



แบบรูปฟีโบนัชชี ฟังก์ชันการเจริญเติบโต ปริมาตรของเมล็ดและการจัดเรียงเมล็ด
บนดอกทานตะวัน สายพันธุ์อะควารา-6
Fibonacci Pattern, Growth Function, Volume of Seeds and Arrangement
of Seeds on Agura-6 Sunflower Heads

มุฮัมหมัดอาลาวี บุกู
Muhammad-Alawee Buku

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of
Master of Science in Applied Mathematics
Prince of Songkla University

2560

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์



แบบรูปฟีโบนัชชี ฟังก์ชันการเจริญเติบโต ปริมาตรของเมล็ดและการจัดเรียงเมล็ด
บนดอกทานตะวัน สายพันธุ์อะควารา-6
Fibonacci Pattern, Growth Function, Volume of Seeds and Arrangement
of Seeds on Agura-6 Sunflower Heads

มุฮัมหมัดอาลาวี บุกู
Muhammad-Alawee Buku

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of
Master of Science in Applied Mathematics
Prince of Songkla University

2560

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

ชื่อวิทยานิพนธ์	แบบรูปพีโบนาคี ฟังก์ชันการเจริญเติบโต ปริมาตรของเมล็ดและ การจัดเรียงเมล็ดบนดอกทานตะวัน สายพันธุ์อะควอรา-6
ผู้เขียน	นายมุฮัมหมัดอาลาวิ บุกู
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

คณะกรรมการสอบ

.....

.....ประธานกรรมการ

(ดร.ภาขวัญ ธิยาพันธ์)

(ดร.เซาฟี บูสะมัญ)

.....กรรมการ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

(ดร.ภาขวัญ ธิยาพันธ์)

.....

.....กรรมการ

(ดร.สมพร ช่วยอารีย์)

(ดร.สมพร ช่วยอารีย์)

.....กรรมการ

(ผศ.ดร.กิตติยา คงกระพันธ์)

.....กรรมการ

(ผศ.ดร.กรวิกา ก้องกุล)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัยเป็นส่วนหนึ่ง
ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

.....

(รองศาสตราจารย์ ดร.จีระพล ศรีชนะ)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

ขอรับรองว่า ผลงานวิจัยนี้มาจากการศึกษาวิจัยของนักศึกษาเอง และได้แสดงความขอบคุณบุคคลที่มีส่วนช่วยเหลือแล้ว

ลงชื่อ.....

(ดร.ภาขวัญ รียาพันธ์)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ลงชื่อ.....

(ดร.สมพร ช่วยอารีย์)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

ลงชื่อ.....

(นายมุฮัมหมัดอาลาวี บุญ)

นักศึกษา

ข้าพเจ้าขอรับรองว่า ผลงานวิจัยนี้ไม่เคยเป็นส่วนหนึ่งในการอนุมัติปริญญาในระดับใดมาก่อน และ
ไม่ได้ถูกใช้ในการยื่นขออนุมัติปริญญาในขณะนี้

ลงชื่อ.....

(นายมุฮัมหมัดอาลาวี บุกู)

นักศึกษา

Prince of Songkla University
Pattani Campus

ชื่อวิทยานิพนธ์	แบบรูปพีโบนักซี ฟังก์ชันการเจริญเติบโต ปริมาตรของเมล็ดและการจัดเรียงเมล็ดบนดอกทานตะวัน สายพันธุ์อะควอรา-6
ผู้เขียน	นายมุฮัมหมัดอาลาวิ บุกู
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2559

บทคัดย่อ

การศึกษางานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกลีบของดอกทานตะวันกับจำนวนพีโบนักซี โดยการนับจำนวนกลีบของดอกทานตะวัน รวมทั้งศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันกับจำนวนพีโบนักซี โดยการนับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันในทิศทางและตามเข็มนาฬิกา พร้อมทั้งศึกษาการเจริญเติบโตของดอกทานตะวันโดยการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน และใช้แบบจำลองการเติบโตด้วยฟังก์ชันลักษณะคล้ายตัว S เพื่อหาผลเฉลยทั่วไป

นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวันโดยวิธีการเก็บข้อมูลทางกายภาพของเมล็ด (ความกว้าง ความยาวและความหนา) และประมาณค่าปริมาตรของเมล็ดในแต่ละพื้นที่และทั้งดอกทานตะวันด้วย 5 วิธี อีกทั้งศึกษาการบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวัน โดยการหาประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดจากดอกทานตะวันจริงและได้สร้างแบบจำลองการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันด้วย

Thesis Title	Fibonacci Pattern, Growth Function, Volume of Seeds and Arrangement of Seeds on Aguara-6 Sunflower Heads
Author	Mr.Muhammad-Alawee Buku
Major Program	Applied Mathematics
Academic Year	2016

ABSTRACT

The aim of this study is to investigate the relation between the number of sunflower petals and Fibonacci number by counting the number of sunflower petals. The relation between the spiral number of arrangement of sunflower seeds and Fibonacci number is studied by counting spiral number of arrangement of sunflower seeds in counterclockwise and clockwise directions. The growth of sunflowers is observed by measuring the length of diameter of sunflowers and studied by using a sigmoid function in order to find the general solution

Furthermore, the volume of sunflower seeds is collected from the physical grain of sunflowers (width, length and thickness) and estimated on each region of sunflower heads and on the whole heads by using 5 methods. Moreover, the packing of sunflowers is considered by computing the efficiency of arrangement of seeds and creating a model for studying of this arrangement.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จสมบูรณ์ได้ด้วยความช่วยเหลือของผู้มีบุญคุณหลายท่าน ข้าพเจ้าขอขอบคุณ ดร.ภาขวัญ รียาพันธ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลักและ ดร.สมพร ช่วยอารีย์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ที่คอยให้คำปรึกษาแนะนำในการทำวิจัย การค้นคว้าเอกสารและการเขียนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอขอบคุณ ดร.เซาฟี บุษะมัญ ประธานคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.กิตติยา คงกระพันธ์ และ ผศ.ดร.กรวิภา ก้องกุล กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่กรุณาให้คำแนะนำและตรวจทานแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้ถูกต้องและสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์สำหรับทุนสนับสนุนวิจัยของบัณฑิตวิทยาลัยของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์และทุนจากศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ที่คอยสนับสนุนงบประมาณเพื่อการวิจัย และขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่คอยให้คำแนะนำและอำนวยความสะดวกในการวิเคราะห์ข้อมูล ขอขอบคุณคณาจารย์แผนกวิชาเทคโนโลยีการเกษตรที่อนุเคราะห์สถานที่เพื่อการเพาะปลูกต้นทานตะวัน ขอขอบคุณคณาจารย์แผนกวิชาเคมีและแผนกวิชาฟิสิกส์ที่ให้ยืมอุปกรณ์เพื่อทำการทดลอง และวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะสมบูรณ์ไม่ได้หากขาดกำลังใจจากครอบครัวของข้าพเจ้า จึงขอขอบคุณไว้ ณ โอกาสนี้ ขอขอบคุณนักศึกษาปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่ให้คำแนะนำต่าง ๆ เกี่ยวกับการวิจัย ขอขอบคุณทุกท่านที่มีส่วนช่วยให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จสมบูรณ์ด้วยดี

มุฮัมหมัดอาลาวี บุกู

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(vii)
รายการตาราง	(x)
รายการภาพประกอบ	(xii)
บทที่	
1 บทนำ	1
1.1 หลักการและเหตุผล	1
1.2 วัตถุประสงค์	5
1.3 ขอบเขตงานวิจัย	5
1.4 ผลที่คาดว่าจะได้รับ	5
2 ความรู้พื้นฐาน	6
2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
2.2 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง	9
3 วัสดุ อุปกรณ์ และวิธีการดำเนินงาน	16
3.1 วัสดุและอุปกรณ์	16
3.2 วิธีการดำเนินงาน	17
4 ผลการทดลอง	31
4.1 การนับจำนวนกลีบของดอกทานตะวัน	31
4.2 การนับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวัน	32
4.3 การพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน	35
4.4 การหาปริมาตรเมล็ดของดอกทานตะวัน	38
4.5 การบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวัน	54

5	อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ	56
	5.1 อภิปรายผล	56
	5.2 ข้อเสนอแนะ	57
	บรรณานุกรม	58
	ภาคผนวก ก. คู่มือการใช้โปรแกรม	60
	ภาคผนวก ข. ข้อมูลและการวิเคราะห์	64
	ภาคผนวก ค. Proceeding	76
	ประวัติผู้เขียน	87

Prince of Songkla University
Pattani Campus

รายการตาราง

ตาราง	หน้า
4.1 ผลการนับกลีบดอกของดอกทานตะวันในแต่ละชั้น	33
4.2 จำนวนต้นที่มีจำนวนกลีบดอกของดอกทานตะวันเป็นจำนวนฟีโบนัชชีในชั้นที่ 1-3	33
4.3 จำนวนเส้นเวียนก้นหอยในแต่ละทิศทางและจำนวนเส้นเวียนก้นหอยในรูปคู่อันดับ	34
4.4 จำนวนเส้นเวียนก้นหอยของการจัดเรียงเมล็ดในรูปคู่อันดับ	35
4.5 ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน	37
4.6 ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางและปริมาตรจริงของเมล็ดดอกทานตะวัน	38
4.7 ค่าเฉลี่ยของความกว้าง ความหนาและความยาว	39
4.8 ปริมาตรเฉลี่ยของแต่ละเมล็ดในแต่ละพื้นที่ด้วยวิธีการต่าง ๆ	40
4.9 ปริมาตรเมล็ดในแต่ละพื้นที่ด้วยวิธีการต่าง ๆ	41
4.10 ฟังก์ชันส่วนโค้งบนและฐานรองของเมล็ดดอกทานตะวัน	44
4.11 ปริมาตรเมล็ดทั้งดอกทานตะวันด้วยวิธีการต่าง ๆ	48
4.12 ผลการเปรียบเทียบปริมาตรของเมล็ดในแต่ละพื้นที่ด้วยวิธีการต่าง ๆ	49
4.13 ผลการเปรียบเทียบปริมาตรของเมล็ดทั้งดอกของดอกทานตะวันด้วยวิธีการต่าง ๆ	50
4.14 พื้นที่วงกลมในแต่ละพื้นที่	51
4.15 พื้นที่หน้าตัดของเมล็ดในแต่ละพื้นที่	52
4.16 ประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดด้วยพื้นที่หน้าตัด	53
ภ.1 ข้อมูลชุดที่ 1	65
ภ.2 ข้อมูลชุดที่ 2	66
ภ.3 ข้อมูลชุดที่ 3	67
ภ.4 ข้อมูลชุดที่ 4	68
ภ.5 ข้อมูลชุดที่ 5	69

ภ.6 ข้อมูลชุดที่ 6	70
ภ.7 ข้อมูลชุดที่ 7	71
ภ.8 ข้อมูลชุดที่ 8	72
ภ.9 ข้อมูลชุดที่ 9	73
ภ.10 ข้อมูลชุดที่ 10	74
ภ.11 ค่า R^2 ของข้อมูลทั้ง 10 ชุดด้วยตีกีรี 1 ถึง ตีกีรี 10	75

Prince of Songkla University
Pattani Campus

รายการภาพประกอบ

ภาพ	หน้า
1.1 ตัวอย่างแบบรูปเส้นเวียนกันหอยที่พบในธรรมชาติ	2
1.2 ตัวอย่างแบบรูปเส้นเวียนกันหอยและทิศทางของแบบรูปเส้นเวียนกันหอย	2
1.3 การเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน	3
1.4 วิวัฒนาการการเกิดเมล็ดของดอกทานตะวัน	4
2.1 สมมติฐานข้อที่ 2 ของ Vogel	8
2.2 ลักษณะกราฟของสมการวงรี	12
3.1 เครื่องมือวัดขนาดของเมล็ดทานตะวัน คือ เวอร์เนียคาลิปเปอร์	16
3.2 โปรแกรมวิเคราะห์จุด X และ Y	17
3.3 ปีกเกอร์ที่ใช้ในการหาปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวัน	17
3.4 กลีบดอกและกลีบเลี้ยงของดอกทานตะวัน	18
3.5 ทิศทางการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันในแต่ละดอก	20
3.6 การหาปริมาตรจริงของเมล็ดดอกทานตะวันโดยการถ่วงน้ำในปีกเกอร์	22
3.7 ขั้นตอนการแบ่งพื้นที่ของดอกทานและแสดงพื้นที่แต่ละส่วน	23
3.8 ค่าต่าง ๆ ของเมล็ดทานตะวัน	24
3.9 การวัดค่าต่าง ๆ ของเมล็ดดอกทานตะวันด้วยเวอร์เนีย คาลิปเปอร์	24
3.10 แบบจำลองปริมาตรเมล็ดด้วยทรงกระบอกหน้าตัดวงรี	25
3.11 แบบจำลองปริมาตรเมล็ดด้วยทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม	25
3.12 แบบจำลองปริมาตรเมล็ดด้วยพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม	25
3.13 ภาพของภาคตัดขวางดอกทานตะวัน	26
3.14 ภาพเปรียบเทียบระหว่างภาพจริงกับภาพที่เกิดจากการหมุนฟังก์ชัน	27
3.15 ช่วงการเกิดเมล็ดของดอกทานตะวัน	30

4.1	กราฟการเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน	36
4.2	กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดของการประมาณค่าของทั้งสองผลเฉลย	36
4.3	แบบจำลองการบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวัน	55
ภ.1	ส่วนการปรับขนาดของการเลือกจัดเรียงเมล็ดที่มีขนาดแตกต่างกัน	61
ภ.2	หน้าต่างโปรแกรมในงานวิจัยนี้	63

Prince of Songkla University
Pattani Campus

บทที่ 1

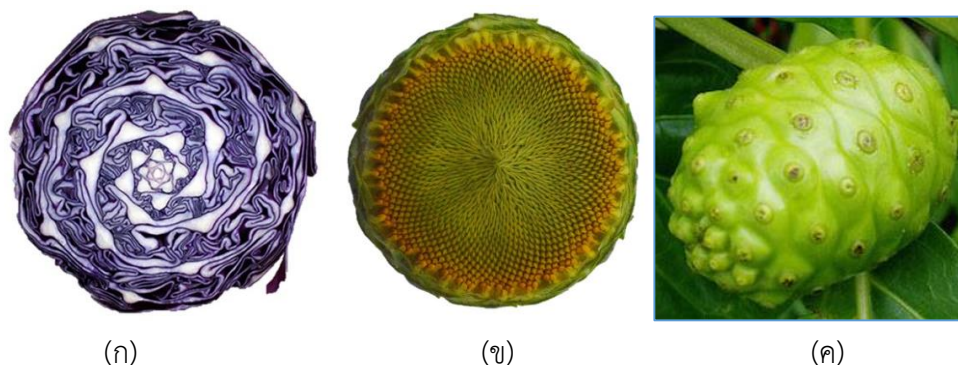
บทนำ

1.1 หลักการและเหตุผล

แบบรูปของพืช (plant pattern) เป็นการแสดงลักษณะรูปร่างสัณฐานของการจัดเรียง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของพืช เช่น ใบ เมล็ด ดอก กลีบเลี้ยง เป็นต้น ในระยะแรกของส่วนประกอบต่าง ๆ ของพืช ซึ่งเรียกว่า primordia จะเกิดขึ้นที่เนื้อเยื่อเจริญปลายยอด (shoot apical meristem) แล้วเคลื่อนที่ออกจากเนื้อเยื่อเจริญปลายยอดจนกลายเป็นส่วนประกอบต่าง ๆ ของพืช เช่น ใบ ดอก เมล็ด เป็นต้น การจัดเรียงส่วนประกอบต่าง ๆ ของพืชเราเรียกว่า **ฟิลโลแทกซิส** (phyllotaxis) ซึ่งแบบรูปที่เกิดจากการจัดเรียงดังกล่าวมี 2 แบบ คือ แบบรูปวง (whorl) และแบบรูปเส้นเวียนกันหอย (spiral) (Alan, 2005; Jay, 2004; Jean, 1994; Michison, 1977 and Pennybacker, 2013)

แบบรูปที่สามารถพบเห็นได้บ่อยในพืช คือ แบบรูปเส้นเวียนกันหอย ซึ่งตัวอย่างของพืชที่มีการจัดเรียงของแบบรูปเส้นเวียนกันหอย ดังรูปที่ 1.1 เช่น การจัดเรียงของดอกกะหล่ำปลี การจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันและการจัดเรียงตาบนลูกยอ เป็นต้น นอกจากนี้เส้นเวียนกันหอยมีลักษณะเป็นวงขดเกลียวประกอบด้วย 2 ทิศทาง นั่นคือ ทิศตามเข็มนาฬิกาและทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 1.2 อีกทั้งสามารถเขียนจำนวนเส้นเวียนกันหอยอยู่ในรูปคู่อันดับ (m, n) เมื่อ m คือ จำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทางตามเข็มนาฬิกาและ n คือ จำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 1.2 (ก) เส้นทึบแสดงทิศทางตามเข็มนาฬิกา (ข) เส้นประแสดงทิศทางทวนเข็มนาฬิกา โดยส่วนใหญ่แล้วจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงส่วนประกอบต่าง ๆ ของพืชเป็นจำนวนหนึ่งในจำนวนฟีโบนัชชี

จำนวนฟีโบนัชชีเป็นจำนวนที่เกิดจากผลรวมของสองพจน์ก่อนหน้า ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปดังนี้ $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ เมื่อ $F_1 = F_2 = 1, k \geq 2$ และสามารถเขียนเป็นลำดับ คือ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... แบบรูปที่สอดคล้องเงื่อนไขของจำนวนในลำดับฟีโบนัชชีเราจะเรียกแบบรูปดังกล่าวว่า **แบบรูปฟีโบนัชชี** (Alan, 2005; Jay, 2004; Jean, 1994; Michison, 1977 and Pennybacker, 2013)



รูปที่ 1.1 ตัวอย่างแบบรูปเส้นเวียนกันหอยที่พบในพืช (ก) ดอกกะหล่ำปลี (ข) ดอกทานตะวัน (ค) ลูกยอ



รูปที่ 1.2 ตัวอย่างแบบรูปเส้นเวียนกันหอยและทิศทางของแบบรูปเส้นเวียนกันหอย (ก) เส้นทึบแสดงทิศทางตามเข็มนาฬิกา (ข) เส้นประแสดงทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

การศึกษานี้จะศึกษาแบบรูปที่เกิดขึ้นกับดอกทานตะวันซึ่งมีชื่อทางวิทยาศาสตร์ คือ *Helianthus Annus L.* เป็นพืชล้มลุกอายุหนึ่งปี (annual plant) ที่สามารถปลูกลงง่ายและมีการปรับตัวเข้ากับสภาพของเขตร้อนได้ดี มีความทนทานต่อสภาพแห้งและร้อนได้พอสมควร นอกจากนี้มีลักษณะดอกเป็นแบบช่อดอก (inflorescence) ที่มีดอกย่อย (florets) เรียงบนฐานรองดอกที่แผ่กว้าง และไม่มีก้านดอกย่อย (head) ซึ่งมีการอัดตัวแน่นของดอกย่อยหลายร้อยดอกที่ดูเหมือนเป็นดอกเดียว (ลิลลี่, 2546) นอกจากนี้การเจริญเติบโตของดอกทานตะวันมี 2 สถานะ นั่นคือ สถานะแรก มีการสร้างดอกที่ปลายยอดและเริ่มมีการขยายตัวของฐานดอกดังรูปที่ 1.3(ก) และช่อดอกหันไปตามทิศของดวงอาทิตย์ นั่นคือ หันไปทางทิศตะวันออกในตอนเช้าและทิศตะวันตกในตอนเย็น สำหรับสถานะที่สองเป็นการสร้างเมล็ดโดยมีการสร้างจากภายนอกสุดของดอกทานตะวันเข้าสู่จุดศูนย์กลางของดอกทานตะวัน ซึ่งในกระบวนการนี้มีการขยายตัวของเมล็ดและฐานของดอกทานตะวัน ดังรูปที่ 1.3(ข)

(Pennybacker, 2013) และช่อดอกจะหันเพียงทิศเดียว นั่นคือ ทิศตะวันออกเสมอ นอกจากนี้เมล็ดของดอกทานตะวันมีการจัดเรียงเป็นแบบรูปเส้นเวียนกันหอย อีกทั้งขนาดเมล็ดของทานตะวันที่อยู่วงรอบนอกมีขนาดใหญ่ ส่วนบริเวณจุดศูนย์กลางจะมีขนาดเล็กลง ซึ่งสามารถจำแนกเมล็ดทานตะวันออกเป็น 3 จำพวก ได้แก่ เมล็ดใช้สกัดน้ำมัน เมล็ดใช้รับประทานและเมล็ดใช้เลี้ยงสัตว์



(ก)



(ข)

รูปที่ 1.3 การเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน (ก) สถานะแรกมีการสร้างดอกที่ปลายยอด และเริ่มมีการขยายตัวของดอก (ข) สถานะที่สองเป็นการสร้างเมล็ดโดยมีการสร้างจากภายนอกสุดของดอกทานตะวันเข้าสู่จุดศูนย์กลางของดอกทานตะวัน

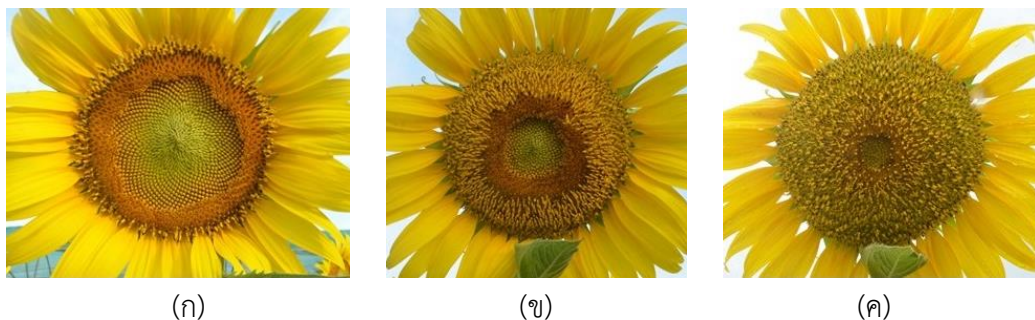
ดอกทานตะวันสายพันธุ์น้ำมันเป็นพืชน้ำมันที่สำคัญทางเศรษฐกิจรองจากถั่วเหลือง และปาล์มน้ำมัน (Vollmann. and Rajcan, 2010.) ซึ่งน้ำมันของเมล็ดดอกทานตะวันมีคุณค่าทางโภชนาการสูงและสามารถเก็บไว้ได้นานกว่าน้ำมันพืชชนิดอื่น เนื่องจากน้ำมันทานตะวันมีคุณค่าสูง จึงเป็นที่ต้องการของตลาดทั้งในและต่างประเทศเพื่อการบริโภคและใช้ในอุตสาหกรรม เช่น น้ำมันชักเงา น้ำมันหล่อลื่น สีทาบ้าน สำหรับประเทศไทยได้มีการส่งเสริมให้มีการปลูกทานตะวันเป็นอาชีพเสริมมากขึ้น เพื่อเพิ่มผลผลิตให้เพียงพอกับอุตสาหกรรมพืชน้ำมันและความต้องการของผู้บริโภค (Laosuwan, 1997; Satjawattana and Laosuwan, 2002) ซึ่งในประเทศไทยมีดอกทานตะวันสายพันธุ์น้ำมันหลายชนิดด้วยกัน เช่น อะควอรา-6, โอลิซัน-3, ไฮซัน-33 เป็นต้น ในงานวิจัยนี้จะศึกษาดอกทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา-6 ซึ่งมีจุดเด่น คือ ให้ผลผลิตสูงและดอกมีขนาดใหญ่

ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยศึกษาการเจริญเติบโตของดอกทานตะวันด้วยการวัดความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้แบบจำลองตัว S (sigmoid

model) ที่มีลักษณะกราฟคล้ายตัว S และเป็นฟังก์ชันการเจริญเติบโต (growth function) (Chuairee, 2009) อีกทั้งทดสอบความแม่นยำของแบบจำลองด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด (least square method) (Julian, 2005)

นอกจากนี้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกลีบของดอกทานตะวันกับจำนวนฟีโบนักชีและความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันกับจำนวนฟีโบนักชีด้วยการนับจำนวนกลีบดอกทานตะวันในแต่ละชั้นและจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดดอกทานตะวัน

อีกทั้งได้ศึกษาปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวันด้วยวิธีการต่าง ๆ ได้แก่ สูตรของ Mirzabeh ทรงกระบอกหน้าตัดวงรี ทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม พีระมิดหน้าตัดสี่เหลี่ยมและการหมุนฟังก์ชันแบบเปลือกทรงกระบอก เพื่อประมาณค่าปริมาตรเมล็ดที่ใกล้เคียงกับปริมาตรของเมล็ด พร้อมทั้งศึกษาการบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวัน ซึ่งเป็นการบรรจุอย่างเหมาะสม (optimal packing) โดยการวางวงกลมเล็ก n วง ที่แต่ละวงมีรัศมีเท่ากับ r หน่วย วางลงในวงกลมใหญ่ที่มีรัศมี R หน่วย ซึ่งลักษณะการวางของวงกลมเล็กต้องวางไม่ซ้อนทับกัน (Graham, 1998) สำหรับงานวิจัยนี้จะมองวงกลมใหญ่เป็นดอกทานตะวันและวงกลมเล็ก n วง เป็นเมล็ดของดอกทานตะวันจำนวน n เมล็ด ซึ่งจากการศึกษาการบรรจุเมล็ดและแบบจำลองของ Vogel มีการบรรจุเมล็ดจากรอบนอกสุดสู่จุดศูนย์กลางของดอก ดังรูปที่ 1.4 (Przemyslaw, & et. al. 1990, Ridley, 1982 and Vogel, 1978) งานวิจัยนี้จะกำหนดขนาดเมล็ดในแต่ละพื้นที่ให้มีขนาดที่แตกต่างกัน 3 ขนาด โดยอาศัยการแบ่งพื้นที่ออกเป็น 3 ส่วน ตามบทที่ 3 พร้อมทั้งให้แต่ละชั้นของเมล็ดมีขนาดที่แตกต่างกันเพื่อให้มีลักษณะการจัดเรียงเหมือนดอกจริง โดยที่เมล็ดที่พื้นที่รอบนอกสุดมีขนาดใหญ่สุดและบริเวณจุดศูนย์กลางมีขนาดเล็กสุด



รูปที่ 1.4 วิวัฒนาการการเกิดเมล็ดของดอกทานตะวัน ซึ่งจะเกิดจากรอบนอกสุดของดอกแล้วเข้าสู่จุดศูนย์กลางของดอก

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา-6 กับจำนวนฟีโบนักซีและความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกลีบของดอกทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา-6 กับจำนวนฟีโบนักซี

1.2.2 ศึกษาและเก็บข้อมูลการเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน สายพันธุ์อะควอรา-6 เพื่อสร้างแบบจำลองของฟังก์ชันการเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน

1.2.3 ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการหาปริมาตรที่แม่นยำตรงของเมล็ดของดอกทานตะวัน สายพันธุ์อะควอรา-6

1.2.4 ศึกษาการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวัน เพื่อเป็นแนวทางการวิเคราะห์กระบวนการบรรจุเมล็ดอย่างเหมาะสม (optimal packing)

1.3 ขอบเขตงานงานวิจัย

1.3.1 นับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดและจำนวนกลีบของดอกทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา-6

1.3.2 หาปริมาตรเมล็ดของดอกทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา-6 ในแต่ละวันโดยใช้วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก (method of cylindrical shells) รูปทรงทางเรขาคณิตและปริมาตรของ Mirzabe

1.3.3 วัดเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา-6 ในแต่ละวัน และใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน

1.4 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ทราบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันกับจำนวนฟีโบนักซีและความสัมพันธ์จำนวนกลีบของดอกทานตะวันกับจำนวนฟีโบนักซี

1.4.2 ได้ข้อมูลปริมาตรเมล็ดของดอกทานตะวันและวิธีการหาปริมาตรของเมล็ดที่เที่ยงตรง

1.4.3 ได้ตัวแบบเชิงวิเคราะห์และเชิงตัวเลขของฟังก์ชันการเจริญเติบโตของดอกทานตะวันสายพันธุ์ อะควอรา-6

1.4.4 ได้วิธีการบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวันอย่างมีประสิทธิภาพ

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแบบรูปฟีโบนัชชี

Mathai (1974) ศึกษาโครงสร้างของต้นทานตะวันและค้นพบว่าการจัดเรียงใบของต้นทานตะวันเป็นแบบสลับ (alternate) รวมทั้งแบบรูปของการจัดเรียงใบเป็นแบบรูปเส้นเวียนก้นหอยที่มี 1 เส้น นั่นคือ อาจจะเป็นเส้นเวียนก้นหอยในทิศทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกาและมีมุมระหว่างใบเป็นมุม 137.5° นอกจากนี้เขาได้สร้างแบบจำลองเส้นเวียนก้นหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันโดยอาศัยพื้นฐานของเส้นเวียนก้นหอยแบบลอการิทึม พบว่าจำนวนเส้นเวียนก้นหอยที่อยู่รอบนอกมีมากกว่าจำนวนเส้นเวียนก้นหอยที่อยู่รอบใน เช่น รอบนอกสุดมีจำนวนเส้นเวียนก้นหอยในแต่ละทิศทางเป็น 34 และ 21 เส้น รอบในจะมีจำนวนเส้นเวียนก้นหอยเป็น 21 และ 13 เส้น จากงานวิจัยนี้ได้ขยายงานจากการนับใบเป็นการนับกลีบดอกของดอกทานตะวันและจำนวนเส้นเวียนก้นหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวัน

Davis (1994) ศึกษาการจัดเรียงของก้านใบของปาล์มชนิดต่าง ๆ เขาพบว่าจำนวนก้านใบในการหมุนครบรอบ (การจัดเรียงก้านใบที่ตำแหน่งตรงกัน) เป็น 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... และจำนวนรอบที่ทำให้ก้านใบอยู่ตำแหน่งเดียวกันเป็น 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... จากการนับจำนวนก้านใบในการหมุนครบรอบและจำนวนรอบที่ทำให้ก้านใบอยู่ตำแหน่งเดียวกันเป็นจำนวนหนึ่งในจำนวนฟีโบนัชชี อย่างไรก็ตาม ปาล์มแต่ละชนิดจะแสดงจำนวนรอบและจำนวนก้านใบแตกต่างกัน จากงานวิจัยนี้ได้ขยายงานจากการนับใบของต้นปาล์มเป็นการนับกลีบของดอกทานตะวันและการนับจำนวนเส้นเวียนก้นหอยของการจัดเรียงเมล็ดและเป็นการแสดงถึงแบบรูปฟีโบนัชชีที่เกิดขึ้นในพืช

2.1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันการเจริญเติบโต

Chuai-Aree (2009) ศึกษาแบบจำลองการเจริญเติบโตของลำต้นของพืชสองแบบ คือ ฟังก์ชันเลขยกกำลังและฟังก์ชันลักษณะตัว S สำหรับฟังก์ชันเลขยกกำลังเขียนอยู่ในรูป $\frac{dy}{dt} = ky$ เมื่อ y คือ ค่าของการเจริญเติบโตและ k คือ อัตราการเจริญเติบโตและ t คือ เวลา ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันที่เพิ่มขึ้นอย่างไม่สิ้นสุดและไม่สามารถอธิบายข้อมูลที่มีระยะเวลามาก เพราะทำ

ให้ค่าของข้อมูลเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว อีกฟังก์ชันหนึ่งเป็นฟังก์ชันลักษณะคล้ายตัว S เขียนอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(1 - \frac{y}{u}\right)$$

เมื่อ y คือ ค่าของการเจริญเติบโตและ α, u คือ พารามิเตอร์ของฟังก์ชันการเจริญเติบโตและ t คือ เวลา กล่าวคือ ในช่วงแรกข้อมูลมีการเพิ่มเหมือนกับฟังก์ชันเลขยกกำลังและเมื่อถึงจุดหนึ่งค่าของข้อมูลจะคงที่ นอกจากนี้เขาได้แนะนำแบบจำลองสำหรับการพยากรณ์การเจริญเติบโตในรูปฟังก์ชันลักษณะตัว S ซึ่งสามารถพยากรณ์กับการเจริญเติบโตทุกส่วนของต้นไม้ แม้จะมีระยะเวลาการเจริญเติบโตที่นาน จากงานวิจัยนี้ได้ใช้ฟังก์ชันการเจริญเติบโตเพื่อพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน

2.1.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวัน

Mirzabe, Khazaei และ Chegini (2012) ได้แบ่งพื้นที่ของดอกทานตะวันออกเป็น 3 บริเวณ เพื่อศึกษาสมบัติทางกายภาพของเมล็ดดอกทานตะวัน ได้แก่

- ความสูง (length, L)
- ความหนา (thickness, T)
- ความกว้าง (width, W)
- ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ยทางเรขาคณิต (geometric mean diameter, D) นั่นคือ $D = \sqrt[3]{LWT}$
- พื้นที่ผิว (surface area, S) นั่นคือ $S = \pi D^2$
- ปริมาตรเมล็ดของดอกทานตะวัน นั่นคือ $V = \pi D^3/6$

ในดอกทานตะวัน 3 สายพันธุ์ ได้แก่ Mikhi, Sirena และ Songhori

ซึ่งทำการสุ่มเมล็ดเพื่อเก็บข้อมูลทางกายภาพในแต่ละส่วนที่เกิดจากการแบ่งบริเวณ เพื่อหาค่าความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ยทางเรขาคณิต พื้นที่ผิวและปริมาตรเมล็ดของดอกทานตะวัน พบว่า เมื่อความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเพิ่มขึ้น ส่งผลให้ค่าความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ยทางเรขาคณิต พื้นที่ผิวและปริมาตรเมล็ดของดอกทานตะวันเพิ่มขึ้น ส่วนบริเวณตรงกลางจะมีเมล็ดกลวง (เมล็ดที่ไม่มีเนื้อเมล็ดอยู่ด้านใน) มากกว่าบริเวณอื่นและบริเวณนอกสุดมีขนาดเมล็ดใหญ่สุด จากงานวิจัยนี้ได้ใช้หลักการแบ่งบริเวณของดอกทานตะวันและนำสูตรของเขามาเปรียบเทียบเพื่อหาปริมาตรที่ใกล้เคียงกับปริมาตรจากการถ่วงน้ำ

2.1.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการบรรจุเมล็ดดอกทานตะวัน

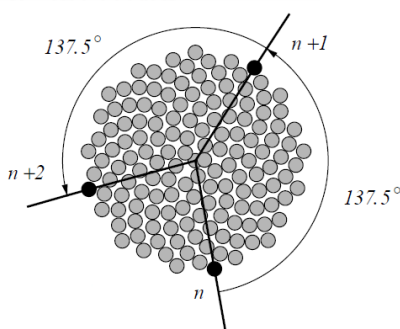
Graham (1966) ศึกษาความหนาแน่นของการบรรจุวงกลม n วง ที่เท่ากันทุกประการในวงกลมใหญ่ที่มีรัศมี 1 หน่วย และได้ให้นิยามการบรรจุวงกลมที่เหมาะสม (optimal packing) คือการวางวงกลม n วงลงในวงกลมใหญ่ที่มีรัศมี 1 หน่วย โดยไม่ให้วงกลมเล็กวางซ้อนทับกัน นอกจากนี้สามารถหาความหนาแน่น (ประสิทธิภาพ) ของการบรรจุ (η) ด้วยอัตราส่วนผลรวมของพื้นที่วงกลมเล็กทั้งหมดหารด้วยพื้นที่วงกลมใหญ่ นั่นคือ

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{A}$$

เมื่อ a_i คือ พื้นที่ของวงกลมเล็กวงที่ i โดยที่ $1 \leq i \leq n$ และ A คือ พื้นที่ของวงกลมใหญ่ จากงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีการหาความหนาแน่นของการบรรจุเมล็ด

Vogel (1978) ศึกษาการบรรจุเมล็ดดอกทานตะวันพร้อมได้สร้างแบบจำลองการบรรจุเมล็ดใน 2 มิติ โดยสร้างเงื่อนไข 2 ข้อ

1. กำหนดให้เมล็ดดอกทานตะวันมีพื้นที่หน้าตัดเท่ากัน เท่ากับ π ตารางหน่วย
2. กำหนดให้มุมระหว่างเมล็ดที่ n และ $n+1$ มีมุมเท่ากับด้วยมุม 137.5° ดังรูปที่ 1.5



รูปที่ 2.1 สมมติฐานข้อที่ 2 ของ Vogel นั่นคือ มุมระหว่างเมล็ดที่ 1 กับเมล็ดที่ 2 เมล็ดที่ 2 กับเมล็ดที่ 3 และเมล็ดที่ 3 กับเมล็ดที่ 4 จนถึงเมล็ดที่ n กับ $n+1$ เป็นมุม 137.5°

ที่มา : Vogel, 2012

จากสมมติฐานข้อที่หนึ่ง ถ้านำเมล็ดจำนวน n เมล็ด วางบนดอกทานตะวันจะได้ว่าจะมีพื้นที่ทั้งหมดเป็น $n\pi$ ตารางหน่วย ดังนั้นจะมีรัศมีเป็น \sqrt{n} หน่วย และจากสมมติฐานข้อที่สอง จะมีมุมระหว่างเมล็ดที่ 0 ถึง n เป็น $2\pi n\phi$ เมื่อ ϕ เป็นมุมใด ๆ จากการสร้างแบบจำลองดังกล่าวพบว่ามุม

ที่ดีที่สุดและใกล้เคียงกับการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวันเป็นมุม 137.5° เรียกว่า มุมฟีโบนัชชี
แบบจำลองการบรรจุเมล็ดของ Vogel คือ

$$r \sim \sqrt{n}$$

$$\phi = n \times \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

เมื่อ n คือ จำนวนเมล็ด

r คือ ระยะทางระหว่างเมล็ดที่ 0 กับ n

จากงานวิจัยนี้ได้ใช้ ใช้หลักการของเขาเพื่อสร้างแบบจำลองของการจัดเรียงเมล็ดดอกทานตะวัน

2.2 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

2.2.1 สมการถดถอยแบบพหุนาม

การถดถอยแบบพหุนาม (polynomial regression) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม y_i และตัวแปรอิสระ x_i อีกทั้งเป็นเครื่องมือสำหรับหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันพหุนามดีกรี n ซึ่งเขียนอยู่ในรูป (Patrick, and Willi, 2008)

$$y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m + \varepsilon_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.1)$$

เมื่อ y_i คือ ค่าของ y ตัวที่ i

x_i คือ ค่าของ x ตัวที่ i

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ คือ สัมประสิทธิ์

ε_i คือ ความผิดพลาดของข้อมูล

จากสมการ (2.1) สามารถเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } m, n \in \mathbb{Z} \text{ และ } m < n$$

นั่นคือ

$$\vec{y} = X\vec{a} + \vec{\varepsilon}$$

ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนาม คือ

$$\vec{a} = X^T X^{-1} X^T \vec{y} \quad (2.2)$$

2.2.2 การถดถอยแบบไม่เชิงเส้น

การถดถอยแบบไม่เชิงเส้น (non-linear regression) คือการสร้างสมการที่มีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม y และตัวแปรอิสระ x ซึ่งเป็นข้อมูลที่ไม่ได้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น ซึ่งการถดถอยแบบไม่เชิงเส้นมี 2 แบบ คือ สามารถแปลงเป็นเชิงเส้นได้และไม่สามารถแปลงเป็นเชิงเส้น (Patrick, and Willi, 2008)

สำหรับการถดถอยแบบไม่เชิงเส้นเขียนอยู่ในรูป

$$y_i = f(x_i, \alpha, \beta) + \varepsilon_i \quad (2.3)$$

สมการ (2.3) สามารถเขียนใหม่ เป็น

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \quad (2.4)$$

จาก $f(x_i)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของ Taylor's series จะได้ว่า

$$f(x_{i,j+1}) = f(x_{i,j}) + \frac{\partial f(x_{i,j})}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial f(x_{i,j})}{\partial \beta} \Delta \beta \quad (2.5)$$

นำสมการ (2.5) แทนในสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$y_i = f(x_{i,j}) + \frac{\partial f(x_{i,j})}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial f(x_{i,j})}{\partial \beta} \Delta \beta + \varepsilon_i \quad (2.6)$$

จัดรูปสมการ (2.6) ใหม่ จะได้ว่า

$$y_i - f(x_{i,j}) = \frac{\partial f(x_{i,j})}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial f(x_{i,j})}{\partial \beta} \Delta \beta + \varepsilon_i \quad (2.7)$$

จากสมการ (2.7) สามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$[D] = [Z][a] + [\varepsilon] \quad (2.8)$$

เมื่อ

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} x_1 & \frac{\partial f}{\partial \beta} x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} x_2 & \frac{\partial f}{\partial \beta} x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} x_n & \frac{\partial f}{\partial \beta} x_n \end{bmatrix} \text{ และ } [D] = \begin{bmatrix} y_1 - f x_1 \\ y_2 - f x_2 \\ \vdots \\ y_n - f x_n \end{bmatrix}$$

ดังนั้นพารามิเตอร์หาได้จาก

$$[a] = [Z^T Z]^{-1} [Z^T D] \quad (2.9)$$

เริ่มด้วยกำหนด α_i และ β_i

จะได้ว่า $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \Delta\alpha$ และ $\beta_{i+1} = \beta_i + \Delta\beta$

ดำเนินการจนกว่าจะได้

$$\left| \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{\alpha_j} \right| \times 100 \leq \varepsilon_1$$

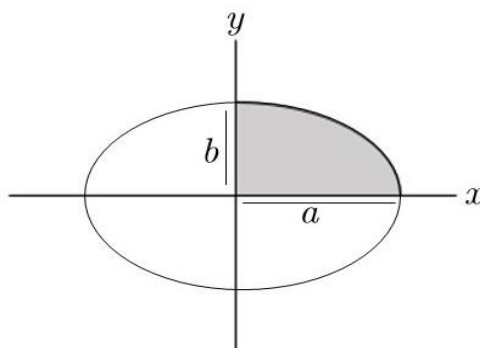
$$\left| \frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{\beta_j} \right| \times 100 \leq \varepsilon_2$$

2.2.3 การพื้นที่ของวงรี

วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะห่างจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง และสามารถเขียนสมการทั่วไปของวงรี คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.10)$$

จากสมการ (2.10) มีลักษณะกราฟดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ลักษณะกราฟของสมการวงรี

จัดสมการ (2.10) ใหม่ จะได้ว่า

$$y = \pm \sqrt{\frac{(ab)^2 - (bx)^2}{a^2}} \quad (2.11)$$

เนื่องจาก ต้องการหาพื้นที่ของวงรี โดยพิจารณาจตุภาคที่ 1 ส่งผลให้ค่า x และ y เป็น บวก และอินทิเกรตอยู่ในช่วง $[0, a]$ จะได้ว่า

$$\int_0^a \sqrt{\frac{(ab)^2 - (bx)^2}{a^2}} dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

ให้ $x = a \sin \theta$ จะได้ว่า $dx = a \cos \theta d\theta$

พิจารณาช่วงอินทิเกรต $x = 0 = a \sin \theta \Rightarrow \theta = 0, x = a = a \sin \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \sqrt{\frac{(ab)^2 - (bx)^2}{a^2}} dx &= \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2} (a \sin \theta) dx \\
 &= \frac{b}{a} a^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (a \sin \theta)^2} \cos \theta dx \\
 &= ba \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^2 dx \\
 &= ba \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) dx \\
 &= \frac{ba}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{ba\pi}{4}
 \end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่ทั้งหมดของวงรี คือ

$$4 \times \text{พื้นที่จตุภาคที่ 1} = 4 \frac{ba\pi}{4} = ba\pi \quad (2.12)$$

2.2.4 กำลังสองน้อยที่สุด

กำลังสองน้อยที่สุด (least square method) เป็นวิธีการตรวจสอบการประมาณค่าของข้อมูลระหว่างสองชุดข้อมูลได้แก่ ข้อมูลจริงกับข้อมูลจากแบบจำลอง เขียนอยู่ในรูป (Julian, 2005) คือ

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.13)$$

เมื่อ R^2 คือ ประสิทธิภาพของแบบจำลอง

y_i คือ ข้อมูลจริงที่ i

\hat{y}_i คือ ข้อมูลเกิดจากการประมาณด้วยแบบจำลองที่ i

\bar{y} คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลจริง

2.2.5 การหมุนฟังก์ชันแบบเปลือกทรงกระบอก

มีนิยามคือ

$$V = \int_a^b 2\pi (|k - x|)(f(x) - g(x)) dx \quad (2.14)$$

เมื่อ $f(x)$ คือ ฟังก์ชัน f

$g(x)$ คือ ฟังก์ชัน g

a คือ ขอบเขตเริ่มต้นของการหมุนฟังก์ชัน

b คือ ขอบเขตปลายของการหมุนฟังก์ชัน

k คือ แกนหมุนฟังก์ชัน โดยที่ $k \leq a$ หรือ $k \geq b$

V คือ ปริมาตรจากการหมุน

2.2.6 สมการแยกตัวแปรได้

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและระดับชั้นหนึ่งมีรูปแบบทั่วไป (สำเร็จ, 2555) คือ

$$F(x)G(y) dx + f(x)g(y) dy = 0 \quad (2.15)$$

หรือ

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad (2.16)$$

จะเรียกสมการ (2.16) ว่า สมการแยกตัวแปรได้ (variable separable equation)

ดังนั้น ถ้าคูณสมการ (2.15) ด้วย $\frac{1}{f(x)G(y)}$ จะได้ว่า

$$\frac{F(x)}{f(x)} dx + \frac{g(y)}{G(y)} dy = 0 \quad (2.17)$$

จาก สมการ (2.17) กำหนดให้ $M(x) = \frac{F(x)}{f(x)}$ และ $N(y) = \frac{g(y)}{G(y)}$ จะได้ว่า

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (2.18)$$

เมื่อ $M(x)$ คือ ฟังก์ชันของ x เพียงอย่างเดียว และ $N(y)$ คือ ฟังก์ชันของ y เพียงอย่าง

เดียว

ดังนั้น สมการ (2.17) มีผลเฉลยทั่วไป คือ

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = c \quad \text{เมื่อ } c \text{ คือ ค่าคงที่}$$

2.2.7 การสุ่มอย่างง่าย

การสุ่มอย่างง่าย (simple random sampling) คือ การเลือกกลุ่มตัวอย่างจากประชากรทั้งหมด ดังสูตรต่อไปนี้ (สุเมธ, 2550)

$$n = \frac{NZ^2s^2}{Ne^2 + Z^2s^2} \quad (2.19)$$

เมื่อ n คือ จำนวนดอกทานตะวันที่สุ่ม

N คือ จำนวนดอกทานตะวันทั้งหมด

e คือ ค่าความผิดพลาดของการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน

s คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

s^2 คือ ความแปรปรวน

Z คือ ระดับความเชื่อมั่น

บทที่ 3

วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการดำเนินงาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงวัสดุและอุปกรณ์ได้แก่ เวอร์เนีย คาลิปเปอร์ โปรแกรม MAPLE โปรแกรม LAZARUS และปิกเกอร์ รวมทั้งวิธีการดำเนินงานวิจัยในแต่ละวิธีและแต่ละขั้นตอน ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1 วัสดุและอุปกรณ์

3.1.1 เวอร์เนีย คาลิปเปอร์ (vernier calipers) เป็นเครื่องมือวัดความยาวอย่างละเอียดที่ใช้หลักของเวอร์เนียสเกล โดยการแบ่งสเกลตามแนวยาวคล้ายไม้บรรทัดและมีการแบ่งสเกลรองโดยการใส่สเกลเลื่อนเพื่อให้สามารถวัดความยาวได้ละเอียดถึง 0.001 ซม. ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 เครื่องมือวัดขนาดของเมล็ดทานตะวันคือ เวอร์เนียคาลิปเปอร์

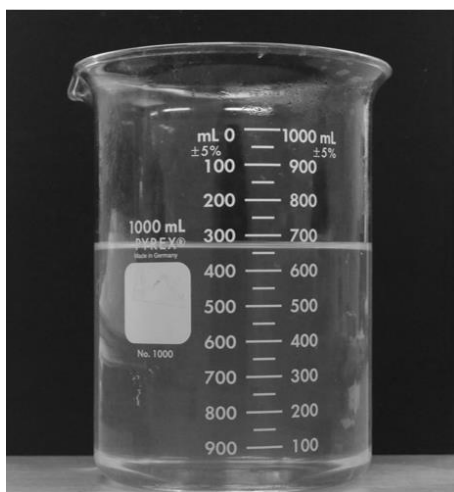
3.1.2 โปรแกรม LAZARUS เป็นโปรแกรมกราฟิกในการพัฒนาโปรแกรมต่าง ๆ โดยใช้ภาษาปาสคาลเป็นภาษาหลัก เรานำโปรแกรม LAZARUS มาสร้างโปรแกรมวิเคราะห์ฟักต๋าก X และ Y เพื่อมาสร้างฟังก์ชันพหุนามตามรูปภาพที่เราต้องการดังรูปที่ 3.2

3.1.3 โปรแกรม MAPLE เป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ที่มีความสามารถคำนวณเชิงตัวเลขและแสดงผลอยู่ในรูปจำนวน กราฟ 2 มิติ และกราฟ 3 มิติ นอกจากนี้สามารถสร้างโปรแกรมการประมวลผลข้อมูลและสร้างฟังก์ชันต่าง ๆ ตามที่ต้องการ สำหรับงานวิจัยนี้เราใช้โปรแกรม MAPLE เพื่อหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามที่เป็นฟังก์ชันส่วนโค้งดอกทานตะวันและฐานรองรับเมล็ดของดอกทานตะวัน



รูปที่ 3.2 โปรแกรมวิเคราะห์จุด X และ Y ของรูปภาพ

3.1.4 บีกเกอร์ (beaker) เป็นเครื่องมือทางวิทยาศาสตร์ที่ใช้ในห้องปฏิบัติการ มีรูปร่างเป็นทรงกระบอกก้นแบน ขนาดของบีกเกอร์ที่พบได้โดยทั่วไปจะมีตั้งแต่ 50 มิลลิลิตร ไปจนถึง 5 ลิตร ซึ่งมีขีดบอกปริมาตรไว้ ในงานวิจัยนี้ใช้เพื่อนำเมล็ดทานตะวันมาถ่วงน้ำเพื่อหาปริมาตรของเมล็ดทานตะวัน ดังรูปที่ 3.3



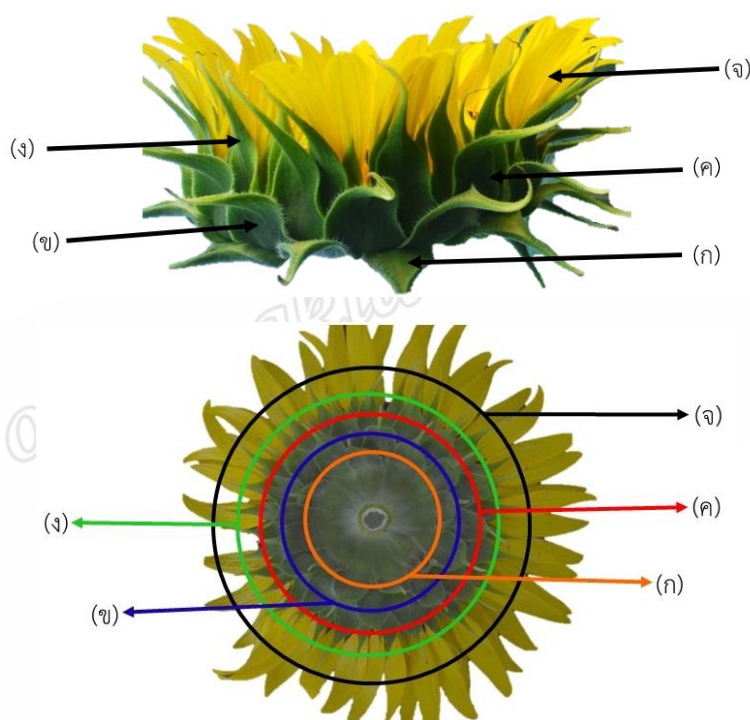
รูปที่ 3.3 บีกเกอร์ที่ใช้ในการหาปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวัน

3.2 วิธีการดำเนินงาน

ในการวิจัยนี้เราจะศึกษาแบบรูปที่เกิดขึ้นกับดอกทานตะวัน โดยนับจำนวนกลีบของดอกทานตะวันและจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวัน นอกจากนี้ศึกษาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเพื่อพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวันและปริมาตรเมล็ดของดอกทานตะวันที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางแตกต่างกัน

3.2.1 การนับจำนวนกลีบของดอกทานตะวัน

การศึกษาจำนวนกลีบดอกทานตะวัน โดยนับจำนวนกลีบดอกของดอกทานตะวันในแต่ละชั้น ซึ่งดอกทานตะวันมีกลีบดอกทั้งหมดจำนวน 5 ชั้น ดังรูปที่ 3.4 สำหรับชั้น 1-4 จะมีลักษณะโครงสร้างคล้ายกัน และชั้น 5 จะเป็นชั้นที่มีสีเหลือง อย่างไรก็ตาม ชั้นที่ 1 เป็นชั้นที่มีขนาดกลีบดอกที่ใหญ่ที่สุด นอกจากนี้เราสามารถแบ่งกลีบของดอกทานตะวันแต่ละชั้นโดยการสังเกตการวางของกลีบดอกที่วางไม่ทับซ้อนกันหรืออาจจะวางซ้อนทับกันเพียงเล็กน้อย ซึ่งสามารถพิจารณาแต่ละชั้นดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 กลีบดอกและกลีบเลี้ยงของดอกทานตะวัน (ก) กลีบดอกชั้นที่ 1 (ข) กลีบดอกชั้นที่ 2 (ค) กลีบดอกชั้นที่ 3 (ง) กลีบดอกชั้นที่ 4 (จ) กลีบดอกชั้นที่ 5

3.2.2 การนับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวัน

การศึกษาจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวัน โดยนับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันในแต่ละทิศทาง นั่นคือ ทิศตามเข็มนาฬิกา และทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 1.2

3.2.3 การพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน

การพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวันศึกษาโดยการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันตั้งแต่ระยะที่เริ่มเห็นดอกทานตะวันชัดเจน (ตั้งแต่วันที่ 46 ถึง วันที่ 110 ของการปลูก) มีรายละเอียดดังนี้

3.2.3.1 กำหนดกลุ่มตัวอย่าง

3.2.3.1.1 กำหนดจำนวนดอกทานตะวันที่จะสุ่มเพื่อวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันโดยการสุ่มอย่างง่าย (simple random sampling) (สุเมธ, 2550) ดังสูตรต่อไปนี้

$$n = \frac{NZ^2s^2}{Ne^2 + Z^2s^2} \quad (3.1)$$

เมื่อ n คือ จำนวนดอกทานตะวันที่จะสุ่ม

N คือ จำนวนดอกทานตะวันทั้งหมด

e คือ ค่าความผิดพลาดของการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน

s คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

s^2 คือ ความแปรปรวน

Z คือ ระดับความเชื่อมั่น

ดังนั้นสามารถหาค่า s^2 ได้จากการเก็บข้อมูลรอบแรก ซึ่ง s มีสูตรดังนี้

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

เมื่อ N คือ จำนวนของข้อมูลทั้งหมด

x_i คือ ข้อมูลตัวที่ i

\bar{x} คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมด

ดังนั้น จากการสำรวจรอบแรกจะได้ค่า $s = 0.4784$

หมายเหตุ การสำรวจรอบแรกของการเก็บข้อมูลความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเพื่อหาค่า s เป็นการเก็บข้อมูลจากดอกทานตะวันจำนวน 4 ต้น ($N = 4$) ซึ่งได้ค่า $\bar{x} = 5.67$

3.2.3.1.2 พิจารณาระดับความเชื่อมั่นที่ 95% นั่นคือ $Z = 1.96$ และกำหนดความผิดพลาดของความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น 0.5 เซนติเมตร ($e = 0.5$) ซึ่งจำนวนดอกทานตะวันทั้งหมดเป็น 40 ต้น ($N = 40$) แล้วนำมาแทนในสมการ (3.1) จะได้

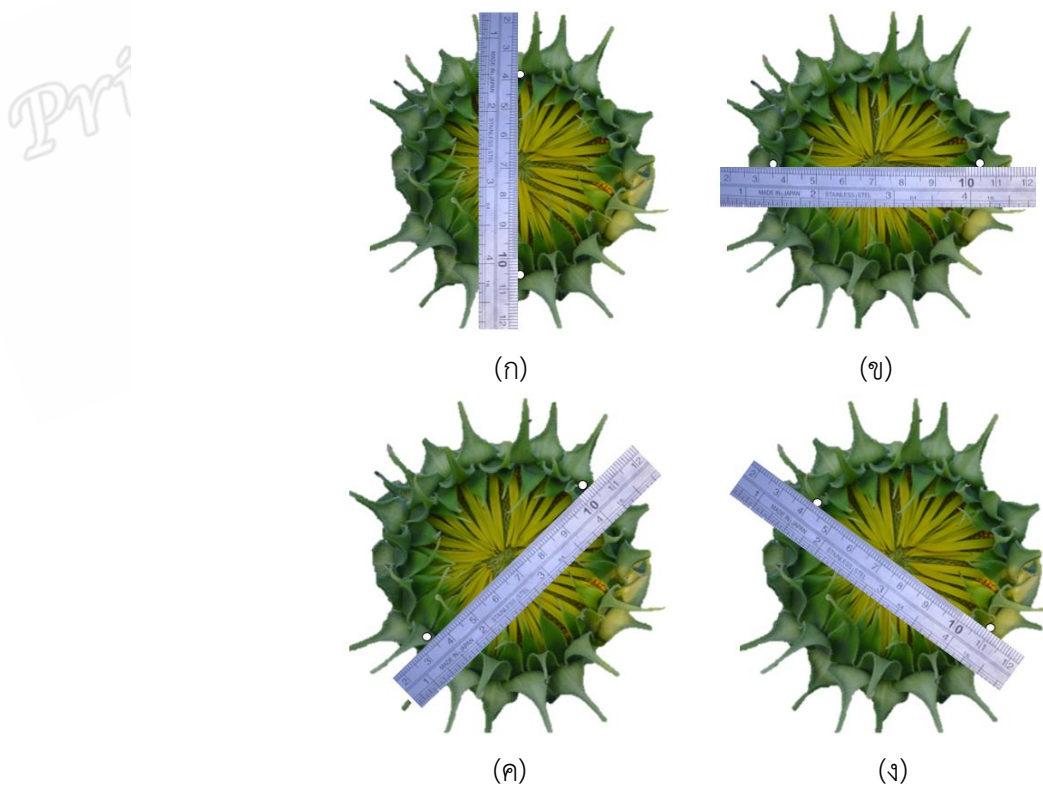
$$n = \frac{40(1.96)^2(0.4784)^2}{40(0.5)^2 + (1.96)^2(0.4784)^2}$$

$$= 3.2326$$

นั่นคือ จะต้องใช้ขนาดตัวอย่างของดอกทานตะวันที่จะวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของแต่ละวันอย่างน้อย 4 ต้น

3.2.3.2 วัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันตั้งแต่ระยะที่เริ่มเห็นดอกทานตะวันชัดเจน (ตั้งแต่วันที่ 46 ถึง วันที่ 110 ของการปลูก)

3.2.3.2.1 วัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันในแต่ละต้นจำนวน 4 ครั้งดังรูปที่ 3.5 แล้วนำมาหาค่าเฉลี่ยของการวัดทั้ง 4 ครั้ง จะได้ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ยของดอกทานตะวันต้นนั้น



รูปที่ 3.5 ทิศทางการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันในแต่ละดอก

3.2.3.2.2 นำค่าเฉลี่ยของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันในแต่ละต้นมาหาค่าเฉลี่ยจะได้ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ยในวันนั้น ๆ ทำแบบนี้ตั้งแต่วันที่ 46 จนถึงวันที่ 110 ของการปลูก

3.2.3.3 นำข้อมูลมาสร้างแบบจำลองการพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวันโดยใช้ฟังก์ชันการเจริญเติบโต นั่นคือ

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(1 - \frac{y}{u} \right) \quad (3.2)$$

เมื่อ α คือ อัตราการเจริญเติบโต

y คือ ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน (ซม.)

u คือ ความยาวสูงสุดของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน (ซม.)

$\frac{dy}{dt}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความยาวสูงสุดของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันขึ้นอยู่กับเวลา (วัน)

จากสมการ (3.2) สามารถจัดรูปสมการใหม่ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{y \left(1 - \frac{y}{u} \right)} = \alpha dt \quad (3.3)$$

หาผลเฉลยทั่วไปโดยการปริพันธ์ทั้งสองข้าง นั่นคือ

$$\int \frac{1}{y \left(1 - \frac{y}{u} \right)} dy = \int \alpha dt$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปโดยของสมการ (3.2) นั่นคือ

$$y = \frac{u}{1 + \beta e^{-\alpha t}} \quad \text{เมื่อ } \beta \text{ คือ ค่าคงที่} \quad (3.4)$$

จากสมการ (3.4) มีค่าพารามิเตอร์ 2 ตัว นั่นคือ β และ α ซึ่งค่า α เป็นอัตราการเติบโตของดอกทานตะวันและ β เป็นค่าคงตัวใด ๆ นอกจากนี้การเลือกค่า β และ α ใช้วิธีการถดถอยแบบไม่เชิงเส้น

หมายเหตุ การเพาะปลูกครั้งนี้จะควบคุม การให้ปุ๋ย การรดน้ำและระยะห่างการเพาะปลูก

3.2.4 การหาปริมาตรเมล็ดของดอกทานตะวัน

การศึกษาปริมาตรเมล็ดดอกทานตะวันทำได้ 3 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 นำเมล็ดของดอกทานตะวันมาถ่วงน้ำ

วิธีที่ 2 หาปริมาตรเมล็ดในแต่ละบริเวณด้วยวิธีการต่าง ๆ ได้แก่ ทรงกระบอกหน้าตัดวงรี

ทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม สูตรของ Mirzabe และพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม

วิธีที่ 3 หาปริมาตรเมล็ดทั้งดอกทานตะวันด้วยวิธีการต่าง ๆ ได้แก่ ทรงกระบอกหน้าตัดวงรี

ทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม สูตรของ Mirzabe พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมและการหมุน

แบบเปลือกทรงกระบอก

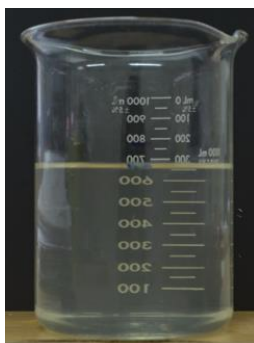
ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

3.2.4.1 วิธีที่ 1 (ปริมาตรจากการถ่วงน้ำ)

การหาปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวันจะอาศัยพื้นฐานของหลักอาร์คิมิดีส ซึ่งได้กล่าวว่า “ปริมาตรของวัตถุใด ๆ จะมีค่าเท่ากับปริมาตรของเหลวที่เปลี่ยนแปลง ถึงแม้วัตถุจะจมหรือลอยเพียงบางส่วน” (คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์, 2549) ดังนั้น การหาปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวันหาโดยนำเมล็ดของดอกทานตะวันในแต่ละบริเวณ (การแบ่งบริเวณจะขอกว่าที่หลัง) มาถ่วงน้ำแล้วสังเกตปริมาณน้ำที่เพิ่มขึ้นจากเดิมดังรูปที่ 3.6 และเนื่องจากบีกเกอร์มีลักษณะเป็นทรงกรงกระบอกจะได้ว่าปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวัน คือ

$$V = \pi r^2 \Delta h$$

เมื่อ Δh คือ อัตราการเปลี่ยนของความสูงน้ำที่เพิ่มขึ้นเมื่อเอาวัตถุเอามาถ่วง



(ก)



(ข)

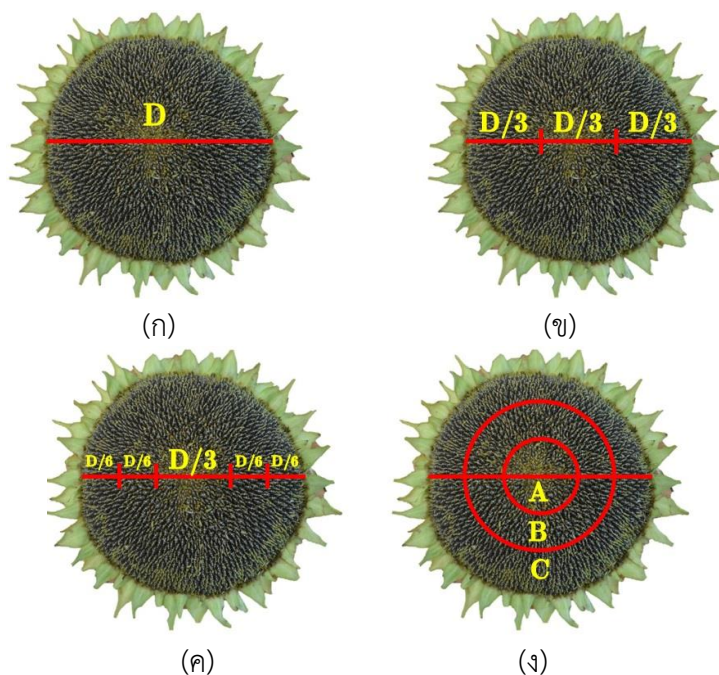
รูปที่ 3.6 การหาปริมาตรเมล็ดของเมล็ดดอกทานตะวันโดยการถ่วงน้ำในบีกเกอร์ (ก) ความสูงของน้ำขณะยังไม่ถ่วงเมล็ด (ข) ความสูงของน้ำขณะถ่วงเมล็ด

ดังนั้นปริมาตรของเมล็ดทั้งดอกทานตะวัน คือ นำปริมาตรเมล็ดในแต่ละพื้นที่มารวมกัน

หมายเหตุ เนื่องจากการถ่วงน้ำใช้พลาสติกเดิม ส่งผลให้บางครั้งพลาสติกอาจไม่แห้งสนิทและอาจมีความผิดพลาดเกิดขึ้น

3.2.4.2 วิธีที่ 2 (ปริมาตรเมล็ดในแต่ละบริเวณ)

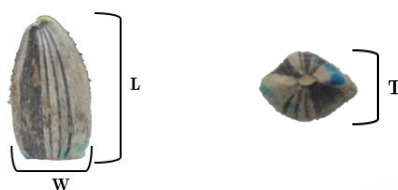
3.2.4.2.1 ทำการวัดความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันด้วยเชือกไนลอนจำนวนสี่ทีกแล้วหาค่าเฉลี่ยของความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันแล้วทำการแบ่งความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันออกแบ่งสามส่วน นั่นคือ บริเวณที่จุดศูนย์กลาง บริเวณส่วนกลาง และบริเวณขอบนอก โดยมีวิธีการแบ่ง คือ แบ่งความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง (D) ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน จะได้ว่าแต่ละส่วนมีความยาวเท่ากับ $D/3$ หน่วย ดังรูปที่ 3.7(ข) หลังจากนั้นแบ่งส่วนข้าง ๆ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันได้แต่ละส่วนมีความยาวเท่ากับ $D/6$ หน่วย ดังรูปที่ 3.7(ค) และสร้างวงกลมตามที่แบ่งจากรูปที่ 3.7(ค) จะได้ดังรูปที่ 3.7(ง)



รูปที่ 3.7 ขั้นตอนการแบ่งบริเวณของดอกทานตะวันและแสดงบริเวณแต่ละส่วน นั่นคือ (ก) แสดงความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง (D) (ข) แบ่งความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน จะได้ว่าแต่ละส่วนมีความยาวเท่ากับ $D/3$ หน่วย (ค) แบ่งส่วนข้าง ๆ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน ได้แต่ละส่วนมีความยาวเท่ากับ $D/6$ หน่วย (ง) สร้างวงกลมตามที่แบ่งจะได้บริเวณทั้งหมด 3 ส่วน ได้แก่ A คือ บริเวณที่จุดศูนย์กลาง, B คือ บริเวณส่วนกลางและ C และบริเวณขอบนอก ที่มา : หลักการแบ่งจาก Mirzabe *et al.*, 2012

3.2.4.2.2 ทำการสุ่มเมล็ดในแต่ละบริเวณ ดังรูปที่ 3.7(ง) (บริเวณ A, B, C) ด้วยวิธีการเลือกตัวอย่างสุ่มอย่างง่ายดังสมการ (3.1)

3.2.4.2.3 ทำการวัดความยาว ความกว้าง ความหนาของแต่ละเมล็ดดังรูปที่ 3.8 ที่สุ่มในแต่ละบริเวณ ดังรูปที่ 3.7(ง) (พื้นที่ A, B, C) ด้วยเครื่องมือเวอร์เนียคาลิเปอร์ ที่มีความละเอียด 0.001 เซนติเมตร ดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.8 ค่าต่าง ๆ ของเมล็ดทานตะวัน เมื่อ W คือ ความกว้าง, L คือ ความยาวและ T คือ ความหนา



รูปที่ 3.9 การวัดค่าต่าง ๆ ของเมล็ดดอกทานตะวันด้วยเวอร์เนีย คาลิเปอร์

3.2.4.2.4 หาค่าเฉลี่ยความยาว ความกว้างและความหนาในแต่ละบริเวณดังรูปที่ 3.7(ง) (บริเวณ A, B, C) เพื่อหาปริมาตรด้วยวิธีการดังนี้

3.2.4.2.4.1 หาปริมาตรด้วยสูตรของ Mirzabe ดังนี้

$$V = \frac{\pi}{6}(LWT)$$

3.2.4.2.4.2 หาปริมาตรด้วยทรงกระบอกหน้าตัดวงรี ดังรูปที่ 3.10 ดังนี้

$$V = \frac{\pi}{4}(LWT)$$



รูปที่ 3.10 แบบจำลองปริมาตรเมล็ดด้วยทรงกระบอกหน้าตัดวงรี

3.2.4.2.4.3 หาปริมาตรด้วยทรงกระบอกหน้าตัดวงกลมดังรูปที่ 3.11 ดังนี้

$$V = \frac{\pi}{4}(LT^2)$$



รูปที่ 3.11 แบบจำลองปริมาตรเมล็ดด้วยทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม

3.2.4.2.4.4 หาปริมาตรด้วยพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมดังรูปที่ 3.12 ดังนี้

$$V = \frac{1}{6}(LW^2)$$



รูปที่ 3.12 แบบจำลองปริมาตรเมล็ดด้วยพีระมิดหน้าตัดสี่เหลี่ยม

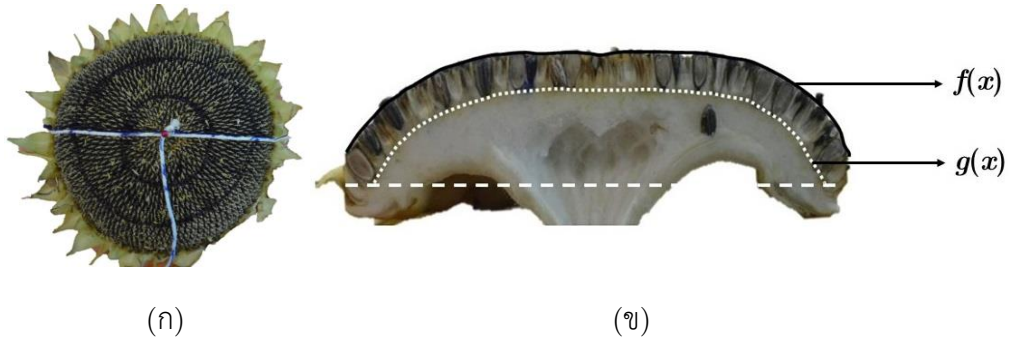
3.2.4.3 วิธีที่ 3 (ปริมาตรเมล็ดทั้งดอกทานตะวัน)

การหาปริมาตรเมล็ดทั้งดอกทานตะวันมี 2 วิธี ดังนี้

3.2.4.3.1 นำปริมาตรที่ได้จากการคำนวณด้วยการประมาณค่าของวิธีการต่าง ๆ ในแต่ละบริเวณ (บริเวณ A, B, C) มารวมกัน ซึ่งมีด้วยกัน 4 วิธี ดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.2.4.2

3.2.4.3.2 หาปริมาตรด้วยการหมุนฟังก์ชันแบบเปลือกทรงกระบอก (cylindrical method) มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

- นำดอกทานตะวันมาผ่ากลางและทำเป็นภาพของภาคตัดขวางได้ดังรูปที่ 3.13(ก) จากภาพของภาคตัดขวางตามรูปที่ 3.13(ข) จะมีส่วนโค้งสองส่วน ประกอบด้วย ส่วนโค้งบนเมล็ดของดอกทานตะวันให้เป็น $f(x)$ และส่วนโค้งที่ฐานรองเมล็ดให้เป็น $g(x)$ ดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 ภาพของภาคตัดขวางดอกทานตะวัน (ก) แสดงส่วนหน้าของดอกทานตะวัน (ข) แสดงภาพของภาคตัดขวางดอกทานตะวัน เส้นที่บหรือ $f(x)$ แสดงส่วนโค้งบนเมล็ดของดอกทานตะวันและเส้นประหรือ $g(x)$ แสดงส่วนโค้งของฐานรองเมล็ด

- นำภาพของภาคตัดขวางมาวิเคราะห์พิกัดฉาก X และ Y ตามส่วนโค้งทั้งสองด้วยโปรแกรมวิเคราะห์จุด X และ Y ดังรูปที่ 3.2
- นำจุดที่ได้จากการวิเคราะห์พิกัดฉาก X และ Y มาสร้างฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ ด้วยการถดถอยแบบพหุนาม แล้วนำฟังก์ชันที่ได้ มาตรวจสอบความแม่นยำด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด นั่นคือ

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

เมื่อ R^2 คือ ประสิทธิภาพของแบบจำลองการเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน

y_i คือ ข้อมูลความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันที่เก็บในวันที่ i

\hat{y}_i คือ ข้อมูลความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันที่เกิดจากการประมาณด้วยแบบจำลองในวันที่ i

\bar{y} คือ ค่าเฉลี่ยความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันที่เก็บในวันที่ i

- นำฟังก์ชันที่สร้างขึ้นมา หาปริมาตรด้วยการหมุนแบบเปลือกทรงกระบอกโดยใช้โปรแกรม Maple เพื่อหาค่าปริมาตร ซึ่งการหมุนฟังก์ชันแบบเปลือกทรงกระบอกมีนิยามคือ

$$V = \int_a^b 2\pi (|k - x|)(f(x) - g(x)) dx$$

เมื่อ $f(x)$ คือ ส่วนโค้งบนเมล็ดของดอกทานตะวัน

$g(x)$ คือ ส่วนโค้งฐานรองเมล็ดของดอกทานตะวัน

a คือ ขอบเขตเริ่มต้นของการหมุนฟังก์ชัน

b คือ ขอบเขตปลายของการหมุนฟังก์ชัน

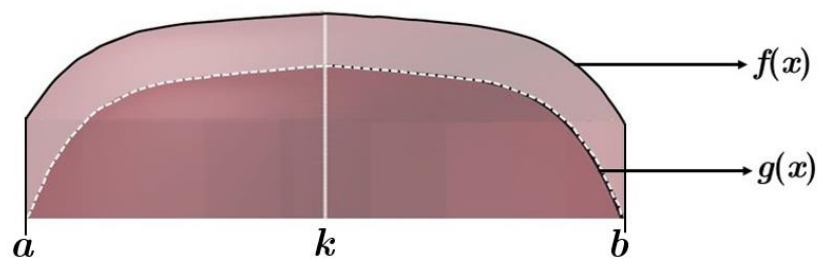
k คือ แกนหมุนฟังก์ชัน หาได้จาก $\left(\frac{a+b}{2}\right)$

V คือ ปริมาตรเมล็ดของดอกทานตะวัน

เนื่องจากค่า $a < k < b$ ทำให้ไม่สามารถหมุนฟังก์ชันครบรอบได้ ดังนั้นการหาปริมาตรด้วยการหมุนฟังก์ชันหาได้จากหมุนฟังก์ชันจาก a ถึง k หมุนรอบแกน $x = k$ และจาก k ถึง b หมุนรอบแกน $x = k$ ดังนั้นปริมาตรที่เกิดจากหมุนแบบเปลือกทรงกระบอก คือ ค่าเฉลี่ยของการหมุนฟังก์ชันจาก a ถึง k และจาก k ถึง b หมุนรอบแกน $x = k$ ดังรูปที่ 3.14



(ก)



(ข)

รูปที่ 3.14 ภาพเปรียบเทียบระหว่างภาพจริงกับภาพที่เกิดจากการหมุนฟังก์ชัน (ก) ภาพจริงของภาคตัดขวางของดอกทานตะวัน (ข) ภาพที่เกิดจากการหมุนฟังก์ชันด้วยเปลือก

3.2.5 การบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวัน

การบรรจุอย่างเหมาะสม (optimal packing) เป็นการบรรจุสิ่งของ n สิ่งที่มีขนาดแตกต่างกันมาบรรจุในบรรจุภัณฑ์ที่มีขนาดใหญ่กว่า เช่น การบรรจุส้มในกระเช้าผลไม้ การบรรจุสี่เหลี่ยมขนาดต่าง ๆ ในสี่เหลี่ยมใหญ่ การบรรจุวงกลมเล็กในวงกลมใหญ่ เป็นต้น ซึ่งการศึกษานี้จะสนใจการบรรจุวงกลมเล็กในวงกลมใหญ่

สำหรับการบรรจุวงกลมในวงกลมใหญ่เป็นการวางวงกลมเล็ก n วงที่มีขนาดเท่ากัน (นั่นคือมีรัศมี r หน่วย) วางลงในวงกลมใหญ่ที่มีรัศมี R หน่วย ซึ่งลักษณะการวางของวงกลมเล็กต้องวางไม่ซ้อนทับกัน โดยมองวงกลมใหญ่เป็นดอกทานตะวันและวงกลมเล็ก n วง เป็นเมล็ดของดอกทานตะวันจำนวน n เมล็ด

สำหรับการเกิดเมล็ดทานตะวัน จะเกิดในสถานะที่ 2 ของการเจริญของช่อดอก ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 1 ซึ่งเมล็ดจะเกิดในช่วงที่เกิดวงแหวนบนดอก ซึ่งวงแหวนจะเริ่มเกิดที่ขอบนอกสุดของดอกแล้วเคลื่อนเข้าสู่จุดศูนย์กลางของดอกทานตะวัน ซึ่งภายใต้วงแหวนนั้นจะเป็นการสร้างเนื้อเยื่อของเมล็ด ส่งผลให้เมล็ดที่อยู่ด้านหลังของวงแหวนนั้นจะเป็นเมล็ดที่สมบูรณ์ ดังรูปที่ 2.15 ซึ่งจะทำให้เมล็ดดอกทานตะวันเริ่มเกิดขึ้นบริเวณขอบนอกสุดของดอกแล้วจะเคลื่อนเข้ามาสู่จุดศูนย์กลางของดอกทานตะวันโดยที่เมล็ดใหม่จะทำมุมกับเมล็ดที่เกิดก่อนด้วยมุม 137.5° นั่นคือ เมล็ดที่ 1 เป็นเมล็ดแรกที่เกิดขึ้นและมีเมล็ดที่ 2 เป็นเมล็ดใหม่ที่เกิดขึ้น ซึ่งเมล็ดที่ 2 ทำมุมกับเมล็ดที่ 1 ด้วยมุม 137.5° เช่นเดียวกันเมล็ดที่ 3 เป็นเมล็ดที่เกิดหลังจากเมล็ดที่ 2 และมุมระหว่างกันเป็นมุม 137.5° ดังนั้นเมล็ดที่ $n+1$ เป็นเมล็ดที่เกิดหลังจากเมล็ดที่ n และจะทำมุมระหว่างกันเป็นมุม 137.5° นอกจากนี้เมล็ดใหม่จะเกิดขึ้นในพื้นที่ที่มีการแออัดน้อย ซึ่งส่งผลให้ขนาดของเมล็ดที่อยู่บริเวณจุดศูนย์กลางมีขนาดเล็กสุดและบริเวณขอบดอกทานตะวันจะมีขนาดเมล็ดใหญ่สุด ดังรูปที่ 1.4

อีกทั้งยังสามารถหาประสิทธิภาพ (ความหนาแน่น, η) ของการบรรจุเมล็ดโดยอาศัยหลักการของ Garham นั่นคือ

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\mathcal{A}} \quad (3.5)$$

เมื่อ η คือ ประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ด

a_i คือ พื้นที่หน้าตัดของแต่ละเมล็ด

\mathcal{A} คือ พื้นที่ทั้งดอกทานตะวัน

ซึ่งการบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวันจะศึกษาด้วยกัน 2 วิธี

3.2.5.1 ศึกษาการบรรจุเมล็ดจากดอกทานตะวันจริงด้วยการหาประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดโดยการหาพื้นที่หน้าตัดเฉลี่ยของเมล็ดในแต่ละบริเวณ พร้อมทั้งหาพื้นที่วงกลมในแต่ละบริเวณที่เกิดจากการแบ่งในหัวข้อ 3.2.4.2.1 ซึ่งประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดคือ อัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่หน้าตัดในแต่ละบริเวณด้วยพื้นที่วงกลมในบริเวณนั้น ๆ

3.2.5.2 สร้างแบบจำลองของการบรรจุเมล็ด โดยอาศัยนิยามการบรรจุเมล็ดของ Vogel โดยมีนิยามดังนี้

$$\begin{aligned} r &\sim \sqrt{n} \\ \text{จะได้ว่า} \quad r &= c\sqrt{n} \quad (3.6) \\ \text{ดังนั้น ค่า } c \text{ หาได้จาก} \quad c &= \frac{r}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

หา c จากข้อมูลจริง ด้วยการหาค่า c เฉลี่ยจากต้นทานตะวันจำนวน 15 ต้น จะได้ว่า

$$c = \frac{294}{125}$$

นำ $c = \frac{294}{125}$ แทนลงในสมการ (3.6) จะได้ว่า

$$r = \frac{294}{125} \sqrt{n} \quad (\text{มีหน่วยเป็น มิลลิเมตร}) \quad (3.7)$$

$$\phi = n \times \left(1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

เมื่อ n คือ เมล็ดของดอกทานตะวัน เมล็ดที่ n

r คือ ระยะทางระหว่างเมล็ดที่ 0 กับที่ n

ϕ คือ มุมระหว่างเมล็ดที่ n กับที่ $n+1$

ดังนั้นตำแหน่งของแต่ละเมล็ด คือ ตำแหน่งของพิกัดฉาก (X, Y) ซึ่งจากสมมติฐานดังกล่าว จะได้ว่าจุดพิกัดฉากเป็น $(r \cos(2\pi\phi), r \sin(2\pi\phi))$

สำหรับการสร้างแบบจำลองของการจัดเรียงเมล็ดแบ่งออกเป็นสองแบบ ดังนี้

แบบที่ 1 สร้างแบบจำลอง โดยอาศัยพื้นฐานของการแบ่งบริเวณเพื่อหาปริมาตรตามหัวข้อ 3.2.4.2.1 ซึ่งจะได้บริเวณออกมาเป็น 3 ส่วน รวมทั้งสามารถหาประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดในแต่ละบริเวณด้วยสมการ (3.5) นอกจากนี้สามารถหาจำนวนเมล็ดในแต่ละพื้นที่ดังนี้

$$\text{จากสมการ (3.7) จะได้ว่า } n = \left(\frac{125}{294} r \right)^2$$

$$\text{ดังนั้น จำนวนเมล็ดในบริเวณ A } (n_A) = \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor$$

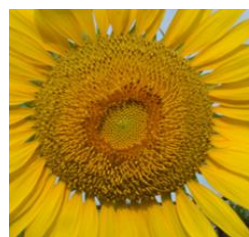
$$\text{จำนวนเมล็ดในบริเวณ B } (n_B) = \left\lfloor \frac{4n}{9} \right\rfloor - n_A$$

$$\text{จำนวนเมล็ดในบริเวณ C } (n_C) = n - (n_A + n_B)$$

แบบที่ 2 สร้างแบบจำลองให้เมล็ดมีขนาดที่แตกต่างกันเพื่อให้คล้ายกับดอกจริง นั่นคือ ขนาดเมล็ดที่อยู่จุดศูนย์กลางของดอกมีขนาดเล็กสุดและบริเวณขอบดอกมีขนาดใหญ่สุด



(ก)



(ข)

รูปที่ 3.15 ช่วงการเกิดเมล็ดของดอกทานตะวัน ซึ่งจะเกิดพร้อมกับวงแหวนบนดอก (ก) ช่วงแรกที่เกิดวงแหวนซึ่งจะเกิดที่รอบนอกสุดของดอกทานตะวัน (ข) วงแหวนบนดอกเคลื่อนเข้าสู่จุดศูนย์กลางซึ่งเมล็ดที่อยู่หลังวงแหวนจะเป็นเมล็ดที่สร้างเสร็จแล้ว

บทที่ 4

ผลการทดลอง

สำหรับการทดลองนี้ สนใจแบบรูปที่เกิดขึ้นในดอกทานตะวันสายพันธุ์ อะควอรา-6 เป็นสายพันธุ์ผลิตน้ำมันที่สำคัญในประเทศไทย ในบทนี้เราจะกล่าวถึงผลการทดลองเกี่ยวกับแบบรูปที่มีความสัมพันธ์กับจำนวนฟีโบนอกชี คู่อันดับเส้นเวียนกันหอย การพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน การหาปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวันและการบรรจุเมล็ด

สำหรับงานวิจัยนี้ได้ศึกษาต้นทานตะวันทั้งหมด 145 ต้น แบ่งออกเป็น 3 ส่วน ได้แก่

ส่วนที่ 1 นับจำนวนกลีบของดอกทานตะวันและจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียง

เมล็ดดอกทานตะวันจำนวน 45 ต้น

ส่วนที่ 2 ศึกษาการเจริญเติบโตของดอกทานตะวันจำนวน 40 ต้น

ส่วนที่ 3 ศึกษาปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวันจำนวน 60 ต้น

ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.1 การนับจำนวนกลีบของดอกทานตะวัน

ผลการนับจำนวนกลีบของดอกทานตะวันในแต่ละชั้นจำนวน 45 ต้น พบว่า ลักษณะการวางของกลีบดอกของดอกทานตะวัน ชั้นที่ 1-3 สามารถแยกชั้นได้ชัดเจน เพราะขนาดของกลีบมีขนาดใหญ่ และสำหรับลักษณะการวางของกลีบดอกของดอกทานตะวัน ชั้นที่ 4-5 การแบ่งชั้นอาจจะซับซ้อน เพราะขนาดของกลีบมีขนาดเล็กและมีจำนวนกลีบมาก อีกทั้งลักษณะการวางของกลีบดอกในชั้นดังกล่าวมีการวางที่ซ้อนทับกันมาก ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

ชั้นที่ 1 จำนวนกลีบที่น้อยที่สุดและมากที่สุดเป็น 8 กลีบและ 13 กลีบ ตามลำดับ

ชั้นที่ 2 จำนวนกลีบที่น้อยที่สุดและมากที่สุดเป็น 8 กลีบและ 15 กลีบ ตามลำดับ

ชั้นที่ 3 จำนวนกลีบที่น้อยที่สุดและมากที่สุดเป็น 8 กลีบและ 22 กลีบ ตามลำดับ

ชั้นที่ 4 จำนวนกลีบที่น้อยที่สุดและมากที่สุดเป็น 25 กลีบและ 40 กลีบ ตามลำดับ

ชั้นที่ 5 จำนวนกลีบที่น้อยที่สุดและมากที่สุดเป็น 38 กลีบและ 55 กลีบ ตามลำดับ

จากการนับกลีบดอกครั้งนี้ พบว่าในชั้นที่ 4 – 5 จะมีความผิดพลาดในการนับเพิ่มขึ้น ดังนั้นจึงสนใจการนับกลีบดอกในชั้นที่ 1 – 3 ผลปรากฏว่า

ชั้นที่ 1 จำนวนกลีบดอกที่เป็นลำดับในจำนวนฟีโบนัชชีมีจำนวน 39 ต้น

ชั้นที่ 2 จำนวนกลีบดอกที่เป็นลำดับในจำนวนฟีโบนัชชีมีจำนวน 36 ต้น

ชั้นที่ 3 จำนวนกลีบดอกที่เป็นลำดับในจำนวนฟีโบนัชชีมีจำนวน 27 ต้น

รวมทั้งยังสามารถคิดเป็นร้อยละของจำนวนกลีบดอกที่เป็นลำดับในจำนวนฟีโบนัชชีในชั้นที่ 1 - 3 ได้แก่ 86.67, 80 และ 60 ตามลำดับ รวมทั้งยังสามารถเขียนจำนวนกลีบดอกที่เป็นลำดับในจำนวนฟีโบนัชชีในรูปคู่อันดับระหว่างชั้นที่ 1 กับชั้นที่ 2 ที่อยู่ในรูปคู่อันดับ (13,13) มีจำนวน 32 ต้น และจำนวนกลีบดอกที่เป็นลำดับในจำนวนฟีโบนัชชีในรูปคู่อันดับระหว่างชั้นที่ 2 กับชั้นที่ 3 ที่อยู่ในรูปคู่อันดับ (13,21) มีจำนวน 20 ต้น รวมทั้งสามารถเขียนจำนวนกลีบดอกที่เป็นลำดับในจำนวนฟีโบนัชชีในรูปสามอันดับระหว่างชั้นที่ 1 ชั้นที่ 2 และชั้นที่ 3 อยู่ในรูป (13,13,21) มีจำนวน 17 ต้นและสามารถคิดเป็นร้อยละของคู่อันดับและสามอันดับ ได้แก่ 71.11, 44.44 และ 37.78 ตามลำดับ ดังตารางที่ 4.1 และ 4.2

3.2 การนับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดดอกทานตะวัน

ผลการนับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ด รวมทั้งจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดอยู่ในรูปคู่อันดับ (m, n) เมื่อ m คือ จำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทางตามเข็มนาฬิกาและ n คือ จำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจำนวน 45 ต้น ดังตารางที่ 4.3 มีรายละเอียดดังนี้

ทิศทางตามเข็มนาฬิกา จำนวนน้อยสุดของจำนวนเส้นเวียนกันหอยและจำนวนมากที่สุดของจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดเป็น 55 เส้นและ 89 เส้น ตามลำดับ นอกจากนี้จำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในทิศทางตามเข็มนาฬิกาที่มี 55 เส้นมีทั้งหมด 23 ต้น มีจำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทางตามเข็มนาฬิกา 76 เส้นมีทั้งหมด 1 ต้นและจำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทางตามเข็มนาฬิกา 89 เส้นมีทั้งหมด 21 ต้น

ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จำนวนน้อยสุดของจำนวนเส้นเวียนกันหอยและจำนวนมากที่สุดของจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดเป็น 55 เส้นและ 144 เส้น ตามลำดับ อีกทั้งจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา มี 55 เส้นมีทั้งหมด 14 ต้น จำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา 89 เส้นมีทั้งหมด 23 ต้น จำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา 123 เส้นมีทั้งหมด 1 ต้น และจำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา 144 เส้นมีทั้งหมด 7 ต้น

ตารางที่ 4.1 ผลการนับกลีบดอกของดอกทานตะวันในแต่ละชั้น

ต้นที่	จำนวนกลีบในแต่ละชั้น					ต้นที่	จำนวนกลีบในแต่ละชั้น				
	ชั้นที่ 1	ชั้นที่ 2	ชั้นที่ 3	ชั้นที่ 4	ชั้นที่ 5		ชั้นที่ 1	ชั้นที่ 2	ชั้นที่ 3	ชั้นที่ 4	ชั้นที่ 5
1	13	13	20	25	40	24	13	13	21	32	48
2	13	13	16	28	40	25	13	13	15	35	47
3	13	13	21	28	40	26	13	13	15	30	42
4	13	13	18	40	50	27	13	13	17	31	44
5	13	13	21	40	55	28	13	13	22	39	55
6	13	13	21	34	55	29	13	13	15	32	55
7	8	8	21	34	55	30	13	13	21	34	55
8	13	13	21	34	50	31	12	13	20	36	53
9	13	11	8	34	50	32	13	13	21	36	53
10	13	12	13	28	38	33	11	15	21	35	53
11	13	12	12	31	39	34	13	13	17	34	47
12	13	13	21	32	47	35	13	12	19	34	48
13	12	13	21	40	55	36	12	13	21	34	49
14	13	13	21	34	55	37	13	14	19	31	44
15	11	13	21	34	47	38	13	11	17	28	39
16	13	13	21	34	51	39	12	12	18	29	43
17	13	13	21	34	55	40	13	13	20	33	50
18	13	13	13	34	45	41	13	13	20	32	44
19	13	13	13	33	44	42	13	13	21	36	55
20	13	13	13	36	47	43	13	13	21	37	52
21	13	13	21	34	55	44	13	12	21	33	45
22	13	13	21	36	55	45	13	13	21	34	53
23	13	13	19	35	49						

ตารางที่ 4.2 จำนวนต้นที่มีจำนวนกลีบดอกของดอกทานตะวันเป็นจำนวนฟีโบนัชชีในชั้นที่ 1-3

จำนวนกลีบ	ชั้นที่ 1 (ต้น)	ชั้นที่ 2 (ต้น)	ชั้นที่ 3 (ต้น)
8 กลีบ	1	1	1
13 กลีบ	38	35	4
21 กลีบ	-	-	22

นอกจากนี้ จากตารางที่ 4.3 สามารถสรุปได้ว่า จำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในรูปคู่อันดับ (55, 89) มีทั้งหมด 23 ต้น จำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในรูปคู่อันดับ (76, 123) มีทั้งหมด 1 ต้น จำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในรูปคู่อันดับ (89, 144) มีทั้งหมด 7 ต้น และจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในรูปคู่อันดับ (89, 55) มีทั้งหมด 14 ต้น สังเกตได้ว่าจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดและจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในรูปคู่อันดับดังกล่าวเป็นจำนวนในลำดับฟีโบนอกชี ดังตารางที่ 4.3 และ ตารางที่ 4.4

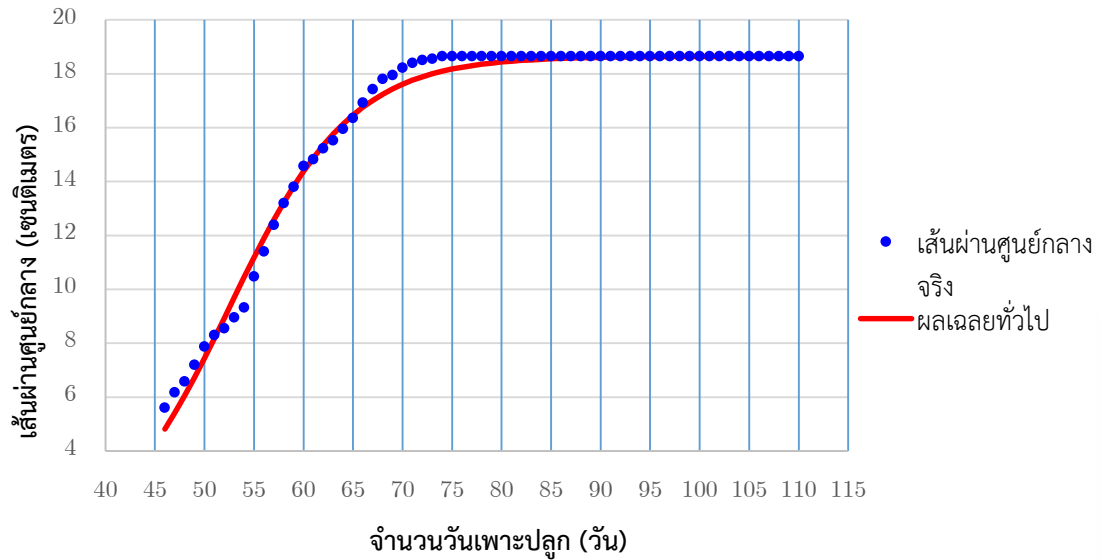
ตารางที่ 4.4 จำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันในรูปคู่อันดับ

คู่อันดับของจำนวนเส้นเวียนกันหอย	(55, 89)	(76, 123)	(89, 144)	(89, 55)
จำนวนต้น	23	1	7	14

4.3 การพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน

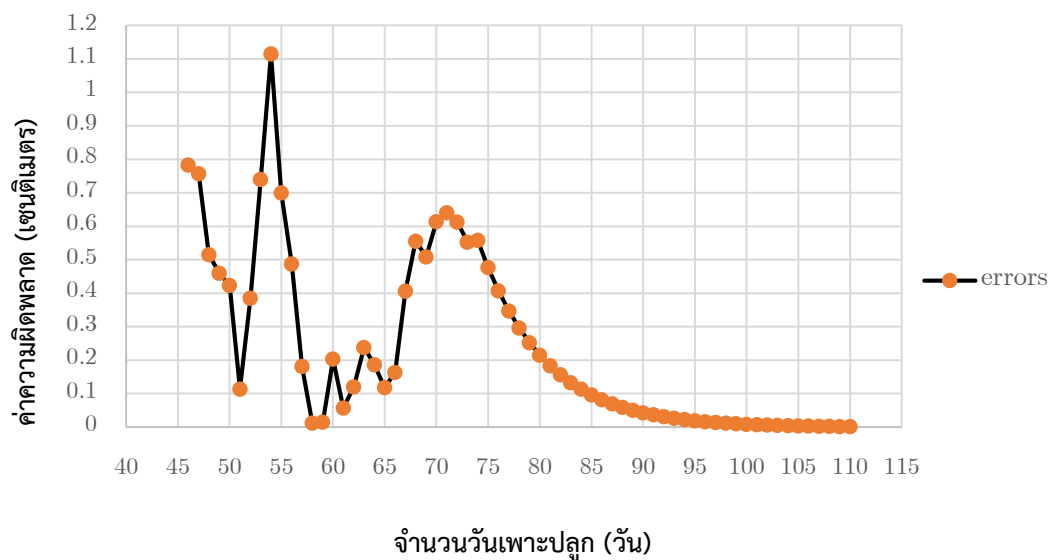
การเก็บข้อมูลของการเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน ทำการสุ่มจำนวนต้นมา 8 ต้นจาก 40 ต้นเพื่อวัดความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน ซึ่งจะเริ่มเก็บในช่วงที่สามารถเห็นดอกได้อย่างชัดเจน นั่นคือ ตั้งแต่วันที่ 46 จนถึงวันที่ 110 ของการเพาะปลูก จากการเก็บข้อมูล ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเริ่มจะเข้าช่วงคงที่วันที่ 65 และความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางคงที่ตั้งแต่วันที่ 74 ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเป็น 18.65 เซนติเมตร จากตารางที่ 4.5 และรูปที่ 4.1

สำหรับการประมาณค่าเจริญเติบโตของดอกทานตะวันด้วยผลเฉลยทั่วไป ที่ได้จากการหาค่าพารามิเตอร์ด้วยการถดถอยแบบไม่เชิงเส้น จะได้ค่า $\alpha = 0.161908$ และ $\beta = 3.376769$ สังเกตได้ว่าการประมาณความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางด้วยผลเฉลยทั่วไปเริ่มเข้าใกล้ค่าจริงของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางตั้งแต่วันที่ 74 อีกทั้งค่าน้อยสุดและสูงสุดของค่าความผิดพลาดระหว่างผลเฉลยทั่วไปกับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางจริงเป็น 0.001693 และ 1.114858 เซนติเมตร รวมทั้งค่าเฉลี่ยของค่าความผิดพลาดระหว่างผลเฉลยทั่วไปกับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางจริงเป็น 0.237621 นอกจากนี้ค่าความผิดพลาดระหว่างการประมาณค่าด้วยผลเฉลยทั่วไปกับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางจริงเพิ่มขึ้นที่สามารถเห็นได้ชัด 5 ช่วง ได้แก่ วันที่ 51-54, 59-60, 61-63, 65-68 และ 69-71 สามารถสังเกตจากตารางที่ 4.5 และรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 กราฟการเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน เมื่อ $\alpha = 0.161908$ $\beta = 3.376769$,

$\Delta t = 1$ และ $u = 18.65$



รูปที่ 4.2 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดของการประมาณค่าของทั้งสองผลเฉลย คือ error n-r คือ ค่าความผิดพลาดระหว่างข้อมูลจริงกับการประมาณค่าด้วยผลเฉลยเชิงตัวเลข และ error a-r คือ ค่าความผิดพลาดระหว่างข้อมูลจริงกับการประมาณค่าด้วยผลเฉลยทั่วไป

ตารางที่ 4.5 ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อปานตะวัน

จำนวน	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
สูงจตุรัส (ซม.)	5.6	6.175	6.575	7.2	7.875	8.3	8.55	8.95	9.325	10.475	11.4	12.3875	13.2
ผลคูณทวิคูณ (ซม.)	4.817	5.417	6.060	6.740	7.451	8.186	8.936	9.690	10.440	11.175	11.887	12.569	13.213
จำนวน	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
สูงจตุรัส (ซม.)	13.8	14.575	14.825	15.225	15.525	15.95	16.35	16.925	17.425	17.8	17.95	18.225	18.4
ผลคูณทวิคูณ (ซม.)	13.815	14.372	14.882	15.345	15.763	16.136	16.468	16.761	17.019	17.244	17.441	17.612	17.759
จำนวน	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
สูงจตุรัส (ซม.)	18.5	18.55	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65
ผลคูณทวิคูณ (ซม.)	17.887	17.997	18.092	18.173	18.243	18.303	18.354	18.397	18.435	18.467	18.494	18.517	18.537
จำนวน	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
สูงจตุรัส (ซม.)	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65
ผลคูณทวิคูณ (ซม.)	18.554	18.568	18.580	18.591	18.599	18.607	18.613	18.619	18.623	18.627	18.631	18.634	18.636
จำนวน	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
สูงจตุรัส (ซม.)	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65
ผลคูณทวิคูณ (ซม.)	18.638	18.640	18.641	18.643	18.644	18.645	18.646	18.647	18.647	18.647	18.648	18.648	18.648

4.4 การหาปริมาตรของเมล็ดดอกทานตะวัน

จากการเก็บข้อมูลเกี่ยวกับความยาว ความกว้างและความหนาของเมล็ดดอกทานตะวันในแต่ละบริเวณของดอกทานตะวันที่เกิดจากการแบ่งตามรูปที่ 3.7 โดยทำการสุ่มจำนวน 15 ต้น จาก 60 ต้น

4.4.1 ผลการหาปริมาตรของเมล็ด

ผลการหาปริมาตรเมล็ด หาโดยนำเมล็ดในแต่ละบริเวณมาถ่วงน้ำ ดังนั้นปริมาตรเมล็ดของเมล็ดทั้งดอกทานตะวัน คือ ผลรวมของปริมาตรเมล็ดในแต่ละบริเวณ ได้ดังตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.6 ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางและปริมาตรเมล็ดของเมล็ดดอกทานตะวัน

ต้นที่	เส้นผ่านศูนย์กลาง (ซม.)	ปริมาตรเมล็ดในแต่ละบริเวณ (ลบ.มม.)			ปริมาตรเมล็ดทั้งดอกทานตะวัน (ลบ.มม.)
		A	B	C	
1	22	22012.56	52830.14	79245.2	154087.9
2	19.2	13207.53	22012.56	39622.6	74842.69
3	18.6	13207.53	35220.09	52830.14	101257.8
4	20.4	8805.023	39622.6	57232.65	105660.3
5	17.4	13207.53	17610.05	39622.6	70440.18
6	20.8	13207.53	35220.09	48427.62	96855.25
7	18	13207.53	37421.35	52830.14	103459
8	21	17610.05	46226.37	68238.92	132075.3
9	20.4	15408.79	37421.35	74842.69	127672.8
10	15	8805.023	26415.07	33018.83	68238.92
11	15.6	10125.78	23333.31	40503.1	73962.19
12	16.6	14528.29	28616.32	34779.84	77924.45
13	16.8	11886.78	21132.05	24654.06	57672.9
14	23.2	8615.667	17610.05	22012.56	57672.9
15	19.8	22012.56	52830.14	79245.2	154087.9

4.4.2 ผลการหาปริมาตรในแต่ละบริเวณ

สำหรับการหาความยาว ความกว้างและความหนาในแต่ละบริเวณ ต้องทำการสุ่มเมล็ดโดยใช้สมการ (3.7) ดังนั้นจำนวนเมล็ดในแต่ละบริเวณเพื่อวัดความยาว ความกว้างและความหนาเป็นจำนวน 50, 100 และ 100 เมล็ด ตามลำดับ หลังจากนั้นหาค่าเฉลี่ยความกว้าง ความหนา ความยาวในแต่ละบริเวณได้ดังตารางที่ 4.7 ดังนั้นการหาปริมาตรเฉลี่ยของเมล็ดในแต่ละบริเวณด้วยการประมาณค่าของวิธีการต่าง ๆ ได้ดังตารางที่ 4.8 นอกจากนี้ปริมาตรเมล็ดในแต่ละบริเวณ หาได้จากปริมาตรเฉลี่ยของเมล็ดคูณจำนวนเมล็ดในแต่ละบริเวณได้ดังตารางที่ 4.9

ตารางที่ 4.7 ค่าเฉลี่ยของความกว้าง ความหนาและความยาว (มีหน่วยเป็น มม.)

ต้น ที่	บริเวณ A			บริเวณ B			บริเวณ C		
	W	T	L	W	T	L	W	T	L
1	4	2.157	9.677	5.34	2.984	10.709	5.338	3.271	10.941
2	3.929	2.636	10.111	4.9065	2.8135	10.318	5.4045	3.247	10.7205
3	4.198	2.263	10.416	5.4055	2.892	10.8585	6.3525	4.1469	11.4375
4	4.423	2.461	10.479	5.44	3.123	10.6865	5.7795	3.5275	10.8185
5	4.157	2.496	9.701	4.8745	2.8035	10.0945	5.5195	3.5555	10.695
6	3.937	2.264	10.019	5.3275	2.861	10.729	5.906	3.5275	11.118
7	3.43	2.318	9.219	4.4565	2.5945	9.5885	4.875	3.0605	10.0215
8	4.087	2.828	10.122	5.487	3.1295	10.6405	5.3795	3.265	10.5715
9	4.164	2.773	9.918	4.957	2.9905	9.949	5.225	3.279	9.9705
10	4.215	2.9	9.444	4.3455	2.3745	9.2435	4.593	2.784	9.5655
11	4.034	2.621	9.215	5.062	2.838	9.6725	5.5565	3.5545	9.9339
12	3.95	2.101429	9.455714	4.695882	2.395882	9.595882	5.0235	2.73	10.127
13	4.673	2.689	10.827	5.256	2.954	10.5185	5.5205	3.442	10.716
14	5.236215	2.822667	12.992	6.742344	3.607226	13.54394	7.923548	5.172477	14.26613
15	4.10772	2.214333	10.192	5.289253	2.829806	10.62498	6.215887	4.057719	11.19153

ตารางที่ 4.8 ปริมาณเฉลี่ยของแต่ละเมล็ดในแต่ละบริเวณด้วยวิธีการต่าง ๆ (มีหน่วยเป็น ลบ.มม.)

ต้นที่	สูตรของ Mirzabe			พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม			ทรงกระบอกวงรี			ทรงกระบอกวงกลม		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	43.695	89.303	99.976	25.805	50.896	51.959	65.542	133.96	149.96	35.344	74.854	91.894
2	54.802	74.541	98.454	26.014	41.399	52.189	82.204	111.81	147.68	55.151	64.115	88.726
3	51.7853	88.8346	157.68	30.5939	52.8799	76.9253	77.6779	133.252	236.521	41.8735	71.2912	154.4
4	59.6935	95.0134	115.426	34.1667	52.7087	60.2277	89.5402	142.52	173.139	49.821	81.818	105.675
5	52.6768	72.1928	109.84	27.9399	39.9755	54.3036	79.0152	108.289	164.76	47.4433	62.281	106.133
6	46.7353	85.5813	121.218	25.8824	50.7522	64.6342	70.1029	128.372	181.826	40.3132	68.9389	108.6
7	38.3592	58.0199	78.2489	18.0768	31.7386	39.6945	57.5388	87.0298	117.373	38.8848	50.6673	73.6864
8	61.225	95.6204	97.1718	28.1789	53.3926	50.9881	91.8375	143.431	145.758	63.547	81.8053	88.4652
9	59.9326	77.1828	89.397	28.6612	40.7442	45.3668	89.8989	115.774	134.096	59.8678	69.8452	84.153
10	60.4129	49.9145	64.0106	27.964	29.0914	33.6317	90.6194	74.8718	96.0159	62.3479	40.912	58.199
11	50.989	72.7196	102.678	24.9929	41.3078	51.1177	76.4835	109.079	154.017	49.6934	61.1552	98.525
12	41.0757	56.4997	72.6822	24.5888	35.267	42.5934	61.6135	84.7495	109.023	32.7788	43.24	59.2483
13	71.1989	85.4669	106.562	39.4047	48.4299	54.43	106.798	128.2	159.842	61.4553	72.0517	99.6607
14	100.492	172.388	305.987	59.369	102.616	149.277	150.738	258.582	458.98	81.2578	138.344	299.622
15	48.5156	83.2258	147.725	28.6622	49.5411	72.0683	72.7734	124.839	221.587	39.2297	66.79	144.652

ตารางที่ 4.9 ปริมาตรเมล็ดเฉลี่ยในแต่ละบริเวณด้วยวิธีการต่าง ๆ (มีหน่วยเป็น ลบ.มม.)

ต้นที่	สูตรของ Mirzabe			พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม			ทรงกระบอกหน้าตัดวงรี			ทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม			ถ่วงน้ำ		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	11361	67245	107774	3618	21416	34323	17041	100868	161661	9189.3	56365	99062	22013	52830	79245
2	15400	47110	43615	4904.3	15003	13890	23099	70664	65422	15498	40521	39306	13208	39623	22013
3	13257	49836	110692	4222	15871	35252	19886	74754	166037	10720	39994	108389	13208	35220	52830
4	13133	53208	89455	4182.3	16945	28489	19699	79811	134182	10961	45818	81898	8805	39623	57233
5	8586.3	33858	69968	2734.5	10783	22283	12880	50788	104952	7733.3	29210	67607	13208	17610	39623
6	13273	60420	99641	4227	19242	31733	19909	90631	149461	11449	48671	89269	13208	35220	48428
7	10817	44385	71989	3445	14135	22926	16226	66578	107983	10966	38761	67792	13208	37421	52830
8	16531	81086	100476	5264.6	25824	31999	24796	121629	150713	17158	69371	91473	17610	46226	68239
9	14024	47004	99231	4466.3	14970	31602	21036	70507	148846	14009	42536	93410	15409	37421	74843
10	11841	29799	44551	3771	9490.1	14188	17761	44698	66827	12220	24424	40507	8805	26415	33019
11	9535	32724	66227	3036.6	10422	21092	14302	49086	99341	9292.7	27520	63549	10126	23333	40503
12	9693.9	35369	61344	3087.2	11264	19536	14541	53053	92016	7735.8	27068	50006	14528	28616	34780
13	15521	40170	52961	4943.1	12793	16867	23282	60254	79442	13397	33864	49531	11887	21132	24654
14	16536	62161	138067	5266.1	19797	43970	24804	93242	207101	13371	49886	135195	16474	43930	65896
15	12850	52063	87531	4092.4	16581	27876	19275	78095	131297	10725	44833	80137	8615.7	38771	56002

4.4.3 ผลการหาปริมาตรเมล็ดทั้งดอก

ผลการหาปริมาตรเมล็ดทั้งดอกทานตะวันมีด้วยกัน 2 ส่วน คือ หาโดยหมุนฟังก์ชันด้วยวิธีเปลือกทรงกระบอกและการประมาณด้วยวิธีการต่าง ๆ มีรายละเอียดดังนี้

ส่วนแรก หาปริมาตรด้วยการหมุนกราฟของฟังก์ชัน โดยอันดับแรกสร้างฟังก์ชันของดอกทานตะวัน ซึ่งมี 2 ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันส่วนโคนบนเมล็ดดอกทานตะวัน $f(x)$ และฟังก์ชันส่วนโคนฐานรองรับเมล็ด $g(x)$

การสร้างฟังก์ชันของส่วนโค้งดังกล่าวจะสร้างด้วยการถดถอยแบบพหุนามตั้งแต่ดีกรี 1 ถึงดีกรี 10 แล้วนำมาพิจารณา R^2 ซึ่งจากการหาค่าเฉลี่ยของ R^2 ดังตารางที่ ๓.11 สังเกตได้ว่า พหุนามดีกรี 6 ถึง 9 มีความแตกต่างกันน้อยมาก ดังนั้นในการสร้างฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ เลือกพหุนามดีกรี 6 จะได้ดังตารางที่ 4.10 โดยนำฟังก์ชันทั้งสองหาปริมาตรด้วยการหมุนแบบเปลือกทรงกระบอกหมุนซ้ายและหมุนขวาแล้วนำมาหาค่าเฉลี่ย

ส่วนที่สอง นำปริมาตรในแต่ละบริเวณที่เกิดจากการประมาณด้วยวิธีการต่าง ๆ ดังที่ได้กล่าวในหัวข้อ 3.2.3.2 มารวมกันจะได้ตารางที่ 4.11

4.4.4 ผลการเปรียบเทียบปริมาตร

สำหรับการเปรียบเทียบวิธีการต่าง ๆ ของการประมาณค่าปริมาตรเมล็ด โดยพิจารณาผลต่างน้อยสุดระหว่างปริมาตรจากการถ่วงน้ำหนักวิธีการประมาณค่านั้น ๆ มีด้วยกัน 2 ส่วน ดังนี้

ส่วนแรก ผลการเปรียบเทียบการประมาณค่าปริมาตรเมล็ดในแต่ละบริเวณด้วยวิธีการต่าง ๆ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บริเวณ A ต้นที่ 2, 3, 6, 9, 10, 11 และ 14 จะดีที่สุดสำหรับการประมาณค่าด้วยสูตรของ Mirzabe ต้นที่ 1, 5 และ 12 จะดีที่สุดสำหรับการประมาณค่าด้วย ทรงกระบอกหน้าตัดวงรี ต้นที่ 4 และ 15 จะดีที่สุดสำหรับการประมาณค่าด้วย พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม และต้นที่ 7, 8 และ 13 จะดีที่สุดสำหรับการประมาณค่าด้วย ทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม

บริเวณ B ต้นที่ 5, 6, 8 และ 13 จะดีที่สุดสำหรับการประมาณค่าด้วย พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม และต้นที่ 1 - 4, 7, 9 - 12 และ 14 - 15 จะดีที่สุดสำหรับการประมาณค่าด้วย ทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม

บริเวณ ต้นที่ 2 - 6, 8 และ 11-15 จะดีที่สุดสำหรับการประมาณค่าด้วย พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม และต้นที่ 1, 7 และ 9 - 10 จะดีที่สุดสำหรับการประมาณค่าด้วย ทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม

ดังนั้นผลการหาค่าเฉลี่ยของผลต่างที่น้อยสุดที่มีค่าน้อยที่สุดในแต่ละบริเวณ (A, B, C) คือ สูตรของ Mirzabe ทรงกระบอกหน้าตัดวงกลมและพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม ตามลำดับ ดังตารางที่ 4.12

ส่วนที่สอง ผลการเปรียบเทียบการประมาณค่าปริมาตรเมล็ดทั้งดอก มีผลดังนี้ ต้นที่ 1 , 7, 9 - 10 ,12 และ 15 จะดีที่สุดสำหรับการประมาณค่าด้วย ทรงกระบอกหน้าตัดวงกลมและต้นที่ 2-6, 8, 11 และ 13 -14 จะดีที่สุดสำหรับการประมาณค่าด้วย พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม อย่างไรก็ตามผลการหาค่าเฉลี่ยของผลต่างที่น้อยสุดที่มีค่าน้อยที่สุด คือ พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม ดังตารางที่ 4.13

Prince of Songkla University
Pattani Campus

ตารางที่ 4.10 ฟังก์ชันส่วนโค้งและฐานรองของเมลิคคอกทานตะวัน

ต้นไม้	ฟังก์ชันส่วนโค้งและฐานรองของเมลิคคอกทานตะวัน	
1	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-2.7202349485085 \times 10^{-13} \times x^6 + 5.84063056101795 \times 10^{-10} \times x^5 - 5.03887586769474 \times 10^{-7} \times x^4 + 2.21072833976374 \times 10^{-4} \times x^3 - 5.16932177531509 \times 10^{-2} \times x^2 + 6.2050656007095 \times x - 383.885272715865$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-5.54885692868928 \times 10^{-13} \times x^6 + 1.160387531725 \times 10^{-9} \times x^5 - 9.7875560930271 \times 10^{-7} \times x^4 + 4.23698155296807 \times 10^{-4} \times x^3 - 9.91286367609231 \times 10^{-2} \times x^2 + 12.0384061741709 \times x - 717.077351124973$
2	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-1.80480675992636 \times 10^{-13} \times x^6 + 4.04651671204575 \times 10^{-10} \times x^5 - 3.55071440182267 \times 10^{-7} \times x^4 + 1.53935874839598 \times 10^{-4} \times x^3 - 3.51783563953444 \times 10^{-2} \times x^2 + 4.35370526781589 \times x - 307.004441153933$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-4.98224113246254 \times 10^{-13} \times x^6 + 1.10695637973084 \times 10^{-9} \times x^5 - 9.69722236546119 \times 10^{-7} \times x^4 + 4.24461075958526 \times 10^{-4} \times x^3 - 9.8041614781007 \times 10^{-2} \times x^2 + 11.7063852746967 \times x - 701.248379551144$
3	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-8.79092664170889 \times 10^{-14} \times x^6 + 1.96905243996635 \times 10^{-10} \times x^5 - 1.84213303938182 \times 10^{-7} \times x^4 + 9.05212536128866 \times 10^{-5} \times x^3 - 2.43802473149712 \times 10^{-2} \times x^2 + 3.48424950707286 \times x - 266.62072523697$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-2.83524316102589 \times 10^{-13} \times x^6 + 6.2944992095641 \times 10^{-10} \times x^5 - 5.6777052672861 \times 10^{-7} \times x^4 + 2.63539971523304 \times 10^{-4} \times x^3 - 6.59409524136092 \times 10^{-2} \times x^2 + 8.51479387800996 \times x - 553.4464445152$
4	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-4.0407024931498 \times 10^{-14} \times x^6 + 7.56880675525393 \times 10^{-11} \times x^5 - 6.64648911243007 \times 10^{-8} \times x^4 + 3.52480522043849 \times 10^{-5} \times x^3 - 1.13569066449864 \times 10^{-2} \times x^2 + 2.01009811826596 \times x - 187.978805556838$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-1.3138330851568 \times 10^{-13} \times x^6 + 2.5228046253915 \times 10^{-10} \times x^5 - 2.02233308309337 \times 10^{-7} \times x^4 + 8.75134739914763 \times 10^{-5} \times x^3 - 2.20411068755019 \times 10^{-2} \times x^2 + 3.17575735349415 \times x - 289.298063310675$

ตารางที่ 4.10 ฟังก์ชันส่วนโค้งและฐานรองของเมตริกของทางหลวง

สถานี	ฟังก์ชันส่วนโค้งและฐานรองของเมตริกของทางหลวง	
5	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-6.11481786744903 \times 10^{-14} \times x^6 + 1.47022393941443 \times 10^{-10} \times x^5 - 1.50165501956476 \times 10^{-7} \times x^4 + 8.07580315643388 \times 10^{-5} \times x^3 - 2.38430980721507 \times 10^{-2} \times x^2 + 3.72535489180149 \times x - 303.058879703165$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-1.27892012683033 \times 10^{-13} \times x^6 + 2.94602148509083 \times 10^{-10} \times x^5 - 2.84856226236753 \times 10^{-7} \times x^4 + 1.45319085666146 \times 10^{-4} \times x^3 - 4.09811739448072 \times 10^{-2} \times x^2 + 6.12721721758627 \times x - 486.979439694294$
6	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-1.72517543962889 \times 10^{-13} \times x^6 + 3.9007941998441 \times 10^{-10} \times x^5 - 3.5262913965996 \times 10^{-7} \times x^4 + 1.61604893211722 \times 10^{-4} \times x^3 - 3.97951104138353 \times 10^{-2} \times x^2 + 5.14362952019118 \times x - 321.895729946797$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-2.95095380182815 \times 10^{-13} \times x^6 + 6.7181466288156 \times 10^{-10} \times x^5 - 6.15937276327763 \times 10^{-7} \times x^4 + 2.89431986571698 \times 10^{-4} \times x^3 - 7.38586666484514 \times 10^{-2} \times x^2 + 9.87387069667086 \times x - 627.351309606558$
7	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-4.15568466368059 \times 10^{-14} \times x^6 + 8.48932935001747 \times 10^{-11} \times x^5 - 7.73619711720422 \times 10^{-8} \times x^4 + 4.00102390367329 \times 10^{-5} \times x^3 - 1.22131718580366 \times 10^{-2} \times x^2 + 2.12602843245806 \times x - 216.972602486715$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-1.86413465501 \times 10^{-13} \times x^6 + 3.97398481520643 \times 10^{-10} \times x^5 - 3.48501383813436 \times 10^{-7} \times x^4 + 1.60326016471614 \times 10^{-4} \times x^3 - 4.08211837136251 \times 10^{-2} \times x^2 + 5.57320946334 \times x - 425.979388677536$
8	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-1.96034989478963 \times 10^{-13} \times x^6 + 4.46783908474797 \times 10^{-10} \times x^5 - 4.03814298315062 \times 10^{-7} \times x^4 + 1.82769813427581 \times 10^{-4} \times x^3 - 4.40169318292464 \times 10^{-2} \times x^2 + 5.68567196936591 \times x - 384.352910366074$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-3.79010609926471 \times 10^{-13} \times x^6 + 8.423333079258996 \times 10^{-10} \times x^5 - 7.49466980559791 \times 10^{-7} \times x^4 + 3.38886199788569 \times 10^{-4} \times x^3 - 8.25094938306273 \times 10^{-2} \times x^2 + 10.6153764933609 \times x - 678.766769534581$

ตารางที่ 4.10 ฟังก์ชันส่วนโค้งและฐานรองของเมตริกอกทานตะวัน

จุด	ฟังก์ชันส่วนโค้งและฐานรองของเมตริกอกทานตะวัน	
9	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-1.85198861138866 \times 10^{-13} \times x^6 + 3.95267178755153 \times 10^{-10} \times x^5 - 3.3978943710342 \times 10^{-7} \times x^4 + 1.50287772240617 \times 10^{-4} \times x^3 - 3.66712733817962 \times 10^{-2} \times x^2 + 4.90987452592797 \times x - 339.303784899347$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-3.66281024351977 \times 10^{-13} \times x^6 + 7.68947958969302 \times 10^{-10} \times x^5 - 6.54724413869768 \times 10^{-7} \times x^4 + 2.89206181106924 \times 10^{-4} \times x^3 - 7.04988087671858 \times 10^{-2} \times x^2 + 9.20250811000179 \times x - 599.699518727108$
10	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-8.91310815822831 \times 10^{-14} \times x^6 + 1.94697572399763 \times 10^{(-10)} \times x^5 - 1.78467555529685 \times 10^{-7} \times x^4 + 8.73364587986368 \times 10^{-5} \times x^3 - 2.4087459524487 \times 10^{-2} \times x^2 + 3.60490556450631 \times x - 291.663251442255$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-3.26613685587315 \times 10^{-13} \times x^6 + 7.02819507446184 \times 10^{-10} \times x^5 - 6.15129335503309 \times 10^{-7} \times x^4 + 2.78905999454044 \times 10^{-4} \times x^3 - 6.91092446618815 \times 10^{-2} \times x^2 + 8.99588175152028 \times x - 599.33051910688$
11	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-5.16930285655748 \times 10^{-14} \times x^6 + 1.16224801066945 \times 10^{-10} \times x^5 - 1.09367252548317 \times 10^{-7} \times x^4 + 5.46831719700508 \times 10^{-5} \times x^3 - 1.57944718837422 \times 10^{-2} \times x^2 + 2.69021569180516 \times x - 262.139626680253$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-2.36341100129766 \times 10^{-13} \times x^6 + 5.28650863156231 \times 10^{-10} \times x^5 - 4.76773520632317 \times 10^{-7} \times x^4 + 2.2087632375347 \times 10^{-4} \times x^3 - 5.59781936016927 \times 10^{-2} \times x^2 + 7.64709681658961 \times x - 555.796644737652$
12	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-2.02923324624 \times 10^{-14} \times x^6 + 3.58520814531435 \times 10^{-11} \times x^5 - 3.35616437582786 \times 10^{-8} \times x^4 + 2.16635631105383 \times 10^{-5} \times x^3 - 8.8541506945323 \times 10^{-3} \times x^2 + 1.91151249815878 \times x - 213.842519285284$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-1.07927203149315 \times 10^{-13} \times x^6 + 2.09104431734836 \times 10^{-10} \times x^5 - 1.71130513132917 \times 10^{-7} \times x^4 + 7.7896790410218 \times 10^{-5} \times x^3 - 2.14654389519814 \times 10^{-2} \times x^2 + 3.43160344237113 \times x - 334.371909131299$

ตารางที่ 4.10 ฟังก์ชันส่วนโค้งและฐานรองของเมตริกของทอพอโลยี

จุด	ฟังก์ชันส่วนโค้งและฐานรองของเมตริกของทอพอโลยี	
13	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-3.90799638517608 \times 10^{-15} \times x^6 + 2.0097285334876 \times 10^{-11} \times x^5 - 3.94383965001341 \times 10^{-8} \times x^4 + 3.25518386293439 \times 10^{-5} \times x^3 - 1.30265475552232 \times 10^{-2} \times x^2 + 2.56695521779655 \times x - 245.383312350568$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-1.37609534159863 \times 10^{-13} \times x^6 + 3.10625990533881 \times 10^{-10} \times x^5 - 2.87763564519212 \times 10^{-7} \times x^4 + 1.37751737645495 \times 10^{-4} \times x^3 - 3.61269189515636 \times 10^{-2} \times x^2 + 5.07279212046265 \times x - 396.128401095206$
14	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-1.04604142406613 \times 10^{-13} \times x^6 + 2.12198521379817 \times 10^{-10} \times x^5 - 1.83752847297337 \times 10^{-7} \times x^4 + 879.224508072545 \times 10^{-5} \times x^3 - 2.453313976548 \times 10^{-2} \times x^2 + 3.75992184540892 \times x - 265.460417758254$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-2.83294422385795 \times 10^{-13} \times x^6 + 5.82310145833536 \times 10^{-10} \times x^5 - 4.91208193214729 \times 10^{-7} \times x^4 + 2.1828711963167 \times 10^{-4} \times x^3 - 5.40783472961233 \times 10^{-2} \times x^2 + 7.12132006414367 \times x - 450.444105168708$
15	ฟังก์ชัน $f(x)$	$-2.501878060610990 \times 10^{-13} \times x^6 + 5.41253197809341 \times 10^{-10} \times x^5 - 4.56669952666148 \times 10^{-7} \times x^4 + 1.89713985826786 \times 10^{-4} \times x^3 - 4.13020942140421 \times 10^{-2} \times x^2 + 4.81332711993641 \times x - 315.494514590776$
	ฟังก์ชัน $g(x)$	$-5.95205608568584 \times 10^{-13} \times x^6 + 1.249858743357779 \times 10^{-9} \times x^5 - 1.03257813509156 \times 10^{-6} \times x^4 + 4.26366701808621 \times 10^{-4} \times x^3 - 9.32912976349639 \times 10^{-2} \times x^2 + 10.6795379527345 \times x - 636.775179982646$

ตารางที่ 4.11 ปริมาตรเมล็ดที่หักดอกทานตะวันด้วยวิธีการต่าง ๆ (มีหน่วยเป็น ลบ.มม.)

ที่	สูตรของ Mirzabe	พีระมิดฐาน สี่เหลี่ยม	ทรงกระบอก หน้าตัดวงรี	ทรงกระบอก หน้าตัดวงกลม	ปริพันธ์	ถ่วงน้ำ
1	186380	101046	279570	164616	201867	154088
2	106124	56593.5	159186	95323.6	168325	74842.7
3	173785	91499.2	260677	159103	154768	101258
4	155795	83710	233693	138677	257360	105660
5	112413	57894.1	168619	104550	149201	70440.2
6	173334	96311	260001	149389	264579	96855.2
7	127191	65896.6	190787	117517	158677	103459
8	198092	105607	297139	178002	157573	132075
9	160259	81877.1	240389	149955	186849	127673
10	86191.3	46256.2	129287	77151.2	24043.1	68238.9
11	108486	56233.1	162729	100361	125675	73962.2
12	106406	63828.9	159610	84809.6	136197	77924.4
13	108652	58404	162978	96793	131803	57672.9
14	216764	69033.1	325146	198451	283643	126300
15	152445	48549.2	228667	135694	242074	103388

ตารางที่ 4.12 ผลการเปรียบเทียบปริมาตรเมล็ดในแต่ละบริเวณด้วยวิธีการต่าง ๆ

(มีหน่วยเป็น ลบ.มม.)

ที่	สูตรของ Mirzabe			พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม			ทรงกระบอกหน้าตัดวงรี			ทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	10652	14415	28529	18395	31414	44922	4971.6	48038	82416	12823	3535.1	19817
2	2192	7487	21602	8303.2	24620	8122.5	9891.7	31042	43410	2289.9	898.02	17293
3	49.499	14616	57862	8985.6	19349	17578	6678	39534	113207	2487.9	4774.3	55559
4	4327.5	13585	32222	4622.7	22678	28744	10894	40189	76950	2155.6	6195.5	24665
5	4621.2	16248	30345	10473	6827.1	17340	328.05	33178	65329	5474.3	11600	27984
6	65.279	25200	51213	8980.5	15978	16695	6701.7	55411	101034	1758.6	13451	40842
7	2390.2	6963.9	19159	9762.5	23286	29904	3018.4	29156	55153	2242	1339.1	14961
8	1079.3	34860	32237	12346	20403	36240	7186.1	75403	82475	452.37	23145	23234
9	1384.6	9583	24388	10943	22452	43241	5627.6	33085	74003	1399.7	5114.4	18567
10	3035.9	3383.9	11533	5034	16925	18831	8956.4	18283	33808	3415.2	1990.6	7487.7
11	590.83	9390.5	25724	7089.2	12912	19412	4176.6	25752	58838	833.1	4186.5	23046
12	4834.4	6752.5	26564	11441	17352	15244	12.494	24437	57236	6792.5	1548.1	15226
13	3634.6	19037	28307	6943.7	8339.2	7787.5	11395	39122	54788	1510.5	12732	24877
14	61.74	18231	72171	11208	24134	21925	8329.6	49312	141205	3103.2	5955	69299
15	4234.5	13293	31529	4523.3	22190	28126	10660	39324	75295	2109.3	6062.3	24135

ตารางที่ 4.13 ผลการเปรียบเทียบปริมาตรของเมล็ดแห้งดอกของดอกทานตะวันด้วยวิธีการต่าง ๆ

(มีหน่วยเป็น ลบ.มม.)

ที่	สูตรของ Mirzabe	พีระมิดฐาน สี่เหลี่ยม	ทรงกระบอก หน้าตัดวงรี	ทรงกระบอก หน้าตัดวงกลม	ปริพันธ์
1	32291.9	53042	125482	10528.5	47778.7
2	31281.3	18249.2	84343.4	20480.9	93482.6
3	72527.2	9758.56	159420	57845.2	53510.7
4	50134.7	21950.3	128032	33016.3	151700
5	41972.5	12546	98178.8	34109.8	78760.9
6	76478.8	544.296	163146	52533.9	167724
7	23732.4	37562.4	87328.2	14058.4	55217.7
8	66017.1	26468.4	165063	45926.3	25498.2
9	32586.4	45795.7	112716	22281.8	59176.5
10	17952.3	21982.7	61048	8912.24	44195.8
11	34524	17729.1	88767.1	26398.9	51712.9
12	28482	14095.5	81685.2	6885.13	58272.9
13	50979	731.08	105305	39120.1	74130.4
14	90464	57266.9	198846	72151	157343
15	49056.6	54838.8	125279	32306.3	138686

4.5 การบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวัน

สำหรับการศึกษาการบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวัน ศึกษาด้วยการหาประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดในแต่ละบริเวณ ตามที่ได้แบ่งดังรูปที่ 3.7 ซึ่งการหาประสิทธิภาพในแต่ละบริเวณนั้น จะหาด้วยอัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่หน้าตัดในแต่ละบริเวณด้วยพื้นที่วงกลมในแต่ละบริเวณ สำหรับผลรวมของพื้นที่หน้าตัดหาได้จากจำนวนเมล็ดคูณกับค่าเฉลี่ยของพื้นที่หน้าตัดในแต่ละพื้นที่ ซึ่งจะศึกษาจากข้อมูลจริง (ศึกษาจากดอกทานตะวัน) และจากโปรแกรมที่สร้างขึ้นมา ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.5.1 ประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวัน

สำหรับการพิจารณาพื้นที่หน้าตัดของเมล็ดดอกทานตะวันนั้นจะพิจารณาด้วยกัน 2 พื้นที่หน้าตัด นั่นคือ สีเหลี่ยมและวงกลม ผลจากการหาพื้นที่วงกลมของแต่ละบริเวณและผลรวมของพื้นที่หน้าตัดทั้งสองพื้นที่หน้าตัดจะได้ดังตารางที่ 4.14 และตารางที่ 4.15

ตารางที่ 4.14 พื้นที่วงกลมในแต่ละพื้นที่ (มีหน่วยเป็น ตร.มม.)

ต้นที่	พื้นที่วงกลมในแต่ละบริเวณ		
	A	B	C
1	4223.697	12671.09	21118.48
2	3216.991	9650.973	16084.95
3	3019.071	9057.212	15095.35
4	3631.681	10895.04	18158.41
5	2642.079	7926.238	13210.4
6	3775.496	11326.49	18877.48
7	2827.433	8482.3	14137.17
8	3848.451	11545.35	19242.26
9	3631.681	10895.04	18158.41
10	1963.495	5890.486	9817.477
11	2123.717	6371.15	10618.58
12	2404.715	7214.144	12023.57
13	2463.009	7389.026	12315.04
14	4697.03	14091.09	23485.15
15	3421.194	10263.58	17105.97

ตารางที่ 4.15 พื้นที่หน้าตัดของเมล็ดในแต่ละบริเวณ (มีหน่วยเป็น ตร.มม.)

ต้นที่	พื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยม $\left(\frac{WT}{2}\right)$			พื้นที่หน้าตัดวงกลม (T^2)		
	A	B	C	A	B	C
1	1121.64	5999.362	9411.262	1209.689	6704.905	11533.9974
2	1455.137	3057.683	5545.298	1952.527	3506.692	6663.181688
3	1216.009	4384.974	9246.457	1311.019	4692.016	12072.13929
4	1197.35	4756.954	7900.035	1332.435	5461.752	9643.523594
5	845.6336	3204.597	6250.429	1015.493	3686.158	8052.686619
6	1265.698	5380.418	8562.534	1455.698	5778.837	10228.35664
7	1121.054	4422.614	6863.171	1515.221	5149.544	8617.32743
8	1560.335	7280.744	9080.623	2159.348	8305.117	11022.67265
9	1350.972	4513.88	9508.69	1799.35	5446.342	11934.54351
10	1197.903	3080.039	4449.845	1648.36	3366.035	5394.456576
11	988.5862	3232.34	6369.562	1284.623	3624.41	8149.233311
12	979.4759	3521.495	5787.373	1042.176	3593.398	6290.2476
13	1369.661	3648.663	4721.888	1576.297	4101.275	5888.139908
14	2357.424	8512.405	17951.16	2541.616	9108.455	23436.96184
15	1141.531	4108.596	8663.869	1230.721	4396.285	11311.51433

ผลการหาประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดด้วยพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยมและวงกลม ได้ผลดังตารางที่ 4.16 ซึ่งค่าของประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดด้วยพื้นที่หน้าตัดที่ให้มามีค่ามากที่สุด ในบริเวณ A เป็น พื้นที่หน้าตัดวงกลม ค่าของประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดด้วยพื้นที่หน้าตัดที่ให้มามีค่ามากที่สุด ในบริเวณ B เป็น พื้นที่หน้าตัดวงกลมและค่าของประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดด้วย

พื้นที่หน้าตัดที่ให้ค่ามากที่สุดที่สุดในบริเวณ C เป็น พื้นที่หน้าตัดวงกลม ดังนั้นประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดที่ให้ค่าประสิทธิภาพที่ดีที่สุดเป็นพื้นที่หน้าตัดวงกลม

ตารางที่ 4.16 ประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดด้วยพื้นที่หน้าตัด

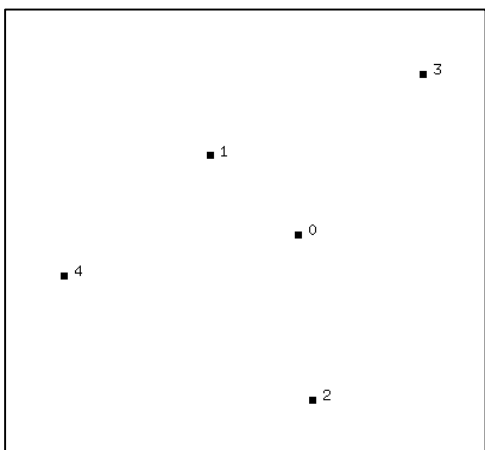
ต้นที่	พื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยม $\left(\frac{WT}{2}\right)$			พื้นที่หน้าตัดวงกลม $\left(T^2\right)$		
	A	B	C	A	B	C
1	0.265559	0.473468475	0.445641	0.286405	0.52915	0.546157
2	0.452328	0.316826405	0.344751	0.606942	0.363351	0.414249
3	0.402776	0.484141722	0.612537	0.434246	0.518042	0.799726
4	0.329696	0.436616309	0.435062	0.366892	0.501306	0.531078
5	0.320064	0.404302437	0.473145	0.384354	0.465058	0.609572
6	0.33524	0.475029658	0.453585	0.385565	0.510205	0.541828
7	0.396492	0.521393231	0.48547	0.5359	0.607093	0.609551
8	0.405445	0.630621185	0.471911	0.561095	0.719347	0.572837
9	0.371996	0.414305846	0.523652	0.495459	0.499892	0.657246
10	0.610087	0.522883718	0.453258	0.839503	0.571436	0.549475
11	0.465498	0.507340143	0.59985	0.604894	0.568878	0.76745
12	0.407315	0.488137566	0.481336	0.433389	0.498105	0.52316
13	0.556093	0.493794809	0.383424	0.639988	0.555049	0.478126
14	0.501897	0.604098406	0.764362	0.541111	0.646398	0.997948
15	0.333664	0.400308111	0.506482	0.359734	0.428338	0.661261

4.5.2 การบรรจุเมล็ดจากโปรแกรม

จากการสร้างโปรแกรมด้วยสมมติฐานที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 โปรแกรมจะเริ่มสร้างเมล็ดจากด้านในสู่ด้านนอกโดยที่มุมระหว่างเมล็ดที่ n กับเมล็ดที่ $n+1$ ทำมุมระหว่างกันเป็นมุม 137.5° สำหรับตัวอย่างตำแหน่งและการเกิดเมล็ดของการบรรจุเมล็ดในแต่ละกรณีแสดงดังรูปที่ 4.3(ก – ง) โดยการสมมติให้เมล็ดมีจำนวน $n = 4, 16, 25$ และ 50 เมล็ด จากรูปสังเกตได้ว่าแต่ละเมล็ดที่เรียงติดกันจะทำมุมระหว่างกันด้วยมุม 137.5° รวมทั้งมีค่าระยะทางระหว่างเมล็ดที่ 0 ถึงเมล็ดที่ n มีค่าเป็น $\frac{294}{125} \sqrt{n}$ เมื่อเพิ่มค่า n ไปเรื่อย ๆ ตำแหน่งของเมล็ดที่ n จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง นอกจากนี้ อัตราส่วนระหว่างระยะทางของเมล็ดที่ n กับเมล็ดที่ $n+1$ มีค่าน้อยกว่า 1 สำหรับการสร้างแบบจำลองของการจัดเรียงเมล็ดแบ่งออกเป็น 2 แบบ เพื่อสามารถกำหนดขนาดของเมล็ด

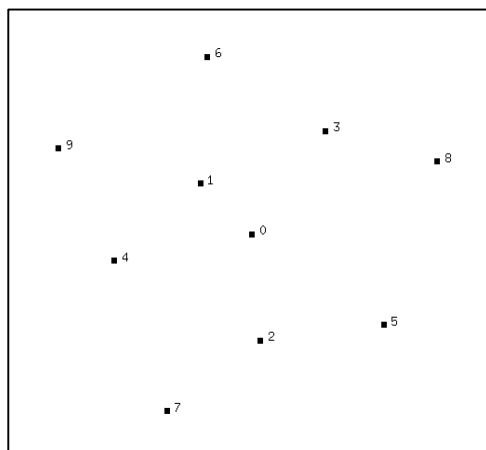
แบบที่ 1 แบบจำลองที่เกิดจากการแบ่งบริเวณออกเป็น 3 ส่วนโดยอาศัยการแบ่งบริเวณตามหัวข้อ 3.2.4.2 ส่งผลให้สามารถกำหนดขนาดของเมล็ดในแต่ละบริเวณตามความต้องการ รวมทั้งสามารถกำหนดสีของแต่ละบริเวณได้ นอกจากนี้สามารถคำนวณจำนวนเมล็ดในแต่ละบริเวณ (A, B, C) และสามารถคำนวณประสิทธิภาพการบรรจุเมล็ด ซึ่งจะแสดงผลของจำนวนเมล็ดและประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดของแต่ละบริเวณบนหน้าตาต่างของโปรแกรมในส่วนของ number และ packing efficiency ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.3(ง)

แบบที่ 2 สร้างขนาดเมล็ดในแต่ละบริเวณให้มีขนาดแตกต่างกัน นั่นคือ เมล็ดที่อยู่บริเวณขอบนอกสุดจะมีขนาดใหญ่ที่สุดและบริเวณจุดศูนย์กลางของดอกมีขนาดเล็กที่สุด นอกจากนี้สามารถกำหนดขนาดเมล็ดในแต่ละชั้น ดังรูปที่ 4.3(ก)



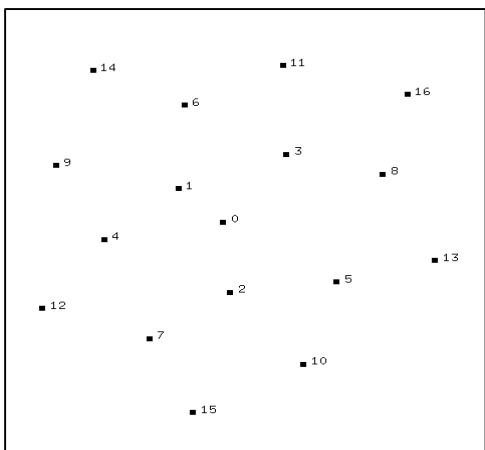
$n = 4$

(ก)



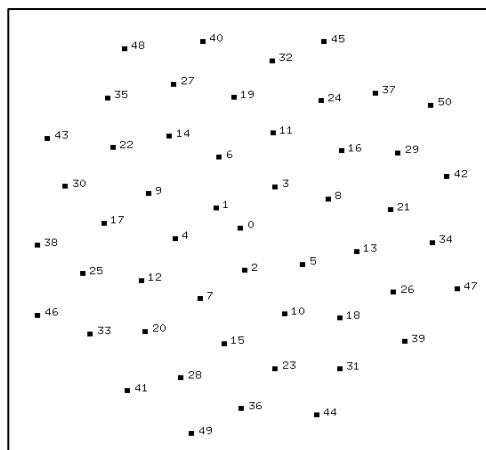
$n = 9$

(ข)



$n = 16$

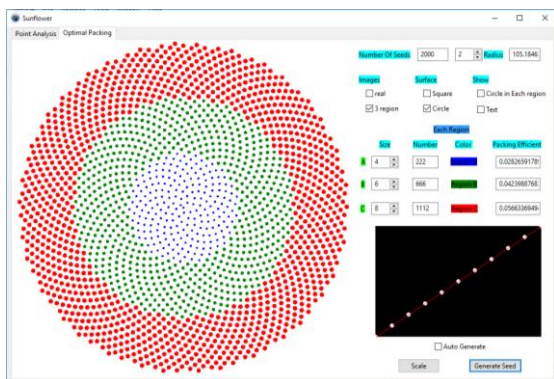
(ค)



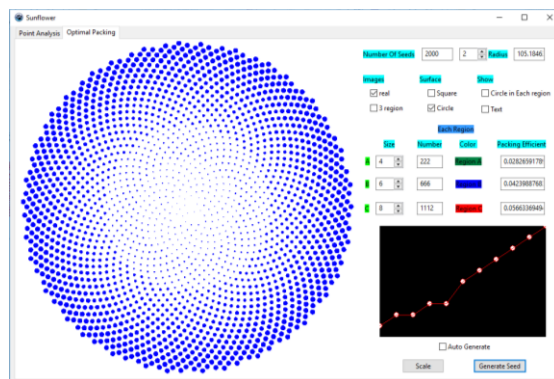
$n = 50$

(ง)

IP1



(จ)



(ข)

รูปที่ 4.3 แบบจำลองการบรรจุเมล็ดของดอกทานตะวัน (ก-ง) ตำแหน่งและการเกิดเมล็ดการบรรจุเมล็ดในแต่ละกรณี (จ) การจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันในแต่ละบริเวณ (ข) การจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันที่มีเมล็ดมีขนาดแตกต่างกัน

บทที่ 5

อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะเป็นการกล่าวถึงบทสรุปจากการทดลองในแต่ละส่วน ได้แก่ แบบรูปฟีโบนักชี การพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวัน การหาปริมาตรเมล็ดของดอกทานตะวันและการบรรจุเมล็ด นอกจากนี้ได้กล่าวถึงข้อเสนอแนะจากงานวิจัยนี้ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

5.1 อภิปรายผล

การเก็บข้อมูลจำนวนกลีบของดอกทานตะวันในแต่ละชั้น จำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในแต่ละทิศทางและจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในรูปคู่อันดับสามารถสรุปได้ว่า จำนวนกลีบของดอกทานตะวันในแต่ละชั้น จำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในแต่ละทิศทางและจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในรูปคู่อันดับที่มีจำนวนต้นมากที่สุดเป็นจำนวนชุดหนึ่งของลำดับฟีโบนักชี

สำหรับการเจริญเติบโตของดอกทานตะวันโดยใช้ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางตั้งแต่วันที่ 46 – 110 ของการเพาะปลูกด้วยผลเฉลยแม่นยำตรงเลือกค่า $\alpha = 0.161908$ และ $\beta = 3.376769$ สังเกตได้ว่า ค่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเริ่มเจริญเติบโตช้าลงตั้งแต่วันที่ 65-89 และเริ่มคงที่ตั้งแต่วันที่ 90 สำหรับข้อมูลจริง ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเริ่มคงตัวตั้งแต่วันที่ 73 เป็นต้นไป ดังนั้นแบบจำลองการพยากรณ์การเติบโตของดอกทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา-6 สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบผลเฉลยเชิงตัวเลขและผลเฉลยแม่นยำตรงตามลำดับ คือ

$$y(t) = \frac{18.65}{1 + 3.376769e^{-0.161908(t-45)}}; t \in [46, 110]$$

สำหรับการหาปริมาตรเมล็ดดอกทานตะวันในแต่ละบริเวณ ได้แก่ บริเวณ A การประมาณค่าด้วยสูตรของ Mirzabe จะดีที่สุด บริเวณ B การประมาณค่าด้วยทรงกระบอกหน้าตัดวงกลมดีที่สุด และบริเวณ C การประมาณค่าด้วยพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมดีที่สุด สังเกตได้ว่าในแต่ละบริเวณวิธีการประมาณค่าปริมาตรจะไม่เหมือนกัน เนื่องจากคุณสมบัติทางกายภาพ คือ ความยาว ความกว้างและความหนาของเมล็ดในแต่ละบริเวณไม่เหมือนกัน อย่างไรก็ตามสำหรับการประมาณค่าปริมาตรเมล็ดทั้งดอกทานตะวันดีที่สุดด้วยวิธีพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมและรองลงมาด้วยวิธีทรงกระบอกหน้าตัดวงกลม

นอกจากนี้จากการสร้างฟังก์ชันส่วนโค้งบนเมล็ด $f(x)$ และส่วนโค้งของฐานรองเมล็ด $g(x)$ ของดอกทานตะวัน ส่งผลได้ลักษณะของฟังก์ชันส่วนโค้งบนเมล็ดและส่วนโค้งของฐานรองเมล็ดของดอกทานตะวันดังสมการ (5.1) และ (5.2) ตามลำดับ

$$f(x) = -a_0 + a_1x - a_2x^2 + a_3x^3 - a_4x^4 + a_5x^5 - a_6x^6 \quad (5.1)$$

$$g(x) = -b_0 + b_1x - b_2x^2 + b_3x^3 - b_4x^4 + b_5x^5 - b_6x^6 \quad (5.2)$$

เมื่อ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ โดยที่ $a_i < b_i ; i = 0, 1, 2, \dots, 6$

สำหรับการบรรจุเมล็ด จากการศึกษาจากดอกทานตะวันจริง การสมมติพื้นที่หน้าตัดของเมล็ดด้วยวงกลมจะมีประสิทธิภาพสูงสุด อีกทั้งจากการสร้างการบรรจุเมล็ดด้วยโปรแกรมมีความใกล้เคียงกับการบรรจุเมล็ดทานตะวันจริง

5.2 ข้อเสนอแนะ

การทำวิจัยนี้สามารถสรุปนำมาใช้ในชีวิตจริงได้ดังนี้

1. แบบรูปที่เกิดขึ้นบนดอกทานตะวันสายพันธุ์ อะควอรา-6 จะเป็นแบบรูปฟีโบนัชชี
2. การพยากรณ์การเจริญเติบโตของดอกทานตะวันในแต่ละพื้นที่จะมีความแตกต่างกันขึ้นอยู่กับสภาพแวดล้อมรอบข้างและการควบคุมการปลูก
3. การเก็บเกี่ยวเมล็ดของดอกทานตะวันในบริเวณ A จะมีเมล็ดกลวงมากกว่าเมล็ดที่มีเนื้อ และอาจจะได้ปริมาณที่น้อย ดังนั้นควรเก็บเมล็ดในบริเวณ B และ C เพราะมีปริมาณเมล็ดมากและจะไม่ค่อยมีเมล็ดกลวง
4. สามารถประมาณค่าปริมาตรเมล็ดในแต่ละบริเวณหรือทั้งดอกทานตะวันด้วยวิธีการตามทีสรุปในหัวข้อ 5.1

บรรณานุกรม

- คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2549. ฟิสิกส์ 1, สำนักพิมพ์
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร, หน้า 335 –361.
- ลิลลี่ กาวีตะ. 2546. การเปลี่ยนแปลงทางสัณฐานและพัฒนาการของพืช, สำนักพิมพ์
 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพมหานคร, หน้า 163-174.
- สำเร็จ ชื่นรังสิกุล. 2555. สมการเชิงอนุพันธ์, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,
 กรุงเทพมหานคร, หน้า 11 –72.
- สุเมธ สมภักดี. 2550. ทฤษฎีการเลือกตัวอย่าง, สำนักพิมพ์ประกายพริ้ง, กรุงเทพมหานคร, หน้า
 18 – 94.
- Alan, C. and Patrick, D. 2005. Plants and Fibonacci. Journal of Statistical Physics.
 121, 937-967
- Asaithambi, N.S. 1995. Numerical Analysis Theory and Practice, Saunders College,
 New York, U.S.A., 467-479.
- Chuai-aree, S. 2009. Modeling, Simulation and Visualization of Plant Growth.
 Ph.D. Thesis, Ruprecht-Karls Universität at Heidelberg.
- Graham, R.L., Lubachevsky, B.D., Nurmela, K.J. and Ostergard, P.R.J. 1998.
 Dense Packing of Congruent Circles in a Circle. Discrete Mathematics. 181,
 139 – 154.
- Jay, K. 2004. Growth in Plants: A Study in Number. Forma. 19, 335 – 354.
- Jean, R.V. 1994. Phyllotaxis : A Systemic Study in Plant Morphogenesis, the Press
 Syndicate of the University of Cambridge, New York, U.S.A., pp. 9-48.
- Julian, J. 2005. Texts in Statistical Science Linear Models with R,
 Chapman&Hall/Crc, New York, U.S.A., pp. 11-24.
- Laosuwan, P. (1997). Sunflower Production and Research in Thailand. Suranaree J.
 Sci. Technol. 4, 159 - 167.
- Mathai, A.M. 1974. Constructing the Sunflower Head. Mathematical Biosciences. 20,
 117 – 133.

- Mirzabe, A., Khazaei, J. and Chegini, G.H. 2012. Physical Properties and Modeling for Sunflower Seeds. *Agric Eng Int: CIGR Journal*. 14, 190-202.
- Mitchison, G. 1977. Phyllotaxis and the Fibonacci Series. *Science New Series*. 196, 270-275.
- Patrick, R. and Willi, S. 2008. *Multivariable Model-Building*, John Wiley & Sons Ltd, Southern Gate of Chichester, England, pp. 71-99.
- Pennybacker, M. 2013. A Numerical Study of Pattern Forming Fronts in Phyllotaxis. Ph.D. Thesis, University of Arizona.
- Przemyslaw, P., James, H., David, F., Deborah, R.F., Martin J. M. and Lynn, M. 1990. *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag, New York, U.S.A., pp. 99-109.
- Ridley, J.N. 1982. Packing Efficiency in Sunflower Heads. *Mathematical Biosciences*. 58, 129 – 139.
- Satjawattana, K., and Laosuwan, P. 2002. Performance of Synthetic Varieties of Sunflower. *Suranaree J. Sci. Technol*. 9, 278 - 282.
- Vogel, H. 1978. A Better Way to Construct the Sunflower Head. *Mathematical Biosciences*. 44, 179 – 189.
- Vollmann, J. and Rajcan, I. 2010. *Oil Crops: Series 4*, Springer. New York, U.S.A., pp. 155 - 232.

Prince of Songkla University
Pattani Campus

ภาคผนวก ก

คู่มือการใช้โปรแกรม

โปรแกรมในงานวิจัยนี้ประกอบด้วย 2 หน้าต่าง ได้แก่ วิเคราะห์จุด (X, Y) และการบรรจุเมล็ด ซึ่งมีรายละเอียดการทำงานดังนี้

หน้าต่างที่ 1 (Point Analysis)

1. เลือกรูปภาพที่จะทำการวิเคราะห์จุด (X, Y) โดยทำการกดปุ่มไอคอน Open Picture

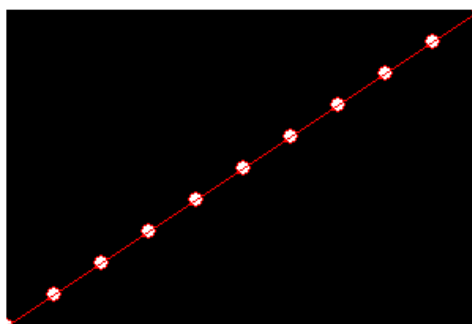
2. เมื่อได้รูปภาพมาแล้ว คลิกตามรูปที่ต้องการ ซึ่งโปรแกรมจะแสดงจุด (X, Y) ในตารางทางขวาของรูป

3. คัดลอกข้อมูลในตาราง แล้ววางใน Microsoft Excel เพื่อสร้างฟังก์ชัน

หน้าต่างที่ 2 (Optimal Packing)

1. ป้อนจำนวนเมล็ดลงในช่อง Number of Seeds

2. เลือกให้โปรแกรมสร้างการจัดเรียงแบบใด ซึ่งประกอบด้วย แบ่งบริเวณออกเป็น 3 ส่วน และเมล็ดมีขนาดแตกต่างกัน ถ้าเลือกแบ่งบริเวณออกเป็น 3 ส่วน ให้คลิกเลือก 3 regions ถ้าเลือกเมล็ดมีขนาดแตกต่างกันให้คลิกเลือก real ซึ่งเมื่อเลือกการจัดเรียงแบบแบ่งบริเวณออกเป็น 3 ส่วนแล้ว สามารถกำหนดขนาดของเมล็ดในแต่ละพื้นที่ ด้วยการป้อนข้อมูลในช่องของ A, B และ C ในส่วนของ Size และหากเลือกการจัดเรียงแบบเมล็ดมีขนาดแตกต่างกัน สามารถปรับขนาดในส่วน Scales ดังรูปที่ ๑.1



รูปที่ ๑.1 ส่วนการปรับขนาดของการเลือกจัดเรียงเมล็ดที่มีขนาดแตกต่างกัน

3. เมื่อเลือกลักษณะของการจัดเรียงแล้ว หลังจากนั้นให้เลือกลักษณะของเมล็ดที่จะให้แสดงจะประกอบด้วย ลักษณะวงกลม (Circle) หรือ สี่เหลี่ยม (Square)

4. โปรแกรมจะทำการสร้างการจัดเรียงเมล็ดตาม que เลือก และแสดงรัศมีของดอกทานตะวันในช่อง Radius ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก

$$r = \frac{294}{125} \sqrt{n} \text{ เมื่อ } n \text{ คือ จำนวนเมล็ดที่ป้อนในช่อง Number Of Seeds}$$

5. โปรแกรมทำการลงจุด (X, Y) ตั้งแต่ 1 ถึง n ด้วยนิยาม ดังนี้

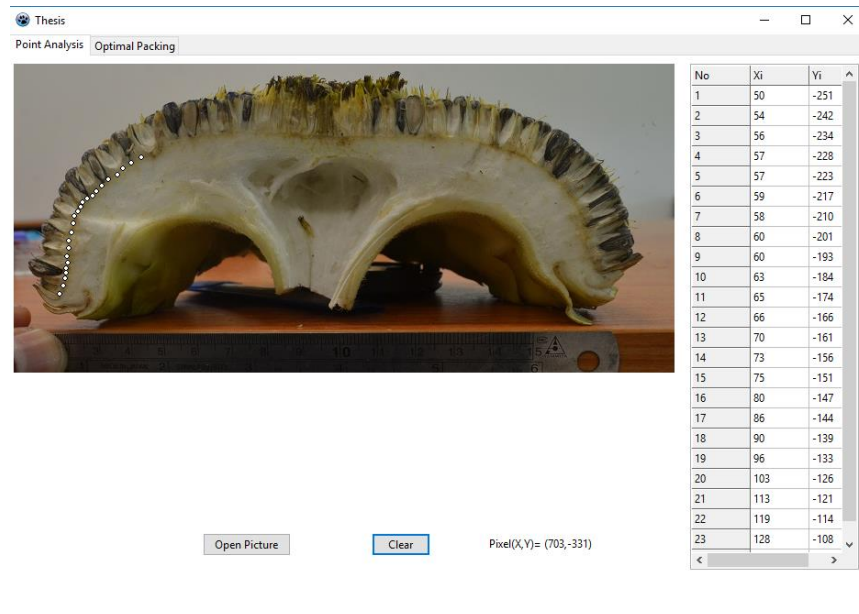
$$\phi = n \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

$$x = r \cos(2\pi\phi)$$

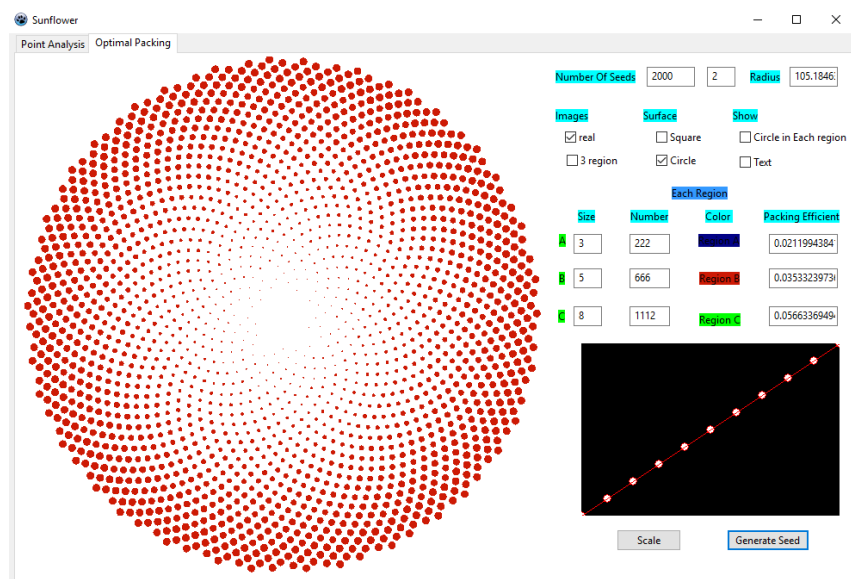
$$y = r \sin(2\pi\phi)$$

พร้อมทั้งสร้างขนาดตามที่ได้กำหนดไว้ในข้อ 2 และในกรณีเลือกการจัดเรียงเมล็ดแบบแบ่งบริเวณออกเป็น 3 ส่วน โปรแกรมทำการคำนวณจำนวนเมล็ดในแต่ละบริเวณ A, B และ C ด้วย $\left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{4n}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor$ และ $n - \left\lfloor \frac{4n}{9} \right\rfloor$ ตามลำดับและแสดงในช่อง A, B และ C ในส่วนของ Number รวมทั้งโปรแกรมจะแสดงประสิทธิภาพของการบรรจุเมล็ดในช่อง A, B และ C ในส่วนของ Packing Efficient นอกจากนี้สามารถกำหนดสีของเมล็ดในแต่ละบริเวณโดยเลือกสีได้ในส่วนของ Color of Each Region

หมายเหตุ สามารถดูโปรแกรมแต่ละหน้าต่างดังรูปที่ ก.2



(ก)



(ข)

รูปที่ ๓.๒ หน้าต่างโปรแกรมในงานวิจัยนี้ (ก) หน้าต่างของโปรแกรมวิเคราะห์จุด (X, Y) (ข) หน้าต่างโปรแกรมของการบรรจุเมล็ด

Prince of Songkla University
Pattani Campus

ภาคผนวก ข

ข้อมูลและการวิเคราะห์

สำหรับการสร้างฟังก์ชันส่วนโค้งบนเมล็ด $f(x)$ และส่วนโค้งของฐานรองเมล็ด $g(x)$ ของดอกทานตะวัน จะสร้างด้วยการถดถอยแบบพหุนามด้วยสมการ (2.1) และหาสัมประสิทธิ์ของแต่ละดีกรีด้วยสมการ (2.2) ตั้งแต่ดีกรี 1 ถึง ดีกรี 10 แล้วพิจารณาค่าของ R^2 จากสมการ (2.13) ดังตัวอย่างของข้อมูล 10 ชุดและค่า R^2 ของข้อมูลทั้ง 10 ชุดด้วยดีกรี 1 ถึง ดีกรี 10 ดังตารางที่ ก.1 – ก.11

ตารางที่ ก.1 ข้อมูลชุดที่ 1

n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	64	-228	23	179	-109	45	370	-87	67	552	-98
2	65	-220	24	187	-109	46	379	-86	68	558	-101
3	67	-211	25	195	-107	47	388	-86	69	564	-103
4	70	-202	26	206	-104	48	397	-84	70	571	-107
5	72	-193	27	216	-103	49	405	-83	71	579	-110
6	76	-186	28	224	-101	50	412	-83	72	586	-114
7	79	-177	29	234	-100	51	421	-82	73	592	-119
8	82	-172	30	240	-100	52	430	-81	74	599	-124
9	87	-165	31	246	-99	53	438	-81	75	606	-129
10	93	-158	32	255	-97	54	446	-81	76	613	-135
11	98	-152	33	263	-98	55	455	-80	77	620	-141
12	103	-146	34	271	-97	56	462	-80	78	624	-147
13	109	-139	35	281	-95	57	469	-80	79	627	-153
14	114	-133	36	290	-95	58	477	-80	80	629	-160
15	121	-128	37	297	-94	59	486	-82	81	631	-168
16	126	-124	38	306	-93	60	495	-82	82	637	-176
17	132	-120	39	314	-92	61	505	-82	83	639	-181
18	139	-118	40	323	-90	62	514	-82	84	643	-190
19	148	-116	41	332	-90	63	521	-85	85	645	-194
20	155	-115	42	340	-89	64	529	-87	86	650	-201
21	162	-113	43	351	-89	65	537	-90	87	651	-207
22	171	-111	44	360	-87	66	546	-95			

ตารางที่ ก.2 ข้อมูลชุดที่ 2

n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	36	-239	30	176	-79	59	388	-60	88	595	-99
2	37	-231	31	185	-77	60	392	-58	89	600	-104
3	39	-222	32	195	-75	61	400	-55	90	605	-109
4	39	-215	33	205	-75	62	405	-55	91	611	-113
5	40	-208	34	213	-73	63	411	-54	92	618	-118
6	41	-199	35	222	-73	64	420	-54	93	622	-124
7	42	-190	36	229	-71	65	429	-54	94	626	-130
8	43	-183	37	235	-70	66	438	-56	95	630	-133
9	45	-178	38	242	-67	67	448	-56	96	633	-138
10	48	-172	39	248	-70	68	455	-56	97	639	-142
11	51	-164	40	253	-72	69	461	-56	98	642	-147
12	54	-158	41	261	-72	70	469	-56	99	645	-153
13	58	-150	42	271	-71	71	475	-57	100	648	-158
14	64	-144	43	280	-70	72	482	-57	101	651	-166
15	70	-137	44	288	-70	73	489	-57	102	655	-174
16	76	-132	45	295	-69	74	496	-57	103	657	-179
17	81	-127	46	303	-68	75	504	-57	104	657	-184
18	86	-122	47	312	-67	76	513	-60	105	657	-188
19	93	-115	48	321	-65	77	521	-61	106	660	-194
20	99	-110	49	328	-65	78	529	-64	107	662	-200
21	106	-105	50	333	-65	79	536	-68	108	663	-204
22	114	-100	51	339	-65	80	543	-69	109	664	-209
23	123	-96	52	344	-65	81	551	-72	110	665	-216
24	131	-93	53	349	-64	82	557	-76	111	667	-221
25	137	-91	54	355	-62	83	562	-79	112	667	-232
26	144	-87	55	363	-62	84	569	-84	113	667	-237
27	153	-85	56	370	-62	85	574	-88	114	669	-242
28	162	-83	57	377	-62	86	582	-90	115	669	-246
29	169	-81	58	383	-61	87	591	-96			

ตารางที่ ๓.3 ข้อมูลชุดที่ 3

n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	64	-251	26	177	-117	51	368	-93	76	552	-118
2	67	-247	27	182	-116	52	375	-93	77	558	-123
3	70	-241	28	189	-114	53	383	-94	78	564	-128
4	74	-235	29	197	-113	54	392	-94	79	571	-132
5	75	-228	30	203	-113	55	403	-95	80	576	-136
6	78	-219	31	210	-113	56	412	-93	81	582	-140
7	78	-215	32	217	-112	57	421	-93	82	589	-146
8	79	-208	33	225	-109	58	426	-93	83	594	-153
9	80	-202	34	235	-108	59	433	-93	84	599	-157
10	83	-194	35	244	-108	60	441	-92	85	604	-163
11	86	-187	36	254	-107	61	450	-91	86	608	-169
12	89	-181	37	262	-105	62	455	-91	87	611	-179
13	92	-175	38	272	-104	63	462	-91	88	615	-187
14	97	-170	39	278	-104	64	468	-91	89	619	-195
15	102	-164	40	288	-104	65	474	-92	90	620	-202
16	106	-158	41	294	-102	66	480	-93	91	621	-209
17	113	-152	42	302	-101	67	488	-92	92	621	-216
18	121	-148	43	310	-99	68	498	-94	93	621	-223
19	126	-144	44	316	-98	69	506	-96	94	621	-229
20	132	-138	45	322	-98	70	515	-98	95	624	-238
21	138	-132	46	330	-97	71	522	-102	96	626	-243
22	147	-131	47	340	-96	72	527	-106	97	627	-252
23	155	-127	48	347	-95	73	534	-109	98	630	-256
24	161	-124	49	353	-95	74	540	-111			
25	168	-119	50	361	-95	75	546	-115			

ตารางที่ ก.4 ข้อมูลชุดที่ 4

n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	26	-216	31	167	-72	61	349	-29	91	601	-80
2	29	-210	32	172	-69	62	359	-29	92	610	-83
3	32	-202	33	180	-67	63	369	-29	93	618	-87
4	35	-195	34	188	-66	64	375	-29	94	624	-90
5	38	-187	35	193	-66	65	385	-28	95	630	-93
6	42	-178	36	197	-66	66	396	-28	96	636	-96
7	45	-169	37	202	-65	67	403	-28	97	642	-103
8	47	-161	38	207	-64	68	410	-28	98	648	-108
9	50	-155	39	213	-61	69	419	-29	99	653	-114
10	53	-149	40	219	-59	70	428	-31	100	660	-118
11	57	-141	41	224	-55	71	436	-31	101	667	-123
12	64	-135	42	228	-52	72	444	-33	102	673	-130
13	71	-129	43	234	-50	73	453	-35	103	678	-139
14	76	-123	44	242	-46	74	464	-40	104	685	-148
15	80	-119	45	248	-46	75	473	-42	105	688	-156
16	85	-115	46	252	-46	76	477	-45	106	693	-160
17	90	-111	47	257	-47	77	484	-45	107	697	-166
18	94	-107	48	262	-44	78	493	-49	108	700	-173
19	98	-105	49	267	-42	79	504	-52	109	703	-180
20	103	-99	50	272	-42	80	511	-53	110	706	-187
21	108	-96	51	277	-40	81	522	-58	111	708	-194
22	114	-93	52	281	-38	82	533	-61	112	712	-201
23	120	-90	53	285	-38	83	542	-63	113	717	-209
24	126	-87	54	292	-35	84	549	-66	114	721	-217
25	132	-85	55	298	-34	85	555	-66	115	721	-224
26	137	-82	56	305	-31	86	562	-66	116	724	-229
27	142	-78	57	317	-30	87	569	-69	117	724	-236
28	150	-76	58	327	-29	88	575	-71			
29	156	-75	59	335	-29	89	583	-73			
30	162	-73	60	342	-29	90	592	-75			

ตารางที่ ๓.๕ ข้อมูลชุดที่ 5

n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	25	-238	24	149	-81	47	356	-28	70	556	-70
2	28	-227	25	155	-77	48	366	-29	71	569	-74
3	29	-219	26	165	-74	49	376	-30	72	579	-77
4	30	-211	27	175	-69	50	383	-30	73	589	-81
5	30	-201	28	186	-65	51	390	-32	74	596	-84
6	32	-192	29	198	-61	52	396	-34	75	604	-90
7	36	-183	30	209	-57	53	405	-34	76	611	-94
8	37	-175	31	217	-54	54	416	-36	77	617	-98
9	39	-165	32	225	-51	55	426	-38	78	625	-104
10	43	-156	33	237	-46	56	434	-40	79	631	-108
11	48	-149	34	247	-44	57	444	-42	80	639	-114
12	52	-144	35	252	-41	58	452	-44	81	645	-121
13	58	-137	36	258	-39	59	461	-47	82	653	-130
14	64	-130	37	266	-36	60	471	-49	83	661	-138
15	70	-125	38	274	-34	61	481	-49	84	665	-147
16	77	-119	39	285	-32	62	490	-51	85	672	-155
17	84	-112	40	293	-32	63	497	-54	86	678	-162
18	93	-108	41	299	-30	64	506	-57	87	681	-173
19	104	-102	42	308	-29	65	513	-59	88	685	-181
20	111	-97	43	314	-29	66	522	-61	89	688	-192
21	122	-92	44	322	-29	67	531	-63	90	693	-203
22	129	-87	45	332	-29	68	537	-65	91	698	-216
23	139	-85	46	343	-28	69	546	-69			

ตารางที่ ๖.๖ ข้อมูลชุดที่ 6

n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	21	-201	25	160	-63	49	341	-46	73	554	-47
2	26	-194	26	167	-61	50	346	-46	74	562	-49
3	30	-187	27	176	-60	51	358	-46	75	569	-53
4	32	-179	28	185	-60	52	368	-44	76	576	-56
5	35	-169	29	193	-59	53	376	-43	77	584	-59
6	38	-163	30	200	-57	54	385	-43	78	593	-64
7	42	-158	31	210	-57	55	394	-42	79	600	-66
8	46	-149	32	220	-57	56	403	-40	80	612	-72
9	50	-139	33	229	-55	57	410	-40	81	620	-78
10	55	-132	34	237	-53	58	417	-40	82	629	-86
11	61	-126	35	244	-52	59	424	-40	83	636	-91
12	68	-117	36	252	-51	60	432	-39	84	643	-98
13	75	-110	37	259	-52	61	442	-37	85	650	-108
14	80	-103	38	265	-52	62	453	-35	86	654	-115
15	88	-98	39	272	-52	63	463	-34	87	660	-122
16	94	-93	40	279	-52	64	471	-33	88	665	-128
17	100	-89	41	287	-50	65	481	-32	89	669	-135
18	109	-84	42	293	-50	66	489	-34	90	672	-143
19	116	-81	43	298	-50	67	500	-36	91	676	-151
20	123	-78	44	307	-48	68	507	-37	92	680	-159
21	129	-74	45	313	-48	69	515	-39	93	682	-164
22	136	-72	46	320	-48	70	525	-41	94	685	-171
24	153	-66	48	334	-47	72	544	-46	96	690	-182

ตารางที่ ๗.7 ข้อมูลชุดที่ 7

n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	9	-168	25	164	-47	49	369	-40	73	571	-56
2	15	-162	26	173	-47	50	376	-40	74	583	-62
3	19	-155	27	183	-44	51	384	-39	75	589	-66
4	22	-147	28	192	-43	52	392	-36	76	597	-71
5	27	-139	29	199	-43	53	401	-36	77	606	-77
6	31	-135	30	207	-42	54	412	-36	78	614	-84
7	37	-128	31	217	-40	55	419	-35	79	622	-89
8	42	-122	32	225	-39	56	426	-33	80	628	-96
9	48	-117	33	234	-38	57	435	-32	81	632	-102
10	53	-110	34	241	-39	58	445	-32	82	637	-108
11	57	-105	35	249	-39	59	454	-31	83	643	-117
12	62	-100	36	258	-39	60	461	-33	84	647	-127
13	68	-94	37	267	-40	61	472	-32	85	654	-133
14	75	-88	38	277	-41	62	478	-33	86	660	-142
15	82	-84	39	288	-41	63	487	-34	87	665	-151
16	88	-79	40	295	-41	64	496	-35	88	670	-159
17	94	-75	41	305	-42	65	505	-35	89	673	-168
18	100	-71	42	313	-42	66	515	-35	90	677	-177
19	108	-67	43	322	-40	67	524	-39	91	678	-187
20	117	-63	44	330	-41	68	532	-43	92	680	-195
21	125	-60	45	337	-41	69	538	-44	93	682	-201
22	134	-55	46	343	-41	70	542	-46	94	684	-209
23	145	-52	47	352	-41	71	550	-49	95	685	-213
24	155	-49	48	361	-40	72	559	-53			

ตารางที่ ๘.๘ ข้อมูลชุดที่ ๘

n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	38	-214	24	159	-62	47	372	-36	70	557	-58
2	38	-206	25	170	-59	48	380	-36	71	566	-61
3	40	-196	26	181	-56	49	387	-36	72	575	-65
4	42	-189	27	191	-51	50	396	-36	73	583	-70
5	43	-180	28	201	-48	51	405	-36	74	593	-74
6	46	-171	29	212	-45	52	414	-35	75	600	-77
7	51	-161	30	223	-42	53	421	-36	76	609	-82
8	55	-153	31	234	-41	54	428	-36	77	616	-88
9	59	-144	32	241	-41	55	435	-36	78	623	-95
10	64	-136	33	250	-40	56	443	-37	79	630	-102
11	67	-130	34	258	-38	57	452	-37	80	638	-110
12	70	-124	35	265	-38	58	459	-38	81	644	-117
13	75	-120	36	273	-37	59	469	-39	82	650	-125
14	81	-116	37	281	-36	60	478	-39	83	658	-136
15	89	-108	38	290	-36	61	486	-39	84	662	-147
16	96	-103	39	301	-36	62	495	-39	85	666	-157
17	104	-95	40	311	-36	63	503	-40	86	671	-164
18	113	-91	41	319	-36	64	510	-42	87	674	-173
19	119	-87	42	328	-35	65	515	-45	88	676	-185
20	126	-81	43	339	-35	66	521	-48	89	680	-191
21	133	-75	44	348	-36	67	533	-50	90	681	-199
22	143	-71	45	357	-36	68	541	-52	91	682	-206
23	151	-66	46	365	-36	69	550	-55	92	683	-216

ตารางที่ ๙.๙ ข้อมูลชุดที่ ๙

n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	69	-259	23	180	-108	45	380	-61	67	555	-99
2	70	-250	24	188	-104	46	389	-59	68	562	-102
3	70	-239	25	196	-101	47	398	-60	69	567	-105
4	73	-233	26	203	-98	48	405	-59	70	573	-107
5	76	-223	27	211	-94	49	413	-60	71	581	-113
6	77	-215	28	218	-92	50	422	-60	72	585	-116
7	81	-206	29	228	-88	51	429	-60	73	591	-120
8	83	-198	30	238	-86	52	439	-63	74	596	-125
9	85	-192	31	250	-82	53	448	-64	75	601	-129
10	89	-183	32	260	-77	54	456	-66	76	605	-133
11	93	-177	33	268	-74	55	464	-67	77	608	-137
12	98	-170	34	276	-73	56	471	-70	78	614	-142
13	103	-162	35	288	-70	57	480	-72	79	619	-147
14	111	-155	36	297	-68	58	488	-75	80	622	-154
15	118	-147	37	306	-68	59	496	-77	81	626	-160
16	124	-141	38	317	-68	60	506	-80	82	629	-166
17	131	-136	39	326	-66	61	514	-82	83	633	-172
18	139	-130	40	333	-66	62	521	-84	84	637	-178
19	146	-126	41	343	-64	63	527	-87	85	641	-185
20	155	-121	42	353	-64	64	534	-90	86	643	-191
21	165	-115	43	363	-62	65	541	-92	87	647	-197
22	172	-111	44	371	-61	66	547	-95			

ตารางที่ ๑.10 ข้อมูลชุดที่ 10

n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i	n	x_i	y_i
1	35	-255	24	134	-91	47	345	-30	70	564	-62
2	37	-246	25	143	-86	48	355	-28	71	571	-65
3	37	-239	26	150	-81	49	362	-25	72	578	-70
4	38	-230	27	157	-76	50	371	-24	73	584	-72
5	39	-221	28	169	-73	51	379	-21	74	592	-77
6	39	-212	29	179	-67	52	388	-21	75	598	-79
7	40	-204	30	192	-63	53	399	-21	76	605	-87
8	42	-198	31	200	-59	54	411	-23	77	614	-91
9	45	-190	32	212	-55	55	423	-24	78	621	-96
10	49	-183	33	220	-52	56	433	-24	79	629	-101
11	52	-175	34	229	-49	57	446	-24	80	639	-106
12	56	-167	35	238	-47	58	455	-26	81	646	-115
13	61	-158	36	246	-45	59	464	-28	82	654	-123
14	66	-148	37	253	-41	60	472	-29	83	660	-130
15	71	-142	38	261	-39	61	485	-32	84	666	-139
16	78	-134	39	272	-36	62	495	-35	85	669	-145
17	83	-128	40	282	-33	63	504	-38	86	671	-152
18	90	-123	41	290	-33	64	515	-42	87	676	-160
19	96	-118	42	302	-33	65	524	-46	88	680	-167
20	101	-114	43	310	-33	66	532	-48	89	683	-174
21	108	-108	44	318	-34	67	541	-51			
22	117	-102	45	324	-33	68	550	-55			
23	125	-96	46	334	-33	69	556	-59			

Degree	R_1^2	R_2^2	R_3^2	R_4^2	R_5^2	R_6^2
1	0.003913	0.004004	0.016296	0.018899	0.025314	0.015075
2	0.854841	0.851523	0.945353	0.940204	0.857723	0.876351
3	0.865903	0.859097	0.946777	0.941788	0.863406	0.879648

ตารางที่ ๑.11 ค่า R^2 ของข้อมูลทั้ง 10 ชุดด้วยดีกรี 1 ถึง ดีกรี 10

Degree	R_1^2	R_2^2	R_3^2	R_4^2	R_5^2	R_6^2
1	0.025314	0.003913	0.004004	0.016296	0.018899	0.015075
2	0.857723	0.854841	0.851523	0.945353	0.940204	0.876351
3	0.863406	0.865903	0.859097	0.946777	0.941788	0.879648
4	0.983654	0.976464	0.974975	0.984074	0.974774	0.994159
5	0.986546	0.976681	0.974976	0.984093	0.97478	0.995285
6	0.995926	0.987279	0.988416	0.998559	0.991747	0.998331
7	0.996123	0.987435	0.988884	0.99864	0.994583	0.998362
8	0.997817	0.993998	0.992293	0.998779	0.996691	0.998966
9	0.997763	0.993999	0.993231	0.99884	0.997242	0.998967
10	0.971783	0.979505	0.887013	0.998381	0.997114	0.998711
Degree	R_7^2	R_8^2	R_9^2	R_{10}^2	\bar{R}^2	
1	0.025416	0.001366	0.084123	0.137448	0.033185	
2	0.868417	0.90702	0.949089	0.94633	0.899685	
3	0.887376	0.907527	0.950679	0.950439	0.905264	
4	0.994824	0.987777	0.985772	0.981248	0.983772	
5	0.995958	0.987964	0.988015	0.986046	0.985034	
6	0.996635	0.994705	0.996167	0.991906	0.993967	
7	0.997593	0.994744	0.996862	0.992479	0.994571	
8	0.998699	0.998208	0.998353	0.995697	0.99695	
9	0.998907	0.998261	0.998995	0.996434	0.997264	
10	0.9978	0.989747	0.555781	0.996471	0.937231	

Prince of Songkla University
Pattani Campus

ภาคผนวก ค

แบบรูปฟีโบนัชชีและแบบจำลองการเติบโตของดอกทานตะวัน สายพันธุ์อะควอรา 6

มุฮัมหมัดอาลาวี บุกู^{1,*} และ ภาชวัญ ธิยาพันธ์²

^{1,2}ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี

¹Rawee_512@hotmail.com, ²Pakwan.r@psu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนฟีโบนัชชีกับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวันและจำนวนกลีบของดอกทานตะวัน ด้วยวิธีการนับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันในทิศทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกาและนับจำนวนกลีบของดอกทานตะวัน

นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาการเติบโตของดอกทานตะวันโดยการเก็บข้อมูลความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันและใช้แบบจำลองการเติบโตด้วยฟังก์ชันลักษณะคล้ายตัว S หาผลเฉลยทั่วไปและผลเฉลยวิธีเชิงตัวเลขแบบไปข้างหน้าของแบบจำลองดังกล่าว พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลเฉลยกับข้อมูลจริง

Mathematics Subject Classification: 11B39, 91B62

คำสำคัญ: แบบรูปฟีโบนัชชี แบบจำลองการเติบโต ดอกทานตะวัน เส้นเวียนกันหอย

1 บทนำ

เป็นเวลามากกว่าสี่ร้อยปีมาแล้วที่นักวิทยาศาสตร์สนใจแบบรูป (pattern) ที่เกิดขึ้นในพืช โดยศึกษาการจัดเรียงของฟิลลา (phylla) ได้แก่ ดอกย่อย ใบ เมล็ด สะเก็ด เป็นต้น ซึ่งการจัดเรียงดังกล่าวเรียกว่า ฟิลโลแทกซิส (phyllotaxis) แบบรูปที่เกิดขึ้นในการจัดเรียงดังกล่าวส่วนใหญ่จะเป็นแบบรูปเส้นเวียนกันหอย (spiral) การจัดเรียงแบบรูปเส้นเวียนกันหอยจะมีสองทิศทาง คือ ทิศตามเข็มนาฬิกาและทิศทวนเข็มนาฬิกา [5, 8, 9, 11]



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 1 ตัวอย่างแบบรูปฟีโบนัชชีที่พบในธรรมชาติ (ก) สับปะรด (ข) ดอกทานตะวัน (ค) ลูกสน ที่มา : [1]

* Corresponding author

สำหรับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงส่วนประกอบต่างๆ ของพืชที่สามารถเห็นได้บ่อย เช่น จำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงตาสับปะรด จำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวัน จำนวนเส้นเวียนกันหอยบนลูกสน ดังรูปที่ 1 ซึ่งจำนวนเหล่านั้นเป็นจำนวนหนึ่งในลำดับฟีโบนัชชี จำนวนฟีโบนัชชีสามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ สำหรับ $n \geq 2$ เมื่อ $F_1 = F_2 = 1$ ซึ่งแต่ละพจน์เกิดจากนำผลรวมสองพจน์ก่อนหน้าและสามารถเขียนเป็นลำดับดังนี้ $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots\}$ เรียกแบบรูปที่เป็นจำนวนในลำดับฟีโบนัชชีว่า **แบบรูปฟีโบนัชชี** [5, 8, 9, 11]

งานวิจัยฉบับนี้ส่วนแรกสนใจแบบรูปที่เกิดขึ้นบนดอกทานตะวัน ซึ่งดอกทานตะวันมีลักษณะดอกเป็นแบบช่อดอก (inflorescence) ที่มีดอกย่อย (florets) เรียงบนฐานรองดอกที่แผ่กว้างและไม่มีก้านดอกย่อย (head) อีกทั้งมีการอัดตัวแน่นของดอกย่อยหลายร้อยดอกที่ดูเหมือนเป็นดอกเดียว [2] นอกจากนี้การเติบโตของดอกทานตะวันมีด้วยกัน 2 สถานะ คือ สถานะแรก เป็นการสร้างดอกที่ปลายยอดและเริ่มมีการขยายตัวของฐานดอกดังรูปที่ 2 (ก) สถานะที่สอง เป็นการสร้างเมล็ดโดยมีการสร้างจากภายนอกสุดของดอกทานตะวันเข้าสู่จุดศูนย์กลางของดอกทานตะวัน [11] ซึ่งในกระบวนการนี้มีการขยายตัวของเมล็ดและฐานของดอกทานตะวันดังรูปที่ 2 (ข)



(ก)



(ข)

รูปที่ 2 การเติบโตของดอกทานตะวันในระยะที่มองเห็นดอกได้ชัดเจน (ก) สถานะแรก (ข) สถานะที่สอง
ที่มา : ภาพถ่ายโดยผู้วิจัย

ในปี ค.ศ. 2002 Carrillo และ Gonzalez [6] ศึกษาแบบจำลองที่สามารถอธิบายการเติบโตของพืชและการเติบโตของสิ่งมีชีวิตด้วยฟังก์ชันการเติบโตในลักษณะต่างๆ รวมทั้งได้ทดสอบประสิทธิภาพของแบบจำลอง 2 วิธี คือ mean absolute percent error และ root mean square percent error และพบว่าการสุ่มเลือกค่าพารามิเตอร์ที่เกิดจากการหาผลเฉลยของแบบจำลองจะง่ายกว่า แต่การตรวจสอบความผิดพลาดดังกล่าวนี้ไม่สามารถบอกระดับความเชื่อมั่นของข้อมูลได้

ต่อมาในปี 2009 Chuai-Aree [7] ศึกษาแบบจำลองการเติบโตของลำต้นของพืชสองแบบ คือ แบบฟังก์ชันเลขยกกำลัง (exponential function) และแบบฟังก์ชันลักษณะคล้ายตัว S (sigmoid function) สำหรับฟังก์ชันเลขยกกำลังจะอยู่ใน

รูป $\frac{dy}{dt} = ky$ เมื่อ y คือ ค่าของการเติบโตและ k คือ อัตราการเติบโต ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันที่เพิ่มขึ้นอย่างไม่

สิ้นสุด อีกทั้งไม่สามารถอธิบายข้อมูลที่ $t \rightarrow \infty$ เพราะทำให้ค่าของข้อมูลเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว อีกทั้งฟังก์ชันหนึ่งเป็นฟังก์ชัน

ลักษณะคล้ายตัว S เขียนอยู่ในรูป $\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(1 - \frac{y}{u}\right)$ เมื่อ y คือ ค่าของการเติบโตและ α, u คือ พารามิเตอร์ของ

ฟังก์ชันการเติบโต กล่าวคือ ในช่วงแรกการเติบโตมีการเพิ่มเหมือนกับฟังก์ชันเลขยกกำลังและเมื่อถึงจุดหนึ่งค่าของการเติบโตจะคงตัว นอกจากนี้เราได้แนะนำแบบจำลองสำหรับการพยากรณ์การเติบโตในรูปฟังก์ชันลักษณะคล้ายตัว S ซึ่งสามารถพยากรณ์กับการเติบโตทุกส่วนของต้นไม้ แม้จะมีระยะเวลาที่ยาวนาน

ในงานวิจัยฉบับนี้อีกส่วนหนึ่งผู้วิจัยศึกษาการเติบโตของดอกทานตะวันโดยการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันและใช้แบบจำลองฟังก์ชันการเติบโตที่เป็นฟังก์ชันลักษณะคล้ายตัว S เพื่ออธิบายการเติบโตของดอกทานตะวัน อีกทั้งทดสอบประสิทธิภาพของแบบจำลองด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด (least square method) [10]

2 วัตถุประสงค์

1. ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเส้นเวียนก้นหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา 6 กับจำนวนฟีโบนอกชีและความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกลีบของดอกทานตะวันในแต่ละชั้นสายพันธุ์อะควอรา 6 กับจำนวนฟีโบนอกชี
2. ศึกษาและเก็บข้อมูลการเติบโตของดอกทานตะวันโดยวัดความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา 6 และใช้แบบจำลองการเติบโตของดอกทานตะวันด้วยฟังก์ชันลักษณะคล้ายตัว S พร้อมทั้งหาผลเฉลยของแบบจำลองดังกล่าวและเปรียบเทียบกับข้อมูลจริงของความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน

3 วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้ ได้ปลูกต้นทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา 6 ซึ่งเป็นสายพันธุ์ผลิตน้ำมันดอกทานตะวัน จำนวน 85 ต้นโดยแยกออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนนับกลีบดอกทานตะวัน 45 ต้นและส่วนการประมาณการเติบโตของดอกทานตะวัน 40 ต้น

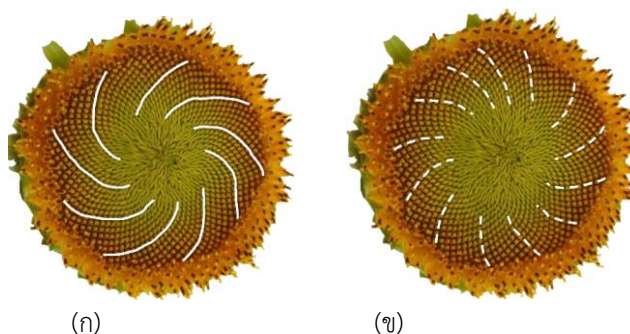
1. นับจำนวนกลีบดอกของทานตะวันในแต่ละชั้นซึ่งแต่ละดอกมีจำนวนกลีบดอก 5 ชั้น ดังรูปที่ 3 ในการพิจารณา กลีบดอกแต่ละชั้นให้สังเกตกลีบดอกที่ว่างไม่ซ้อนทับกันหรืออาจจะวางซ้อนทับกันเพียงเล็กน้อย



รูปที่ 3 กลีบดอกและกลีบเลี้ยงของดอกทานตะวัน (ก) กลีบดอกชั้นที่ 1 (ข) กลีบดอกชั้นที่ 2 (ค) กลีบดอกชั้นที่ 3 (ง) กลีบดอกชั้นที่ 4 (จ) กลีบดอกชั้นที่ 5 ที่มา : ภาพถ่ายโดยผู้วิจัย

2. นับจำนวนเส้นเวียนก้นหอยของการจัดเรียงของเมล็ดบนดอกทานตะวันในทิศทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 4

3. เก็บข้อมูลจากการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันตั้งแต่ระยะที่เริ่มเห็นดอกทานตะวันชัดเจน (ตั้งแต่วันที่ 46 ถึง วันที่ 110 ของการปลูก) มีรายละเอียดดังนี้



รูปที่ 4 ทิศของแบบรูปเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวัน (ก) เส้นทึบแสดงทิศตามเข็มนาฬิกา (ข) เส้นประแสดงทิศทวนเข็มนาฬิกา ที่มา : ภาพถ่ายโดยผู้วิจัย

3.1 กำหนดกลุ่มตัวอย่าง

3.1.1 กำหนดจำนวนดอกทานตะวันที่จะสุ่มวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันโดยการสุ่มอย่างง่าย (simple random sampling) [4] ดังสูตรต่อไปนี้

$$n = \frac{NZ^2S^2}{Ne^2 + Z^2S^2} \quad (4)$$

เมื่อ n คือ จำนวนดอกทานตะวันที่สุ่ม

N คือ จำนวนดอกทานตะวันทั้งหมด

e คือ ค่าความผิดพลาดของการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน

S^2 คือ ความแปรปรวน

Z คือ ระดับความเชื่อมั่น

ในการกำหนดค่า S^2 คือ ความแปรปรวนของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางที่ได้จาก pilot survey ซึ่งคำนวณโดย

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

เมื่อ N คือ จำนวนของข้อมูล

x_i คือ ข้อมูลตัวที่ i

\bar{x} คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมด

ดังนั้น จากการสำรวจรอบแรกจะได้ค่า $s^2 = 0.228867$

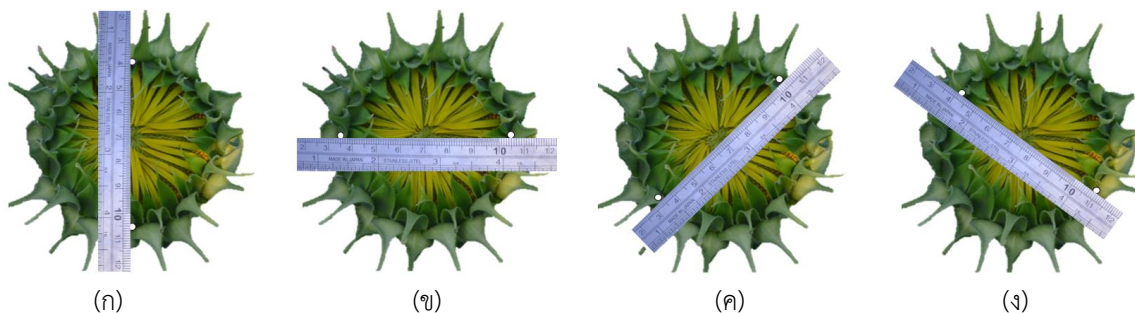
3.1.2 พิจารณาระดับความเชื่อมั่นที่ 95% นั่นคือ $Z = 1.96$ และกำหนดความผิดพลาดของความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น 0.5 เซนติเมตร ($e = 0.5$) ซึ่งจำนวนดอกทานตะวันทั้งหมดเป็น 40 ต้น ($N = 40$) แล้วนำมาแทนใน (4) จะได้

$$\begin{aligned} n &= \frac{40(1.96)^2(0.228867)}{40(0.5)^2 + (1.96)^2(0.228867)} \\ &= 3.2326 \end{aligned}$$

นั่นคือ จะต้องใช้ขนาดตัวอย่างของดอกทานตะวันที่จะวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของแต่ละวันอย่างน้อย 4 ต้น

3.2 วัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันตั้งแต่ระยะที่เริ่มเห็นดอกทานตะวันชัดเจน (ตั้งแต่วันที่ 46 ถึง วันที่ 110 ของการปลูก)

3.2.1 วัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันในแต่ละต้นจำนวน 4 ครั้งดังรูปที่ 5 แล้วนำมาหาค่าเฉลี่ยของการวัดทั้ง 4 ครั้ง จะได้ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ยของดอกทานตะวันต้นนั้น



รูปที่ 5 ทิศทางการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันในแต่ละดอก ที่มา : ภาพถ่ายโดยผู้วิจัย

3.2.2 นำค่าเฉลี่ยของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันในแต่ละต้นมาหาค่าเฉลี่ยจะได้ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ยในวันนั้น ๆ ทำแบบนี้ตั้งแต่วันที่ 46 จนถึงวันที่ 110 ของการปลูก

4. พยากรณ์การเติบโตของดอกทานตะวันโดยใช้ฟังก์ชันการเติบโตในรูป

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(1 - \frac{y}{u} \right) \quad (1)$$

เมื่อ $\frac{dy}{dt}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางขึ้นอยู่กับเวลา (วัน)

α คือ อัตราการเติบโต

y คือ ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน (เซนติเมตร)

u คือ ความยาวสูงสุดของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน (เซนติเมตร)

ผลเฉลยทั่วไปของ (1) คือ

$$y = \frac{u}{1 + \beta e^{-\alpha t}} \quad \text{เมื่อ } \beta \text{ คือ ค่าคงที่} \quad (2)$$

และจาก (1) สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีเชิงตัวเลข (numerical solution) ของการประมาณการไปข้างหน้า (forward solution) โดยกำหนดให้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{t+1} - y_t}{\Delta t} \quad (3)$$

นำ (3) แทนใน (1) จะได้ว่า ผลเฉลยด้วยวิธีเชิงตัวเลขแบบไปข้างหน้า (Forward numerical method) คือ

$$y_{t+1} = \alpha y_t \left(1 - \frac{y_t}{u} \right) \Delta t + y_t$$

เมื่อ y_t คือ ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน ณ วันที่ t (เซนติเมตร)

y_{t+1} คือ ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน ณ วันที่ $t+1$ (เซนติเมตร)

u คือ ความยาวสูงสุดของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน(เซนติเมตร)

α คือ อัตราการเติบโตของดอกทานตะวัน

Δt คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของเวลา (วัน)

จาก (2) มีค่าพารามิเตอร์ 2 ตัว นั่นคือ β และ α ซึ่งค่า α เป็นอัตราการเติบโตของดอกทานตะวันที่มีผลต่อผลเฉลยโดยวิธีเชิงตัวเลขและผลเฉลยทั่วไป สำหรับ β เป็นค่าคงตัวใดๆ ที่มีผลต่อผลเฉลยทั่วไปเท่านั้น นอกจากนี้การเลือกค่า β และ α ที่ให้ความแม่นยำของแบบจำลองสูง (ความแม่นยำ (R^2) มากกว่า 0.95 หรือ ระดับความเชื่อมั่นมากกว่า 95%) โดยทดสอบความแม่นยำของแบบจำลองด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method) [10] นั่นคือ

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

เมื่อ R^2 คือ ประสิทธิภาพของแบบจำลองการเติบโตของดอกทานตะวัน

y_i คือ ข้อมูลความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันที่เก็บในวันที่ i

\hat{y}_i คือ ข้อมูลความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันที่เกิดจากการประมาณด้วยแบบจำลองในวันที่ i

\bar{y} คือ ค่าเฉลี่ยความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันที่เก็บในวันที่ i

4 ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้จะเสนอผลการวิจัย 3 ส่วนดังนี้

1. ผลการนับจำนวนกลีบดอกในแต่ละชั้นของดอกทานตะวันจำนวน 45 ต้น
2. ผลการนับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดบนดอกทานตะวันจำนวน 45 ต้น
3. ผลการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันตั้งแต่วันที่ 46 ถึงวันที่ 110 ของการปลูก และผล

การพยากรณ์ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันตั้งแต่วันที่ 46 ถึงวันที่ 110 โดยใช้แบบจำลองการเติบโตและวิธีการเชิงตัวเลขแบบไปข้างหน้า

4.1 ผลการนับจำนวนกลีบดอกในแต่ละชั้นของดอกทานตะวัน

ผลการนับจำนวนกลีบของดอกทานตะวันในแต่ละชั้นมีรายละเอียด ดังนี้ ชั้นที่ 1 จำนวนกลีบที่น้อยที่สุดและมากที่สุดเป็น 8 กลีบและ 13 กลีบ ตามลำดับ นอกจากนี้จำนวนกลีบที่มีจำนวนต้นมากที่สุดเป็น 13 กลีบ สำหรับชั้นที่ 2 จำนวนกลีบที่น้อยที่สุดและมากที่สุดเป็น 8 กลีบและ 15 กลีบ ตามลำดับ นอกจากนี้จำนวนกลีบที่มีจำนวนต้นมากที่สุดเป็น 13 กลีบ สำหรับชั้นที่ 3 จำนวนกลีบที่น้อยที่สุดและมากที่สุดเป็น 8 กลีบและ 22 กลีบ ตามลำดับ ซึ่งมีการกระจายจำนวนกลีบเพิ่มขึ้น นอกจากนี้จำนวนกลีบที่มีจำนวนต้นมากที่สุดเป็น 21 กลีบ สำหรับจำนวนกลีบชั้นที่ 4 และ 5 สามารถสังเกตจากตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่า จำนวนกลีบในแต่ละชั้นที่มีความถี่มากที่สุดเป็น 13, 13, 21, 34 และ 55 ตามลำดับ ซึ่งจำนวนดังกล่าวเป็นจำนวนชุดหนึ่งในลำดับฟีโบนัชชี ดังตารางที่ 1 และตารางที่ 2

ตารางที่ 1 จำนวนกลีบของดอกทานตะวันชั้นที่ 1 – 3

จำนวนกลีบดอก	8	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ชั้นที่ 1 (ต้น)	1	2	4	38	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ชั้นที่ 2 (ต้น)	1	2	5	35	1	1	-	-	-	-	-	-	-
ชั้นที่ 3 (ต้น)	1	-	1	4	-	3	1	3	2	3	4	22	1

ตารางที่ 2 จำนวนกลีบของดอกทานตะวันชั้นที่ 4 – 5

จำนวนกลีบดอก	25	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	39	40	41	42
ชั้นที่ 4 (ต้น)	1	4	1	1	3	4	3	15	3	5	1	1	3	-	-
จำนวนกลีบดอก	38	39	40	42	43	44	45	47	48	49	50	51	52	53	55
ชั้นที่ 5 (ต้น)	1	2	3	1	1	4	2	5	2	2	4	1	1	4	12

4.2 ผลการนับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดบนดอกทานตะวันจำนวน 45 ต้น

ผลการนับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดมีรายละเอียดดังนี้ จำนวนน้อยสุดของจำนวนเส้นเวียนกันหอยและจำนวนมากสุดของจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็น 55 เส้นและ 89 เส้นตามลำดับ นอกจากนี้จำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในทิศตามเข็มนาฬิกาที่มี 55 เส้นมีทั้งหมด 23 ต้น มีจำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศตามเข็มนาฬิกา 76 เส้นมีทั้งหมด 1 ต้นและจำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศตามเข็มนาฬิกา 89 เส้นมีทั้งหมด 21 ต้น สำหรับจำนวนน้อยสุดของจำนวนเส้นเวียนกันหอยและจำนวนมากสุดของจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็น 55 เส้นและ 144 เส้น ตามลำดับ อีกทั้งจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดในทิศตามเข็มนาฬิกา มี 55 เส้นมีทั้งหมด 14 ต้น จำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทวนเข็มนาฬิกา 89 เส้นมีทั้งหมด 23 ต้น จำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทวนเข็มนาฬิกา 123 เส้นมีทั้งหมด 1 ต้นและจำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทวนเข็มนาฬิกา 144 เส้นมีทั้งหมด 7 ต้น หากเขียนเป็นคู่อันดับ (m, n) เมื่อ m คือ จำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศตามเข็มนาฬิกาและ n คือ จำนวนเส้นเวียนกันหอยในทิศทวนเข็มนาฬิกา จะได้ว่า คู่อันดับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ด $(55, 89)$ มีทั้งหมด 23 ต้น คู่อันดับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ด $(76, 123)$ มีทั้งหมด 1 ต้น คู่อันดับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ด $(89, 144)$ มีทั้งหมด 7 ต้น และคู่อันดับจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ด $(89, 55)$ มีทั้งหมด 14 ต้น จะเห็นได้ว่า จำนวนเส้นเวียนกันหอยในแต่ละทิศทางและคู่อันดับ (m, n) เป็นจำนวนชุดหนึ่งในลำดับฟีโบนัชชี ดังตารางที่ 3 และตารางที่ 4

ตารางที่ 3 จำนวนเส้นเวียนกันหอยในแต่ละทิศทาง

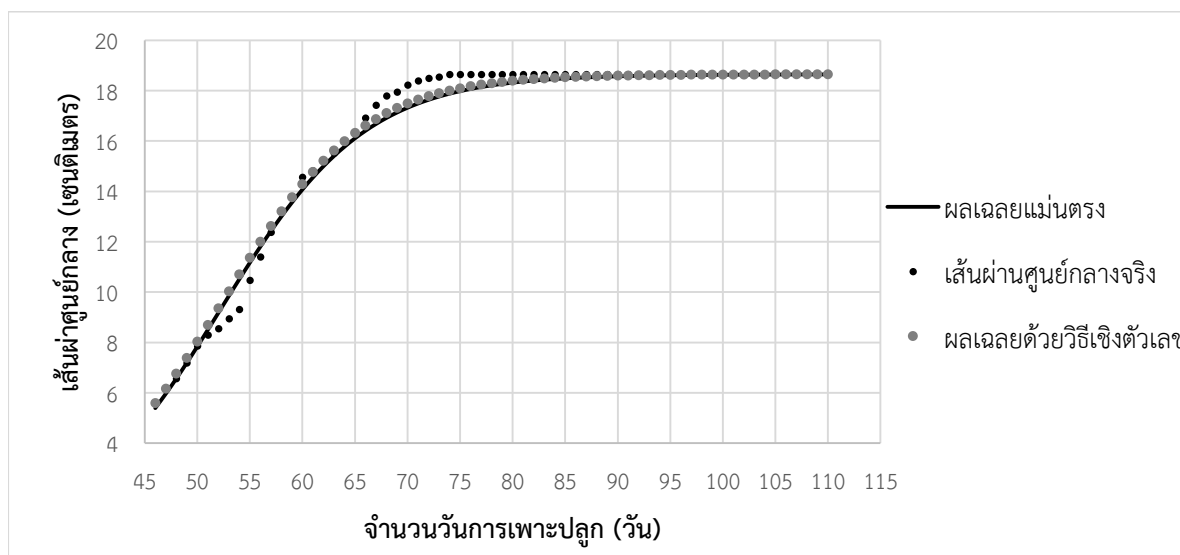
จำนวนเส้นเวียนกันหอย	55	76	89	123	144
ทิศตามเข็มนาฬิกา (ต้น)	23	1	21	-	-
ทิศทวนเข็มนาฬิกา (ต้น)	14	-	23	1	7

ตารางที่ 4 คู่อันดับเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวัน

คู่อันดับเส้นเวียนกันหอย	(55, 89)	(76, 123)	(89, 144)	(89, 55)
จำนวนต้น	23	1	7	14

4.3 ผลการวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันตั้งแต่วันที่ 46 ถึงวันที่ 110 ของการปลูก

การพยากรณ์การเติบโตของดอกทานตะวันจะหาผลเฉลยแบบด้วยวิธีเชิงตัวเลขและผลเฉลยแม่นยำตรง โดยการเลือกค่า $\alpha = 0.1445$, $\beta = 2.84$, $\Delta t = 1$ และ $u = 18.65$ ส่งผลให้ค่า $R^2 = 0.98998$ และ $R^2 = 0.988546$ ของผลเฉลยด้วยวิธีเชิงตัวเลขและผลเฉลยแม่นยำตรงตามลำดับ แล้วนำผลเฉลยมาเปรียบเทียบกับค่าจริงดังรูปที่ 6 และตารางที่ 5



รูปที่ 6 กราฟการเจริญของดอกทานตะวัน เมื่อค่า $\alpha = 0.1445$, $\beta = 2.84$, $\Delta t = 1$ และ $u = 18.65$

5 อภิปรายผล

การเก็บข้อมูลจำนวนกลีบของดอกทานตะวันในแต่ละชั้น จำนวนเส้นเวียนกันหอยในแต่ละทิศทางและคู่อันดับเส้นเวียนกันหอยสามารถสรุปได้ว่า จำนวนกลีบของดอกทานตะวันในแต่ละชั้น จำนวนเส้นเวียนกันหอยในแต่ละทิศทางและคู่อันดับเส้นเวียนกันหอยที่มีจำนวนต้นมากที่สุดเป็นจำนวนชุดหนึ่งของลำดับฟีโบนัชชี

สำหรับการประมาณการเติบโตของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันด้วยผลเฉลยแบบวิธีเชิงตัวเลขที่เลือกค่า $\alpha = 0.1445$ และส่งผลให้ค่า $R^2 = 0.98998$ นั่นคือ มีระดับความเชื่อมั่น 98.998% สังเกตได้ว่า ค่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเริ่มเจริญเติบโตช้าลงตั้งแต่วันที่ 65-89 และเริ่มคงตัวตั้งแต่วันที่ 90

นอกจากนี้การประมาณการเติบโตของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันด้วยผลเฉลยแม่นยำตรงเลือกค่า $\alpha = 0.1445$ และ $\beta = 2.84$ ส่งผลให้ค่า $R^2 = 0.988546$ นั่นคือ มีระดับความเชื่อมั่น 98.8546% สังเกตได้ว่า ค่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเริ่มเจริญเติบโตช้าลงตั้งแต่วันที่ 65-89 และเริ่มคงตัวตั้งแต่วันที่ 90 สำหรับข้อมูลจริงความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวันเริ่มคงตัวตั้งแต่วันที่ 73 เป็นต้นไป ดังนั้นแบบจำลองการพยากรณ์การเติบโตของดอกทานตะวันสายพันธุ์คอควอรา 6 สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบผลเฉลยเชิงตัวเลขและผลเฉลยแม่นยำตรงตามลำดับ คือ

$$y_{t+1} = 0.1445y_t \left(1 - \frac{y_t}{18.65}\right) + y_t; y_1 = 5.6$$

$$y(t) = \frac{18.65}{1 + 2.84e^{-0.1445(t-45)}}; t \geq 46$$

ตารางที่ 5 ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของดอกทานตะวัน

วันที่	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
ข้อมูลจริง (ซม.)	5.6	6.175	6.575	7.2	7.875	8.3	8.55	8.95	9.325	10.475	11.4	12.388	13.2
ผลเฉลี่ยทั่วไป (ซม.)	5.6	6.166	6.763	7.386	8.03	8.691	9.361	10.035	10.705	11.364	12.006	12.624	13.213
วิธีหาค่าเฉลี่ย (ซม.)	5.393	5.964	6.565	7.192	7.84	8.503	9.174	9.848	10.515	11.171	11.808	12.421	13.006
วันที่	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
ข้อมูลจริง (ซม.)	13.8	14.575	14.825	15.225	15.525	15.95	16.35	16.925	17.425	17.8	17.95	18.225	18.4
ผลเฉลี่ยทั่วไป (ซม.)	13.77	14.29	14.773	15.217	15.622	15.988	16.318	16.613	16.875	17.107	17.312	17.491	17.648
วิธีหาค่าเฉลี่ย (ซม.)	13.558	14.075	14.555	14.998	15.404	15.773	16.108	16.409	16.678	16.919	17.133	17.323	17.49
วันที่	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
ข้อมูลจริง (ซม.)	18.5	18.55	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65
ผลเฉลี่ยทั่วไป (ซม.)	17.785	17.904	18.008	18.097	18.175	18.242	18.299	18.349	18.392	18.429	18.46	18.487	18.511
วิธีหาค่าเฉลี่ย (ซม.)	17.638	17.767	17.881	17.981	18.068	18.144	18.211	18.269	18.319	18.363	18.401	18.434	18.463
วันที่	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
ข้อมูลจริง (ซม.)	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65
ผลเฉลี่ยทั่วไป (ซม.)	18.531	18.548	18.563	18.575	18.586	18.595	18.603	18.61	18.616	18.621	18.625	18.628	18.632
วิธีหาค่าเฉลี่ย (ซม.)	18.488	18.51	18.528	18.545	18.559	18.571	18.582	18.591	18.599	18.606	18.612	18.617	18.621
วันที่	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
ข้อมูลจริง (ซม.)	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65	18.65
ผลเฉลี่ยทั่วไป (ซม.)	18.634	18.637	18.638	18.64	18.642	18.643	18.644	18.645	18.646	18.646	18.647	18.647	18.648
วิธีหาค่าเฉลี่ย (ซม.)	18.625	18.628	18.631	18.634	18.636	18.638	18.64	18.641	18.642	18.643	18.644	18.645	18.646

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณอาจารย์ ดร.สมพร ช่วยอารีย์ ที่คอยแนะนำการทดลองและขอบคุณทุนสนับสนุนวิจัยของบัณฑิตวิทยาลัยของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์และทุนจากศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ที่คอยสนับสนุนงบประมาณเพื่อการวิจัย และขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่คอยให้คำแนะนำและอำนวยความสะดวกในการวิเคราะห์ข้อมูล อีกทั้งขอขอบคุณคณาจารย์แผนกวิชาเทคโนโลยีการเกษตรที่อนุเคราะห์สถานที่เพื่อการเพาะปลูกต้นทานตะวัน

6 บรรณานุกรม

- [1] พรรณไม้ไทย. 1999. ฟีโบนัคซีกับธรรมชาติ. สืบค้นจาก:<http://www.panmai.com/Tip/Tip14/Tip14.shtml>. [17 มิถุนายน2558]
- [2] ลิลลี่ กาวิฑี. 2546. การเปลี่ยนแปลงทางสัณฐานและพัฒนาการของพืช, สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กรุงเทพมหานคร, หน้า 163-174.
- [3] สำเร็จ ชื่นรังสิกุล. 2555. สมการเชิงอนุพันธ์, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร, หน้า 11 -72
- [4] สุเมธ สมภักดี. 2550. ทฤษฎีการเลือกตัวอย่าง, สำนักพิมพ์ประกายประกาย, กรุงเทพมหานคร, หน้า 18 – 94.
- [5] Alan, C. and Patrick, D. 2005. Plants and Fibonacci. Journal of Statistical Physics. 121, 937-967
- [6] Carrillo, M. and Gonzalez, J. 2002. A New Approach to Modelling Sigmoidal Curves. Technological Forecasting and Social Change. 69, 233-241.
- [7] Chuai-Aree, S. 2009. Modeling, Simulation and Visualization of Plant Growth. Ph.D. Thesis, Ruprecht-Karls Universität at Heidelberg.
- [8] Jay, K. 2004. Growth in Plants: A Study in Number. Forma. 19, 335 – 354.
- [9] Jean, R.V. 1994. Phyllotaxis A Systemic Study in Plant Morphogenesis, the Press Syndicate of the University of Cambridge, New York, U.S.A., pp. 9-48.
- [10] Julian, J. 2005. Texts in Statistical Science Linear Models with R, Chapman&Hall/Crc, New York, U.S.A., pp. 11-24.
- [11] Pennybacker, M. 2013. A Numerical Study of Pattern Forming Fronts in Phyllotaxis. Ph.D. Thesis, University of Arizona.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ สกุล นายมุฮัมหมัดอาลาวี บุกู

รหัสประจำนักศึกษา 5620320703

วุฒิการศึกษา

วุฒิ	ชื่อสถาบัน	ปีที่สำเร็จการศึกษา
วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์)	มหาวิทยาลัยทักษิณ	2554

ทุนการศึกษา (ที่ได้รับในระหว่างเรียน)

- ทุนสนับสนุนการวิจัยของบัณฑิตวิทยาลัย
- ทุนจากศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์
- ทุนสนับสนุนค่าธรรมเนียมการศึกษาระดับบัณฑิตศึกษาปริญญาโท

Proceeding

มุฮัมหมัดอาลาวี บุกู และ ภาขวัญ ธิยาพันธ์. 2559. แบบรูปพีโนนกี้และแบบจำลองการเติบโตของดอกทานตะวันสายพันธุ์อะควอรา-6. การประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี 2559 (ครั้งที่ 21) และการประชุมวิชาการคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และประยุกต์ประจำปี 2559. อาคารมหามกุฏจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร, 23 – 25 พฤษภาคม 2559, 187-196.