partial S})^2 + (\frac{\partial\sigma}{\partial t})^2) \, dSdt$$

สำหรับ $c > 0$

กำหนดให้ H^2 ปริภูมิโซโบเลฟ (sobolev space) ซึ่งเป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต แล้วบนปริภูมิ H^2 นั้น $\mid\mid\mid \nabla\sigma \mid\mid\mid_2$ เป็นนอร์มที่เข้มกว่านอร์ม $\mid\mid \sigma \mid\mid_2$ ดังนั้น Lagnado และ Osher (1997) จึงพิจารณาหา σ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (3.5) มีค่าต่ำที่สุด ซึ่ง Chiarella et *al.* (2000) พบว่าจะมี σ ที่ต่ำที่สุดเพียงหนึ่งเดียวที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (3.5) มีค่าต่ำที่สุด ซึ่ง σ เป็นผลเฉลยที่เราต้องการ

ในปี ค.ศ. 2002 Chiarella et *al.* ได้แทนที่ $G(\sigma)$ ใน (3.5) ด้วย $H(\sigma)$ โดยที่

$$H(\sigma) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}\int_0^\infty\int_0^{T_{cur}} (V(S,t,K_{ij},T_i,\sigma) - V_{ij})^2 dSdt$$

เมื่อ T_{cur} แทนเวลาปัจจุบัน โดย Chiarella et *al.* (2002) ได้พิจารณาปัญหาการหาค่า σ ที่ทำให้

$$J_\lambda(\sigma) = \lambda H(\sigma) + \mid\mid \nabla\sigma \mid\mid^2 \tag{3.7}$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

มีค่าต่ำสุด โดยที่

$$|| \nabla\sigma ||^2 = \int \int \frac{\partial^2\sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} d\Omega_1 d\Omega_2$$

โดยที่ $\Omega_1 = (0, \infty)$ และ $\Omega_2 = [0, T_{cur}]$

สมการ Euler-Lagrange สำหรับ (3.7) คือ

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - \lambda \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} \frac{\partial V}{\partial \sigma}(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma)(V(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij}) = 0 \qquad (3.8)$$

กำหนดเงื่อนไขขอบบน (3.8) ดังนี้คือให้ $\sigma(0, t) = 0$ และ $\sigma(S, 0) = \sigma_0(S)$ โดยที่ $\sigma_0(S)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าของ S ซึ่งจะนำมาจากข้อมูลที่มีอยู่ ในการคำนวณประการแรกคือหาความผันผวนแฝงที่ทุกจุดของ $\{(n\triangle S, 0)\}_{n=0}^{n=N}$ สำหรับแต่ละราคาใช้สิทธิ์และเหมาะกับฟังก์ชันเส้นโค้งทุกค่าที่จะได้มาซึ่งการประมาณค่าสำหรับขอบล่าง ประการที่สองเป็นทางเลือกที่ง่ายกว่าคือแทนที่ PDE (3.8) ด้วย ODE อันดับสอง ในการนี้เราลดความซับซ้อนในข้อสมมติว่า ฟังก์ชันความผันผวน σ ไม่ขึ้นอยู่กับเวลา กำหนดเวลาปัจจุบันที่ $t = 0$ จะได้ว่ากลยุทธ์เรกูลาร์ไรเซชันเป็นการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอลทิกโฮนอฟต่อไปนี้

$$J_\lambda(\sigma) = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial S}\right)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} \int_0^\infty (V(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij})^2 dS$$

สำหรับสมการ Euler-Lagrange จะได้

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial S^2} - \lambda \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} \frac{\partial V}{\partial \sigma}(S, 0, K_{ij}, T_i, \sigma)(V(S, 0, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij}) = 0 \qquad (3.9)$$

สมการนี้มีปัญหาค่าขอบสองประเด็น ปัญหาแรกคือเราต้องทราบอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ σ บางจุด ปัญหาที่สองคือ เราเสนอการแก้สมการ (3.9) บนช่วง $[S_0, S_1]$ ที่มีค่าของ $\sigma(S)$ ที่จุดปลายที่กำหนด

Prince of Songkla University Pattani Campus

ขั้นตอนวิธีในการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน

กำหนดข้อมูล V^{ij} เราต้องการใช้ (3.8) ในการหาความผันผวน $\sigma(S,t)$ ซึ่งเป็นการหาค่าน้อยสุดของฟังก์ชันนอล (3.5) ในการนี้เราต้องแก้ปัญหา PDE (3.8) ดังนี้

เราแทนที่ $\{0 \le S < \infty\} \times \{0 \le t < \infty\}$ ด้วย $\Omega = [0, S_{\max}] \times [0, t_{\max}]$ ต้องการประมาณ $\sigma(S,t)$ ที่จุด $(m\Delta S, n\Delta t)$ บน Ω

ขั้นตอนวิธีในการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเรกูลาร์ไรเซชันเป็นดังนี้

1. กำหนดฟังก์ชัน $\varphi_0(S,t)$ เป็นค่าประมาณเริ่มต้นของความผันผวน σ

2. แต่ละจุด $(m\Delta S, n\Delta t)$ หาค่า $\varphi_0(m\Delta S, n\Delta t)$

3. ใช้สูตร Black-Scholes คำนวณหา $V(m\Delta S, n\Delta t, K_{ij}, T_i, \varphi_0(m\Delta S, n\Delta t))$

และ $\dfrac{\partial V}{\partial \sigma}(m\Delta S, n\Delta t, K_{ij}, T_i, \varphi_0(m\Delta S, n\Delta t))$

4. ใช้ค่าที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 คำนวณหา

$$W(S,t,K_{ij},T_i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i} \frac{\partial V}{\partial \sigma}(S,t,K_{ij},T_i,\sigma)(V(S,t,K_{ij},T_i,\sigma) - V^{ij})$$

5. แก้สมการปัวซอง $\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2} + \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \lambda W(S,t,K_{ij},T_i)$

เมื่อ W เป็นค่าที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 ภายใต้เงื่อนไขขอบที่เหมาะสม

6. ใช้ฟังก์ชันที่ได้ในขั้นตอนที่ 5 ซึ่งเรียกว่า φ_1 ทำซ้ำตามขั้นตอนข้างต้นตั้งแต่ขั้นตอนที่ 3 โดยใช้ φ_1 แทน φ_0 เป็นการประมาณถัดไป โดยวนทำซ้ำจนกว่าค่าคลาดเคลื่อน

$|\varphi_k - \varphi_{k+1}| < 0.1$

Prince of Songkla University Pattani Campus

บทที่ 4

การคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 index option

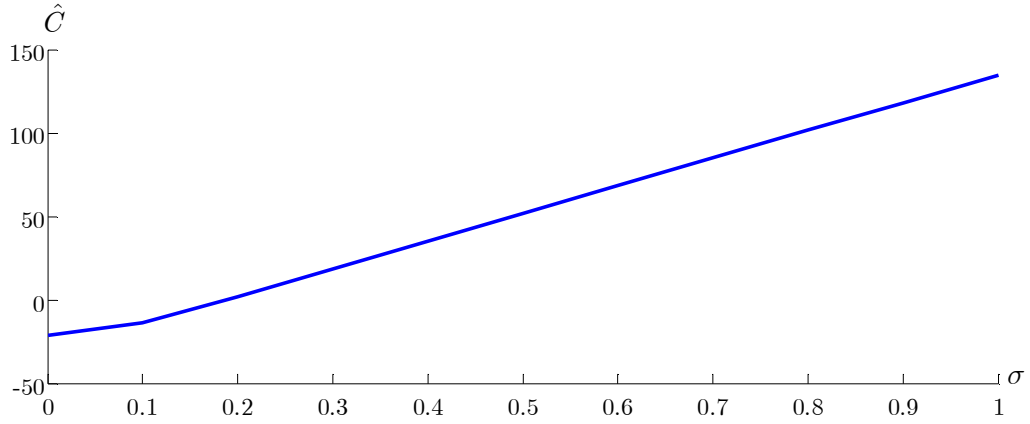
4.1 ข้อมูล SET50 index option

ในงานวิจัยนี้ได้เก็บรวบรวมข้อมูลการซื้อขาย SET50 Index Option จากตลาดสัญญาซื้อขายล่วงหน้า (TFEX : Thailand Futures Exchange) ตั้งแต่เดือนตุลาคม พ.ศ. 2557 ถึงเดือนมีนาคม พ.ศ. 2558 จำนวน 8 รุ่น (series) ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้แก่ ราคาปิดรายวันของ SET50 call option ราคาที่ใช้ชำระเมื่อครบกำหนด (settlement price) และราคาใช้สิทธิ อัตราดอกเบี้ยใช้อัตราดอกเบี้ยเงินฝากประจำ 3 เดือนของธนาคารกรุงเทพ

Prince of Songkla University Pattani Campus

4.2 การคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 ด้วยวิธีเชิงตัวเลข

เมื่อพิจารณาการคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 index option ณ วันที่ 16 ธันวาคม 2557 โดยมีวันที่ 31 มีนาคม 2558 เป็นวันหมดอายุ โดยที่ SET50 มีราคาอยู่ที่ 971.7 จุด ($S_0 = 971.7$) อัตราดอกเบี้ย 1% ($r = 0.01$) ราคาใช้สิทธิเท่ากับ 950 จุด ($K = 950$) อายุคงเหลือเท่ากับ 71 วัน ($T = 71 \div 365$) และ มีราคาตลาดเท่ากับ 44.8 จุด ($C_{mkt} = 44.8$) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนแฝง (σ) กับ $\hat{C}$ เป็นดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนแฝง (σ) กับ $\hat{C}$

จากกราฟในรูปที่ 4.1 ค่าความผันผวนแฝงโดยวิธีกราฟจะเป็นค่าไม่แม่นตรง แต่จะทราบค่าโดยประมาณว่าอยู่ในช่วง 0.1 ถึง 0.3 ดังนั้นในการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตันจะเลือกค่าเริ่มต้นเป็น 0.2 และการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัดและวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะเลือกค่าเริ่มต้นเป็น 0.1 และ 0.3 ซึ่งได้ผลการคำนวณความผันผวนแฝง (σ) ดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ผลการคำนวณความผันผวนแฝงเชิงตัวเลข

	วิธีนิวตัน		**วิธีเส้นตัด**		**วิธีแบ่งครึ่งช่วง**	
n	σ_n	$\mid \sigma_n - \sigma_{n-1} \mid$	σ_n	$\mid \sigma_n - \sigma_{n-1} \mid$	σ_n	$\mid \sigma_n - \sigma_{n-1} \mid$
0	0.2	-	0.1	-	0.1	-
1	0.1874	0.0126	0.3	0.2	0.3	0.2
2	0.1874	0.0000	0.1848	0.1152	0.2	0.1
3			0.1874	0.0026	0.15	0.05
4			0.1874	0.0000	0.1750	0.025
⋮					⋮	
13					0.1874	0.0001
14					0.1874	0.0000

จากตารางที่ 4.1 สรุปได้ค่าความผันผวนแฝงโดยประมาณเท่ากับ 0.1874 หรือ 18.74%

คำนวณค่าความผันผวนแฝงเชิงตัวเลขของ SET50 โดยใน 6 ช่วงระยะเวลา ได้แก่ 30, 60, 90, 120, 150 และ 180 วันซื้อขาย ก่อนวันครบกำหนด ได้ค่าความผันผวนแฝงดังตารางที่ 4.2

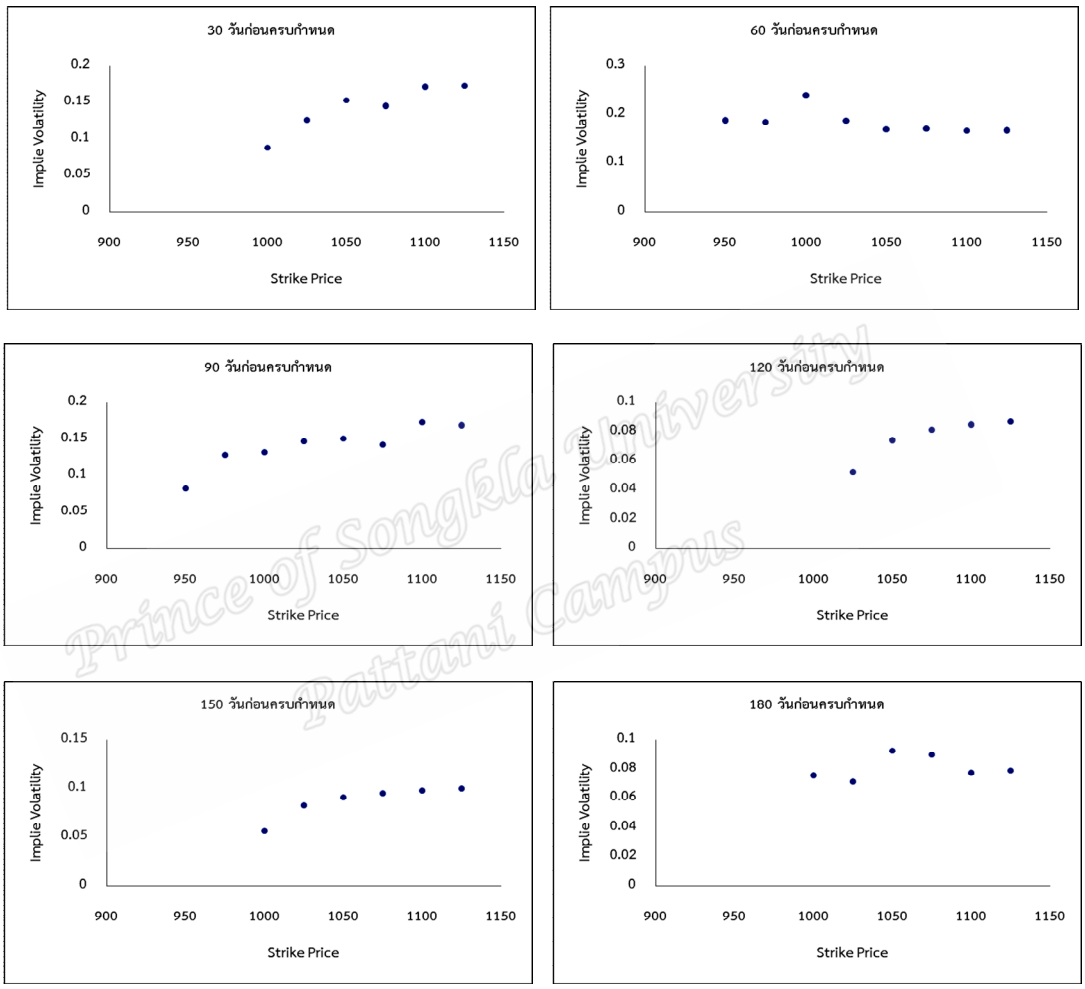
ตารางที่ 4.2 ค่าความผันผวนแฝงเชิงตัวเลขใน 6 ช่วงระยะเวลาก่อนวันครบกำหนด

K \ T	30	60	90	120	150	180
950	-	0.1874	0.0821	-	-	-
975	-	0.1845	0.1289	-	-	-
1000	0.0880	0.2394	0.1325	-	0.0565	0.0753
1025	0.1257	0.1872	0.1472	0.0525	0.0829	0.0710
1050	0.1521	0.1684	0.1507	0.0743	0.0911	0.0925
1075	0.1444	0.1698	0.1423	0.0813	0.0952	0.0898
1100	0.1710	0.1661	0.1725	0.0848	0.0980	0.0772
1125	0.1723	0.1667	0.1685	0.0868	0.1000	0.0789

Prince of Songkla University Pattani Campus

4.3 ความผันผวนรูปรอยยิ้ม (volatility smile)

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความผันผวนแฝงของ SET50 ใน 6 ช่วงระยะเวลา ได้แก่ 30, 60, 90, 120, 150 และ 180 วันซื้อขาย ก่อนวันครบกำหนด กับราคาใช้สิทธิ มีกราฟลักษณะต่าง ๆ ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนแฝงกับราคาใช้สิทธิของ SET50

จากกราฟข้างต้นจะเห็นว่าค่าความผันผวนแฝงไม่ได้เป็นค่าคงที่ค่าเดียวแต่จะเปลี่ยนไปตามราคาใช้สิทธิ ลักษณะของกราฟจะมีทั้งเป็นรูปรอยยิ้ม (ล่างขวา) รูปเส้นที่ลาดลงมาทางขวามือ (บนขวา) และรูปรอยยิ้มคว่ำ (รูปซ้ายและกลางขวา) เมื่อพิจารณากราฟความผันผวนแฝงโดยรวมทุกช่วงเวลาที่ศึกษาจะพบว่าเป็นรูปแบบรอยยิ้ม (volatility smile) ดังรูปที่ 4.3

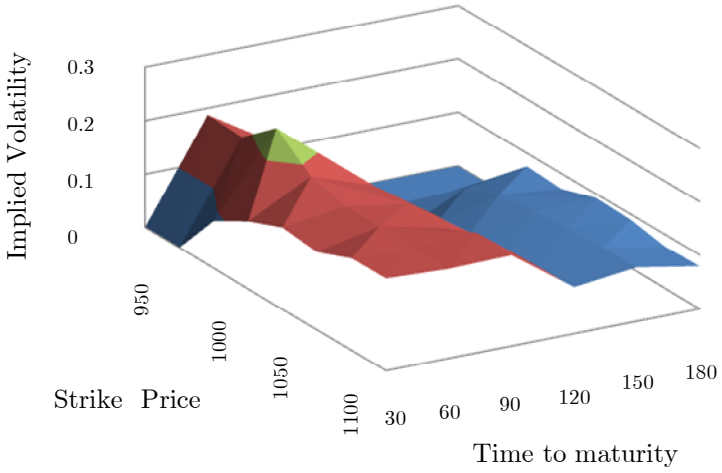
รูปที่ 4.3 ความผันผวนรูปรอยยิ้มของ SET50

การศึกษาความผันผวนรูปรอยยิ้มของ SET50 ที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงอยู่ในช่วง 1001.01 ถึง 1069.03 จุด แสดงให้เห็นว่าการซื้อขาย SET50 Call Option ที่มีราคาใช้สิทธิใกล้เคียงกับราคาปัจจุบันของสินทรัพย์อ้างอิง นั่นคือมีภาวะทางการเงิน At the money ค่อนไปทาง In the money จะมีความผันผวนน้อยกว่าเมื่อเทียบกับออปชันที่มีราคาใช้สิทธิห่างจากราคาปัจจุบันของสินทรัพย์อ้างอิง

Prince of Songkla University Pattani Campus

4.4 พื้นผิวของความผันผวน (volatility surface)

เมื่อนำความผันผวนรูปรอยยิ้มทุกช่วงเวลามาเขียนบนกราฟเดียวกัน สามารถแสดงโครงสร้างของความผันผวนแฝงเป็นพื้นผิวของความผันผวน (volatility surface) ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนแฝง ราคาใช้สิทธิ และเวลาครบกำหนดดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 พื้นผิวของความผันผวนของ SET50

จากรูปที่ 4.4 พบว่าความผันผวนของ SET50 มีแนวโน้มเพิ่มสูงขึ้นเมื่อใกล้ถึงวันครบกำหนด

4.5 การคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

คำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 index option ที่มีอัตราดอกเบี้ย 1% ($r = 0.01$) อายุคงเหลือ ($T_i, i = 1,2,...,6$) ราคา SET50 (S_{T_i}) และราคาใช้สิทธิ ($K_{ij}, j = 1,2,...,8$) เป็นดังตารางที่ 4.3 และราคาเสนอซื้อ (V_{ij}^b) และราคาเสนอขาย (V_{ij}^a) เป็นดังตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.3 ราคาใช้สิทธิ อายุคงเหลือ และราคา SET50

j	K_{ij}
1	950
2	975
3	1000
4	1025
5	1050
6	1075
7	1100
8	1125

i	T_i	S_{T_i}
1	0.082192	1042.8
2	0.164384	1050.29
3	0.246575	1001.01
4	0.328767	1069.03
5	0.410959	1053.22
6	0.493151	1049.78

Prince of Songkla University Pattani Campus

j	K_{1j}	T_1	S_{T_1}	K_{2j}	T_2	S_{T_1}	...	K_{6j}	T_6	S_{T_6}
1	950	0.082192	1042.8	950	0.164384	1050.29		950	0.493151	1049.78
2	975	0.082192	1042.8	975	0.164384	1050.29		975	0.493151	1049.78
3	1000	0.082192	1042.8	1000	0.164384	1050.29		1000	0.493151	1049.78
4	1025	0.082192	1042.8	1025	0.164384	1050.29		1025	0.493151	1049.78
5	1050	0.082192	1042.8	1050	0.164384	1050.29		1050	0.493151	1049.78
6	1075	0.082192	1042.8	1075	0.164384	1050.29		1075	0.493151	1049.78
7	1100	0.082192	1042.8	1100	0.164384	1050.29		1100	0.493151	1049.78
8	1125	0.082192	1042.8	1125	0.164384	1050.29		1125	0.493151	1049.78

ตารางที่ 4.4 ราคาเสนอซื้อและเสนอขาย

j	V_{1j}^b	V_{1j}^a	V_{2j}^b	V_{2j}^a	V_{3j}^b	V_{3j}^a	V_{4j}^b	V_{4j}^a	V_{5j}^b	V_{5j}^a	V_{6j}^b	V_{6j}^a
1	58	58	50	59.8	89.6	89.6	124.6	124.6	73	73	44	58.9
2	36	34.8	33.3	34.5	64.9	64.9	95	101	50.7	55.4	31.9	42.9
3	13.7	10.1	16.9	17	37	42.3	77	77	37.5	38	20.3	29.8
4	3	2.5	6	5.5	26	22	55	52.5	23.6	25.5	12.5	16.6
5	1.5	1	5.4	2.8	14	11.5	49	35	14	15	9.3	11
6	0.3	0.3	1	1.5	5.8	4.4	30	22	9	9.3	4	7
7	0.2	0.2	1.2	1.5	3	3	19.1	14	6	6.1	5.4	5.4
8	0.2	0.2	0.5	0.5	1.2	2.2	8	8	4	3.7	2.5	2.5

ในตารางที่ 4.5 คำนวณหา $v_{ij} = (1/2)(V_{ij}^b + V_{ij}^a)$ ส่วนในตารางที่ 4.6 คำนวณหา $\omega_{ij} = 1/(\mathcal{V}_i)^2$ โดยที่ $i = 1,\ldots,7$ และ $j = 1,\ldots,8$

ตารางที่ 4.5 ค่า v_{ij}

j	v_{1j}	v_{2j}	v_{3j}	v_{4j}	v_{5j}	v_{6j}	v_{7j}
1	87.3	105	57.5	105.1	97.9	68.7	87.3
2	71.1	83	38.5	77.4	64.9	60.9	71.1
3	45.05	72	29.45	73.9	45.9	60.75	45.05
4	27	46.5	18	52.6	41.9	40.95	27
5	16.3	31.4	13	39	19.4	31.1	16.3
6	7.95	20.3	6.5	22.35	14.5	17.75	7.95
7	4.5	12.5	4.5	12.2	6	9	4.5
8	2.7	7.1	3.5	8	5.9	5.9	2.7

ตารางที่ 4.6 ค่า ω_{ij}

j	ω_{1j}	ω_{2j}	ω_{3j}	ω_{4j}	ω_{5j}	ω_{6j}	ω_{7j}
1	0.0337	0.0137	0.006	0.0076	0.0056	0.0047	0.0337
2	0.0176	0.0095	0.0053	0.0061	0.0047	0.0042	0.0176
3	0.0113	0.0073	0.0051	0.0051	0.0042	0.0038	0.0113
4	0.0089	0.0063	0.0051	0.0045	0.0039	0.0035	0.0089
5	0.0084	0.0059	0.0055	0.0042	0.0037	0.0034	0.0084
6	0.0094	0.006	0.0062	0.0041	0.0037	0.0034	0.0094
7	0.0124	0.0067	0.0074	0.0041	0.0038	0.0035	0.0124
8	0.019	0.008	0.0092	0.0044	0.0041	0.0037	0.019

อาศัยข้อมูลในตาราง 4.3 ถึง 4.6 หา $\sigma \in \Sigma$ ที่ทำให้

$G(\sigma) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i} \omega_{ij}(c_{ij}(\sigma) - v_{ij})^2$ มีค่าต่ำที่สุด ซึ่งได้ว่า $\sigma = 0.1593$

Prince of Songkla University Pattani Campus

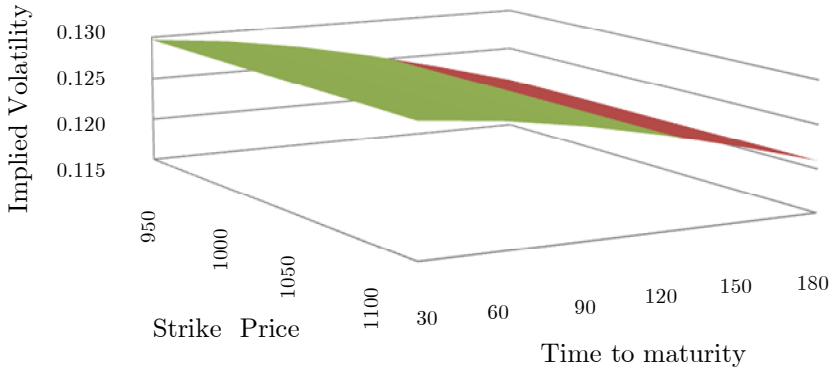
4.6 การคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 ด้วยวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน

คำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 index option ที่มีอัตราดอกเบี้ย 1% ($r = 0.01$) อายุคงเหลือ ($T_i, i = 1,2,...,6$) ราคา SET50 (S_{T_i}) และราคาใช้สิทธิ ($K_{ij}, j = 1,2,...,8$) เป็นดังตารางที่ 4.3 และราคาเสนอซื้อ (V_{ij}^b) และราคาเสนอขาย (V_{ij}^a) เป็นดังตารางที่ 4.4

ขั้นตอนแรกกำหนดฟังก์ชันความผันผวนดังนี้

$$\varphi_0(K,T) = 0.12 + 0.01e^{-0.01K} + \frac{COS\left(3T\right)}{100}$$

กราฟของความผันผวน $\varphi_0(K,T)$ แสดงดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 ความผันผวน $\varphi_0(K,T)$

เมื่อกำหนดให้ $\Delta K = 25$ และ $\Delta T = 0.0822$ แบ่ง K ออกเป็น 8 ช่วง $(m = 8)$ และแบ่ง T ออกเป็น 6 ช่วง $(n = 6)$ หาค่าความผันผวนในแต่ละจุด $(m\Delta K, n\Delta T)$ จึงได้ $\varphi_0(m\Delta K, n\Delta T)$ ดังตารางที่ 4.7 ซึ่งเป็นค่าเริ่มต้นของความผันผวน

ตารางที่ 4.7 ค่า $\varphi_0(m\Delta K, n\Delta T)$

$n\Delta T$ \ $m\Delta K$	25	50	75	100	125	150	175	200
0.0822	0.1375	0.1358	0.1344	0.1334	0.1326	0.1319	0.1314	0.1311
0.1644	0.1366	0.1349	0.1335	0.1325	0.1317	0.1310	0.1305	0.1302
0.2466	0.1352	0.1335	0.1321	0.1311	0.1303	0.1296	0.1291	0.1287
0.3288	0.1333	0.1316	0.1302	0.1292	0.1284	0.1277	0.1273	0.1269
0.4110	0.1311	0.1294	0.1280	0.1270	0.1262	0.1255	0.1251	0.1247
0.4932	0.1287	0.1270	0.1256	0.1246	0.1238	0.1231	0.1226	0.1223

ต่อไปใช้สูตร Black-Scholes คำนวณหาราคาออปชัน

$V(m\Delta K, n\Delta T, K_{ij}, T_i, \varphi_0(m\Delta K, n\Delta T))$

และอนุพันธ์ของราคาออปชัน $\dfrac{\partial V}{\partial \sigma}(m\Delta K, n\Delta T, K_{ij}, T_i, \varphi_0(m\Delta K, n\Delta T))$

ผลการคำนวณค่า V และ $\dfrac{\partial V}{\partial \sigma}$ แสดงดังตารางที่ 4.8

Prince of Songkla University Pattani Campus

ตารางที่ 4.8 ค่า V และ $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$

T	K	S	$\varphi_0(K,T)$	V	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	v_{ij}	$V - v_{ij}$	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}(V - v_{ij})$
0.0822	950	1042.8	0.1375	93.6919	6.6126	87.3	6.3919	42.2671
0.0822	975	1042.8	0.1358	69.2381	24.9982	71.1	-1.8619	-46.5441
0.0822	1000	1042.8	0.1344	46.2738	63.1223	45.05	1.2238	77.2491
0.0822	1025	1042.8	0.1334	26.8076	105.7312	27	-0.1924	-20.3427
0.0822	1050	1042.8	0.1326	12.89	118.0983	16.3	-3.41	-402.7152
0.0822	1075	1042.8	0.1319	4.9631	89.12	7.95	-2.9869	-266.1925
0.0822	1100	1042.8	0.1314	1.4942	46.2462	4.5	-3.0058	-139.0068
0.0822	1125	1042.8	0.1311	0.3476	16.8364	2.7	-2.3524	-39.6059
				⋮				
T	K	S	$\varphi_0(K,T)$	V	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	v_{ij}	$V - v_{ij}$	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}(V - v_{ij})$
0.4932	950	1047.78	0.12870	108.1661	145.6838	68.7	39.4661	5749.5714
0.4932	975	1047.78	0.12698	87.2346	194.5081	60.9	26.3346	5122.2930
0.4932	1000	1047.78	0.12564	68.2629	240.8524	60.75	7.5129	1809.5000
0.4932	1025	1047.78	0.12459	51.6789	275.9721	40.95	10.7289	2960.8771
0.4932	1050	1047.78	0.12378	37.763	292.6987	31.1	6.663	1950.2514
0.4932	1075	1047.78	0.12314	26.5909	287.9397	17.75	8.8409	2545.6461
0.4932	1100	1047.78	0.12265	18.0256	263.5396	9	9.0256	2378.6030
0.4932	1125	1047.78	0.12227	11.7593	225.2368	5.9	5.8593	1319.7300

Prince of Songkla University Pattani Campus

และใช้ค่าที่ได้คำนวณหา

$$W(S,t,K_{ij},T_i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i} \frac{\partial V}{\partial \sigma}(S,t,K_{ij},T_i,\sigma)(V(S,t,K_{ij},T_i,\sigma) - v_{ij})$$

จากการคำนวณหาค่า V และ $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ ทั้ง 6 ช่วงเวลาได้ W ดังนี้

$$\begin{aligned} W(S,t,K_{ij},T_i) &= -794.8912 - 6765.89 - 301.552 + 11618.05 + 24692.016 + 23836.472 \\ &= 52284.2 \end{aligned}$$

แก้สมการปัวซอง $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \lambda W(S,t,K_{ij},T_i)$

โดยใช้สูตร

$$a_p\sigma_{i,j} = a_w\sigma_{i-1,j} + a_e\sigma_{i+1,j} + a_s\sigma_{i,j-1} + a_n\sigma_{i,j+1} + b$$

โดยที่

$$a_w = \frac{2}{\Delta S_i(\Delta S_i + \Delta S_{i+1})},\ a_e = \frac{2}{\Delta S_{i+1}(\Delta S_i + \Delta S_{i+1})},\ a_s = \frac{2}{\Delta t_i(\Delta t_i + \Delta t_{i+1})},$$
$$a_n = \frac{2}{\Delta t_{i+1}(\Delta t_i + \Delta t_{i+1})},\ a_p = \frac{2}{\Delta S_i \Delta S_{i+1}} + \frac{2}{\Delta t_i \Delta t_{i+1}},\ b = -f(S_i, t_i)$$

เมื่อกำหนดให้ $\lambda = 0.001$ จะได้

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = 0.0001(52284.2)$$
$$=52284.2$$

จากการคำนวณได้ φ_1 ดังตารางที่ 4.9 และ φ_8 ดังตารางที่ 4.10

ตารางที่ 4.9 ค่า φ_1

T \ K	950	975	1000	1025	1050	1075	1100	1125
0.08219	0.12970	0.12970	0.12970	0.12970	0.12970	0.12970	0.12970	0.12970
0.16438	0.12881	0.19858	0.19859	0.19859	0.19859	0.19859	0.19858	0.12881
0.24658	0.12739	0.23215	0.23215	0.23215	0.23215	0.23215	0.23215	0.12739
0.32877	0.12552	0.23039	0.23039	0.23039	0.23039	0.23039	0.23039	0.12552
0.41096	0.12332	0.19331	0.19331	0.19331	0.19331	0.19331	0.19331	0.12332
0.49315	0.12091	0.12091	0.12091	0.12091	0.12091	0.12091	0.12091	0.12091

ตารางที่ 4.10 ค่า φ_8

T \ K	950	975	1000	1025	1050	1075	1100	1125
0.08219	0.12970	0.12970	0.12970	0.12970	0.12970	0.12970	0.12970	0.12970
0.16438	0.12881	0.20190	0.20190	0.20190	0.20190	0.20190	0.20190	0.12881
0.24658	0.12739	0.23712	0.23712	0.23712	0.23712	0.23712	0.23712	0.12739
0.32877	0.12552	0.23536	0.23537	0.23537	0.23537	0.23537	0.23536	0.12552
0.41096	0.12332	0.19663	0.19663	0.19663	0.19663	0.19663	0.19663	0.12332
0.49315	0.12091	0.12091	0.12091	0.12091	0.12091	0.12091	0.12091	0.12091

Prince of Songkla University Pattani Campus

หาค่า L^2 norm ของผลต่างระหว่าง φ_k และ φ_{k+1} ได้ผลดังนี้

$$\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\|_2=0.42009 \qquad \left\|\varphi_2-\varphi_1\right\|_2=0.54675$$

$$\left\|\varphi_3-\varphi_2\right\|_2=0.24231 \qquad \left\|\varphi_4-\varphi_3\right\|_2=0.23460$$

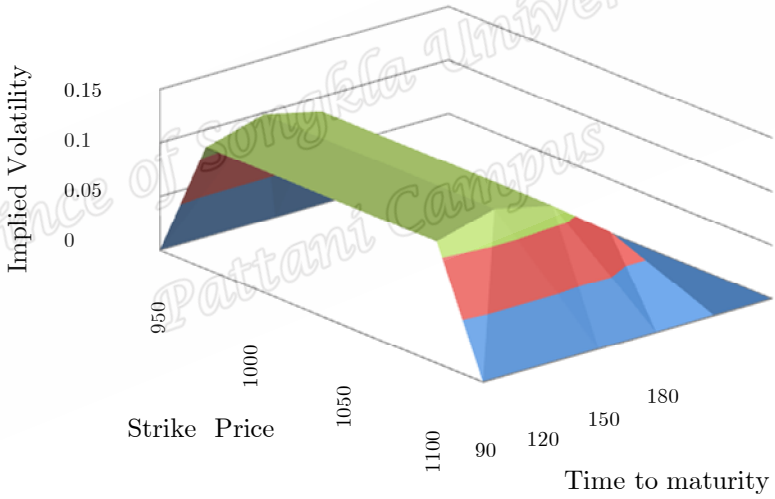
$$\left\|\varphi_5-\varphi_4\right\|_2=0.56598 \qquad \left\|\varphi_6-\varphi_5\right\|_2=0.38641$$

$$\left\|\varphi_7-\varphi_6\right\|_2=0.11094 \qquad \left\|\varphi_8-\varphi_7\right\|_2=0.04872$$

ค่ามากที่สุดของผลต่างระหว่าง $\varphi_0(K,T)$ กับค่าประมาณของความผันผวนในรอบสุดท้ายเป็นดังนี้

$$\max\left|\varphi_0(K,T)-\varphi_8\right|=0.1297$$

กราฟความผันผวน φ_8 แสดงดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 ความผันผวน φ_8

เมื่อนำค่าความผันผวนแฝงที่ได้นี้ไปเปรียบเทียบกับความผันผวนในอดีตที่คำนวณโดยใช้สูตร (1.8) จากข้อมูล SET50 6 เดือนย้อนหลัง ซึ่งได้เท่ากับ 0.2584 จะเห็นว่าความผันผวนแฝงในแต่ละช่วงเวลามีค่าน้อยกว่าความผันผวนในอดีต

บทที่ 5

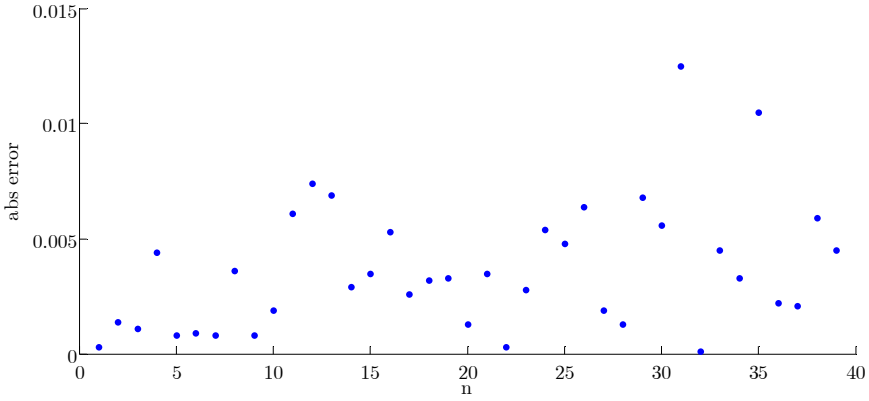
อภิปรายผลการคำนวณและสรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเชิงตัวเลข ได้แก่ วิธีนิวตัน วิธีเส้นตัด และวิธีแบ่งครึ่งช่วง ศึกษาการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด และวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน โดยประยุกต์ใช้กับข้อมูล SET50 index option ซึ่งแต่ละวิธีมีผลการคำนวณสรุปได้ดังนี้

5.1 ผลการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเชิงตัวเลข

การคำนวณความผันผวนแฝงของออปชันทางการเงินด้วยวิธีเชิงตัวเลขได้แก่ วิธีนิวตัน วิธีเส้นตัด และวิธีแบ่งครึ่งช่วง ทั้งสามวิธีนี้จะเป็นการคำนวณความผันผวนแฝงในแต่ละวัน ข้อมูลที่ต้องใช้ในการคำนวณคือ ราคาสินทรัพย์อ้างอิง ณ เวลา t (S_t) ราคาใช้สิทธิ (K) อัตราดอกเบี้ย (r) อายุคงเหลือ (T) และราคาตลาด (C_{mkt}) โดยแทนค่าลงในสูตร Black-Scholes

จากการคำนวณพบว่าวิธีนิวตันลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็วที่สุด แต่ในการคำนวณต้องทราบค่าอนุพันธ์ของออปชันที่มีความซับซ้อน ส่วนวิธีเส้นตัดลู่เข้าสู่ผลเฉลยช้ากว่าวิธีนิวตัน แต่ถ้าเลือกค่าเริ่มต้นไม่ดี อาจจะไม่ลู่เข้าก็ได้ ในขณะที่วิธีแบ่งครึ่งช่วงลู่เข้าสู่ผลเฉลยช้าที่สุด แต่ลู่เข้าเสมอ ซึ่งทั้งสามวิธีให้ผลเฉลยที่เหมือนกัน โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}\,(\sigma_{imp})$ และ C_{mkt} อยู่ในช่วง $[0, 0.0125]$ ดังรูปที่ 5.1

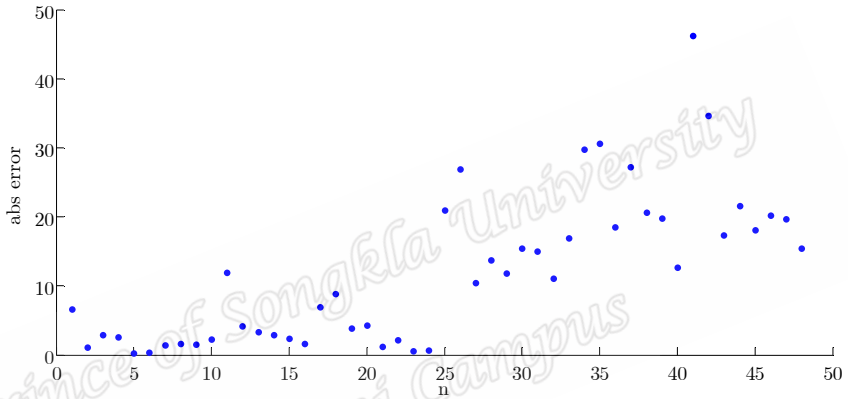


รูปที่ 5.1 ความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}\,(\sigma_{imp})$ กับ C_{mkt} จากวิธีเชิงตัวเลข

Prince of Songkla University Pattani Campus

5.2 ผลการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

การคำนวณความผันผวนเฉพาะถิ่นด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด ข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณคือ อัตราดอกเบี้ย (r) อายุคงเหลือ $(T_i, i=1,...,N)$ ราคาสินทรัพย์อ้างอิง (S_{T_i}) ราคาใช้สิทธิ $(K_{ij}, j=1,...,m_i)$ ราคาเสนอซื้อ (V_{ij}^b) และราคาเสนอขาย (V_{ij}^a) การคำนวณความผันผวนเฉพาะถิ่นด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดในช่วงเวลานี้จะได้ค่าความผันผวนออกมาค่าเดียว จากการคำนวณพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ $v_{ij} = (1/2)(V_{ij}^b + V_{ij}^a)$ อยู่ในช่วง $[0.2457, 46.1991]$ ดังรูปที่ 5.2

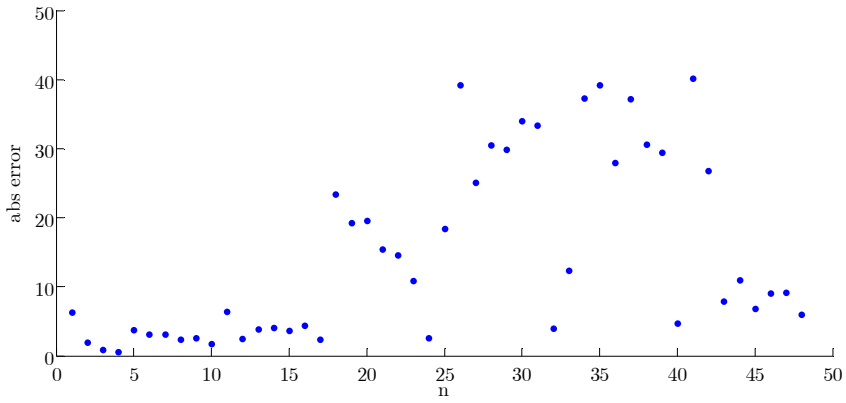


รูปที่ 5.2 ความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ v_{ij} จากวิธีกำลังสองน้อยสุด

5.3 ผลการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน

โดยทั่วไปการหาผลเฉลยของปัญหาผกผันด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะทำให้เกิดผลเฉลยที่ไร้เสถียรภาพ ในการผ่อนปรนความไร้เสถียรภาพของผลเฉลยจะอาศัยวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน ซึ่งวิธีนี้มีข้อมูลที่ต้องใช้ในการคำนวณคือ อัตราดอกเบี้ย (r) อายุคงเหลือ $(T_i, i=1,...,N)$ ราคาสินทรัพย์อ้างอิง (S_{T_i}) ราคาใช้สิทธิ $(K_{ij}, j=1,...,m_i)$ ราคาเสนอซื้อ (V_{ij}^b) และราคาเสนอขาย (V_{ij}^a) โดยขั้นแรกต้องกำหนดฟังก์ชันความผันผวนเริ่มต้น และแบ่งช่วง K และ T การคำนวณความผันผวนด้วยวิธีเรกูลาร์ไรเซชันในช่วงเวลานี้จะได้ค่าความผันผวนออกมาตามจำนวน K และ T ในที่นี้แบ่งช่วง K ออกเป็น 8 ช่วง และแบ่งช่วง T ออกเป็น 6 ช่วง ได้ค่าความผันผวน 48 จำนวน จากการคำนวณพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ $v_{ij} = (1/2)(V_{ij}^b + V_{ij}^a)$ อยู่ในช่วง $[0.5801, 40.1719]$ ดังรูปที่ 5.3

Prince of Songkla University Pattani Campus



รูปที่ 5.3 ความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ v_{ij} จากวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน

5.4 สรุปผลการวิจัย

การหาค่าความผันผวนแฝงเป็นการแก้ปัญหาผกผัน จะใช้วิธีเชิงตัวเลขในการคำนวณ ซึ่งแต่ละวิธีมีการคำนวณและมีข้อจำกัดที่แตกต่างกัน ในงานวิจัยนี้ได้หาความผันผวนแฝงของ SET50 index option ตั้งแต่วันที่ 1 ตุลาคม 2557 ถึงวันที่ 31 มีนาคม 2558 โดยแบ่งเป็น 6 ช่วงเวลาก่อนหมดอายุออปชัน จากการคำนวณพบว่า วิธีนิวตันลู่เข้าสู่ผลเฉลยโดยมีจำนวนรอบทำซ้ำน้อยที่สุด แต่ในการคำนวณต้องทราบค่าอนุพันธ์ของออปชันที่มีความซับซ้อน ส่วนวิธีเส้นตัดลู่เข้าสู่ผลเฉลยโดยมีจำนวนรอบทำซ้ำมากกว่าวิธีนิวตัน แต่ถ้าเลือกค่าเริ่มต้นไม่ดี อาจจะไม่ลู่เข้าก็ได้ ในขณะที่วิธีแบ่งครึ่งช่วงลู่เข้าสู่ผลเฉลยมีจำนวนรอบทำซ้ำมากที่สุด แต่ลู่เข้าเสมอ ซึ่งทั้งสามวิธีให้ความผันผวนแฝงโดยประมาณที่เท่ากัน โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma_{imp})$ และ C_{market} อยู่ในช่วง $[0, 0.0125]$

จากการหาความผันผวนของ SET50 index option โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด ได้ค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ v_{ij} อยู่ในช่วง $[0.2457, 46.1991]$

โดยทั่วไปการหาผลเฉลยของปัญหาผกผันด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะทำให้เกิดผลเฉลยที่ไร้เสถียรภาพ ในการผ่อนปรนความไร้เสถียรภาพของผลเฉลยจะอาศัยวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน จากการหาความผันผวนของ SET50 index option ได้ค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ v_{ij} อยู่ในช่วง $[0.5801, 40.1719]$

Prince of Songkla University Pattani Campus

ผลการศึกษาครั้งนี้สามารถนำไปใช้ในการหาความผันผวนแฝง ซึ่งความผันผวนแฝงจะเปลี่ยนแปลงไปตามราคาของออปชัน ถ้าราคาตลาดของออปชันสูง ความผันผวนแฝงก็จะมีค่าสูง แต่ถ้าราคาตลาดของออปชันต่ำ ความผันผวนแฝงก็จะมีค่าต่ำลงด้วย

Prince of Songkla University
Pattani Campus

บรรณานุกรม

ชาญณรงค์ ชัยพัฒน์. 2557. ตราสารอนุพันธ์: การบริหารความเสี่ยงในธุรกิจส่งออก และนำเข้าสินค้า. Panyapiwat Journal. 5(2), 223–235.

ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. 2558. ราคาดัชนีตลาดหลักทรัพย์. สืบค้นจาก: https://marketdata.set.or.th/mkt/sectorialindices.do?language=th&country=TH [15 มกราคม 2558].

ตลาดสัญญาซื้อขายล่วงหน้า. 2558. ข้อมูลการซื้อขายในอดีต. สืบค้นจาก: http://www.tfex.co.th./tfex/historicalMarketReport.html [23 พฤษภาคม 2558].

Intarasit, A. 2012. Ito Stochastic Integral and Their Application. The Journal of KMUTNB. 22(2012), 460–469.

Bakshi, G., Cao, C. and Chen, Z. 1997. Empirical performance of alternative option pricing models. Journal of Finance. 52(5), 2003–2049.

Bates, D.S. 1996. Testing option pricing models. In Statistical Methods in Finance, G.S. Maddala and C.R. Rao, editors. Elsevier, Amsterdam, pp. 567–611.

Bates, D.S. 2000. Post-87 crash fears in S&P 500 futures options market. Journal of Econometrics. 94, 181–238.

Black, F. and Scholes, M. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy. 81(3), 637–654.

Chiarella, C., Craddock, M. and El-Hassan, N. 2000. The calibration of stock option pricing models using inverse problem methodology. School of Finance and Economics. University of Technology. Sydney, 1–14.

Chiarella, C., Craddock, M., and El-Hassan, N. 2002. A short time expansion of the volatility function for the calibration of option pricing model. Computing in Economics and Finance. 261.

Christensen, B.J., Hansen, C.S. 2002. New evidence on the implied-realized volatility relation, The European Journal of Finance. 8, 187-205.

Prince of Songkla University Pattani Campus

Christensen, B. J., Prabhala, N. R. 1998. The relation between implied and realized volatility. Journal of Financial Economics. 50(2), 125–150.

Choi, H.J., Lee, H.S., Han, G.S. and Lee, J. 2004. Efficient option pricing via a globally regularized neural network. Lecture Notes on Computer Science. 3174(2004), 988–993.

Derman, E. and Kani, I. 1994. Riding on the smile. Risk. 7, 32–39.

Dumas, B., Fleming, J. and Whaley, R. E. 1998. Implied Volatility Functions: Empirical Tests. The Journal of Finance. 53(6), 2059–2106.

Dupire, B. 1994. Pricing with a smile. Risk. 7, 18–20.

Gatheral, J. 2006. The Volatility Surface: A Practitioner's Guide, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

Gencay, R. and Qi, M. 2001. Pricing and hedging derivative securities with neural networks: Bayesian regularization, early stopping, and bagging. IEEE Transactions on Neural Networks. 12(4), 726–734.

Han, G.S. and Lee, J. 2008. Prediction of pricing and hedging errors for equity linked warrants with Gaussian process models. Expert Systems with Applications. 35, 515–523.

Heston, S. L. 1993. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. A review of Financial Studies. 6(2), 327–343.

Hull, J. and White, A. 1987. The pricing of option on Assets with Stochastic Volatility. The Journal of Finance. 42(2), 281–300.

Jung, K.H., Kim, H.C. and Lee, J. 2006. A novel learning network for option pricing with confidence interval information. Lecture Notes on Computer Science. 3973, 491–497.

Kirsch, A. 1996. An introduction to the mathematical theory of inverse problems, Springer, Berlin, 100–120.

Prince of Songkla University Pattani Campus

Lagnado, R. and Osher, S. 1997. A Technique for Calibrating Derivative Security Pricing Models: Numerical Solution of an Inverse Problem. The Journal of Computational Finance. 1(1), 1–25.

Lee, J. 1999. The Effect of Exchange Rate Volatility on Trade in Durables. Review of International Economics. 7(2), 189 – 201.

Mayhew, S. 1995. Implied volatility. Financial Analysts Journal. 51(4), 8–20.

Merton, R. C. 1973. Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science. 4(1), 141–183.

Merton, R. C. 1976. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journalof Financial Economics. 3, 125–144.

Mitra, S. 2009. A Review of Volatility and Option Pricing. Available online: https://arxiv.org/pdf/0904.1292v1.pdf. [September 18, 2014]

Nolen, J. 2008. Partial Differential Equations and Diffusion Processes. Available online:https://pdfs.semanticscholar.org/c2f6/6e2ace9152bd6e2d8b5fa879c661531b77a7.pdf. [June 10, 2015]

Rubinstein, M. 1985. Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from August 23, 1976 through August 31, 1978. Journal of Finance. 40, 455–480.

Rubinstein, M. 1994. Implied binomial trees. Journal of Finance. 49(3), 771–818.

Pravee of Somaiya University Vidyavihar Campus

ภาคผนวก

Prince of Songkla University
Pattani Campus

การเผยแพร่ผลการวิจัย

บทความวิจัยต้นฉบับจากการเผยแพร่ผลงานวิจัยแบบบรรยายในงานการประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี 2559 (ครั้งที่ 21) และการประชุมวิชาการคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และประยุกต์ประจำปี 2559 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย วันที่ 23–25 พฤษภาคม 2559

Prince of Songkla University
Pattani Campus

การคำนวณความผันผวนแฝงเชิงตัวเลข

รอสเมาะห์ นิสะนิ[1,*] อาทิตย์ อินทรสิทธิ์[2] อารียุทธ สมาแอ[3] และ นิฟาตมะห์ มะกาเจ[4]

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี
[1]r_rsm@hotmail.com, [2]arthit.i@psu.ac.th, [3]sassaare@gmail.com, [4]nifatamah.m@psu.ac.th

บทคัดย่อ

การคำนวณหาความผันผวนเป็นปัญหาที่สำคัญในทางการเงิน ความผันผวนแฝงเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญตัวหนึ่งที่ใช้ในการหาราคาออปชันทางการเงิน โดยปกติแล้วจะไม่มีสูตรหาความผันผวนแฝงโดยตรง การหาคำนวณความผันผวนแฝงจัดได้ว่าเป็นการแก้ปัญหาผกผัน งานวิจัยนี้ได้ศึกษาและวิเคราะห์การประมาณหาความผันผวนแฝงด้วย วิธีนิวตัน วิธีเส้นตัด และวิธีแบ่งครึ่งช่วง และหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด เมื่อประยุกต์ใช้กับข้อมูล SET50 index option พบว่า วิธีนิวตันลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็ว แต่ในการคำนวณต้องทราบค่าอนุพันธ์ของออปชันที่มีความซับซ้อน ส่วนวิธีเส้นตัดถ้าเลือกค่าเริ่มต้นไม่ดี อาจจะไม่ลู่เข้าก็ได้ ในขณะที่วิธีแบ่งครึ่งช่วงลู่เข้าสู่ผลเฉลยช้า แต่ลู่เข้าเสมอ นอกจากนี้ได้นำเสนอการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

Mathematics Subject Classification: 15A29, 91G20
คำสำคัญ: การตั้งราคาออปชัน ความผันผวนแฝง ปัญหาผกผัน

1 บทนำ

ในบทความวิจัยฉบับนี้ สนใจศึกษาความผันผวนซึ่งเป็นพารามิเตอร์ตัวหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับมูลค่าของออปชันในทางการเงิน $C(S,t;\mu,\sigma;K,T;r)$ ซึ่งหมายถึงพรีเมียมของออปชัน พารามิเตอร์ตัวอื่น ๆ ได้แก่ S_t แทนราคาสินทรัพย์อ้างอิง โดยที่ $S_t = S$, t แทนเวลา ณ ปัจจุบัน, μ แทนอัตราดริฟต์, σ แทนความผันผวนของสินทรัพย์อ้างอิง, K แทนราคาการใช้สิทธิ, T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิ และ r แทนอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง อย่างไรก็ตามถ้าทราบค่า K และ T ซึ่ง μ, σ และ r เป็นค่าคงที่ แล้วมูลค่าออปชันจะเป็นฟังก์ชัน $C(S,t)$ ซึ่งขึ้นกับตัวแปร S และ t เท่านั้น

* Corresponding author

งานวิจัยของ Black-Scholes [1] และ Merton [13] ได้บุกเบิกการคิดวิเคราะห์หาสูตรในรูปแบบปิด (Closed Form) ของมูลค่าที่ปราศจากอาบิทราจของพรีเมียมบนออปชัน ที่มีหุ้นสามัญเป็นหลักทรัพย์อ้างอิง โดยสมมติให้หุ้นสามัญ S_t มีพลวัติการเคลื่อนที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (Stochastic Differential Equation : SDE) ดังนี้

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW \tag{1}$$

พร้อมค่าเริ่มต้น $S_0 = a$ โดยที่ μ แทนค่าคาดหมายของผลตอบแทนราคาหุ้นและ σ แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนราคาหุ้น ทั้ง μ และ σ เป็นค่าคงที่ ในตลาดการเงินจะเรียก μ ว่า อัตราดริฟต์ และ σ ว่า *ความผันผวน*

เมื่อประยุกต์ใช้บทแทรกอิโตะ (Ito's Lemma) [10] กับตัวแบบ (1) ได้ว่า

$$d\ln(S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW$$

ดังนั้นพลวัติของราคาสินทรัพย์ S_T ณ เวลา T ในรูปแบบปิดเป็นดังนี้

$$S_T = S_t \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right) \tag{2}$$

ซึ่งเรียกว่า *การเคลื่อนที่แบบเรขาคณิตแบบบราวน์เนียน* (Geometric Brownian Motion)

เพราะว่า $W_T - W_t \sim \mathcal{N}(0, T-t)$ ซึ่งหมายถึง $W_T - W_t$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ $T-t$ ดังนั้น $(W_T - W_t)/\sqrt{T-t} = Z$ โดยที่ $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ จึงได้

$$S_T = S_t \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma Z\sqrt{T-t}\right), t \le T$$

ซึ่ง S_T มีการแจกแจงแบบล็อกปกติ (Lognornal) ที่ค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\log(S_t) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t)$ และความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma^2(T-t)$ ดังนั้น $\log(S_T)$ จึงมีการแจกแจงเช่นเดียวกันกับ

$$\log(S_t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma Z\sqrt{T-t}$$

ภายใต้เงื่อนไขตลาดสมบูรณ์ (Market Completeness) และการสร้างหลักทรัพย์ด้วยกลยุทธ์ลงทุนเลียนแบบออปชัน (Replication Strategy) Black, Scholes และ Merton ได้หาราคาคอลออปชันแบบยูโรเปียน ซึ่งเป็นฟังก์ชัน $\tilde{C} = C_{BS}(S,t)$ ที่เป็น $C^{2,1}$ เพียงหนึ่งเดียวของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของแบล็ค-โชล (Black-Scholes Partial Differential Equation (PDE)) ดังนี้

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \tilde{C}}{\partial S} - r\tilde{C} = 0 \tag{3}$$

โดยที่ $C^{2,1}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับที่ 2 และ 1 เมื่อเทียบกับตัวแปร S และ t ตามลำดับ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบ $\tilde{C}(0,t;K) = 0$ และเงื่อนไขขอบที่จุดปลาย $\tilde{C}(S,T;K) = (S-K)^+$

นอกจากนี้จะสามารถหามูลค่าออปชันที่ปราศจากอาบิทราจของคอลออปชันที่มี K เป็นราคาการใช้สิทธิและ $\tau = T-t$ เป็นระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชันโดยมี T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิและ $S_t = S$ ได้จากสูตรแบล็ค-โชล ดังนี้

$$\tilde{C}_{BS}(S,t;\sigma,K,\tau,r) = \begin{cases} S\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2) & (\sigma > 0) \\ (S - Ke^{-r\tau})^+ & (\sigma = 0) \end{cases} \tag{4}$$

โดยที่ r แทนอัตราดอกเบี้ย

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(-\ln(m) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau\right) \quad \text{และ} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}\,,\ \tau = T - t \geq 0$$

เมื่อ $m = K / S_t$ และ $\Phi(v) = \int_{-\infty}^{v} \varphi(u)du$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐานที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น $\varphi(v) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-v^2/2}$ เมื่อ $v \in \mathbb{R}$ สูตรการตั้งราคาออปชันในรูปแบบปิด (4) นี้มีความสำคัญอย่างมากต่อวงการเศรษฐศาสตร์และการเงิน ตลอดจนการซื้อขายและการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์ทั่วโลก จนทำให้ Black, Scholes และ Merton ได้รับรางวัลโนเบลสาขาเศรษฐศาสตร์ในปี 1997

2 ปัญหาการวิจัยและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในสมการแบล็ค-โชลตาม PDE (3)ไม่ปรากฏอัตราดริฟต์ μ จึงมีเพียงความผันผวน σ เท่านั้นที่เป็นปริมาณที่ไม่สามารถเก็บรวบรวมข้อมูลจากการสังเกตได้ Gatheral [8]ได้ประมาณความผันผวนจาก *ความผันผวนในอดีต* (Historical Volatility) ซึ่งนิยามดังนี้ กำหนดให้ $S_1, \ldots, S_N$ แทนลำดับของข้อมูลราคาปิดของหุ้นสามัญในอดีต แล้วนิยามผลตอบแทนแบบลอการิทึม (Logarithmic Return) ระหว่างข้อมูลสองวันที่สืบเนื่องกันดังนี้ $R_n = \ln(S_{n+1} / S_n)$ โดย $\bar{R} = (1/N)\sum_{n=0}^{N-1} R_n$ เป็นค่าเฉลี่ยของผลตอบแทน แล้วจะนิยามความผันผวนในอดีตเป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานรายปี ดังนี้

$$\sigma_{hist} = \sqrt{\frac{252}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}(R_n - \bar{R})^2} \tag{5}$$

โดยประมาณว่าใน 1 ปี มีวันเพียง 252 วันในการซื้อขายหุ้นในตลาดหลักทรัพย์เท่านั้น

นอกจากนี้ยังมีความผันผวนเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous Volatility) ที่นิยามเป็นค่ารากที่สองของผลตอบแทนแบบลอการิทึมต่อระยะทาง ดังนี้ $\sigma_{\text{inst}}(t_i) = \sqrt{R_i}$ อย่างไรก็ตามการพัฒนาสูตรความผันผวนเป็นโจทย์วิจัยที่ได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก

ในการผูกสมการ PDE (3) นั้นอยู่บนสมมติฐานที่สำคัญ 2 ประการ คืออัตราผลตอบแทนของราคาสินทรัพย์มีการแจกแจงปกติ และความผันผวนเป็นค่าคงตัว อย่างไรก็ตามได้มีงานวิจัยเชิงประจักษ์หลายฉบับ เช่น Dumas et *al*. [5] Lee [12] และ Christensen and Hensen [3] ได้แสดงให้เห็นว่าสมมติฐานทั้งสองนี้ไม่เป็นจริงสำหรับทุกกลุ่มข้อมูล ดังนั้นงานวิจัยในช่วงแรกจึงเป็นการพัฒนาและปรับปรุงตัวแบบจากข้อสมมติฐานทั้ง 2 ข้อดังกล่าวนี้

งานวิจัยที่โดดเด่นในการประมาณค่าความผันผวนคือ Dupire [6] และ Derman and Kani [4] ซึ่งได้พัฒนาแนวคิดของความผันผวนเฉพาะถิ่น (Local Volatility) โดยพิจารณาให้ความผันผวนเป็นฟังก์ชันของราคาสินทรัพย์อ้างอิงและเวลา และประมาณความผันผวนจากราคาออปชัน โดยความผันผวนที่พัฒนาขึ้นนี้จะแสดงลักษณะ "รอยยิ้มความผันผวน" (Volatility Smile) อีกด้วย

ในการหาค่าความผันผวนแฝงสำหรับยูโรเปียนออปชันที่หลักทรัพย์อ้างอิงเป็นไปตามตัวแบบแบล็ค-โชลนั้น ผู้อ่านอาจคิดว่า จะสามารถคำนวณความผันผวนแฝงได้โดยตรงจากสูตรรูปแบบปิด (Closed-form Formula) แต่แท้จริงแล้วไม่มีสูตรรูปแบบปิดของความผันผวนแฝง ขอให้พิจารณาปัญหาการหาความผันผวนแฝงเชิงตัวเลขดังนี้

เมื่อทราบค่าของหลักทรัพย์ S ณ เวลา t และอัตราดอกเบี้ย r เป็นค่าคงที่ ซึ่งทราบค่า และทราบค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของยูโรเปียนคอลออปชัน ดังนี้ ราคาใช้สิทธิ K และระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชัน $\tau = T - t$ เมื่อ T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิ แล้วสามารถคำนวณหาความผันผวนแฝง $\sigma := \sigma_{K,\tau}$ ได้จากการแก้สมการ

$$C_{BS}(\sigma; S_t, K, \tau, r) = v$$

โดยที่ $v := C_{\text{market}}$ เมื่อกำหนดให้ $\tilde{C}(\sigma) := C_{BS}(\sigma; S_t, K, \tau, r)$ จึงได้

$$\tilde{C}(\sigma) - v = 0$$

ฟังก์ชัน $\tilde{C}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ขึ้นกับตัวแปร σ โดยที่ $\tilde{C}$ เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีผลเฉลยในรูปแบบปิด แต่จะสามารถความผันผวน σ ซึ่งเป็นผลเฉลยของ $\tilde{C}$ โดยอาศัยวิธีการเชิงตัวเลข โดยกำหนดให้

$$\hat{C} = \tilde{C}(\sigma_n) - v \tag{6}$$

โดยที่ $\tilde{C}(\sigma_n) = C_{BS}(\sigma_n)$ ตามสูตร (4) เมื่อ $n \in \mathbb{N}_0$ ทั้งนี้หากทราบค่าราคาตลาด v ของออปชัน จะสามารถหาค่าความผันผวนเมื่อแทนค่าแฟกเตอร์อื่นๆ ลงในฟังก์ชันมูลค่าออปชัน $\tilde{C}(\sigma)$ ด้วยเหตุที่หาความผันผวนจากการอนุมานจากราคาของออปชัน จึงเรียกความผันผวนดังกล่าวนี้ว่า "ความผันผวนแฝง" (Implied Volatility)

3 วัตถุประสงค์การวิจัย

การหาความผันผวนตามสมการ (6) จัดเป็นการแก้ปัญหาผกผันอย่างหนึ่ง อย่างไรก็ตามการหาความผันผวนด้วยการแก้ปัญหาผกผัน จะไม่สามารถหาสูตรในรูปแบบปิดของความผันผวนแฝงได้ ด้วยเหตุนี้งานวิจัยฉบับนี้จึงสนใจศึกษาการหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีต่าง ๆ ดังนี้

3.1 ศึกษาการหาความผันผวนแฝงที่เป็นผลเฉลยของ (6) ด้วยวิธีเชิงตัวเลขได้แก่ วิธีนิวตัน วิธีเส้นตัด และวิธีแบ่งครึ่งช่วง

3.2 ศึกษาการหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

3.3 ศึกษา วิเคราะห์ และเปรียบเทียบวิธีการต่าง ๆ ข้างต้นในการคำนวณความผันผวนแฝงของออปชันทางการเงินภายใต้แนวคิดการแก้ปัญหาผกผัน

3.4 ประยุกต์ใช้วิธีการหาความผันผวนแฝงดังกล่าวข้างต้นกับข้อมูลจริงยูโรเปียนออปชันที่มี SET50 เป็นหลักทรัพย์อ้างอิง

4 การหาความผันผวนแฝงเชิงตัวเลข

คำนวณหาอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชัน $\tilde{C}(\sigma)$ ดังนี้

$$\tilde{C}'(\sigma) := \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = S_t \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1} \quad Ke^{-r\tau} \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial d_1}$$

$$= S_t \varphi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r\tau} \varphi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \tag{7}$$

โดยที่ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ และมีว่า $\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = -\frac{d_2}{\sigma}$, $\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = -\frac{d_1}{\sigma}$ และ

$$\varphi(d_2) = \varphi(d_1) \frac{S_t}{K} \exp(r\tau) \tag{8}$$

เมื่อแทนค่า $\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$ และ (8) ลงใน (7) และจัดรูป $d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{\tau}$ จึงได้

$$\tilde{C}'(\sigma) = S_t \varphi(d_1) \frac{(d_1 - d_2)}{\sigma} = S_t \sqrt{\tau} \varphi(d_1) \tag{9}$$

Prince of Songkla University Pattani Campus

เมื่อนิยามให้อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ $\tilde{C}(\sigma)$ เป็น $\mathcal{V}$ ดังนั้น $\tilde{C}' = \mathcal{V} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}$ ซึ่งมักรู้จัก $\mathcal{V}$ ว่าเป็น "เวก้า (Vega)" ของคอลออปชันแบบยูโรเปียน

เนื่องจาก $S_t > 0$ และ $\tau > 0$ ส่งผลให้ $\varphi(d_1) > 0$ จึงได้ว่า $\tilde{C}'(\sigma)$ เป็นบวก (Positive) ซึ่งจะสามารถสร้างสูตรการทำซ้ำด้วยวิธีนิวตันได้ นอกจากนี้เพราะว่า $\tilde{C}'(\sigma)$ เป็นบวก จึงทำให้ $\tilde{C}(\sigma)$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้นทางเดียวโดยแท้ (Strictly Monotone Increasing)

เพราะว่า $\lim_{\sigma \to 0} \tilde{C}(\sigma) = (S - Ke^{-r\tau})^+$ และ $\lim_{\sigma \to \infty} \tilde{C}(\sigma) = S$ นั้นคือ $\tilde{C}(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตดังนี้

$$(S - Ke^{-r\tau}) \leq \tilde{C}(\sigma) \leq S$$

เพราะว่า $r_u := \lim_{\sigma \to \infty} \tilde{C}(\sigma) - v \geq 0$ ดังนั้น $r_l := \lim_{\sigma \to 0} \tilde{C}(\sigma) - v \leq 0$ และด้วยสมบัติที่ว่า $\tilde{C}(\sigma)$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้นทางเดียวโดยแท้ที่ซึ่ง $r_l \leq 0$ และ $r_u \geq 0$ แล้วด้วยสมบัติความต่อเนื่องของ $\tilde{C}(\sigma)$ ทำให้ได้ว่า (6) มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว

4.1 การหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตัน

อัลกอริทึมในการคำนวณหาความผันผวนแฝง (6) โดยวิธีนิวตัน เป็นดังนี้

ข้อมูลนำเข้า: ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับหลักทรัพย์ ได้แก่ มูลค่าหลักทรัพย์ S_* ณ เวลา t_* และอัตราดอกเบี้ย r ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับคอลออปชันแบบยูโรเปียน ได้แก่ ราคาใช้สิทธิ K และระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชัน $\tau = T - t$ โดยที่ T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิ ราคาตลาด v และความผันผวนแฝงเริ่มต้น σ_0

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหา $\tilde{C}(\sigma_0) := C_{BS}(S_*, t_*; K, \tau, r, \sigma)$ และ $\mathcal{V}(\sigma_0) := -\frac{\partial}{\partial \sigma} C_{BS}(S_*, t_*; K, \tau, r, \sigma)$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่า $\sigma_n = \sigma_{n-1} - \frac{1}{\mathcal{V}(\sigma_{n-1})}(\tilde{C}(\sigma_{n-1}) - v)$ โดยวนทำซ้ำจนกว่าค่าคลาดเคลื่อน

$|\sigma_n - \sigma_{n-1}| < 0.0001$

ผลลัพธ์: σ_n เป็นค่าโดยประมาณของความผันผวนแฝง $\sigma_{imp}(K, \tau)$

4.2 การหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัด

อัลกอริทึมในการคำนวณหาความผันผวนแฝง (6) โดยวิธีเส้นตัด เป็นดังนี้

ข้อมูลนำเข้า: ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับหลักทรัพย์ ได้แก่ มูลค่าหลักทรัพย์ S_* ณ เวลา t_* และอัตราดอกเบี้ย r ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับคอลออปชันแบบยูโรเปียน ได้แก่ ราคาการใช้สิทธิ K และระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชัน $\tau = T - t$ โดยที่ T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิ ราคาตลาด v และความผันผวนแฝงเริ่มต้น σ_0 และ σ_1

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหา $\tilde{C}(\sigma_0) := C_{BS}(S_*, t_*; K, \tau, r, \sigma)$ และ $\tilde{C}(\sigma_1) := C_{BS}(S_*, t_*; K, \tau, r, \sigma)$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่า $\sigma_n = \sigma_{n-2} + (v - \tilde{C}(\sigma_{n-2}))\frac{\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}}{\tilde{C}(\sigma_{n-1}) - \tilde{C}(\sigma_{n-2})}$ โดยวนทำซ้ำจนกว่าค่าคลาดเคลื่อน

$|\sigma_n - \sigma_{n-1}| < 0.0001$

ผลลัพธ์: σ_n เป็นค่าโดยประมาณของความผันผวนแฝง $\sigma_{imp}(K, \tau)$

Prince of Songkla University Pattani Campus

4.3 การหาความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วง

อัลกอริทึมในการคำนวณหาความผันผวนแฝง (6) โดยวิธีแบ่งครึ่งช่วง เป็นดังนี้

ข้อมูลนำเข้า: ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับหลักทรัพย์ ได้แก่ มูลค่าหลักทรัพย์ S_* ณ เวลา t_* และอัตราดอกเบี้ย r ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับคอลออปชันแบบยูโรเปียน ได้แก่ ราคาการใช้สิทธิ K และระยะเวลาก่อนครบกำหนดใช้สิทธิออปชัน $\tau = T - t$ โดยที่ T แทนวันครบกำหนดใช้สิทธิ ราคาตลาด v และความผันผวนแฝงเริ่มต้น σ_L และ σ_H ซึ่ง $\hat{C}(\sigma_L) \cdot \hat{C}(\sigma_H) < 0$

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหา $\sigma_n = \dfrac{\sigma_L + \sigma_H}{2}$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่า $\tilde{C}(\sigma_n) = C_{BS}(S_*, t_*; K, \tau, r, \sigma)$ แล้วพิจารณา ถ้า $\tilde{C}(\sigma_n) < v$ แทน σ_L ด้วย σ_n และถ้า $\tilde{C}(\sigma_n) \geq v$ แทน σ_H ด้วย σ_n และวนทำซ้ำจนกว่าค่าคลาดเคลื่อน $|\sigma_n - \sigma_{n-1}| < 0.0001$

ผลลัพธ์ : σ_n เป็นค่าโดยประมาณของความผันผวนแฝง $\sigma_{imp}(K, \tau)$

5 การคำนวณความผันผวนด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

ในตัวแบบ (1) ได้สมมติให้ความผันผวน σ เป็นค่าคงที่ เมื่อสมมติให้ความผันผวนขึ้นกับมูลค่าของหลักทรัพย์ S และเวลา t แล้วกรณีทั่วไปของตัวแบบ (1) เป็นดังนี้

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW \tag{10}$$

เรียก ฟังก์ชัน $\sigma(t, S_t)$ ว่า ฟังก์ชันความผันผวนเฉพาะถิ่น (Local Volatility Function) ในที่นี้สมมติว่า $\sigma(t, S_t)$ เป็นฟังก์ชันดีเทอร์มินิสติก (Deterministic Function)

ประยุกต์ใช้บทแทรกอิโตะและฟังก์ชันค่าของออปชัน $C_t(t, S)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันสเกลาร์จะอยู่ในรูปของ PDE ของแบล็ค-โชล ในกรณีทั่วไป ดังนี้

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S) S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \tag{11}$$

โดยที่ $C^{2,1}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับที่ 2 และ 1 เมื่อเทียบกับตัวแปร S และ t ตามลำดับ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบที่จุดปลาย (Terminal Boundary Condition)

$$C(T, S) = (S - K)^+ \tag{12}$$

สมมติว่า เรามีชุดข้อมูลราคาตลาดของคอลออปชันแบบยูโรเปียนที่มีวันครบกำหนดใช้สิทธิ $T_1, \ldots, T_N$ โดยสมมติว่าแต่ละ T_i ออปชันจะมีราคาใช้สิทธิ $K_{i1}, \ldots, K_{im_i}, m_i \in \mathbb{N}$

เมื่อกำหนดให้ V_{ij}^b และ V_{ij}^a แทนราคาเสนอซื้อและเสนอขายคอลออปชันตามลำดับ ที่มีวันครบกำหนดใช้สิทธิ T_i ออปชันจะมีราคาใช้สิทธิ K_{ij}

มูลค่าเชิงทฤษฎีของออปชันที่มีหลักทรัพย์เป็นไปตามตัวแบบ (10) เป็นดังนี้

$$c_{ij}(\sigma) = C(S_*, t_*, K_{ij}, T_i, r, \sigma), j = 1, \ldots, m_i, i = 1, \ldots N$$

จุดมุ่งหมายหลักในการแคลิเบรชันโดยใช้ข้อมูลที่เก็บรวบรวมจากตลาด คือ หารูปแบบเชิงฟังก์ชันนอลของ $\sigma : [0, \infty) \times [0, T_{\max}] \to \mathbb{R}$ ซึ่งเป็นความผันผวนเฉพาะถิ่นโดยที่ $T_{\max} := \max_{i=1,\ldots,N} T_i$

สมมติว่า ข้อมูลราคาตลาดของออปชันในตลาดหลักทรัพย์มีสมบัติว่า

$$v_{ij} \approx c_{ij} \text{ โดยที่ } V_{ij}^b \leq v_{ij} \leq V_{ij}^a \text{ เมื่อ } j = 1, \ldots, m_i, i = 1, \ldots N$$

โดยที่ υ_{ij} แทนค่าเฉลี่ยของราคาเสนอซื้อและราคาเสนอขาย $\upsilon_{ij} = (1/2)(V_{ij}^{b} + V_{ij}^{a})$

กำหนดให้ Σ แทนปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีโดเมน $[0,\infty)\times[0,T_{\max}]$ แล้วปัญหาออปทิไมเซชันของการหาความผันผวนเฉพาะถิ่นคือการหา $\sigma \in \Sigma$ ที่ทำให้

$$G(\sigma) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{m_i}\omega_{ij}\,(c_{ij}(\sigma) - \upsilon_{ij})^2 \tag{13}$$

มีค่าต่ำที่สุดโดยที่ ω_{ij} เป็นน้ำหนักนิยามดังนี้

$$\omega_{ij} = \frac{1}{|V_{ij}^{bid} - V_{ij}^{ask}|} \quad \text{หรือ} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{(\mathcal{V}_i)^2}$$

นิพจน์แรกเป็นการปรับสมดุลขนาดของความแตกต่างระหว่างราคาเสนอซื้อกับราคาเสนอขาย ส่วนนิพจน์ที่สองแสดงความไวของราคาออปชันที่ควรจะเป็น

6 การคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50

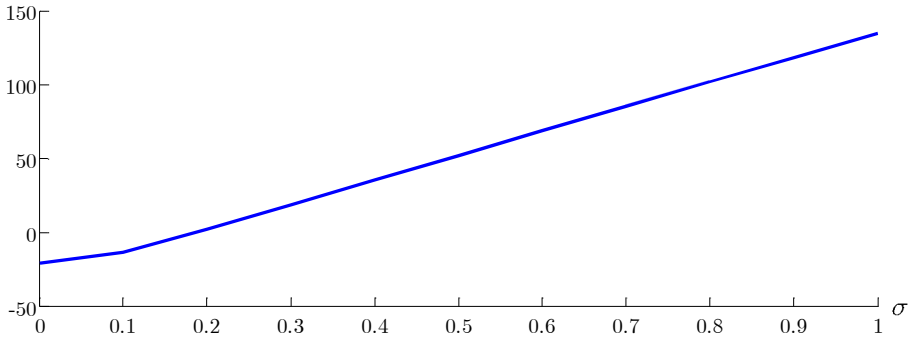
6.1 ข้อมูล SET50

ในงานวิจัยนี้ได้เก็บรวบรวมข้อมูลการซื้อขายของ SET50 Index Option จากตลาดสัญญาซื้อขายล่วงหน้า (TFEX : Thailand Futures Exchange) ตั้งแต่เดือนตุลาคม พ.ศ. 2557 ถึงเดือนมีนาคม พ.ศ. 2558 จำนวน 8 รุ่น (Series) ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้แก่ ราคาปิดรายวันของ SET50 Call Option ราคาที่ใช้ชำระเมื่อครบกำหนด (Settlement Price) และราคาใช้สิทธิ อัตราดอกเบี้ยใช้อัตราดอกเบี้ยเงินฝากประจำ 3 เดือนของธนาคารกรุงเทพ ในรูปที่ 1 แสดงราคาการซื้อขายของ SET50 Index Option

รูปที่ 1 ราคาของ SET50 Index Option ตั้งแต่วันที่ 1 ตุลาคม 2557 ถึงวันที่ 31 มีนาคม 2558

6.2 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเชิงตัวเลข

พิจารณาการคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 index option ณ วันที่ 16 ธันวาคม 2557 โดยมีวันที่ 31 มีนาคม 2558 เป็นวันหมดอายุ โดยที่ SET50 มีราคาอยู่ที่ 971.7 จุด $(S_0 = 971.7)$ อัตราดอกเบี้ย 1% $(r = 0.01)$ ราคาใช้สิทธิเท่ากับ 950 จุด $(K = 950)$ อายุคงเหลือเท่ากับ 71 วัน $(T = 71 \div 365)$ และมีราคาตลาดเท่ากับ 44.8 จุด $(v = 44.8)$ กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนแฝง (σ) กับ $\hat{C}$ เป็นดังนี้



รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนแฝง (σ) กับ $\bar{C}$

จากกราฟในรูปที่ 2 ค่าความผันผวนแฝงโดยวิธีกราฟจะเป็นค่าไม่แม่นตรง แต่จะทราบค่าโดยประมาณว่าอยู่ในช่วง 0.1 ถึง 0.3 ดังนั้นในการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีนิวตันจะเลือกค่าเริ่มต้นเป็น 0.2 และการคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีเส้นตัดและวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะเลือกค่าเริ่มต้นเป็น 0.1 และ 0.3 ซึ่งได้ผลการคำนวณความผันผวนแฝง (σ) ดังนี้

ตารางที่ 1 ผลการคำนวณความผันผวนแฝงเชิงตัวเลข

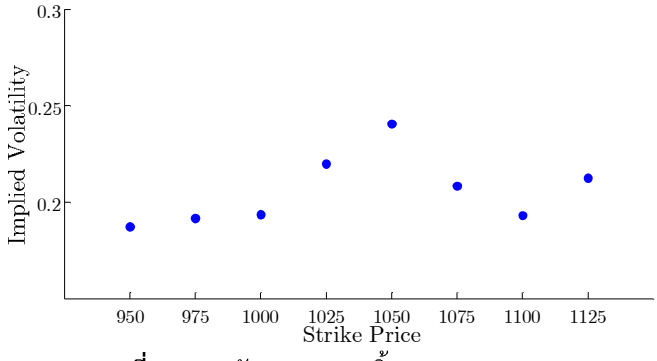
	วิธีนิวตัน		**วิธีเส้นตัด**		**วิธีแบ่งครึ่งช่วง**	
n	σ_n	$\lvert \sigma_n - \sigma_{n-1} \rvert$	σ_n	$\lvert \sigma_n - \sigma_{n-1} \rvert$	σ_n	$\lvert \sigma_n - \sigma_{n-1} \rvert$
0	0.2	-	0.1	-	0.1	-
1	0.1874	0.0126	0.3	0.2	0.3	0.2
2	0.1874	0.0000	0.1848	0.1152	0.2	0.1
3			0.1874	0.0026	0.15	0.05
4			0.1874	0.0000	0.1750	0.025
⋮					⋮	
13					0.1874	0.0001
14					0.1874	0.0000

Prince of Songkla University Pattani, Campus

จากตารางที่ 1 ค่าความผันผวนแฝงโดยประมาณเท่ากับ 0.1874 หรือ 18.74%

6.3 ความผันผวนรูปรอยยิ้ม

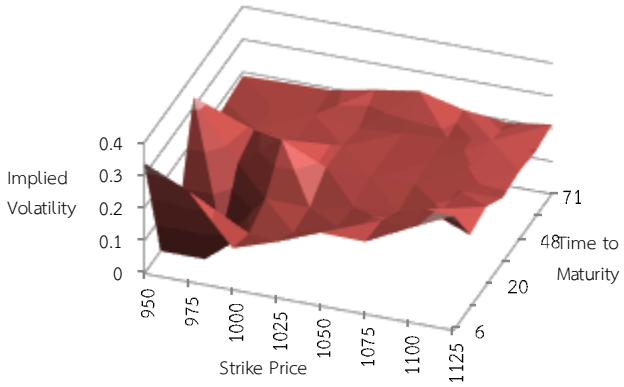
คำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 วันที่ 16 ธันวาคม 2557 หมดอายุวันที่ 31 มีนาคม 2558 (อายุคงเหลือ 71 วัน) ได้ความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนแฝงกับราคาใช้สิทธิมีลักษณะเป็นรอยยิ้มดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 ความผันผวนรูปรอยยิ้มของ SET50

6.4 พื้นผิวของความผันผวน (Volatility Surface)

คำนวณค่าความผันผวนแฝงของ SET50 ใน 7 ช่วงระยะเวลา ได้แก่ 6, 13, 20, 38, 48, 58 และ 71 วันซื้อขาย ก่อนวันครบกำหนด ได้ความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนแฝง ราคาใช้สิทธิ และเวลาครบกำหนดเป็นพื้นผิวของความผันผวนดังนี้



รูปที่ 4 พื้นผิวของความผันผวนของ SET50

6.5 การคำนวณความผันผวนแฝงด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

การคำนวณความผันผวนแฝงของ SET50 index option ที่มีอัตราดอกเบี้ย 1% $(r = 0.01)$ อายุคงเหลือ $(T_i, i = 1,2,...,7)$ ราคา SET50 (S_{T_i}) และราคาใช้สิทธิ $(K_{ij}, j = 1,2,...,8)$ เป็นดังตารางที่ 2 ราคาเสนอซื้อ (V_{ij}^b) และราคาเสนอขาย (V_{ij}^a) เป็นดังตารางที่ 3

ตารางที่ 2 ราคาใช้สิทธิ อายุคงเหลือ และราคา SET50

j	K_{ij}
1	950
2	975
3	1000
4	1025
5	1050
6	1075
7	1100
8	1125

i	T_i	S_{T_i}
1	0.0164	1,006.03
2	0.0356	1,013.98
3	0.0548	1,039.47
4	0.1041	1,066.10
5	0.1315	1,019.07
6	0.1589	998.05
7	0.1945	971.7

j	K_{1j}	T_1	S_{T_1}	K_{2j}	T_2	S_{T_1}	...	K_{7j}	T_7	S_{T_1}
1	950	0.0164	1,006.03	950	0.0356	1,013.98		950	0.1945	971.7
2	975	0.0164	1,006.03	975	0.0356	1,013.98		975	0.1945	971.7
3	1000	0.0164	1,006.03	1000	0.0356	1,013.98		1000	0.1945	971.7
4	1025	0.0164	1,006.03	1025	0.0356	1,013.98		1025	0.1945	971.7
5	1050	0.0164	1,006.03	1050	0.0356	1,013.98		1050	0.1945	971.7
6	1075	0.0164	1,006.03	1075	0.0356	1,013.98		1075	0.1945	971.7
7	1100	0.0164	1,006.03	1100	0.0356	1,013.98		1100	0.1945	971.7
8	1125	0.0164	1,006.03	1125	0.0356	1,013.98		1125	0.1945	971.7

Prince of Songkla University Pattani Campus

ตารางที่ 3 ราคาเสนอซื้อและเสนอขาย

j	V_{1j}^b	V_{1j}^a	V_{2j}^b	V_{2j}^a	V_{3j}^b	V_{3j}^a	V_{4j}^b	V_{4j}^a	V_{5j}^b	V_{5j}^a	V_{6j}^b	V_{6j}^a	V_{7j}^b	V_{7j}^a
1	58	58	50	59.8	89.6	89.6	124.6	124.6	73	73	44	58.9	28.1	41.1
2	36	34.8	33.3	34.5	64.9	64.9	95	101	50.7	55.4	31.9	42.9	32.1	32.1
3	13.7	10.1	16.9	17	37	42.3	77	77	37.5	38	20.3	29.8	18.6	21.1
4	3	2.5	6	5.5	26	22	55	52.5	23.6	25.5	12.5	16.6	14	18.2
5	1.5	1	5.4	2.8	14	11.5	49	35	14	15	9.3	11	11.7	15
6	0.3	0.3	1	1.5	5.8	4.4	30	22	9	9.3	4	7	6.1	6.7
7	0.2	0.2	1.2	1.5	3	3	19.1	14	6	6.1	5.4	5.4	6	3
8	0.2	0.2	0.5	0.5	1.2	2.2	8	8	4	3.7	2.5	2.5	2.6	2.6

ในตารางที่ 4 คำนวณหา $v_{ij} = (1/2)(V_{ji}^b + V_{ji}^a)$ ส่วนในตารางที่ 5 คำนวณหา $\omega_{ij} = 1/(\mathcal{V}_i)^2$ โดยที่ $i = 1,\ldots,7$ และ $j = 1,\ldots,8$

ตารางที่ 4 ค่า v_{ij}

j	v_{1j}	v_{2j}	v_{3j}	v_{4j}	v_{5j}	v_{6j}	v_{7j}
1	58.00	54.90	89.60	124.60	73.00	51.45	34.60
2	35.40	33.90	64.90	98.00	53.05	37.40	32.10
3	11.90	16.95	39.65	77.00	37.75	25.05	19.85
4	2.75	5.75	24.00	53.75	24.55	14.55	16.10
5	1.25	4.10	12.75	42.00	14.50	10.15	13.35
6	0.30	1.25	5.10	26.00	9.15	5.50	6.40
7	0.20	1.35	3.00	16.55	6.05	5.40	4.50
8	0.20	0.50	1.70	8.00	3.85	2.50	2.60

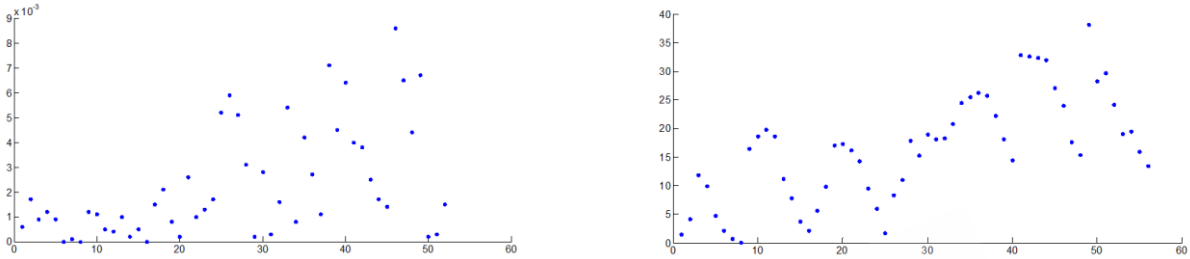
ตารางที่ 5 ค่า ω_{ij}

j	ω_{1j}	ω_{2j}	ω_{3j}	ω_{4j}	ω_{5j}	ω_{6j}	ω_{7j}
1	0.0255	0.0154	0.0133	0.0089	0.0077	0.0068	0.0062
2	0.0183	0.0129	0.0115	0.0082	0.0072	0.0065	0.0059
3	0.0299	0.0163	0.0139	0.0089	0.0076	0.0067	0.0061
4	0.1042	0.0302	0.0226	0.0112	0.0091	0.0078	0.0069
5	0.7348	0.0795	0.0489	0.0163	0.0120	0.0097	0.0083
6	9.9701	0.2904	0.1373	0.0271	0.0177	0.0133	0.0108
7	250.0000	1.4378	0.4919	0.0509	0.0286	0.0196	0.0149
8	10000.0000	9.4518	2.2109	0.1070	0.0505	0.0310	0.0218

จากข้อมูลในตาราง 2-5 หา $\sigma \in \Sigma$ ที่ทำให้ $G(\sigma) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i} \omega_{ij}\,(c_{ij}(\sigma) - v_{ij})^2$ มีค่าต่ำที่สุด ซึ่งได้ว่า σ =0.3619

6.6 อภิปรายผลการคำนวณ

วิธีนิวตันลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็วที่สุด แต่ในการคำนวณต้องทราบค่าอนุพันธ์ของออปชันที่มีความซับซ้อน ส่วนวิธีเส้นตัดลู่เข้าสู่ผลเฉลยช้ากว่าวิธีนิวตัน แต่ถ้าเลือกค่าเริ่มต้นไม่ดี อาจจะไม่ลู่เข้าก็ได้ ในขณะที่วิธีแบ่งครึ่งช่วงลู่เข้าสู่ผลเฉลยช้าที่สุด แต่ลู่เข้าเสมอ ซึ่งทั้งสามวิธีให้ผลเฉลยที่เหมือนกัน โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma_{imp})$ และ C_{market} อยู่ในช่วง $[0, 0.0086]$ ดังรูปที่ 5 (ก) ส่วนวิธีกำลังสองน้อยสุดเป็นวิธีหนึ่งในการหาความผันผวนแฝง ค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ v_{ij} อยู่ในช่วง $[0.0816, 38.225]$ ดังรูปที่ 5 (ข)



รูปที่ 5 (ก) ความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma_{imp})$ และ C_{market} **(ข)** ความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ v_{ij}

7. สรุปผลการวิจัย

การหาค่าความผันผวนแฝงของออปชันทางการเงินเป็นการแก้ปัญหาผกผัน ซึ่งไม่มีสูตรในการหาความผันผวนแฝงโดยตรง จึงใช้วิธีเชิงตัวเลขในการคำนวณหาค่าความผันผวนแฝง ซึ่งแต่ละวิธีมีการคำนวณและมีข้อจำกัดที่แตกต่างกัน ในงานวิจัยนี้ได้หาความผันผวนแฝงของ SET50 index option ณ วันที่ 16 ธันวาคม 2557 และหมดอายุในวันที่ 31 มีนาคม 2558 จากการคำนวณพบว่า วิธีนิวตันลู่เข้าสู่ผลเฉลยโดยมีจำนวนรอบทำซ้ำน้อยที่สุด แต่ในการคำนวณต้องทราบค่าอนุพันธ์ของออปชันที่มีความซับซ้อน ส่วนวิธีเส้นตัดลู่เข้าสู่ผลเฉลยโดยมีจำนวนรอบทำซ้ำมากกว่าวิธีนิวตัน แต่ถ้าเลือกค่าเริ่มต้นไม่ดี อาจจะไม่ลู่เข้าก็ได้ ในขณะที่วิธีแบ่งครึ่งช่วงลู่เข้าสู่ผลเฉลยโดยมีจำนวนรอบทำซ้ำมากที่สุด แต่ลู่เข้าเสมอ ซึ่งทั้งสามวิธีให้ความผันผวนแฝงโดยประมาณที่เท่ากัน โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma_{imp})$ และ C_{market} อยู่ในช่วง $[0, 0.0086]$ ส่วนวิธีกำลังสองน้อยสุดเป็นวิธีหนึ่งในการหาความผันผวนแฝง ค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง $C_{BS}(\sigma)$ และ v_{ij} อยู่ในช่วง $[0.0816, 38.225]$

บรรณานุกรม

[1] F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**(1973), 637–654.

[2] C. Chiarella, M. Craddock and N. El-Hassan, *The Calibration of Stock Option Models Inverse Problem Methodology*, QEFQ Research Papers, University of Technology, Sydney, Sydney, Australia, 2000.

[3] B. Christensen and C. Hensen, New evidence on the implied-realized volatility relation, *The European Journal of Finance*, **8**(2002), 187–205.

[4] E. Derman and I. Kani, Riding on the smile, *Risk*, **7**(1994), 32–39.

[5] B. Dumas, J. Fleming and R. Whaley, Implied volatility functions: empirical tests, *Journal of Finance*, **53**(1998), 2059–2106.

[6] B. Dupire, Pricing with a smile, *Risk*, **7**(1994), 18–20.

[7] R. J. Elliott and P. E. Kopp, *Mathematic of Financial Market*, (2nd ed.), Springer Finance, America, 2005.

[8] J. Gatheral, *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2006.

[9] P. Glasserman, *Montge Carla Methods in Financial Enginering*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[10] A. Intarasit, Ito stochastic integral and their application, *The Journal of KMUTNB*, **22**(2012), 460–469.

[11] R. Lagnodo and S. Osher, A technique for calibrating derivative security pricing models: numerical solution of an inverse problem, *The Journal of Computational Finance*, **1**(1997), 13-25.

[12] R. Lee, Local volatility under stochastic volatility, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **4**(1999), 45–89.

[13] R. C. Merton, Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**(1973), 141–183.

[14] M. Z. Nashed, *Generalized Inverse and Applications*, Academic Press, New York, 1974.

[15] A. N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solution of Ill-posed Problems*, Halsted Press, New York, 1977.

[16] A. N. Tikhonov, On the solution of incorrectly posed problem and the method of regularization, *Soviet Mathematics*, **4**(1963), 1035-1038.

Prince of Songkla University Pattani Campus

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล นางสาวรอสเมาะห์ นิสะนิ

รหัสประจำตัวนักศึกษา 5620320704

วุฒิการศึกษา

วุฒิ	ชื่อสถาบัน	ปีที่สำเร็จการศึกษา
วิทยาศาสตรบัณฑิต	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์	2552
วท.บ. (ศึกษาศาสตร์)		

ทุนการศึกษา

1. ทุนยกเว้นค่าธรรมเนียม จากคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
2. ทุนอุดหนุนการวิจัยเพื่อวิทยานิพนธ์ จากบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

Prince of Songkla University Pattani Campus

ตำแหน่งและสถานที่ทำงาน

ตำแหน่ง อาจารย์กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

สถานที่ทำงาน โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

การตีพิมพ์เผยแพร่ผลงาน

รอสเมาะห์ นิสะนิ อาทิตย์ อินทรสิทธิ์ อารียุทธ สมาแอ และ นิฟาตมะห์ มะกาเจ. 2559. การคำนวณความผันผวนแฝงเชิงตัวเลข. การประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี 2559 (ครั้งที่ 21) และการประชุมวิชาการคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และประยุกต์ประจำปี 2559. สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร, 23 – 25 พฤษภาคม 2559, 387 – 398.