



ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การจำลอง และการสร้างภาพของดินถล่ม
Mathematical Model, Simulation and Visualization of Landslide

กัณณพนต์ ธรรมหิเวศ
Kunnapon Thumhiwaid

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
Master of Science in Applied Mathematics
Prince of Songkla University

2559

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์



ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การจำลอง และการสร้างภาพของดินถล่ม
Mathematical Model, Simulation and Visualization of Landslide

กัณณพนต์ ธรรมหิเวศ
Kunnapon Thumhiwaid

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
Master of Science in Applied Mathematics

Prince of Songkla University

2559

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

ชื่อวิทยานิพนธ์ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การจำลอง และการสร้างภาพของดินถล่ม
 ผู้เขียน นายกัณณพนธ์ ธรรมทีเวช
 สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

คณะกรรมการสอบ

.....
 (ดร.สมพร ช่วยอารีย์)

..... ประธานกรรมการ
 (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ อินทรสิทธิ์)

..... กรรมการ
 (ดร.สมพร ช่วยอารีย์)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

.....
 (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนิรุทธ ผลอ่อน)

..... กรรมการ
 (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนิรุทธ ผลอ่อน)

..... กรรมการ
 (ดร.อัครชัย เอื้ออนันตสันต์)

..... กรรมการ
 (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เสนห์ รุจิวรรณ)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ อนุมัติให้บัณฑิตวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน
 หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

.....
 (รองศาสตราจารย์ ดร.ธีระพล ศรีชนะ)
 คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

ขอรับรองว่า ผลงานวิจัยนี้มาจากการศึกษาวิจัยของนักศึกษาเอง และได้แสดงความขอบคุณบุคคลที่มีส่วนช่วยเหลือแล้ว

ลงชื่อ

(ดร.สมพร ช่วยอารีย์)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ลงชื่อ

(นายกัณณพนต์ ธรรมหิเวศ)

นักศึกษา

Prince of Songkla University
Pattani Campus

ข้าพเจ้าขอรับรองว่า ผลงานวิจัยนี้ไม่เคยเป็นส่วนหนึ่งในการอนุมัติปริญญาในระดับใดมาก่อน และไม่ได้ถูกใช้ในการยื่นขออนุมัติปริญญาในขณะนี้

ลงชื่อ

(นายกัณณพนต์ ธรรมหิเวศ)

นักศึกษา

Prince of Songkla University
Pattani Campus

ชื่อวิทยานิพนธ์	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การจำลอง และการสร้างภาพของดินถล่ม
ผู้เขียน	นายกัณณพนธ์ ธรรมทีเวช
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2559

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างดินโดยพิจารณาปัจจัยด้านปริมาณน้ำในดินและความลาดชันที่มีผลต่อการถล่มของดิน ศึกษาการเปลี่ยนรูปของลาดดินที่มีผลจากแรงภายนอก การกระจายความเครียดและเกณฑ์การวิบัติของลาดดินด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และคำนวณหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลเฉลยเชิงตัวเลข ขั้นตอนวิธีและการสร้างภาพ 3 มิติโดยซอฟต์แวร์ SoilFE 1.0 ซึ่งได้ถูกพัฒนาขึ้นโดยใช้ซอฟต์แวร์ Lazarus และ OpenGL ซอฟต์แวร์นี้สามารถใช้วิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินและประเมินการเกิดดินถล่ม และสามารถนำไปใช้วิเคราะห์กับพื้นที่อื่น ๆ ได้ ซอฟต์แวร์นี้สามารถนำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มาแสดงให้เห็นว่าค่าความครากมีค่าแปรผันตามปริมาณน้ำในดินและพื้นที่บริเวณไหล่เขาจะมีค่าความครากมากกว่าพื้นที่ดอนหรือพื้นที่อื่น ๆ ซึ่งพื้นที่นี้จะมีโอกาสวิบัติมากที่สุด

Thesis Title	Mathematical Model, Simulation and Visualization of Landslide
Author	Mr.Kunnapon Thumhiwaid
Major Program	Applied Mathematics
Academic Year	2016

ABSTRACT

In this research, we propose a mathematical model for analyzing the soil structure by water content and slope factors that cause to the landslide problem. A deformation of slope is the result of external forces. A distribution of stress that occurs along the slope and slope failure criteria are based on mathematical model and computed by the finite element method. The numerical solution shows the result from mathematical model, algorithm and visualization in three-dimensional space by the investigating software namely SoilFE version 1.0 programmed by Lazarus software and OpenGL library. SoilFE 1.0 can analyze the shear strength along slope and landslide evaluation. The software can be applied for other regions. An application of this numerical method could be seen that the yield varies according to the water content. Also a foot of the hill has a yield more than upland and other areas, so that this area has the biggest opportunities to fail.

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.สมพร ช่วยอารีย์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลักที่ท่านได้กรุณาให้ความรู้ คำแนะนำ คำปรึกษาต่าง ๆ อีกทั้งยังให้กำลังใจที่ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.อนิรุทธ ผลอ่อน อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วมที่ท่านได้กรุณาช่วยให้คำปรึกษา และคำแนะนำที่ดี ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ กองทุนวิจัยคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี โครงการเสริมสร้างความเข้มแข็งและการมีส่วนร่วมในภาคใต้ของประเทศไทย (STEP) โครงการความร่วมมือเพื่อการพัฒนาเชิงพื้นที่จังหวัดสงขลาแบบสร้างสรรค์ (MOU ม.อ.-สกว.) มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ และศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ (CEM) สำหรับเงินทุนสนับสนุนวิทยานิพนธ์นี้

ท้ายนี้ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบิดา มารดาและภรรยาของผู้วิจัยที่คอยให้กำลังใจและคอยช่วยเหลือให้คำปรึกษาในเรื่องต่าง ๆ ตลอดช่วงระยะเวลาที่ทำวิทยานิพนธ์นี้ ทำให้ผู้วิจัยมีกำลังใจที่จะทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

กัณณพนต์ ธรรมหิเวศ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	(5)
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	(6)
กิตติกรรมประกาศ	(7)
สารบัญ	(8)
สารบัญตาราง	(10)
สารบัญภาพ	(11)
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
1.2 วัตถุประสงค์งานวิจัย	7
บทที่ 2 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดิน	9
2.1 เสถียรภาพลาดดินและวิกฤตของเสถียรภาพลาดดิน	9
2.2 ตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดิน	14
2.3 ตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดิน	22
2.4 เกณฑ์การวิบัติลาดดิน	43
บทที่ 3 การวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	50
3.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดิน	51
3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดิน	70
3.3 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดิน	80
3.4 การวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	87
3.5 การวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินด้วยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์	89
3.6 อัลกอริทึมการวิเคราะห์การวิบัติของลาดดิน	92

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 การออกแบบและประดิษฐ์ซอฟต์แวร์	94
4.1 โมดูลประสานงานกับผู้ใช้	94
4.2 โมดูลจัดการข้อมูล	96
4.3 โมดูลประมวลผลข้อมูล	100
บทที่ 5 การจำลองเสถียรภาพลาดดิน	101
5.1 การจำลองเสถียรภาพลาดดินจากข้อมูลพื้นที่ตัวอย่าง	101
5.2 การจำลองเสถียรภาพลาดดินจากข้อมูลพื้นที่เขตอำเภอนาหวี จังหวัดสงขลา	114
บทที่ 6 สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	122
6.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์	122
6.2 การวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	122
6.3 การออกแบบและประดิษฐ์ซอฟต์แวร์	122
รายการอ้างอิง	124
ภาคผนวก ก ปริมาตรของทรงสี่หน้า และความไม่เป็นเอกฐานของเมทริกซ์ X	128
ภาคผนวก ข คู่มือการใช้งานโปรแกรม SoilFE 1.0	131
ภาคผนวก ค ผลงานที่ได้รับการตีพิมพ์ในรายงานการประชุมวิชาการ	150
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์	168

สารบัญตาราง

	หน้า	
ตารางที่ 1.1	สถานการณ์การเกิดดินถล่ม	1
ตารางที่ 2.1	ค่าโดยทั่วไปของสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินชนิดต่าง ๆ	16
ตารางที่ 4.1	รายละเอียดส่วนหัวของแฟ้มข้อมูลความสูงของภูมิประเทศ	97
ตารางที่ 4.2	รายละเอียดโครงสร้างข้อมูลเอลิเมนต์	98
ตารางที่ 4.3	รายละเอียดโครงสร้างข้อมูลของแข็ง	99
ตารางที่ 5.1	พิกัดของจุดยอดบนผิวดินตัวอย่าง	101
ตารางที่ 5.2	พารามิเตอร์ของดินตัวอย่าง	102
ตารางที่ 5.3	ผลการคำนวณปริมาณน้ำในดิน เมื่อกำหนดให้ความชื้นผืนเป็น 0 – 50 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง และอัตราเร็วการไหลออกเป็น 10 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง	105
ตารางที่ 5.4	พารามิเตอร์ของแบบจำลองวอน ไมซีส์	107
ตารางที่ 5.5	พารามิเตอร์ของแบบจำลองดรักเคอร์ – ปรากเกอร์	108
ตารางที่ 5.6	พารามิเตอร์ของแบบจำลองลาดี – ดั่งแคน	109
ตารางที่ 5.7	พารามิเตอร์ของแบบจำลองมัสซีโอคา – นากาอิ	110
ตารางที่ 5.8	พารามิเตอร์ของแบบจำลองโฮลส์บี	111
ตารางที่ 5.9	ผลการทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินเปียก	112
ตารางที่ 5.10	ค่าพารามิเตอร์ดินสำหรับการจำลองในเขตอำเภอนาหวี จังหวัดสงขลา	114
ตารางที่ 5.11	พารามิเตอร์สำหรับเกณฑ์วิบัติลาดดินในเขตอำเภอนาหวี จังหวัดสงขลา	117
ตารางที่ 5.12	พารามิเตอร์สำหรับการจำลองการเปลี่ยนรูปและความคราก	118
ตารางที่ 5.13	เปรียบเทียบรูปและความครากของลาดดินที่เป็นผลจากแรงกระทำภายนอก	119
ตารางที่ 5.14	ผลการคำนวณค่าความครากด้วยแบบจำลองดรักเคอร์ – ปรากเกอร์	121

สารบัญภาพ

	หน้า	
รูปที่ 1.1	ประเภทของการวิบัติ ประเภทของดิน และชั้นการวิบัติของลาดดิน	3
รูปที่ 1.2	ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบความปลอดภัยกับเวลา	4
รูปที่ 1.3	ตัวแบบความเสียหายที่เกิดขึ้นกับลาดดินในอุดมคติ	4
รูปที่ 1.4	การไหลของดิน ณ เมือง Sarno – Quindici ทางตอนใต้ของประเทศ อิตาลี และการไหลของดินบริเวณที่ราบลุ่มของภูเขา Tuostolo	5
รูปที่ 1.5	พื้นที่เสี่ยงภัยพิบัติดินถล่มบริเวณลุ่มน้ำ Himachal Pradesh ใน ประเทศอินเดีย	6
รูปที่ 1.6	ขั้นตอนการคาดการณ์การวิบัติของลาดดินที่มีผลจากปริมาณน้ำในดิน	8
รูปที่ 2.1	แรงกระทำต่อมวลดิน	10
รูปที่ 2.2	พื้นที่รับแรงเฉือน	11
รูปที่ 2.3	เส้นอัตรลักษณ์ของน้ำในดิน	13
รูปที่ 2.4	การไหลของน้ำใต้ดิน	14
รูปที่ 2.5	การไหลของน้ำผ่านเอลิเมนต์ดิน	17
รูปที่ 2.6	เอลิเมนต์ภายใต้สภาวะความเค้น และแรงจากมวล	23
รูปที่ 2.7	หน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy ภายใต้ความเค้นกระทำ	24
รูปที่ 2.8	การเปลี่ยนรูปหน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy	27
รูปที่ 2.9	การเปลี่ยนแปลงความยาวในทิศทาง x ของหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับ ระนาบ xy	28
รูปที่ 2.10	การเปลี่ยนแปลงความยาวในทิศทาง y ของหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับ ระนาบ xy	29
รูปที่ 2.11	การเปลี่ยนแปลงมุมของหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy	30
รูปที่ 2.12	การเปลี่ยนรูปของเอลิเมนต์เมื่อเกิดความเครียด σ_x , σ_y และ σ_z	34
รูปที่ 2.13	การเปลี่ยนแปลงความยาวของเอลิเมนต์เมื่อได้รับความเค้น σ_x	38

สารบัญภาพ (ต่อ)

	หน้า	
รูปที่ 2.14	การเปลี่ยนรูปหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy เมื่อความ เค้น τ_{xy} กระทำ	40
รูปที่ 2.15	การเปลี่ยนรูปหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xz เมื่อความ เค้น τ_{yx} กระทำ	41
รูปที่ 2.16	เส้นขอบเขตการวิบัติ และระนาบวิบัติ	43
รูปที่ 2.17	ความหมายเชิงกายภาพของค่าความเค้นไม่แปรเปลี่ยน	45
รูปที่ 2.18	พื้นผิวความครากวอน ไมซีส	46
รูปที่ 2.19	พื้นผิวความครากดรั๊กเคอร์ – ปรากเกอร์	47
รูปที่ 3.1	เอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า	51
รูปที่ 3.2	จุดกำเนิดของแกนพิกัด $x - y - z$ อยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลของเอลิเมนต์	59
รูปที่ 3.3	ส่วนประกอบของดิน	65
รูปที่ 3.4	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดิน	80
รูปที่ 3.5	กริดข้อมูลความสูงของภูมิประเทศ	81
รูปที่ 3.6	ภาพจากมุมมองด้านบนของแบบจำลองผิวดินที่ได้จากการประกอบกัน ของรูปสามเหลี่ยม	81
รูปที่ 3.7	ภาพจำลองผิวดิน	82
รูปที่ 3.8	สี่ผิวดินตามความสูงทั้งหมด	82
รูปที่ 3.9	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดินที่มีลักษณะเป็นรูปทรงตัน	83
รูปที่ 3.10	ตัวอย่างลาดดินที่ถูกแบ่งเป็นส่วนย่อยรูปทรงสี่เหลี่ยม	84
รูปที่ 3.11	ผลการแบ่งเอลิเมนต์ เมื่อกำหนด Iteration = 0, 1 และ 2	85
รูปที่ 3.12	แบบจำลองของลาดดินที่ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ด้วยค่า Iteration = 0, 1 และ 2	85
รูปที่ 3.13	รูปทรงสี่เหลี่ยม ที่สามารถแบ่งเป็นรูปทรงสี่หน้า	86
รูปที่ 3.14	เอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมประกอบด้วยจุดยอด 8 จุด	86

สารบัญภาพ (ต่อ)

	หน้า	
รูปที่ 3.15	การแบ่งเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมให้เป็นรูปทรงสี่หน้า จำนวน 5 รูป	86
รูปที่ 3.16	ฐานรองรับโครงสร้างของลาดดิน	89
รูปที่ 3.17	ฐานรองรับแบบล้อเลื่อน	89
รูปที่ 3.18	ฐานรองรับแบบข้อยึด	90
รูปที่ 3.19	ผังงานการวิเคราะห์และสร้างภาพดินโคลนถล่ม	93
รูปที่ 4.1	โมดูลของโปรแกรม SoilFE 1.0	94
รูปที่ 4.2	โมดูลประสานงานกับผู้ใช้	95
รูปที่ 4.3	โมดูลจัดการข้อมูล	96
รูปที่ 4.4	โครงสร้างข้อมูลเอลิเมนต์	98
รูปที่ 4.5	โครงสร้างข้อมูลของแข็ง	99
รูปที่ 4.6	ระบบโครงสร้างข้อมูลสำหรับจัดเก็บข้อมูลตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดิน	99
รูปที่ 5.1	ตัวอย่างลาดดินในมุมมองด้านบน และมุมมองทัศนียภาพ	101
รูปที่ 5.2	ลาดดินและระนาบตัดจากมุมมองด้านบน	102
รูปที่ 5.3	เส้นไอโซแสดงค่าปริมาณน้ำบนระนาบตัดด้านข้างของลาดดิน	103
รูปที่ 5.4	เส้นไอโซแสดงค่าปริมาณน้ำบนระนาบตัดด้านหน้าของลาดดิน	104
รูปที่ 5.5	ลาดดินตัวอย่างที่มีแรงภายนอกขนาด 10 PN	105
รูปที่ 5.6	เปรียบเทียบรูปทรงของลาดดินก่อนแรงกระทำ และหลังแรงกระทำ	106
รูปที่ 5.7	การเปลี่ยนรูปของลาดดินเมื่อมีแรงภายนอกกระทำขนาด 0, 2, 4, 6, 8 และ 10 PN	106
รูปที่ 5.8	เส้นและพื้นผิวไอโซจากการทดสอบการคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลองวอน ไมซีส	108
รูปที่ 5.9	เส้นและพื้นผิวไอโซจากการทดสอบการคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลองดรักเกอร์ – ปรากเกอร์	109

สารบัญภาพ (ต่อ)

		หน้า
รูปที่ 5.10	เส้นและพื้นผิวไอโซจากการทดสอบการคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลอง ลาดี – ดั่งแคน	110
รูปที่ 5.11	เส้นและพื้นผิวไอโซจากการทดสอบการคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลอง มัสซีโอกา – นากาอิ	111
รูปที่ 5.12	เส้นและพื้นผิวไอโซจากการทดสอบการคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลอง โฮลส์บี	112
รูปที่ 5.13	กราฟเปรียบเทียบผลการทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินเปียก ระหว่างแบบจำลองวอน ไมซีสและแบบจำลองมัสซีโอกา – นากาอิ	113
รูปที่ 5.14	ตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการจำลองการไหลของน้ำใต้ดิน	114
รูปที่ 5.15	ผลการจำลองการไหลของน้ำใต้ดินบนระนาบตัดด้านหน้าของลาดดิน	115
รูปที่ 5.16	ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของปริมาณน้ำในดินกับความชื้นฝน	116
รูปที่ 5.17	ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณน้ำในดินกับร้อยละของเอลิเมนต์	116
รูปที่ 5.18	ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของเกณฑ์วิบัติกับความชื้นฝน	117
รูปที่ 5.19	ตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการจำลองการเปลี่ยนรูปและความคราก	118

สัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย
χ	พารามิเตอร์แปรผันตามตึกีความอิมตัว
ϵ	ความเครียด
ϵ	เมทริกซ์ความเครียด
ϵ_x	ความเครียดในทิศทาง x
ϵ_y	ความเครียดในทิศทาง y
ϵ_z	ความเครียดในทิศทาง z
ϕ	เมทริกซ์ของฟังก์ชันการกระจัด
ϕ	มุมเสียดทานภายในของดิน
ϕ'	มุมเสียดทานภายในของดินรูปหน่วยแรงประสิทธิผล
ϕ^b	มุมแรงเฉือนสำหรับแรงดึงน้ำในดิน
γ_d	หน่วยน้ำหนักดินแห้ง
γ_t	หน่วยน้ำหนักรวม หรือหน่วยน้ำหนักเปียก
γ_w	หน่วยน้ำหนักของน้ำ
γ_{sat}	หน่วยน้ำหนักดินอิมตัว
γ'	หน่วยน้ำหนักพยุ่ง
η	พารามิเตอร์วัสดุ
ν	อัตราส่วนปัวส์ซอง
Π	พลังงานศักย์รวม
θ	มุมโลตี
σ	ความเค้นปกติ
σ_x	ความเค้นปกติที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x
σ_y	ความเค้นปกติที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y
σ_z	ความเค้นปกติที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z
σ'	เมทริกซ์ความเค้นประสิทธิผล
σ'	ความเค้นปกติในรูปหน่วยแรงประสิทธิผล
τ_{xy}	ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x และมีทิศทางในแนวแกน y

สัญลักษณ์ (ต่อ)

สัญลักษณ์	ความหมาย
τ_{xz}	ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x และมีทิศทางในแนวแกน z
τ_{yx}	ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y และมีทิศทางในแนวแกน x
τ_{yz}	ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y และมีทิศทางในแนวแกน z
τ_{zx}	ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z และมีทิศทางในแนวแกน x
τ_{zy}	ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z และมีทิศทางในแนวแกน y
Ω	เซตของจุดยอด
Ψ	เซตของรูปทรงสี่หน้า
A	พื้นที่ผิว
A_0	ปริมาณช่องว่างอากาศ
A_v	ร้อยละของช่องว่างอากาศ
B	เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดของจุดยอดเอลิเมนต์และความเครียด
B_w	เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความชันทางชลศาสตร์และเซตที่จุดยอดเอลิเมนต์
c	แรงเชื่อมแน่น
c'	แรงเชื่อมแน่นในรูปหน่วยแรงประสิทธิผล
D_f	เมทริกซ์สติเฟนสของไหล
D	เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด
d	เมทริกซ์การกระจัด
d_f	ฟังก์ชันกระจายพลังงาน
d_i	เมทริกซ์การกระจัดที่จุดยอด i
$d_{n,v}$	เมทริกซ์การกระจัดของจุดยอด v ในทิศทาง n
D_w	เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วการไหลของน้ำและความชันทางชลศาสตร์
E	มอดูลัสยืดหยุ่น
e	อัตราส่วนช่องว่าง หรืออัตราส่วนโพรง
F	เมทริกซ์แรงลัพธ์

สัญลักษณ์ (ต่อ)

สัญลักษณ์	ความหมาย
f_i	แรงลัพธ์ที่จุดยอด i
f_T	แรงเนื่องจากมวล
f_s	แรงจากน้ำฝนไหลเข้าสู่เอลิเมนต์ดิน
f_d	แรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านพื้นผิว
F_w	เมทริกซ์แรงลัพธ์จากการซึมน้ำที่จุดยอด
f_i	แรงลัพธ์จากการซึมน้ำที่จุดยอด i
G	โมดูลัสเฉือน
g	อัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
G_s	ความถ่วงจำเพาะของเม็ดดิน
h	เฮด
h	เมทริกซ์เฮดที่จุดยอดเอลิเมนต์
h_β	เฮดที่ผิวดิน
h_i	เฮดรวมที่จุดยอด i
h_p	เฮดความดัน
h_v	เฮดความเร็ว
i	ความชันทางชลศาสตร์
i	เมทริกซ์ของความชันทางชลศาสตร์
I_1	ความเค้นไม่แปรเปลี่ยนลำดับที่ 1
I_2	ความเค้นไม่แปรเปลี่ยนลำดับที่ 2
I_3	ความเค้นไม่แปรเปลี่ยนลำดับที่ 3
J_1	ความเค้นเบี่ยงเบนไม่แปรเปลี่ยนลำดับที่ 1
J_2	ความเค้นเบี่ยงเบนไม่แปรเปลี่ยนลำดับที่ 2
J_3	ความเค้นเบี่ยงเบนไม่แปรเปลี่ยนลำดับที่ 3
k	สทิฟเนสเมทริกซ์
K_e	ค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรเทียบเท่าของไหล

สัญลักษณ์ (ต่อ)

สัญลักษณ์	ความหมาย
K_s	ค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของแข็ง
K_f	ค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของไหลภายในโพรงดิน
k	สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดิน
k_x	สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินตามแกน x
k_y	สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินตามแกน y
k_z	สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินตามแกน z
k_{ij}	สทิวเนสมเมทริกซ์รวมที่จุดยอด i และ j
k_w	สทิวเนสมเมทริกซ์การซึมน้ำ
L	ระยะทางที่น้ำไหล
l_x	ทิศทางโคไซน์การไหลตามแกน x
l_y	ทิศทางโคไซน์การไหลตามแกน y
l_z	ทิศทางโคไซน์การไหลตามแกน z
m	พารามิเตอร์วัสดุ
n	เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย
n	ความพรุน
N_f	เวกเตอร์ปกติของระนาบวิบัติ
P	เมทริกซ์ไหลดภายนอกที่กระทำที่จุดยอด
p	ความเค้นเฉลี่ย
p'	ความเค้นประสิทธิผลเฉลี่ย
p	ความดัน
p_a	แรงดันบรรยากาศ
p_w	ความดันน้ำ
Q	ความเค้นเปียงเบน
$v_{rain, \psi}$	ความซึมของฝน
$v_{drain, \psi}$	อัตราการไหลซึมออก

สัญลักษณ์ (ต่อ)

สัญลักษณ์	ความหมาย
q	อัตราการไหลของน้ำ
q_{xi}	อัตราการไหลของน้ำเข้าสู่เอลิเมนต์ดินตามแกน x
q_{yi}	อัตราการไหลของน้ำเข้าสู่เอลิเมนต์ดินตามแกน y
q_{zi}	อัตราการไหลของน้ำเข้าสู่เอลิเมนต์ดินตามแกน z
q_{xo}	อัตราการไหลของน้ำออกจากเอลิเมนต์ดินตามแกน x
q_{yo}	อัตราการไหลของน้ำออกจากเอลิเมนต์ดินตามแกน y
q_{zo}	อัตราการไหลของน้ำออกจากเอลิเมนต์ดินตามแกน z
S_d	ตึกรึความอึมตัว
s_u	กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำ
T	เมทริกซ์ไหลดที่กระทำแบบกระจาย
U	พลังงานรวม
u_A	ความดันอากาศสุดท้ายในโพรงดิน
u_a	ความดันในช่องว่างของเม็ดดิน
u_a	เมทริกซ์ความดันอากาศ
u_c	ความดันของน้ำที่เพิ่มขึ้นในช่องว่างของเม็ดดิน
u_F	ความดันในโพรงดินสุดท้าย
u_f	ความดันของไหลในโพรงดิน
u_s	แรงดึงน้ำในดินสุดท้าย
u_w	ความดันน้ำในโพรงดินสุดท้าย
u_w	เมทริกซ์ความดันน้ำ
V	ปริมาตรของดิน
V	เมทริกซ์อัตราการไหลของน้ำผ่านดิน
v	อัตราเร็วการไหลของน้ำผ่านดิน
v_d	อัตราเร็วการไหลของน้ำเข้าสู่หรือออกจากลาดดิน
v_s	อัตราเร็วการไหลของน้ำจากแหล่งกำเนิด

สัญลักษณ์ (ต่อ)

สัญลักษณ์	ความหมาย
V_s	ปริมาตรของเม็ดดิน
V_w	ปริมาตรของน้ำในดิน
V_a	ปริมาตรของอากาศในดิน
V_v	ปริมาตรโพรงดิน
W	น้ำหนักรวมของดิน
W_a	น้ำหนักของอากาศในดิน
W_s	น้ำหนักของเม็ดดิน
W_w	น้ำหนักของน้ำในดิน
W_d	งานจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านหน้าตัด
W_s	งานจากแหล่งกำเนิดที่จ่ายน้ำเข้าหรือสูบน้ำออก
W_r	งานเนื่องจากน้ำหนัก
W_p	งานเนื่องจากไหลดที่กระทำเป็นจุด
W_T	งานเนื่องจากไหลดกระทำกระจาย
W	น้ำหนักดิน
w	ปริมาณน้ำในดิน
X	เมทริกซ์พิกัดจุดยอดเอลิเมนต์
Z	เฮตระดับ

บทที่ 1

บทนำ

การเกิดดินถล่มเป็นภัยพิบัติที่ก่อให้เกิดความเสียหายขึ้นต่อชีวิตและทรัพย์สินเป็นจำนวนมากซึ่งความสูญเสียที่เกิดขึ้นมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความรุนแรงของภัยพิบัติที่มีปัจจัยจากสภาพพื้นที่และความหนาแน่นของชุมชนในเขตภัยพิบัติ แต่อย่างไรก็ดีหากชุมชนได้มีการศึกษารวมถึงการจัดวางระบบเฝ้าระวังและป้องกันภัยที่ดีแล้ว ย่อมที่จะบรรเทาความสูญเสียที่จะเกิดขึ้นได้สำหรับทางภาคใต้ของประเทศไทยเป็นพื้นที่ที่มีฝนตกชุกตลอดทั้งปี เพราะเป็นพื้นที่ที่ได้รับอิทธิพลจากลมมรสุมตะวันตกเฉียงใต้ในช่วงกลางเดือนพฤษภาคมถึงกลางเดือนตุลาคม และลมมรสุมตะวันออกเฉียงเหนือในช่วงกลางเดือนตุลาคมถึงกลางเดือนกุมภาพันธ์ ประกอบกับการเปลี่ยนแปลงของสภาวะอากาศในปัจจุบันที่มีความรุนแรงมากขึ้น กล่าวคือในช่วงฤดูมรสุมจะมีปริมาณฝนตกอย่างต่อเนื่องและหนาแน่นเป็นอย่างมาก อีกทั้งผลกระทบจากการขยายตัวของเศรษฐกิจและชุมชนที่มีการเข้าไปใช้ประโยชน์ในเขตพื้นที่ป่าไม้ซึ่งเป็นพื้นที่ดูดซับและกักเก็บน้ำฝนตามธรรมชาติ การสร้างสิ่งปลูกสร้างกีดขวางการไหลของน้ำมีผลทำให้พื้นที่ราบลุ่มเป็นพื้นที่เสี่ยงต่อการเกิดปัญหาอุทกภัย และการสร้างบ้านเรือนบริเวณที่ราบเชิงเขาหรือการปลูกพืชเศรษฐกิจบนพื้นที่ลาดชันซึ่งมักจะมีได้ค้ำจนถึงเสถียรภาพของลาดดิน เมื่อเกิดสภาวะฝนตกชุกพื้นที่ดังกล่าวจะมีลักษณะสภาพเป็นพื้นดินอุ้มน้ำที่มีเสถียรภาพต่ำ และมีความเสี่ยงต่อการเกิดภัยพิบัติดินถล่ม ตามสถิติสถานการณ์การเกิดภัยพิบัติดินถล่มที่เกิดขึ้นตั้งแต่ปี พ.ศ. 2531 – 2557 มีดังนี้

ตารางที่ 1.1 สถานการณ์การเกิดดินถล่ม

วัน เดือน ปี	สถานที่	จำนวน (คน)	
		เสียชีวิต	สูญหาย
20 ส.ค. 57	เมืองฮิโรชิมา ประเทศญี่ปุ่น	27	10
30 ก.ค. 57	หมู่บ้านมาลิน เมืองปูเน่ รัฐมหาราษฏร์ ทางตะวันตกของประเทศอินเดีย	17	200
30 ก.ค. 57	สวนพฤกษาสวรรค์ ม.4 ต.ทับปริก อ.เมืองกระบี่	-	-
22 มี.ค. 57	เมืองโอโซและดาร์ริงตัน ทางตอนเหนือของเมืองซีแอตเติล รัฐวอชิงตัน ประเทศสหรัฐอเมริกา	24	176
26 ก.ย. 56	น้ำตกวังชมพูใน อ.โกสัมพินคร จ.กำแพงเพชร	-	-
23 พ.ค. 49	อ.ลับแล จ.อุตรดิตถ์	87	49

(ที่มา: ThairathOnline. [24])

ตารางที่ 1.1 (ต่อ) สถานการณ์การเกิดดินถล่ม

วัน เดือน ปี	สถานที่	จำนวน (คน)	
		เสียชีวิต	สูญหาย
10 ส.ค. 44	ต.น้ำก้อ ต.น้ำซุน ต.หนองไขว่ใน อ.หล่มสัก จ.เพชรบูรณ์	131	-
4 พ.ค. 44	อ.วังชิ้น จ.แพร่	23	16
22 พ.ย. 31	ต. กะทูน อ.พิปูน จ.นครศรีธรรมราช	700	-

(ที่มา: ThairathOnline. [24])

ภูมิประเทศที่มีลักษณะเป็นดินที่มีความลาดชัน เรียกว่าลาดดิน (soil slope) เป็นภูมิประเทศที่มักเกิดดินถล่ม กล่าวที่ดินถล่มเป็นปรากฏการณ์ทางธรณีวิทยาที่มีการเคลื่อนที่ของชั้นดินในบริเวณที่มีความลาดชันเนื่องมาจากแรงโน้มถ่วงของโลก มีสาเหตุมาจากการขาดเสถียรภาพของลาดดิน โดยเป็นผลจากน้ำที่ซึมผ่านในดินได้เติมเต็มช่องว่างในเม็ดดินทำให้เพิ่มแรงดันระหว่างเม็ดดินเป็นผลให้แรงยึดเหนี่ยวของดินต่ำลงจนเม็ดดินแยกออกจากกัน จึงเกิดการไถลออกของชั้นดินแล้วไหลต่อไปเพิ่มน้ำหนักยังบริเวณถัดไป จนเป็นผลให้เกิดดินถล่ม [1] Xinpo et al. [21] ได้ทำการศึกษาผลของเสถียรภาพของลาดดินจากการซึมผ่านของน้ำฝน พบว่าปริมาณน้ำฝนจะมีผลต่อการเพิ่มขึ้นของระดับน้ำใต้ดิน และการเพิ่มขึ้นของแรงดันน้ำในช่องว่างมวลดิน (pore water pressure) ซึ่งจะเป็นผลให้เกิดการวิบัติของลาดดิน โดยวิเคราะห์จากค่ากำลังรับแรงเฉือนของดินอาศัยเกณฑ์การวิบัติของมอร์-คูลอมบ์ (Mohr-Coulomb) แต่อย่างไรก็ตามหลักการวิเคราะห์โดยอาศัยเกณฑ์การวิบัติของมอร์-คูลอมบ์ มีข้อจำกัดอันเนื่องมาจากเกณฑ์การวิบัตินี้ถูกพัฒนาจากเงื่อนไขความครากในสองมิติ ซึ่งทำให้ฟังก์ชันความครากนิยามไม่เรียบ (unsmooth) ทำให้มีปัญหาในการนำไปใช้วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) และนิยามสมการสำหรับปัญหาสามมิติ [7] จึงนำไปสู่การใช้แบบจำลอง ได้แก่ วอน ไมซีส์ (von Mises) ดรักเคอร์-ปรากเกอร์ (Drucker-Prager) ลาดี-ดิงแคน (Lade-Duncan) มัสซึโอกา-นากาอิ (Matsuoka-Nakai) และโฮลส์บี (Houlsby)

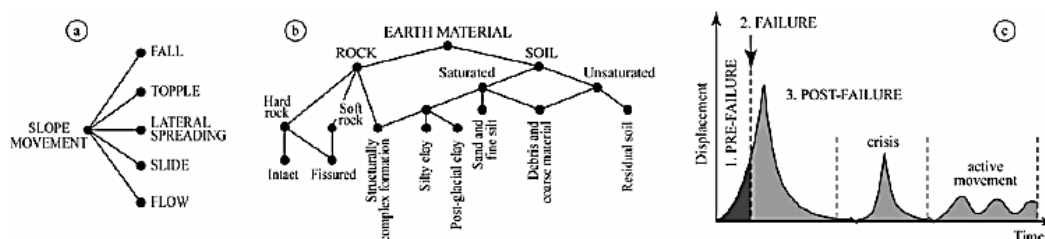
สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ได้บูรณาการความรู้ด้านปฐพีกลศาสตร์เกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานของดิน ความชื้นน้ำ หน่วยแรง และกำลังเฉือนของดิน เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับวิเคราะห์การกระจายพลังงานศักย์หรือเฮดของน้ำที่ซึมในดิน วิเคราะห์การกระจายความเค้นและความเครียด ณ จุดใด ๆ ของลาดดิน เพื่อประเมินการวิบัติของลาดดินด้วยเกณฑ์การวิบัติจากแบบจำลองแบบต่อเนื่องทั้งภายใต้เงื่อนไขแบบระบายน้ำและไม่ระบายน้ำ โดยการประมวลผลเพื่อวิเคราะห์และหาผลเฉลยของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่นิยมในการวิเคราะห์ปัญหาเชิงโครงสร้างทางวิศวกรรม และประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิง

อนุพันธ์สำหรับปัญหาที่มีความซับซ้อน และประดิษฐ์ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์สำหรับประมวลผลตามตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้พัฒนาขึ้น ซึ่งจะเป็นเทคโนโลยีสารสนเทศทางภูมิศาสตร์ที่สามารถคาดการณ์การเกิดภัยพิบัติดินถล่ม และเป็นเครื่องมือในการตัดสินใจ กำหนดหรือวางผังเมือง หรือกำหนดพื้นที่เสี่ยงภัยจากการเกิดภัยพิบัติดินถล่ม อันจะนำไปสู่การเตรียมการรับสถานการณ์การเกิดภัยพิบัติดินถล่ม และเป็นแนวทางในการช่วยลดความรุนแรงจากดินถล่ม เพื่อการใช้ประโยชน์ที่ดินและการจัดการทรัพยากรธรรมชาติอย่างยั่งยืนต่อไป

1.1 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และการจำลองดินถล่ม ได้มีการศึกษาและพัฒนาขึ้นในรูปแบบต่าง ๆ ที่หลากหลายซึ่งในที่นี้ได้ทำการรวบรวมและสรุปสาระสำคัญของงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้เห็นถึงแนวความคิด ปัญหาและการพัฒนาดังต่อไปนี้

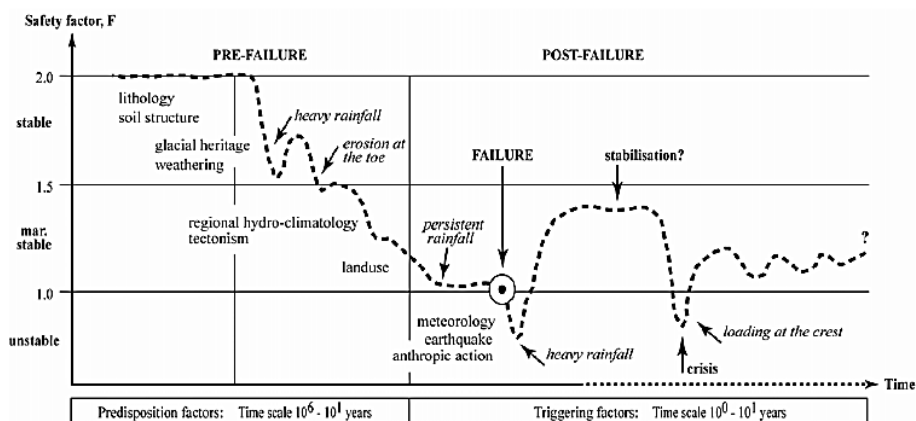
Asch et al. [15] ได้นำเสนอเทคนิค ความก้าวหน้า ปัญหา และแบบจำลองเชิงตัวเลขสำหรับภัยพิบัติดินถล่ม ซึ่งได้มีการจำแนกการวิบัติของลาดดินไว้ 5 ประเภท ได้แก่ ร่วง (fall) คว่ำ (topple) แผ่กระจายทางด้านข้าง (lateral spreading slide) และไหล (flow) จำแนกประเภทของดินและชั้นของการวิบัติของลาดดิน ได้แก่ ก่อนการวิบัติ (pre-failure) วิบัติ (failure) และหลังการวิบัติ (post-failure) ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 ประเภทการวิบัติ ประเภทของดิน และชั้นการวิบัติของลาดดิน

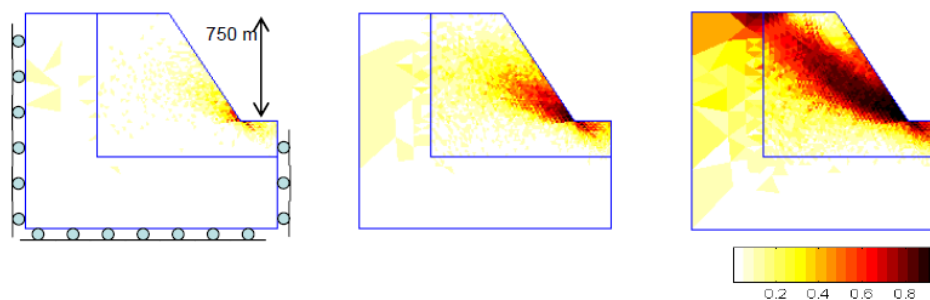
(ที่มา: Asch et al. [15])

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบความปลอดภัย (safety factor) กับเวลา (time) ซึ่งแสดงให้เห็นถึงค่าวิบัติ (failure) และค่าวิกฤติ (crisis) ดังรูปที่ 1.2 และตัวแบบแสดงความเสียหายที่เกิดขึ้นของลาดหินในอุดมคติ (an idealized rocky slope) โดยอาศัยทฤษฎี brittle creep theory ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.2 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบความปลอดภัยกับเวลา

(ที่มา: Asch et al. [15])



รูปที่ 1.3 ตัวแบบความเสียหายที่เกิดขึ้นกับลาดหินในอุদ্มคติ

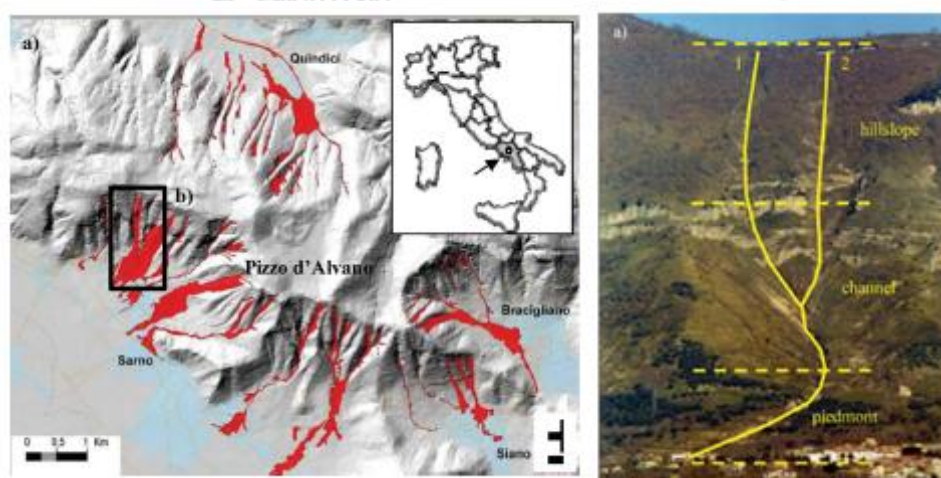
(ที่มา: Asch et al. [15])

กวี [1] ได้สร้างตัวแบบสำหรับการคาดการณ์จุดวิกฤตของการขาดเสถียรภาพลาดดินเป็นผลให้เกิดดินถล่ม อาศัยการใช้สหวิทยาการด้วยการบูรณาการหลักการของปฐพีวิทยา ปฐพีกลศาสตร์ การออกแบบคอนกรีตเสริมเหล็ก เพื่อหาค่ากำลังรับแรงเฉือนที่เพิ่มขึ้นของดินเนื่องจากรากต้นไม้ รวมทั้งความสัมพันธ์ระหว่างความชื้นในดินกับค่าแรงดันในช่องว่างดิน สร้างเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยจะได้ค่าความชื้นในเม็ดดินที่เป็นจุดเริ่มต้นที่ทำให้ลาดดินขาดเสถียรภาพ บริเวณที่ทำการทดสอบเป็นสวนยางบริเวณที่ลาดเชิงเขาในเขตตำบลพวา จังหวัดจันทบุรี ผลการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ตั้งขึ้นได้ค่าร้อยละปริมาณความชื้นโดยปริมาตรในดินที่เป็นจุดวิกฤตของการขาดเสถียรภาพลาดดิน คือ 34.45 จากนั้นได้ทดสอบด้วย การให้น้ำแก่ดินบริเวณเดียวกันที่ตำบลพวา อำเภอแก่งหางแมว จังหวัดจันทบุรี ได้ค่าร้อยละปริมาณความชื้นโดยปริมาตรในดินที่เป็นจุดวิกฤตของการขาดเสถียรภาพลาดดิน เท่ากับ 35.00 มีผลต่าง 0.55 ซึ่งถือว่าน้อย จึงสามารถนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นี้ไปใช้ในการคาดการณ์จุดวิกฤตของเสถียรภาพลาดดิน

รัฐธรรม และวารากร [5] ได้ศึกษาการจำลองของรากพืชเพื่อการวิเคราะห์เสถียรภาพของลาดดินพบว่ากำลังของดินที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการเสริมด้วยรากพืชจะแปรผันกับปัจจัย 6 อย่าง คือความหนาแน่น กำลังรับแรงดึง (tensile modulus) อัตราส่วนความยาวต่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางความขรุขระของพื้นผิว และการวางตัวของรากพืช การกระจายของรากพบว่า ประมาณร้อยละ 85 ถึง 90 ของปริมาตรรากจะอยู่ครึ่งบนของความลึกรากทั้งหมด และจะลดลงมากเมื่อความลึกมากขึ้น และรากส่วนใหญ่จะอยู่ลึกจากผิวดิน 20 ถึง 50 ซม.

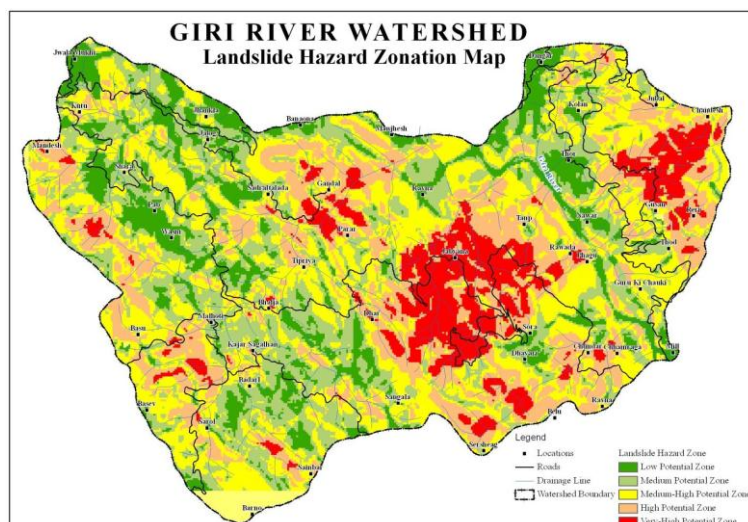
Chung and Fabbri [10] นำเสนอตัวแบบทางสถิติสำหรับทำนายการเกิดภัยพิบัติดินถล่ม โดยใช้ค่าความน่าจะเป็นที่วิเคราะห์ได้จากภาพถ่ายทางอากาศ ซึ่งตัวแบบทางสถิติที่นำมาใช้ในงานวิจัยได้แก่ ตัวแบบทางตรง (direct model) ตัวแบบความถดถอย (regression model) และตัวแบบเบย์เซียน (modified Bayesian model) และได้กล่าวถึงการศึกษากรณีบนพื้นที่เมือง Rio Chinclna ในประเทศโคลัมเบีย

Cascini et al. [16] ได้นำเสนอตัวแบบแสดงการเกิดปรากฏการณ์ดินถล่มเมื่อเดือนพฤษภาคม 1998 ณ เมือง Sarno-Quindici ทางใต้ของประเทศอิตาลี ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 การไหลของดิน ณ เมือง Sarno-Quindici ทางตอนใต้ของประเทศอิตาลี และการไหลของดินบริเวณที่ราบลุ่มของภูเขา Tuostolo (ที่มา: Cascini et al. [16])

K. Pareta and Pareta [20] ศึกษาและพัฒนาตัวแบบดินถล่มจากสภาพความลาดชันของภูมิประเทศจากภาพถ่ายทางอากาศบริเวณลุ่มน้ำ Himachal Pradesh ในประเทศอินเดีย ดังรูปที่ 1.5



รูปที่ 1.5 พื้นที่เสี่ยงภัยพิบัติดินถล่มบริเวณลุ่มน้ำ Himachal Pradesh ในประเทศอินเดีย
(ที่มา: K. Pareta and Pareta [20])

Hassani et al. [23] นำเสนอการเพิ่มประสิทธิภาพของแบบจำลองดินถล่ม โดยการพิจารณาปัญหาความหยุดนิ่งของระนาบรับแรงเฉือน (the stationary anti-plane) โดยการคำนวณอยู่ในพจน์ของความเร็วและแรงเค้นใน 2 มิติ วิเคราะห์ห้วงค์ประกอบกำลังรับแรงเฉือน ตัวประกอบความปลอดภัยและระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาผลเฉลยจากแบบจำลองดินถล่ม

Georgiadis [19] ได้ประดิษฐ์โปรแกรมสำหรับการวิเคราะห์ดินที่อิ่มตัวด้วยน้ำ บางส่วนโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งในงานวิจัยได้กล่าวถึงพฤติกรรมของดินที่อิ่มตัวด้วยน้ำ บางส่วนที่มีพฤติกรรมทางกลศาสตร์ที่แตกต่างจากดินแห้งและดินอิ่มตัวด้วยน้ำทั้งหมด โดยพฤติกรรมทางกลศาสตร์ที่กล่าวถึงได้แก่ ตัวแปรสถานะของความเค้น (stress state variables) ความเค้นหลักประสิทธิผล (effective stress principle) พฤติกรรมเปลี่ยนแปลงของปริมาตร และความเค้นเฉือน ตัวแบบความสอดคล้องกัน (constitution model) และการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Popa and Batali [18] ได้ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานออกแบบทางด้านธรณีเทคนิค และได้มีการศึกษาสมบัตินี้ของดินและเปรียบเทียบพารามิเตอร์สำหรับเกณฑ์การวิบัติของลาดดิน ได้แก่ ตัวแบบมอร์-คูลอมป์ (Mohr-Coulomb model) ตัวแบบโนวา (Nova model) และตัวแบบของเวอร์เมียร์ (Vermeer's model) รวมถึงศึกษารณีการรับแรงเฉือนของกำแพงดิน

การศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาด้านปฐพีกลศาสตร์โดยเฉพาะอย่างยิ่งการวิเคราะห์เสถียรภาพของลาดดินเป็นงานที่มีความยุ่งยากซับซ้อน เพราะเป็นการวิเคราะห์ลักษณะเชิงกลของดิน

ซึ่งเป็นสารเนื้อผสมที่ได้รับอิทธิพลจากแรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักของดินซึ่งจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมีน้ำไหลซึมลงสู่ดิน น้ำหนักของวัตถุบนผิวดิน ได้แก่ ต้นไม้ ก้อนหิน หรือสิ่งก่อสร้าง เป็นต้น รวมถึงแรงยึดเหนี่ยวดินของรากไม้ แรงยึดเหนี่ยวและแรงเสียดทานระหว่างเม็ดดินที่รักษาเสถียรภาพของลาดดินไว้ซึ่งจะมีค่าลดลงเมื่อแรงดันน้ำโพรงมากขึ้น ด้วยเหตุนี้จึงได้ประดิษฐ์เครื่องมือเพื่ออำนวยความสะดวกในการประมวลผลข้อมูลเพื่อวิเคราะห์ปัญหาเสถียรภาพของลาดดิน รัฐธรรม [4] ได้นำเสนอโปรแกรม KUslope version 2.0 ที่ได้รับการพัฒนาขึ้นโดยศูนย์วิจัยและพัฒนาวิศวกรรมปฐพีและฐานราก คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ซึ่งโปรแกรมนี้สามารถวิเคราะห์เสถียรภาพของลาดดินแบบ 2 มิติ โดยอาศัยหลักการสมดุลลิมิต (limit equilibrium) ประกอบด้วยลักษณะดังนี้

- ก. วิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของลาดดินจากอิทธิพลของรากพืชได้ (vegetation)
- ข. วิเคราะห์ลักษณะผิวการวิบัติได้ 2 แบบ คือ ส่วนโค้งของวงกลม และไม่ส่วนโค้งวงกลม
- ค. เลือกสมบัติของดินได้ 2 แบบ คือ Mohr-Coulomb material หรือ anisotropic strength
- ง. วิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินโดยใช้ 4 ทฤษฎี ได้แก่ ordinary, simplified Janbu, simplified Bishop และ spencer
- จ. วิเคราะห์ผลกระทบของความดันน้ำได้ 3 แบบ คือ no seepage, water line และ pore water pressure ratio
- ฉ. วิเคราะห์ผลจากปัจจัยภายนอกได้ 5 ปัจจัย คือ seismic load, tension crack, external load, anchor และ vegetation

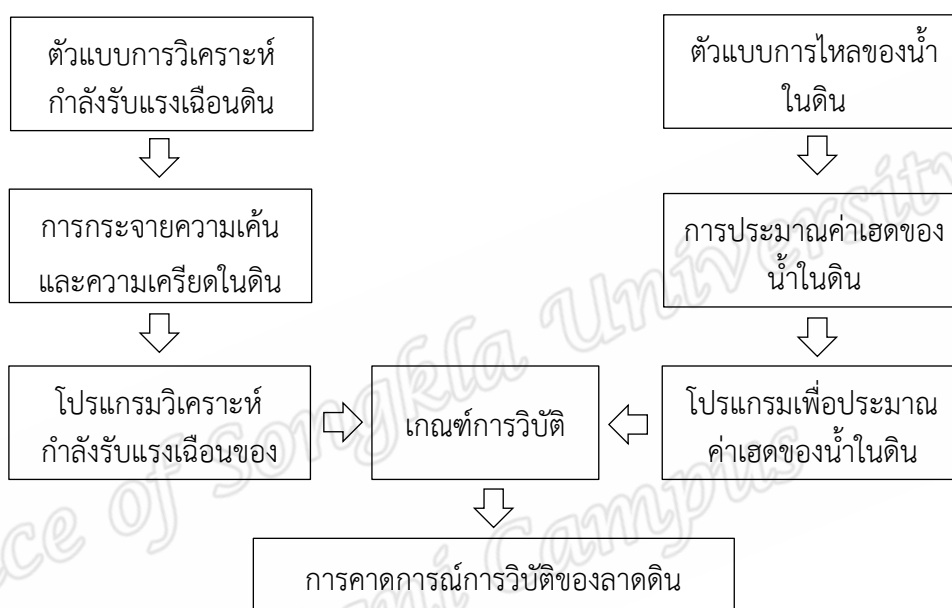
แบบจำลองต่าง ๆ ในงานวิจัยที่ได้กล่าวไปนั้น ล้วนเป็นแนวความคิดในการพัฒนาตัวแบบและการประดิษฐ์โปรแกรมสำหรับการวิเคราะห์การเกิดภัยพิบัติดินถล่มในงานวิทยานิพนธ์นี้

1.2 วัตถุประสงค์ในงานวิทยานิพนธ์

1. เพื่อศึกษาตัวแบบความชื้นน้ำ กำลังรับแรงเฉือน และการวิบัติของลาดดิน
2. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับคาดการณ์การวิบัติของลาดดิน
3. เพื่อประดิษฐ์ซอฟต์แวร์เพื่อวิเคราะห์ความชื้นน้ำ กำลังรับแรงเฉือน และการวิบัติของลาดดิน

งานวิทยานิพนธ์นี้จะมีการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ได้แก่ ตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินในสภาวะคงที่ ตัวแบบกำลังรับแรงเฉือน และตัวแบบการวิบัติของลาดดิน โดยตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินในสภาวะคงที่นี้จะนำมาใช้เพื่อวิเคราะห์หาความชื้นน้ำในดินหรือปริมาณน้ำดินเพื่อกำหนดเป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณน้ำหนักของดินที่ขึ้นอยู่กับปริมาณของน้ำในดิน ตัวแบบกำลังรับ

แรงเฉือนจะนำมาใช้เพื่อวิเคราะห์การกระจายความเค้นและความเครียดในดิน ซึ่งในการหาผลเฉลยของตัวแบบทั้งสองนี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์ชนิดรูปทรงสี่หน้า สำหรับตัวแบบการวิบัติของลาดดินเป็นตัวแบบที่จะใช้เป็นเกณฑ์การประเมินการวิบัติของลาดดินประกอบด้วยเกณฑ์การวิบัติในเงื่อนไขแบบไม่ระบายน้ำ ซึ่งในงานวิทยานิพนธ์นี้จะนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ทั้งหมดที่ได้กล่าวมานี้ มาใช้เพื่อเป็นตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์และประดิษฐ์ซอฟต์แวร์สำหรับคาดการณ์การวิบัติของลาดดินที่มีผลมาจากปริมาณในดิน โดยมีขั้นตอนดังรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.6 ขั้นตอนการคาดการณ์การวิบัติของลาดดินที่มีผลจากปริมาณในดิน

บทต่อไปของวิทยานิพนธ์จะนำเสนอเนื้อหาดังต่อไปนี้

- บทที่ 2 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดิน โดยในบทนี้ผู้เขียนได้นำเสนอตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ได้แก่ ตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินในสภาวะคงตัว หลักการเชิงทฤษฎียึดหยุ่นของวัสดุในงานวิศวกรรมธรณีเทคนิค และเกณฑ์วิบัติลาดดิน
- บทที่ 3 การวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งผู้เขียนได้ดำเนินการหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จากบทที่ 2 รวมถึงนำเสนอขั้นตอนการคำนวณเพื่อหาปริมาณน้ำในดิน ความเค้นและความเครียด
- บทที่ 4 การออกแบบและประดิษฐ์ซอฟต์แวร์เพื่อหาผลเฉลยโดยสมการที่ได้จากบทที่ 3
- บทที่ 5 การจำลองเสถียรภาพลาดดิน โดยการนำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และซอฟต์แวร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปใช้ในการจำลองเพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินตัวอย่างและพื้นที่จริง
- บทที่ 6 ส่วนสุดท้ายจะกล่าวถึงสรุปผลการวิจัย การอภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

บทที่ 2

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดิน

บทนี้จะนำเสนอตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินที่มีผลจากปริมาณน้ำหรือความชื้น (water content or moisture content) ในดิน เพื่อคาดการณ์การเกิดดินถล่ม โดยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นี้ประกอบด้วยตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินในสภาวะคงตัว ตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดิน และเกณฑ์การวิบัติลาดดิน

ตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินในสภาวะคงตัวเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับประมาณค่าพลังงานศักย์และปริมาณน้ำที่ตำแหน่งใด ๆ ในลาดดิน โดยตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินได้มาจากกฎทรงมวล (the law of conservation of mass) สำหรับตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดินเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนในลาดดิน ตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดินได้มาจากหลักการเชิงทฤษฎียืดหยุ่นของวัสดุในงานวิศวกรรมธรณีเทคนิค โดยการศึกษาเงื่อนไขอันประกอบด้วย ความสมดุล (equilibrium) การเข้ากันได้ (compatibility) กฎกรรมเชิงกลของวัสดุ (constitutive law) และเงื่อนไขขอบ (boundary conditions)

2.1 เสถียรภาพลาดดิน (slope stability) และวิกฤต (critical) ของเสถียรภาพลาดดิน

เสถียรภาพลาดดินเป็นผลมาจากกำลังรับแรงเฉือนของดินซึ่งเป็นกำลังต้านทานการเฉือนสูงสุดที่ดินสามารถรับได้โดยไม่วิบัติ หรือพังทลาย (failure) [6] โดยพฤติกรรมของดินที่ไม่อิ่มตัวด้วยน้ำ (unsaturated soil) บนลาดดินจะมีกำลังรับแรงเฉือนเปลี่ยนแปลงไปตามปริมาณน้ำในดิน กล่าวคือ เมื่อปริมาณน้ำในดินเพิ่มขึ้นจะมีผลทำให้ความดันน้ำในโพรงดิน (pore water pressure) เพิ่มขึ้น [21] แต่จะทำให้แรงดึงน้ำในดิน (soil suction) และกำลังรับแรงเฉือนของดินลดลง [7] ซึ่งเป็นผลให้เกิดการวิบัติของลาดดิน

กำลังรับแรงเฉือนของดินโดยทั่วไปมักเกิดจากแรงในสามรูปแบบ ได้แก่ แรงที่เกิดจากการขัดกันระหว่างเม็ดดิน (interlocking of particles) แรงเสียดทาน (friction) ระหว่างผิวเม็ดดิน และแรงเชื่อมแน่น (cohesion) ระหว่างเม็ดดินซึ่งเป็นแรงจากประจุไฟฟ้า [6] กำลังรับแรงเฉือนของดิน s สามารถเขียนในรูปสมการ

$$s = c + \sigma \tan \phi \quad (1)$$

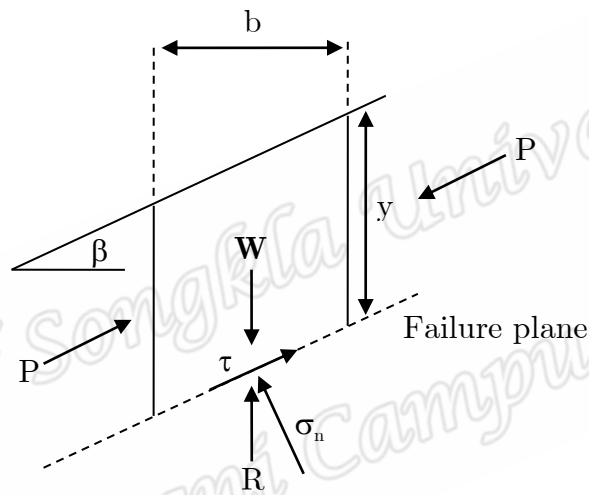
เมื่อ c แทน แรงเชื่อมแน่น

σ แทน ความเค้นปกติ (normal stress)

และ ϕ แทน มุมเสียดทานภายในของดิน (internal friction angle)

ดินแต่ละประเภทจะมีกำลังรับแรงเฉือนจากแรงในแต่ละรูปแบบที่ต่างกัน โดยดินเม็ดหยาบหรือดินทรายมักมีอัตราส่วนของน้ำหนักต่อพื้นผิวเม็ดดินมากกว่าดินเม็ดละเอียดมาก ดังนั้นกำลังรับแรงเฉือนในดินทรายจึงมักเป็นผลมาจากแรงที่เกิดจากการขัดกันระหว่างเม็ดดินและแรงเสียดทานระหว่างผิวเม็ดดิน ส่วนกำลังรับแรงเฉือนในดินเหนียวมักเป็นผลมาจากแรงเชื่อมแน่น [6]

การคาดการณ์การวิบัติของลาดดินจะต้องพิจารณาถึงค่าวิกฤติของเสถียรภาพลาดดินที่เป็นผลจากปริมาณน้ำในดิน ส่วนนี้จะนำเสนอการวิเคราะห์ค่าวิกฤติของเสถียรภาพลาดดินที่เป็นผลจากปริมาณน้ำในดินโดยใช้เส้นอัตรลักษณ์ของน้ำในดิน (soil water characteristic curve) โดยพิจารณาแผนผังภาพวัตถุอิสระ (free body diagram) ของลาดดินอย่างง่ายดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แรงกระทำต่อมวลดิน

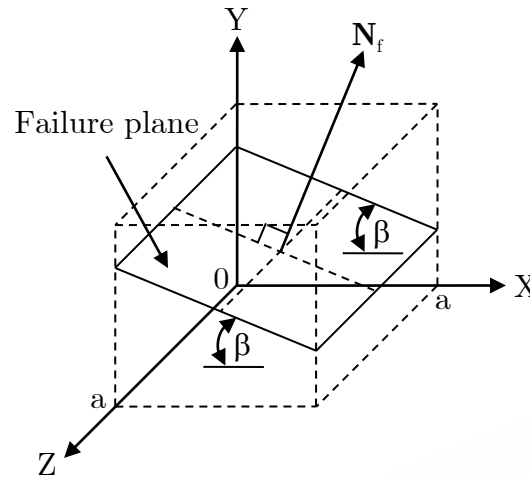
จากรูปที่ 2.1 แสดงภาคตัดของลาดดินที่มีความชัน β สมมติให้มวลดินมีหน่วยน้ำหนักดินเปียกเท่ากับ γ_t และมีระนาบวิบัติ (failure plane) ขนานกับผิวดินที่ระดับความลึก y ดังนั้นบนระนาบวิบัติพื้นที่ A_f มวลดินจะมีน้ำหนักเท่ากับ W โดยที่

$$\mathbf{W} = -W\mathbf{j} = -\gamma_t A_f y \mathbf{j}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^3$$

เมื่อ W แทน ขนาด (magnitude) ของน้ำหนักมวลดิน และ $W = \gamma_t A_f y$

ต่อไปจะพิจารณาความเค้นที่เกิดขึ้นบนระนาบวิบัติที่เป็นผลจากน้ำหนักของมวลดิน โดยสมมติให้มวลดินมีลักษณะเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมขนาด a^3 ลูกบาศก์หน่วย น้ำหนักของมวลดินทำให้เกิดระนาบวิบัติความชัน β ซึ่งมีเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย $\mathbf{N}_f, \mathbf{N}_f \in \mathbb{R}^3$ ดังรูปที่ 2.2 จะได้ว่าระนาบวิบัติมีพื้นที่ A_f โดยที่

$$A_f = \frac{a^2}{\cos\beta}$$



รูปที่ 2.2 พื้นที่รับแรงเฉือน

ความเค้นปกติ σ คืออัตราส่วนของแรงที่กระทำในแนวฉากกับระนาบวิบัติต่อหน่วยพื้นที่

$$\sigma = \frac{\mathbf{W} \cdot \mathbf{N}_f}{\|\mathbf{N}_f\|} \cdot \frac{1}{A_f} = \frac{\|\mathbf{W}\| \cdot \|\mathbf{N}_f\| \cdot \cos \beta}{\|\mathbf{N}_f\|} \cdot \frac{\cos \beta}{a^2} = \frac{W}{a^2} \cdot \cos^2 \beta = \gamma_t y \cdot \cos^2 \beta \quad (2)$$

ความเค้นเฉือน τ คืออัตราส่วนของแรงที่กระทำในแนวสัมผัสกับระนาบวิบัติต่อหน่วยพื้นที่

$$\tau = \frac{W \sin \beta}{\frac{a^2}{\cos \beta}} = (\gamma_t y \cos \beta) \sin \beta \quad (3)$$

และแรงเสียดทานต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

$$\frac{f}{A_f} = \frac{(W \cos \beta) \tan \phi}{\frac{a^2}{\cos \beta}} = (\gamma_t y \cos^2 \beta) \tan \phi \quad (4)$$

ในปี ค.ศ. 1959 Bishop ได้นำเสนอสมการหน่วยแรงประสิทธิผลของดินไม่อิ่มตัวด้วยน้ำ [7] ดังนี้

$$\sigma = \sigma' + u_f \quad (5)$$

เมื่อ σ' แทน ความเค้นประสิทธิผล (effective stress)

และ u_f แทน ความดันของไหลในโพรงดิน

จัดรูปสมการ (5) จะได้ความเค้นประสิทธิผล

$$\sigma' = \sigma - u_f \quad (6)$$

ค่าความปลอดภัย (factor of safety, F.S.) ของลาดดิน คืออัตราส่วนของกำลังรับแรงเฉือนต่อแรงเฉือนของดินเขียนในรูปของแรงประสิทธิผล (effective force) ตามสมการ

$$F.S. = \frac{c' + \sigma' \tan \phi'}{\tau} \quad (7)$$

แทน σ' ในสมการ (7) จะได้

$$F.S. = \frac{c' + \sigma \tan \phi' - u_f \tan \phi'}{\tau} \quad (8)$$

จากสมการ (2) และ (3) แทน σ และ τ ลงในสมการ (8) จะได้

$$F.S. = \frac{c' + (\gamma_t y \cos^2 \beta) \tan \phi' - u_f \tan \phi'}{\gamma_t y \cos \beta \sin \beta}$$

เมื่อปริมาณน้ำในดินเพิ่มขึ้นกระทั่งลาดดินวิบัติ ความดันน้ำในโพรงดินขณะที่ลาดดินวิบัติ เรียกว่า ความดันของไหลในโพรงดินสุดท้าย (final pore fluid pressure) แทนด้วย u_f และเมื่อลาดดินวิบัติค่าความปลอดภัยของลาดดิน เท่ากับ 1 ดังนั้น

$$1 = \frac{c' + (\gamma_t y \cos^2 \beta) \tan \phi' - u_f \tan \phi'}{\gamma_t y \cos \beta \sin \beta} \quad (9)$$

เนื่องจากความดันของไหลในโพรงดินสุดท้าย u_f ซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์ [7]

$$u_f = u_a - \chi(u_a - u_w) \quad (10)$$

เมื่อ u_a แทน ความดันอากาศในโพรงดินสุดท้าย

u_w แทน ความดันน้ำในโพรงดินสุดท้าย

และ χ แทน พารามิเตอร์แปรผันตามตึกรึความอิมตัว S_d

จากสมการ (10) แทน u_f ในสมการ (9) จะได้

$$1 = \frac{c' + (\gamma_t y \cos^2 \beta) \tan \phi' - (u_a - \chi(u_a - u_w)) \tan \phi'}{\gamma_t y \cos \beta \sin \beta} \quad (11)$$

จัดรูปสมการ (11) จะได้

$$1 = \frac{c' + (\gamma_t y \cos^2 \beta - u_a) \tan \phi' + (u_a - u_w) \chi \tan \phi'}{\gamma_t y \cos \beta \sin \beta} \quad (12)$$

เนื่องจาก แรงดึงน้ำในดิน (matric suction) คือ ผลต่างระหว่างความดันอากาศกับความดันน้ำในโพรงดิน [21] โดยที่

$$u_s = u_a - u_w$$

ดังนั้น $u_s = u_a - u_w$ เมื่อ u_s แทน แรงดึงน้ำในดินสุดท้าย

และ $\tan \phi^b = \chi \tan \phi'$ เมื่อ ϕ^b แทน มุมแรงเฉือนสำหรับแรงดึงน้ำในดิน

จากสมการ (12) จะได้

$$1 = \frac{c' + (\gamma_t y \cos^2 \beta - u_A) \tan \phi' + u_s \tan \phi^b}{\gamma_t y \cos \beta \sin \beta}$$

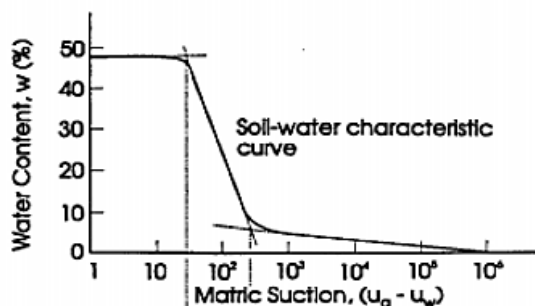
แต่เนื่องจากเมื่อลาดดินใกล้วิบัติ u_A เข้าใกล้ 0 ดังนั้น $\gamma_t y \cos^2 \beta - u_A \approx \gamma_t y \cos^2 \beta$ และ ϕ^b เข้าใกล้ ϕ' จะได้

$$1 = \frac{c' + (\gamma_t y \cos^2 \beta) \tan \phi' + u_s \tan \phi'}{\gamma_t y \cos \beta \sin \beta} \quad (13)$$

และจัดรูปสมการ (13) จะได้แรงดึงน้ำในดินสุดท้าย จะได้

$$u_s = \frac{(\gamma_t y \cos \beta)(\sin \beta - \cos \beta \tan \phi') - c'}{\tan \phi'} \quad (14)$$

เมื่อนำค่าที่ได้จากการทดสอบแทนลงในสมการ (14) จะได้ค่าแรงดึงน้ำสุดท้ายในดินซึ่งเป็นค่าวิกฤตของเสถียรภาพลาดดิน และสามารถหาปริมาณน้ำสุดท้ายในดินก่อนที่ลาดดินจะเกิดการวิบัติได้จากเส้นอัตรลักษณ์ของน้ำในดิน ตามรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 เส้นอัตรลักษณ์ของน้ำในดิน

(ที่มา: สุทธิศักดิ์ [9])

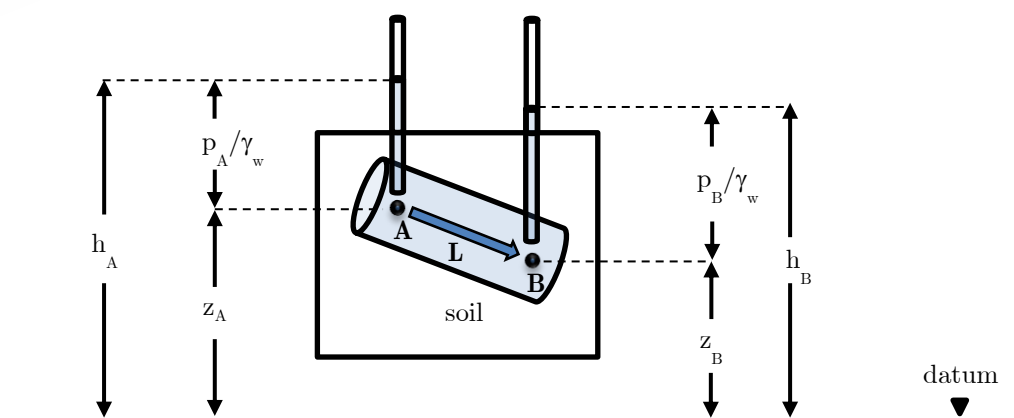
การหาค่าวิกฤตของเสถียรภาพลาดดินตามที่ได้กล่าวมาข้างต้นนี้ทำให้สามารถคาดการณ์ได้ว่าลาดดินจะเกิดการวิบัติขึ้นเมื่อมีปริมาณน้ำในดินเป็นเท่าใด แต่อย่างไรก็ตามการหาค่าวิกฤตโดยสมการ (14) จะต้องทราบความชื้นของระนาบวิบัติที่เกิดขึ้นภายในมวลดิน ดังนั้นในการประเมินการวิบัติของลาดดินจึงต้องอาศัยระเบียบวิธีอื่น ๆ เพื่อใช้ในการหาระนาบวิบัติซึ่งระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันโดยทั่วไปได้แก่ สมดุลขีดจำกัดและไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับในงานวิทยานิพนธ์นี้จะเลือกใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เนื่องจากมีความเหมาะสมกับลาดดินธรรมชาติซึ่งมีลักษณะเป็นรูปทรงอิสระ โดยในส่วนต่อไปจะกล่าวถึงตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่จะนำมาใช้อธิบายการไหลของน้ำใต้ดินกำลังรับแรงเฉือนของดินและเกณฑ์การวิบัติลาดดินสำหรับการคาดการณ์การเกิดดินถล่ม

2.2 ตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดิน (groundwater flow model)

ตามที่ได้กล่าวมาข้างต้นว่าการเพิ่มขึ้นของความดันน้ำในโพรงดินมีผลทำให้เกิดการวิบัติของลาดดิน ดังนั้นการศึกษาการวิบัติของลาดดินจึงจำเป็นต้องพิจารณาถึงปริมาณน้ำหรือปริมาณความชื้น (moisture content) ในดิน โดยวิเคราะห์ลักษณะการไหลของน้ำใต้ดิน เริ่มจากน้ำที่ผิวดินซึมลงสู่ชั้นใต้ดินผ่านทางช่องว่างระหว่างเม็ดดินที่มีความต่อเนื่องกัน เรียกว่าน้ำใต้ผิวดิน (subsurface water) โดยน้ำใต้ผิวดินจะไหลจากตำแหน่งที่มีพลังงานสูงไปสู่ตำแหน่งที่มีพลังงานต่ำ ซึ่งพลังงานนี้ในทางวิศวกรรมจะอยู่ในรูปของเฮด (head) น้ำใต้ผิวดินมีลักษณะการไหลแบบลามินาร์ (laminar flow) คือน้ำจะไหลซึมผ่านดินด้วยอัตราเร็วที่ต่ำและค่อนข้างคงที่ [6]

น้ำใต้ดิน สามารถแบ่งตามการกระจายในแนวตั้งได้เป็นน้ำที่อยู่ในเขตอากาศแฝง (zone of aeration) หรือเขตดินไม่อิ่มตัว (unsaturated zone) และน้ำที่อยู่ในเขตดินอิ่มตัว (zone of saturation) โดยทั้งสองส่วนถูกแบ่งด้วยระดับน้ำใต้ดิน (water table) [3] โดยธรรมชาติการไหลของน้ำใต้ดินในเขตดินไม่อิ่มตัวจะมีลักษณะไม่คงตัว (unsteady flow) ซึ่งเป็นการไหลของน้ำที่มีอัตราเร็วการไหลไม่คงที่ และปริมาณน้ำไม่คงที่ตามเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป แต่เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ปริมาณน้ำในดิน ในงานวิทยานิพนธ์นี้จึงสมมติให้ลาดดินที่วิเคราะห์ได้รับฝนในปริมาณคงที่และต่อเนื่องจนทำให้น้ำฝนที่ซึมลงดินไหลผ่านดินมีลักษณะคงตัว (steady flow) ดังนั้น การพิจารณาปริมาณน้ำในดินจะวิเคราะห์จากการไหลของน้ำใต้ดินโดยใช้สมการการไหลในสภาวะคงตัว (steady state flow)

ในปี ค.ศ. 1856 Henry Darcy ได้นำเสนอหลักการคำนวณด้านชลศาสตร์การไหลของน้ำใต้ดิน โดยกล่าวว่า อัตราการไหลของน้ำผ่านดินหรือวัสดุพรุนเป็นสัดส่วนกับค่าการสูญเสียพลังงานและแปรผกผันกับระยะทางการไหล [3]



รูปที่ 2.4 การไหลของน้ำใต้ดิน

จากรูปที่ 2.4 คาร์ซีทำการทดลองการไหลของน้ำผ่านวัสดุพรุน โดยใช้แท่งดินทราย ทรงกระบอกซึ่งวางเอียงและมีมานอิมิเตอร์ (monometer) หรือปิโซมิเตอร์ (piezometer) สำหรับวัดความดันห่างกันเป็นระยะทาง L

พลังงานของการไหลของน้ำในดินที่ตำแหน่ง A และ B หาได้จากสมการเบอร์นูลลี (Bernoulli's equation) คือ

$$\frac{p_A}{\gamma_w} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\gamma_w} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B + \Delta h$$

เมื่อ p_A และ p_B แทน ความดันน้ำที่ตำแหน่ง A และ B ตามลำดับ

v_A และ v_B แทน อัตราเร็วในการไหลของน้ำที่ตำแหน่ง A และ B ตามลำดับ

z_A และ z_B แทน เสดระดับที่ตำแหน่ง A และ B ตามลำดับ

γ_w แทน หน่วยน้ำหนักของน้ำ

g แทน อัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

และ Δh แทน เสดที่สูญเสีย

สมการเบอร์นูลลีสามารถเขียนเสดที่ตำแหน่งใด ๆ [6] ได้ตามสมการ

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g} + z \quad (15)$$

เมื่อ h แทน เสดที่ตำแหน่งใด ๆ

กำหนดให้ h_p แทน เสดความดัน (pressure head) โดยที่

$$h_p = \frac{p_w}{\gamma_w}$$

และ h_v แทน เสดความเร็ว (velocity head) โดยที่

$$h_v = \frac{v^2}{2g}$$

จากสมการ (15) จึงเขียนได้เป็นสมการ

$$h = h_p + h_v + z$$

เนื่องจากอัตราเร็วของน้ำไหลผ่านดินมีค่าน้อยมาก กำหนดให้ $v_A = v_B = 0$

ดังนั้น เสดที่สูญเสียจากการไหลจากตำแหน่ง A ไปตำแหน่ง B หาได้จากสมการ

$$\Delta h = \left(\frac{p_A}{\gamma_w} + z_A \right) - \left(\frac{p_B}{\gamma_w} + z_B \right)$$

จากรูปที่ 2.4 พิจารณาการไหลของน้ำผ่านดิน ที่จุด A มีเฮดสูงกว่าจุด B ดังนั้นน้ำจึงไหลผ่านดินจากจุด A ไปยังจุด B โดยมีความชันทางชลศาสตร์ (hydraulic gradient) ดังนี้

$$i = \frac{\Delta h}{L}$$

เมื่อ i แทน ความชันทางชลศาสตร์

L แทน ระยะทางที่น้ำไหลระหว่างจุด A และ B

และ Δh แทน ผลต่างของเฮดระหว่างจุด A และ B

จากกฎของดาร์ซี (Darcy's law) กล่าวว่าอัตราการไหลของน้ำผ่านดินแปรผันตรงกับ ความชันทางชลศาสตร์ นั่นคือ

$$v = ki$$

เมื่อ v แทน อัตราเร็วการไหลของน้ำผ่านดิน

และ k แทน สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดิน (permeability of soil)

พิจารณาการไหลของน้ำผ่านหน้าตัดของดินจะได้อัตราการไหลผ่านหน้าตัดต่อหน่วยเวลาเท่ากับผลคูณของอัตราการไหลของน้ำผ่านดินกับพื้นที่หน้าตัด นั่นคือ

$$q = vA$$

เมื่อ q แทน อัตราการไหลผ่านหน้าตัดต่อหน่วยเวลา

และ A แทน พื้นที่หน้าตัดของดินที่ตั้งฉากกับทิศทางการไหลของน้ำ

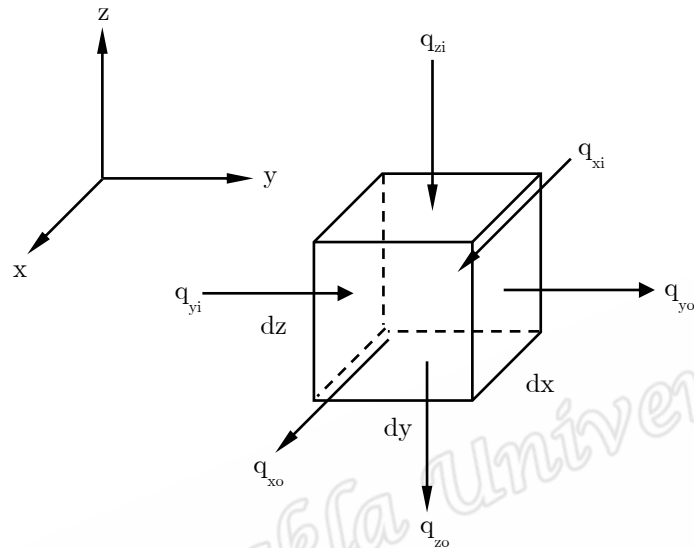
สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินเป็นสมบัติเฉพาะของดินแต่ละชนิดและแต่ละแห่ง จึงต้องมีการทดสอบเพื่อหาค่านี้สำหรับดินนั้น ๆ สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินจะมีหน่วยเช่นเดียวกับอัตราเร็ว [6] โดยทั่วไปค่าสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินแสดงตามตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ค่าโดยทั่วไปของสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินชนิดต่าง ๆ

ชนิดของดิน	สัมประสิทธิ์การซึมได้ (เซนติเมตรต่อวินาที)
ทรายสะอาด (clean sand)	1 – 100
ทรายเม็ดหยาบ (coarse sand)	1 – 0.01
ทรายเม็ดละเอียด (fine sand)	0.01 – 0.001
ดินตะกอน (silt)	0.001 – 0.00001
ดินเหนียว (clay)	< 0.00001

(ที่มา: วิศิษฐ์ [6])

ในส่วนนี้จะอธิบายถึงตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินซึ่งเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้มาจากกฎทรงมวล โดยการพิจารณาการไหลของน้ำผ่านส่วนย่อยของมวลดินหรือเอลิเมนต์ดิน (soil element) ที่มีลักษณะการไหลแบบลามินาร์และอยู่ในสภาวะการไหลคงตัว



รูปที่ 2.5 การไหลของน้ำผ่านเอลิเมนต์ดิน

จากรูปที่ 2.5 แสดงลักษณะการไหลของน้ำผ่านเอลิเมนต์ดินในทุกทิศทาง โดยสมมติให้เอลิเมนต์ดินมีลักษณะเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมกว้าง dx ยาว dy สูง dz และกำหนดให้ปริมาณต่าง ๆ ในหนึ่งหน่วยเวลา เป็นดังต่อไปนี้

q_{xi} , q_{yi} และ q_{zi} แทน อัตราการไหลเข้าตามแกน x , y และ z ตามลำดับ

q_{xo} , q_{yo} และ q_{zo} แทน อัตราการไหลออกตามแกน x , y และ z ตามลำดับ

k_x , k_y และ k_z แทน สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินตามแกน x , y และ z ตามลำดับ

และ h แทน เหนือที่ตำแหน่งใด ๆ ในเอลิเมนต์ดิน

โดยที่ h , k_x , k_y และ k_z เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก \mathbb{R}^3 ไป \mathbb{R}

ต่อไปจะพิจารณาปริมาณน้ำไหลผ่านเอลิเมนต์ดินต่อหน่วยเวลาในทิศทาง x สมมติให้น้ำไหลเข้าสู่เอลิเมนต์ดินด้าน x และไหลออกด้าน $x + dx$ ผ่านหน้าตัดที่ตั้งฉากกับทิศทางการไหลของน้ำมีพื้นที่เท่ากับ $dydz$ สำหรับด้าน x ของเอลิเมนต์ดินมีค่าสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินเท่ากับ k_x และความชันทางชลศาสตร์ i_{xi} โดยที่

$$i_{xi} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

จากกฎของดาร์ซีจะได้ปริมาณน้ำไหลเข้าสู่อนุภาคดินต่อหน่วยเวลาในทิศทาง x

$$q_{xi} = k_x i_{xi} A = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} dydz \quad (16)$$

สำหรับด้าน $x + dx$ ของเอลิเมนต์ดินมีค่าสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดิน เท่ากับ

$$k_x + \frac{\partial k_x}{\partial x} dx$$

และค่าความชันทางชลศาสตร์ i_{xo} โดยที่

$$i_{xo} = -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx$$

จะได้ปริมาณน้ำไหลออกจากอนุภาคดินต่อหน่วยเวลาในทิศทาง x เท่ากับ

$$q_{xo} = \left(k_x + \frac{\partial k_x}{\partial x} dx \right) \cdot i_{xo} dA = \left(k_x + \frac{\partial k_x}{\partial x} dx \right) \left(-\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx \right) dydz \quad (17)$$

จัดรูปสมการ (17) จะได้

$$q_{xo} = k_x \left(-\frac{\partial h}{\partial x} \right) dydz - \left(k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial k_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial k_x}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx \right) dx dy dz \quad (18)$$

เนื่องจากปริมาณน้ำไหลผ่านเอลิเมนต์ดินสุทธิต่อหน่วยเวลาในทิศทาง x เท่ากับ Δq_x โดยที่

$$\Delta q_x = q_{xi} - q_{xo} \quad (19)$$

แทน q_{xi} และ q_{xo} ในสมการ (19) จะได้

$$\Delta q_x = \left(k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial k_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial k_x}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx \right) dx dy dz \quad (20)$$

กำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์การซึมได้มีค่าคงที่ในทิศทาง x ดังนั้น

$$\frac{\partial k_x}{\partial x} = 0$$

จากสมการ (20) จะได้

$$\Delta q_x = k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx dy dz \quad (21)$$

ในทำนองเดียวกันปริมาณน้ำไหลผ่านเอลิเมนต์ดินต่อหน่วยเวลาในทิศทาง y

$$\Delta q_y = k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} dx dy dz \quad (22)$$

และปริมาณน้ำไหลผ่านเอลิเมนต์ดินต่อหน่วยเวลาในทิศทาง z

$$\Delta q_z = k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dx dy dz \quad (23)$$

ดังนั้น ปริมาณน้ำไหลผ่านเอลิเมนต์ดินสุทธิต่อหน่วยเวลา เขียนแทนด้วย Δq เมื่อ

$$\Delta q = \Delta q_x + \Delta q_y + \Delta q_z \quad (24)$$

แทน Δq_x , Δq_y และ Δq_z ในสมการ (24) จะได้

$$\Delta q = \left(k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dx dy dz \quad (25)$$

เนื่องจากน้ำไหลในสภาวะคงตัว ดังนั้น Δq จึงมีค่าเป็นศูนย์ จะได้

$$0 = \left(k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dx dy dz$$

เนื่องจาก $dx dy dz$ คือปริมาตรของเอลิเมนต์ดินมีค่าไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (26)$$

สมการ (26) เป็นตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินอย่างต่อเนื่องในทุกทิศทาง เนื่องจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นี้ได้จากการพิจารณาการไหลของน้ำผ่านเอลิเมนต์ดินเท่านั้น แต่โดยทั่วไปอัตราการไหลของน้ำจากแหล่งกำเนิด (water supply) และอัตราการไหลเข้า (pour in) หรือระบายออก (drain) จากลาดดินเป็นปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อการไหลของน้ำใต้ดิน ซึ่งน้ำที่ไหลเข้าสู่ลาดดิน ได้แก่ น้ำฝนที่ตกลงบนผิวดินแล้วซึมลงสู่ชั้นใต้ดิน หรือน้ำท่าที่ไหลมาจากบริเวณที่สูงกว่า สำหรับน้ำที่ไหลออกจากลาดดินบางส่วนจะถูกกักเก็บเป็นน้ำบาดาลหรือถ่ายเทลงสู่แหล่งน้ำต่อไป ในงานวิทยานิพนธ์นี้จะนำตัวแบบตามสมการ (26) มาเพิ่มปัจจัยและเงื่อนไขที่ได้กล่าวมาข้างต้น

ต่อไปจะพิจารณาตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินที่มีปัจจัยจากแหล่งกำเนิดของน้ำในดิน สมมติให้ภายในเอลิเมนต์ดินตามรูปที่ 2.5 มีแหล่งกำเนิดน้ำกระจายอย่างต่อเนื่องและตลอดทั่วทั้งเอลิเมนต์ดิน และน้ำไหลจากแหล่งกำเนิดด้วยอัตราเร็ว v_s ปริมาณน้ำที่ไหลจากแหล่งกำเนิดภายในเอลิเมนต์ต่อหน่วยเวลา เท่ากับ $v_s dx dy dz$ ดังนั้น ปริมาณน้ำไหลผ่านเอลิเมนต์ดินสุทธิต่อหน่วยเวลาเขียนได้ตามสมการ

$$\Delta q = \Delta q_x + \Delta q_y + \Delta q_z + v_s dx dy dz \quad (27)$$

แทน Δq_x , Δq_y และ Δq_z ในสมการ (24) จะได้

$$\Delta q = \left(k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dx dy dz + v_s dx dy dz \quad (28)$$

เนื่องจากน้ำไหลในสภาวะคงตัว ดังนั้น Δq จึงมีค่าเป็นศูนย์ จะได้

$$0 = \left(k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + v_s \right) dx dy dz$$

เนื่องจาก $dx dy dz$ คือปริมาตรของเอลิเมนต์ดินมีค่าไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + v_s = 0$$

และเนื่องจากอัตราเร็วการไหลของน้ำเข้าสู่หรือออกจากเอลิเมนต์ดินเท่ากับผลคูณของอัตราเร็วการไหลของน้ำผ่านเอลิเมนต์ดินกับเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยของด้านเอลิเมนต์ดินที่น้ำไหลออก นั่นคือ

$$v_d = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (29)$$

เมื่อ \mathbf{v} แทน อัตราเร็วการไหลของน้ำผ่านเอลิเมนต์ดิน โดยที่

$$\mathbf{v} = k_x \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} + k_y \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} + k_z \frac{\partial h}{\partial z} \mathbf{k}$$

และ \mathbf{n} แทน เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยของด้านเอลิเมนต์ดิน โดยที่

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$$

จากสมการ (29) จะได้

$$v_d = - \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} + k_y \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} + k_z \frac{\partial h}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k})$$

ดังนั้น

$$k_x \frac{\partial h}{\partial x} \cdot n_x + k_y \frac{\partial h}{\partial y} \cdot n_y + k_z \frac{\partial h}{\partial z} \cdot n_z + v_d = 0$$

ROSS [9] ได้เสนอแบบจำลองการไหลของน้ำใต้ดินในสภาวะคงตัว เมื่อรวมอัตราเร็วการไหลของน้ำจากแหล่งกำเนิด เขียนในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือ

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + v_s = 0 \quad (30)$$

เงื่อนไขขอบประกอบด้วย

$$h = h_\beta \quad (31)$$

$$k_x \frac{\partial h}{\partial x} \cdot n_x + k_y \frac{\partial h}{\partial y} \cdot n_y + k_z \frac{\partial h}{\partial z} \cdot n_z + v_d = 0 \quad (32)$$

เมื่อ h_β แทน เสดที่ผิวดิน

v_d แทน อัตราเร็วการไหลของน้ำเข้าสู่หรือออกจากลาดดิน

และ $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ แทน เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยของหน้าตัดที่น้ำไหลผ่าน

สมการ (30), (31) และ (32) เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อการวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดินที่มีผลจากการไหลของน้ำจากแหล่งกำเนิดและการไหลเข้าสู่หรือออกจากลาดดิน

การกำหนดค่าอัตราเร็วการไหลของน้ำจากแหล่งกำเนิดในสมการ (30) กรณีที่แหล่งกำเนิดเป็นแหล่งสูบน้ำออกจากลาดดิน อัตราเร็วการไหลมีค่าน้อยกว่าศูนย์ และกรณีที่แหล่งกำเนิดเป็นแหล่งจ่ายน้ำเข้าสู่ลาดดิน อัตราเร็วการไหลมีค่ามากกว่าศูนย์

เขตที่ผิวดินหรือที่จุดขอบใด ๆ ในเอลิเมนต์ดิน สามารถกำหนดได้ในสมการ (31) กรณีดินแห้งเขตที่จุดใด ๆ มีค่าเท่ากับ 0

การกำหนดค่าอัตราเร็วการไหลของน้ำเข้าสู่หรือออกจากลาดดินในสมการ (32) กรณีที่น้ำไหลเข้าสู่ลาดดิน อัตราเร็วการไหลมีค่ามากกว่าศูนย์ และกรณีที่น้ำไหลออกจากลาดดิน อัตราเร็วการไหลมีค่าน้อยกว่าศูนย์ ถ้าน้ำที่ไหลเข้าสู่ลาดดินมาจากฝน อัตราเร็วการไหลของน้ำเข้าสู่ลาดดินมีค่าเท่ากับความเข้มฝน (rainfall intensity)

การวัดปริมาณน้ำฝนในช่วงเวลาที่กำหนดจะแสดงผลในหน่วยของความลึกของน้ำฝนที่ตกลงบนพื้นที่โดยถือว่าปริมาณฝนแผ่กระจายและมีความลึกสม่ำเสมอ (equivalent uniform depth) ครอบคลุมทั้งพื้นที่ และมีสมมติฐานว่าไม่มีการไหลออกของน้ำท่า การซึมผ่านผิวดินหรือการระเหย [3] หน่วยที่นิยมใช้วัดความลึกฝนคือ มิลลิเมตร หรือ เซนติเมตร หรือ นิ้ว

ความเข้มฝน หมายถึง ปริมาณความลึกฝนเทียบต่อหนึ่งหน่วยเวลา มีหน่วยเป็น มิลลิเมตรต่อชั่วโมง หรือ นิ้วต่อชั่วโมง เป็นต้น สำหรับในประเทศไทย กรมอุตุนิยมวิทยาได้กำหนดให้รายงานอัตราการตกของฝนในรูปความแรงของฝน ดังนี้

- ฝนตกเล็กน้อย คือ ความเข้มฝน 1 ถึง 5 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง
- ฝนตกหนักปานกลาง คือ ความเข้มฝน 5 ถึง 10 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง
- ฝนตกหนัก คือ ความเข้มฝน 10 ถึง 20 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง
- ฝนตกหนักมาก คือ ความเข้มฝนมากกว่า 20 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง

ตามที่ได้กล่าวมาข้างต้นว่าตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินเป็นตัวแบบที่จะนำมาใช้เพื่อวิเคราะห์ลักษณะการไหลของน้ำภายในลาดดินและประมาณค่าเขตเพื่อจะนำไปหาปริมาณน้ำในดินที่ตำแหน่งใด ๆ แล้วนั้น ลำดับต่อไปจะกล่าวถึงตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดินซึ่งเป็นตัวแบบที่จะนำมาใช้อธิบายการกระจายความเค้นและความเครียดในลาดดิน ตลอดจนผลจากการที่ดินได้ดูดซับน้ำไว้จนทำให้มวลดินด้านบนมีน้ำหนักมากขึ้นจนทำให้มวลดินในโครงสร้างด้านล่างไม่สามารถรับน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นมาได้จนทำให้ลาดดินเกิดการวิบัติ

2.3 ตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดิน (shear strength of soil model)

การวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินเป็นขั้นตอนของการหาลำดับด้านทานต่อการเฉือนสูงสุดที่ดินจะสามารถรับได้โดยไม่วิบัติหรือพังทลาย ซึ่งจะต้องใช้หลักการวิเคราะห์โครงสร้าง (structure analysis) ของลาดดิน เพื่อให้ทราบการกระจายความเค้นและความเครียดที่ตำแหน่งใด ๆ ในลาดดิน ตลอดจนถึงการวิเคราะห์ว่ามวลดินส่วนใดในลาดดินที่รับความเค้นมากซึ่งเมื่อพิจารณาร่วมกับเกณฑ์การวิบัติของลาดดินแล้วก็อาจจะประเมินได้ว่าเป็นมวลดินส่วนที่มีความเสี่ยงต่อการวิบัติ โดยการวิเคราะห์โครงสร้างของลาดดินนี้จะนำหลักการเชิงทฤษฎียืดหยุ่นของวัสดุในงานวิศวกรรมธรณีเทคนิค ดังจะกล่าวต่อไปนี้

2.3.1 ความสมดุล (equilibrium)

ความสมดุล เป็นสภาพที่วัตถุอยู่นิ่ง หรือเคลื่อนที่ในทิศทางตรงด้วยความเร็วคงที่ ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน วัตถุจะอยู่ในสภาพสมดุลได้เมื่อแรงลัพธ์ และโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุเป็นศูนย์ ดังสมการ

$$\sum \mathbf{F} = 0 \text{ และ } \sum \mathbf{M} = 0 \text{ โดยที่ } \mathbf{F}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$$

เมื่อ \mathbf{F} แทน แรงที่กระทำต่อวัตถุ

และ \mathbf{M} แทน โมเมนต์ที่กระทำต่อวัตถุ

เนื่องจากลาดดินในธรรมชาติมีลักษณะเป็นสามมิติ ดังนั้นการพิจารณาปัญหาความสมดุลของลาดดินจึงพิจารณาในปริภูมิสามมิติ

การพิจารณาถึงแรงหรือโมเมนต์ที่กระทำต่อวัตถุใด ๆ จะพิจารณาในรูปของแรงหรือโมเมนต์ที่กระทำต่อหน่วยพื้นที่หน้าตัดที่รับแรงนั้น โดยที่ แรงที่กระทำต่อหน่วยพื้นที่หน้าตัด เรียกว่า ความเค้น แบ่งได้เป็น

ความเค้นดึง (tensile stress) เขียนแทนด้วย σ_T โดยที่

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A}$$

เมื่อ F_T แทน แรงดึง

และ A แทน พื้นที่หน้าตัดที่ตั้งฉากกับแรงดึง

ความเค้นอัด (compressive stress) เขียนแทนด้วย σ_C โดยที่

$$\sigma_C = \frac{F_C}{A}$$

เมื่อ F_C แทน แรงอัด

และ A แทน พื้นที่หน้าตัดที่ตั้งฉากกับแรงอัด

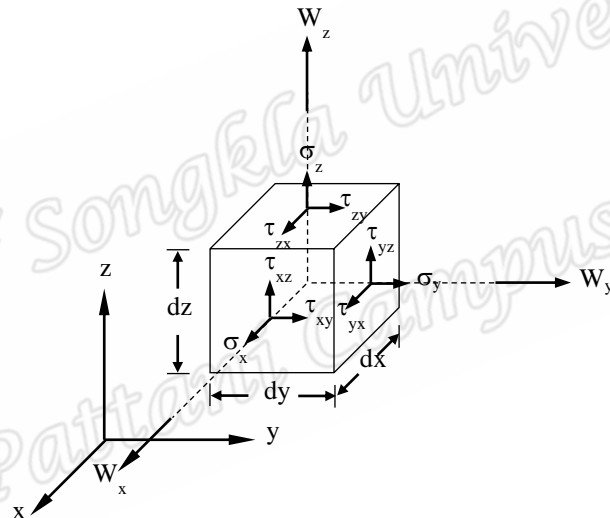
ความเค้นเฉือน (shear stress) เขียนแทนด้วย τ โดยที่

$$\tau = \frac{F_s}{A}$$

เมื่อ F_s แทน แรงเฉือน

และ A แทน พื้นที่หน้าตัดที่ขนานกับแรงเฉือน

ในกรณีของความเค้นที่กระทำตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัด ได้แก่ ความเค้นดึง และความเค้นอัด ต่อไปนี้จะเรียกว่าความเค้นปกติ (normal stress) และในทางปฐพีกลศาสตร์ได้กำหนดเครื่องหมายลบสำหรับความเค้นดึง และบวกสำหรับความเค้นอัด การหาสมการสมดุลเชิงอนุพันธ์เป็นสมการพื้นฐานทางทฤษฎียืดหยุ่นของวัสดุจะพิจารณาจากเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยม ขนาดกว้าง dx ยาว dy และสูง dz โดยอยู่ภายใต้สภาวะของความเค้น และน้ำหนัก ตามรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 เอลิเมนต์ภายใต้สภาวะความเค้น และแรงจากมวล

(ที่มา: วิศิษฐ์ [6])

กำหนดให้

σ_x แทน ความเค้นปกติที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x

σ_y แทน ความเค้นปกติที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y

σ_z แทน ความเค้นปกติที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z

τ_{xy} แทน ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x และมีทิศทางในแนวแกน y

τ_{xz} แทน ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x และมีทิศทางในแนวแกน z

τ_{yx} แทน ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y และมีทิศทางในแนวแกน x

τ_{yz} แทน ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y และมีทิศทางในแนวแกน z

τ_{zx} แทน ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z และมีทิศทางในแนวแกน x

τ_{zy} แทน ความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z และมีทิศทางในแนวแกน y

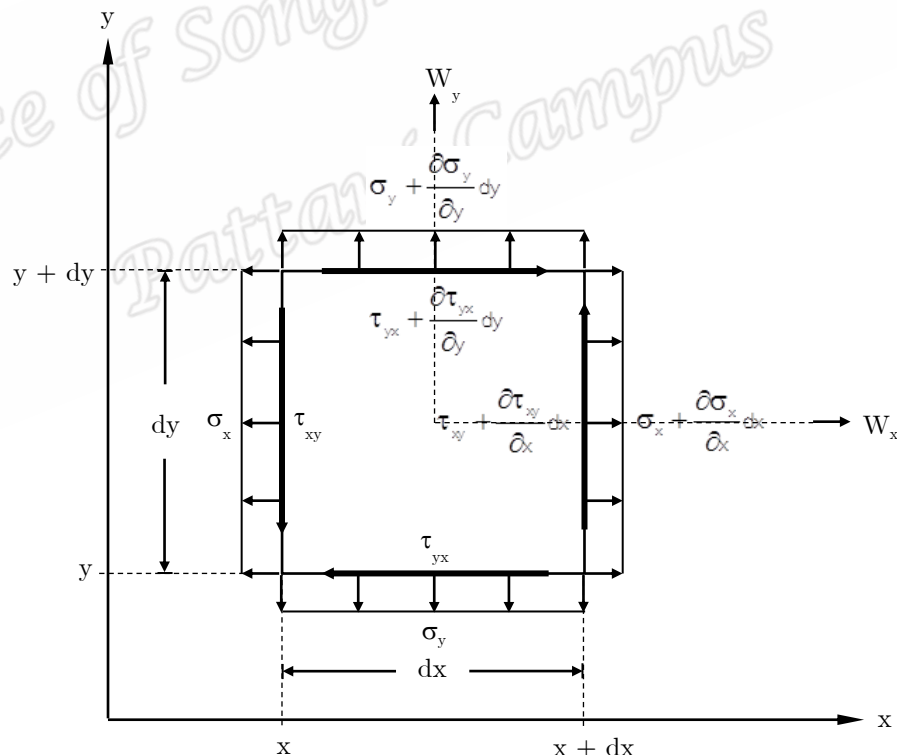
γ_x แทน แรงเนื่องจากมวลทิศทางในแนวแกน x

γ_y แทน แรงเนื่องจากมวลทิศทางในแนวแกน y

γ_z แทน แรงเนื่องจากมวลทิศทางในแนวแกน z

โดยที่ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ และ τ_{zy} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก \mathbb{R}^3 ไป \mathbb{R}

สมมติให้เอลิเมนต์อยู่ในสภาวะสมดุล และเอลิเมนต์เป็นวัสดุเนื้อเดียวกันตลอดและสม่ำเสมอ ความเค้นที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกนใด ๆ มีค่าคงที่ตลอดทั้งระนาบ แต่จะมีค่าแปรเปลี่ยนไปตามการกระจัดระหว่างสองระนาบที่ขนานกัน เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์สมดุลแรงและโมเมนต์ของเอลิเมนต์ จึงพิจารณาสมดุลแรงและโมเมนต์เฉพาะหน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy สำหรับสมดุลแรงและโมเมนต์บนหน้าตัดอื่น ๆ สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน



รูปที่ 2.7 หน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy ภายใต้ความเค้นกระทำ

จากรูปที่ 2.7 แสดงหน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy โดยระนาบนี้มีด้านที่ตั้งฉากกับแกน x ได้แก่ ด้าน x และ $x + dx$ สำหรับด้านที่ตั้งฉากกับแกน y ได้แก่ ด้าน y และ

ด้าน $y + dy$ เนื่องจากความเค้นที่กระทำบนด้าน x ประกอบด้วย ความเค้นปกติ σ_x และความเค้นเฉือน τ_{xy} ดังนั้น ความเค้นที่กระทำบนพื้นผิวด้าน $x + dx$ ประกอบด้วย ความเค้นปกติ เท่ากับ

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

และความเค้นเฉือน เท่ากับ

$$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$$

ในทำนองเดียวกัน ความเค้นที่กระทำต่อพื้นผิวด้าน y ประกอบด้วย ความเค้นปกติ σ_y และความเค้นเฉือน τ_{yx} ดังนั้น ความเค้นที่กระทำต่อพื้นผิวด้าน $y + dy$ ประกอบด้วย ความเค้นตั้งฉาก เท่ากับ

$$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

และความเค้นเฉือน เท่ากับ

$$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

เนื่องจากเอลิเมนต์อยู่ในสภาวะสมดุลผลรวมของแรง และผลรวมของโมเมนต์เป็นศูนย์ ดังนั้น ผลรวมของแรงที่ขนานกับแกน x เป็นศูนย์ หรือ $\sum F_x = 0$ จะได้สมการ

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \gamma_x dx dy dz = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \gamma_x = 0$$

ผลรวมของแรงที่ขนานกับแกน y เป็นศูนย์ หรือ $\sum F_y = 0$ จะได้สมการ

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz - \sigma_y dx dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{xy} dy dz + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zy} dx dy + \gamma_y dx dy dz = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \gamma_y = 0$$

และผลรวมของแรงที่ขนานกับแกน z เป็นศูนย์ หรือ $\sum F_z = 0$ จะได้สมการ

$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_z dx dy + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{xz} dy dz + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yz} dx dz + \gamma_z dx dy dz = 0$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \gamma_z = 0$$

เพื่อความสะดวกสำหรับการหาสมดุลโมเมนต์ของเอลิเมนต์จึงกำหนดให้จุดกำเนิดของแกนพิกัดอยู่บนจุดศูนย์กลางของเอลิเมนต์ จะได้ผลรวมของโมเมนต์รอบแกน x เป็นศูนย์ หรือ $\sum M_x = 0$ จะได้

$$\left(\tau_{yz} + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) \right) dx dz \cdot \left(\frac{dy}{2} \right) - \left(\tau_{zy} + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) \right) dx dy \cdot \left(\frac{dz}{2} \right) = 0$$

เนื่องจาก $\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot \left(\frac{dy}{2} \right) - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \cdot \left(\frac{dz}{2} \right) \right) dx dy dz$ มีค่าน้อยมาก ดังนั้น $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

ผลรวมของโมเมนต์รอบแกน y เป็นศูนย์ หรือ $\sum M_y = 0$ จะได้สมการ

$$\left(\tau_{zx} + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) \right) dx dy \cdot \left(\frac{dz}{2} \right) - \left(\tau_{xz} + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) \right) dy dz \cdot \left(\frac{dx}{2} \right) = 0$$

เนื่องจาก $\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \left(\frac{dz}{2} \right) - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot \left(\frac{dx}{2} \right) \right) dx dy dz$ มีค่าน้อยมาก ดังนั้น $\tau_{zx} = \tau_{xz}$

ผลรวมของโมเมนต์รอบแกน z เป็นศูนย์ หรือ $\sum M_z = 0$ จะได้สมการ

$$\left(\tau_{xy} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \right) dy dz \cdot \left(\frac{dx}{2} \right) - \left(\tau_{yx} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \right) dx dz \cdot \left(\frac{dy}{2} \right) = 0$$

เนื่องจาก $\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot \left(\frac{dx}{2} \right) - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \left(\frac{dy}{2} \right) \right) dx dy dz$ มีค่าน้อยมาก ดังนั้น $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

จะได้ว่า เมื่อเอลิเมนต์อยู่ในสภาวะสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและแรงจากมวลเป็นไปตามสมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของเอลิเมนต์สามมิติคือ

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \gamma_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \gamma_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \gamma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

2.3.2 การเข้ากันได้ (compatibility)

เมื่อวัตถุถูกแรงกระทำ จะมีการยืดหรือหดตัว อัตราส่วนระหว่างส่วนที่ยืดหรือหดของวัตถุกับความยาวเดิม เรียกว่า ความเครียด เขียนแทนด้วย ε โดยที่

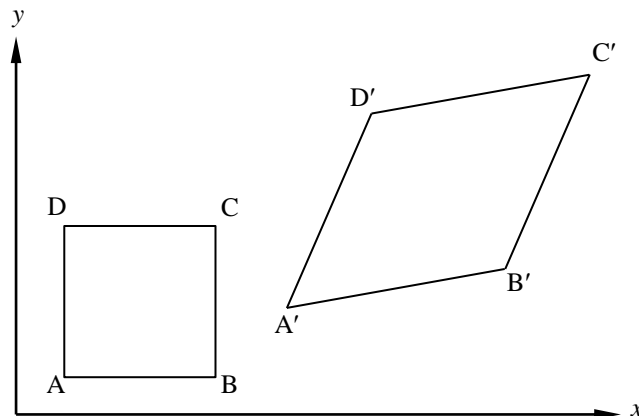
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

เมื่อ δ แทน ส่วนที่ยืดหรือหด

และ L แทน ความยาวเดิม

และความเครียดจากแรงเฉือน ต่อไปนี้จะเรียกว่า ความเครียดเฉือน เขียนแทนด้วย γ

การวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมธรณีเทคนิคจะต้องพิจารณาเงื่อนไขทางด้าน การเข้ากันได้ (compatibility condition) ซึ่งเป็นการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด (strain and displacement relationship) และเงื่อนไขความต่อเนื่อง เพื่อความ สอดคล้องต่อการนำเสนอ ในส่วนนี้จะอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดในปริภูมิ 2 มิติ โดยจะพิจารณาเฉพาะความสัมพันธ์บนหน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy สำหรับ ความสัมพันธ์บนหน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบอื่น ๆ สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน



รูปที่ 2.8 การเปลี่ยนรูปหน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy

จากรูปที่ 2.8 แสดงการเปลี่ยนรูปหน้าตัดของเอลิเมนต์จาก $\square ABCD$ เป็น $\square A'B'C'D'$ ด้วยการกระจัด u และ v ซึ่งเป็นการกระจัดของจุดใด ๆ ตามแกน x และ y ตามลำดับ โดยที่ u และ v เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก \mathbb{R}^2 ไป \mathbb{R} ดังนั้น จากพิกัดของจุดยอด $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ และ $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{A} = (x, y)$$

$$\mathbf{B} = (x + \Delta x, y)$$

$$\mathbf{C} = (x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$\mathbf{D} = (x, y + \Delta y)$$

มีการกระจัดโดยฟังก์ชัน u และ v จะได้ พิกัดจุดยอด $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ และ $\mathbf{D}' \in \mathbb{R}^2$

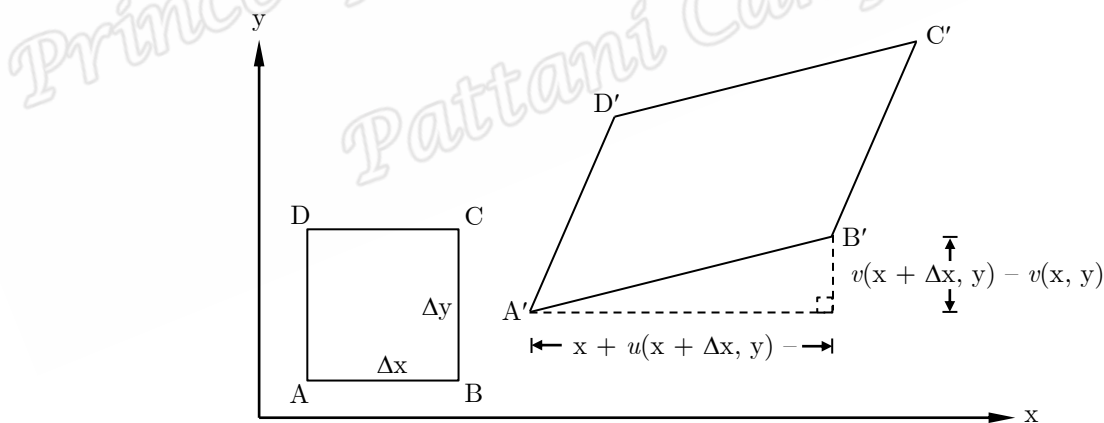
$$\mathbf{A}' = (x + u(x, y), y + v(x, y))$$

$$\mathbf{B}' = (x + \Delta x + u(x + \Delta x, y), y + v(x + \Delta x, y))$$

$$\mathbf{C}' = (x + \Delta x + u(x + \Delta x, y + \Delta y), y + \Delta y + v(x + \Delta x, y + \Delta y))$$

$$\mathbf{D}' = (x + u(x, y + \Delta y), y + \Delta y + v(x, y + \Delta y))$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด ϵ_x กับการกระจัดหาได้เมื่อนำหน้าตัดเอลิเมนต์มีการเปลี่ยนแปลงความยาวในทิศทาง x ดังนี้



รูปที่ 2.9 การเปลี่ยนแปลงความยาวในทิศทาง x ของหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy

จากรูปที่ 2.9 แสดงความยาวเดิมของหน้าตัดเอลิเมนต์ส่วนที่ขนานกับแกน x เท่ากับความยาวด้าน AB และเมื่อเกิดความเครียด ϵ_x ความยาวของหน้าตัดเอลิเมนต์มีความยาวเท่ากับความยาวด้าน $A'B'$ กำหนดให้ \mathbf{AB} และ $\mathbf{A'B'} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \text{จาก } \mathbf{AB} &= (x + \Delta x, y) - (x, y) \\ &= (\Delta x, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A'B'} &= (x + \Delta x + u(x + \Delta x, y), y + v(x + \Delta x, y)) - (x + u(x, y), y + v(x, y)) \\ &= (\Delta x + u(x + \Delta x, y) - u(x, y), v(x + \Delta x, y) - v(x, y)) \end{aligned}$$

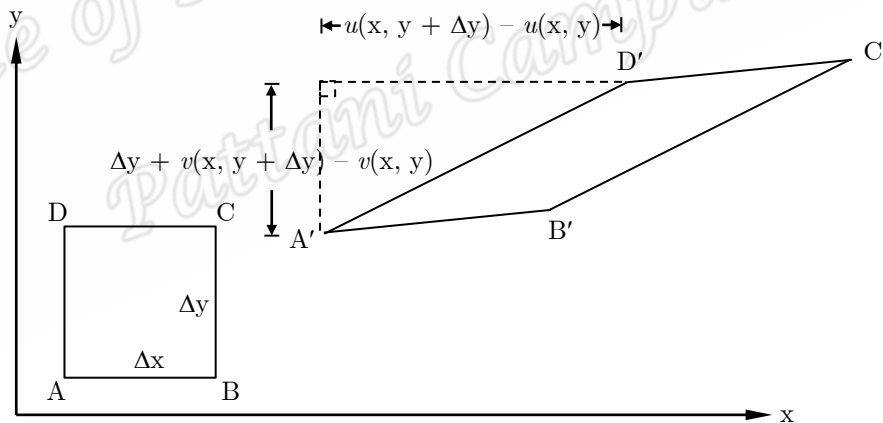
จะได้ความเครียดเฉลี่ยในทิศทาง x บนช่วงของส่วนต่างความยาวหน้าตัด Δx แทนด้วย $\epsilon_{\Delta x}$ เมื่อ

$$\begin{aligned} \epsilon_{\Delta x} &= \frac{(\Delta x + u(x + \Delta x, y) - u(x, y)) - \Delta x}{\Delta x} \\ &= \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \end{aligned}$$

และความเครียดในทิศทาง x ที่จุดใด ๆ เขียนแทนด้วย ϵ_x โดยที่

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด ϵ_y กับการกระทำได้เมื่อนำตัดเอลิเมนต์มีการเปลี่ยนแปลงความยาวในทิศทาง y ดังนี้



รูปที่ 2.10 การเปลี่ยนแปลงความยาวในทิศทาง y ของหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy

จากรูปที่ 2.10 แสดงความยาวเดิมของหน้าตัดเอลิเมนต์ส่วนที่ขนานกับแกน y เท่ากับความยาวด้าน AD และเมื่อเกิดความเครียด ϵ_y ความยาวของหน้าตัดเอลิเมนต์มีความยาวเท่ากับความยาวด้าน $A'D'$ กำหนดให้ \mathbf{AD} และ $\mathbf{A'D'} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \mathbf{AD} &= (x, y + \Delta y) - (x, y) \\ &= (0, \Delta y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A'D'} &= (x + u(x, y + \Delta y), y + \Delta y + v(x, y + \Delta y)) - (x + u(x, y), y + v(x, y)) \\ &= (u(x, y + \Delta y) - u(x, y), \Delta y + v(x, y + \Delta y) - v(x, y)) \end{aligned}$$

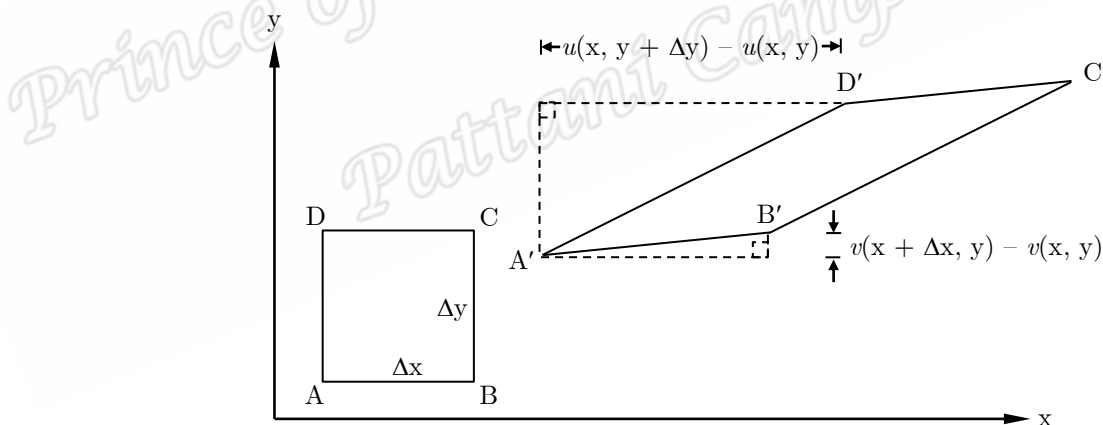
จะได้ ความเครียดเฉลี่ยในทิศทาง y บนช่วงของส่วนต่างความยาวหน้าตัด Δy แทนด้วย $\epsilon_{\Delta y}$ โดยที่

$$\begin{aligned} \epsilon_{\Delta y} &= \frac{(\Delta y + v(x, y + \Delta y) - v(x, y)) - \Delta y}{\Delta y} \\ &= \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \end{aligned}$$

และความเครียดในทิศทาง y ที่จุดใด ๆ เขียนแทนด้วย ϵ_y โดยที่

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด γ_{xy} กับการกระจัดสามารถพิจารณาได้จากเมื่อหน้าตัดเอลิเมนต์เปลี่ยนขนาดมุมบนระนาบหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy



รูปที่ 2.11 การเปลี่ยนแปลงมุมของหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy

จากรูปที่ 2.11 มุมของหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy ซึ่งได้แก่มุม $\angle DAB$ ซึ่งเป็นมุมฉากเปลี่ยนเป็นมุม $\angle D'A'B'$ จะได้ความเครียดเฉือนเฉลี่ย $\gamma_{\Delta x \Delta y}$ โดยที่

$$\gamma_{\Delta x \Delta y} = \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} + \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$

และความเครียดเฉือนที่จุดใด ๆ เขียนแทนด้วย γ_{xy} โดยที่

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\quad (33)$$

ในทำนองเดียวกัน ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดในทิศทาง z กับการกระจัด ดังสมการต่อไปนี้

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (34)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (35)$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดสำหรับเอลิเมนต์ในปริภูมิ 3 มิติ มีดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\end{aligned}\quad (36)$$

โดยที่ u , v , และ w เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก \mathbb{R}^3 ไป \mathbb{R}

จากสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัดแล้ว เพื่อให้ส่วนประกอบของความเครียดในเทอมของ u , v และ w มีเพียงค่าเดียวและมีความต่อเนื่องจึงต้องเพิ่มสมการเงื่อนไขของการต่อเนื่อง (condition of compatibility)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}\end{aligned}$$

จะได้สมการเงื่อนไขการต่อเนื่อง

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}$$

และสามารถหาความเครียดเชิงตั้งฉากได้ดังนี้

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (33) เทียบกับ z จะได้

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \quad (37)$$

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (34) เทียบกับ y จะได้

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \quad (38)$$

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (35) เทียบกับ x จะได้

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \quad (39)$$

นำสมการ (-1) คูณสมการ (39) บวกสมการ (38) และบวกสมการ (37) จะได้

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\end{aligned} \quad (40)$$

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (40) เทียบกับ x จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (41)$$

นำสมการ (39) ลบสมการ (38) และบวกสมการ (37) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (42)$$

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (42) เทียบกับ y จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (43)$$

นำสมการ (39) บวกสมการ (38) และลบสมการ (37) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (44)$$

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (44) เทียบกับ z จะได้

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (45)$$

โดยที่ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก \mathbb{R}^3 ไป \mathbb{R}

และสมการ (41), (43) และ (45) เรียกว่าสมการความเข้ากันได้ (Compatibility Equation)

สำหรับความเครียด ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่จะทำให้ u, v และ w เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก \mathbb{R}^3 ไป \mathbb{R} [2]

2.3.3 พฤติกรรมเชิงกลของวัสดุ (constitutive law)

พฤติกรรมเชิงกลของวัสดุ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุที่มีเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ ซึ่งเป็นไปตามกฎของฮุก (Hook's law)

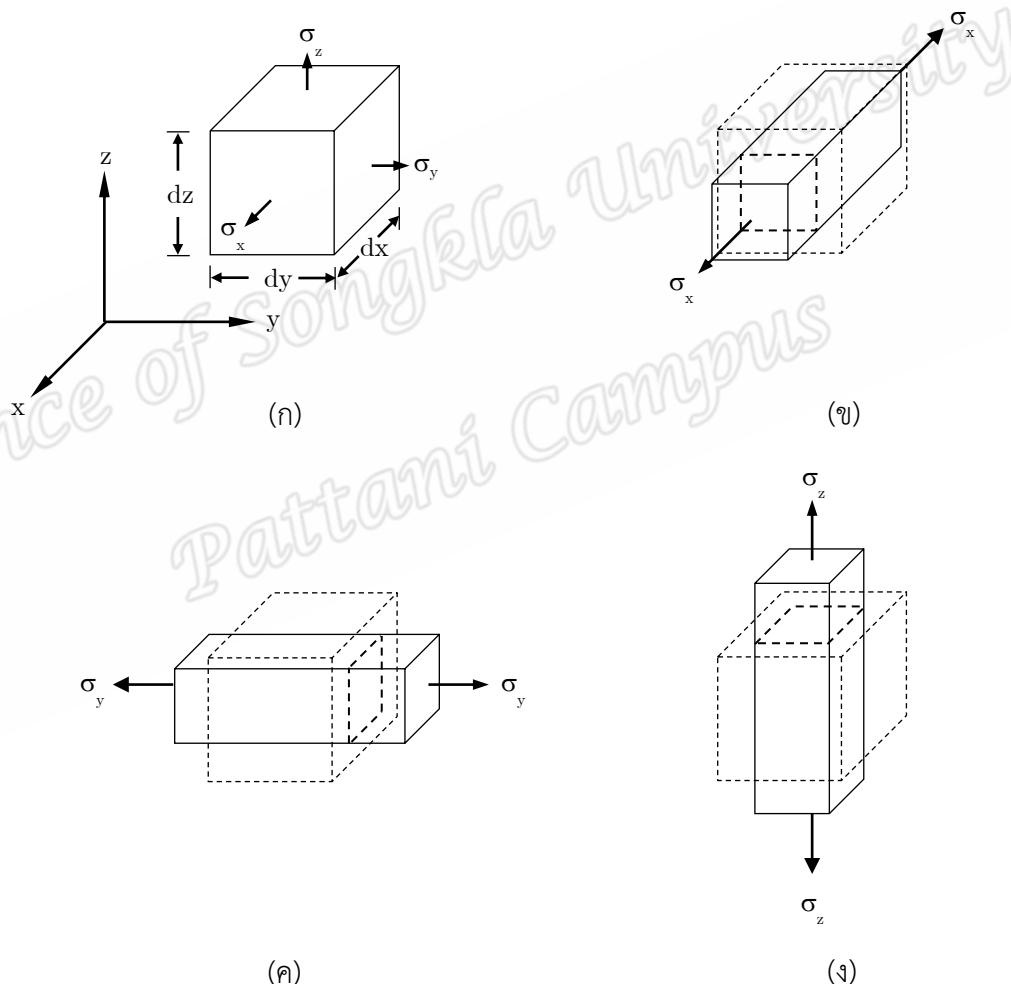
$$\sigma = E\varepsilon$$

เมื่อ σ แทน ความเค้นปกติ

E แทน โมดูลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity or Yong's modulus)

และ ε แทน ความเครียดปกติ

พิจารณาเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมที่มีความเค้นที่เป็นอิสระต่อกันมากกระทำ ดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 การเปลี่ยนรูปของเอลิเมนต์เมื่อเกิดความเค้น σ_x , σ_y และ σ_z

ต่อไปพิจารณาความเครียดในทิศทาง x ซึ่งเป็นผลมาจากความเค้นปกติ σ_x , σ_y และ σ_z โดยความเครียดในทิศทาง x เท่ากับ ผลรวมของความเครียดในทิศทาง x ที่มีผลจากแต่ละความเค้นปกติ

จากรูปที่ 2.12 (ข) เมื่อความเค้น σ_x มากระทำต่อเอลิเมนต์ โดยกำหนดให้ σ_y และ σ_z เท่ากับศูนย์ ดังนั้น ความเครียดในทิศทาง x ที่มีผลเฉพาะความเค้น σ_x แทนด้วย ϵ_{xx} โดยที่

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$$

จากรูปที่ 2.12 (ค) เมื่อความเค้น σ_y มากระทำต่อเอลิเมนต์ โดยกำหนดให้ σ_x และ σ_z เท่ากับศูนย์ ดังนั้น ความเครียดในทิศทาง x ที่มีผลเฉพาะความเค้น σ_y แทนด้วย ϵ_{yx} โดยที่

$$\epsilon_{yx} = -\frac{\nu\sigma_y}{E}$$

เมื่อ ν แทน อัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson ratio) ซึ่งเป็นอัตราส่วนความเครียดตามขวาง แกนของแรงต่อความเครียดตามแกนของแรง

จากรูปที่ 2.12 (ง) เมื่อความเค้น σ_z มากระทำต่อเอลิเมนต์ โดยกำหนดให้ σ_x และ σ_y เท่ากับศูนย์ ดังนั้น ความเครียดในทิศทาง x ที่มีผลเฉพาะความเค้น σ_z แทนด้วย ϵ_{zx} โดยที่

$$\epsilon_{zx} = -\frac{\nu\sigma_z}{E}$$

ดังนั้น ความเครียดในทิศทาง x เขียนแทนด้วย ϵ_x โดยที่

$$\epsilon_x = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yx} + \epsilon_{zx}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z \quad (46)$$

ในทำนองเดียวกัน ความเครียดในทิศทาง y และ z เขียนแทนด้วย ϵ_y และ ϵ_z ตามลำดับ โดยที่

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} -\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z \quad (47)$$

$$\text{และ} \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} -\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z \quad (48)$$

และจัดรูปสมการ (46), (47) และ (48) ได้สมการดังต่อไปนี้

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \epsilon_x + \nu\epsilon_y + \nu\epsilon_z$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nu\epsilon_x + \epsilon_y + \nu\epsilon_z$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nu\epsilon_x + \nu\epsilon_y + \epsilon_z$$

ในการทำงานเดียวกัน ความสัมพันธ์ของความเค้นเฉือน τ และความเครียดเฉือน γ คือ $\tau = G\gamma$ เมื่อ G คือมอดูลัสเฉือน ดังนั้น ความเครียดเฉือนที่ด้านทั้งสามของเอลิเมนต์คือ

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \text{และ} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

ส่วนความเครียดเฉือนอีกสามด้านตรงข้ามจะมีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้าม ถ้าทราบค่าความเครียดเฉือนทั้งสามก็สามารถหาความเค้นเฉือนได้คือ

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (49)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (50)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (51)$$

เนื่องจาก $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ดังนั้น ความเค้นในสมการ (49) ถึง (51) สามารถ

เขียนในรูปของสมการเมทริกซ์ คือ

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (52)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T, \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^6$

และ $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^6$

และเมทริกซ์ \mathbf{D} เรียกว่าเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

สำหรับการเปลี่ยนรูปของมวลดินจากแรงกระทำนั้น สุเชษฐ์ [6] กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงแรงดันในส่วนที่เป็นของแข็ง (solid phase) และส่วนที่เป็นของไหล (fluid phase) ในมวลดินจะต้องเกี่ยวข้องกันไปพร้อมกับการเปลี่ยนแปลงความเครียด ดังนั้น จากความสัมพันธ์ตามสมการที่ (52) นั้น $\boldsymbol{\sigma}$ จะเป็นความเค้นรวม (total stress) จากสมการ (5) หน่วยแรงประสิทธิผลของดินไม่อิ่มตัวด้วยน้ำ เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ตามสมการ

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{u}_f \quad (53)$$

เมื่อ $\boldsymbol{\sigma}'$ แทน ความเค้นประสิทธิผล

และ \mathbf{u}_f แทน ความดันของไหลในโพรงดิน

โดยที่ \mathbf{u}_f เป็นไปตามความสัมพันธ์ [7] เขียนในรูปเมทริกซ์ตามสมการ

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_a - \chi(\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_w) \quad (54)$$

เมื่อ \mathbf{u}_a แทน ความดันอากาศ (air pressure)

\mathbf{u}_w แทน ความดันน้ำ (water pressure)

และ χ แทน พารามิเตอร์แปรผันตามตึกรึความอิมตัว S_d โดยที่ค่าของพารามิเตอร์ χ เป็นค่าที่ได้จากการทดลอง ในกรณีที่ดินอิมตัวด้วยน้ำ χ เท่ากับ 1 และกรณีที่ดินแห้ง χ เท่ากับ 0 ความสัมพันธ์ระหว่างความดันของไหลในโพรงดิน \mathbf{u}_f กับความเครียด $\boldsymbol{\varepsilon}$ เป็นไปตามสมการ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_e \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

เขียนในรูปย่อ จะได้

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon} \quad (55)$$

เมื่อ \mathbf{D}_f แทน เมทริกซ์สติฟเนสของไหล (pore fluid stiffness matrix) และ \mathbf{K}_e แทน โมดูลัสเชิงปริมาตรเทียบเท่าของไหล (equivalent bulk modulus of pore fluid)

เนื่องจากของไหลไม่สามารถต้านทานแรงเฉือนได้ ดังนั้น \mathbf{D}_f จึงมีค่าเฉพาะ 3×3 พจน์แรกของแนวแกนทแยงมุมหลักของเมทริกซ์

ถ้าดินมีความพรุน n ต่อหน่วยปริมาตรดินแล้วของไหลในดินจะมีปริมาตรเท่ากับ n และปริมาตรของเม็ดดินเท่ากับ $1 - n$ และ กำหนดให้ K_s แทน โมดูลัสเชิงปริมาตรของแข็ง (bulk modulus of soil solid particle) และ K_f แทน โมดูลัสเชิงปริมาตรของไหลภายในโพรงดิน (bulk modulus of the pore fluid)

การเพิ่มความดันของไหลในโพรงดิน Δu_f เป็นการเพิ่มขึ้นทั้งความดันในของไหลและความเค้นประสิทธิผลในของแข็ง ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงของความเครียด $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ จึงเป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงปริมาตรของมวลดิน (change in volumetric strain) คำนวณได้จากทั้งการเปลี่ยนแปลงเชิงปริมาตรทั้งจากมวลดินและของไหลในดิน ดังสมการ

$$\Delta \epsilon_v = n \frac{\Delta u_f}{K_f} + (1-n) \frac{\Delta u_f}{K_s} \quad (56)$$

จากสมการ (55) จะได้

$$\Delta u_f = K_e (\Delta \epsilon_x + \Delta \epsilon_y + \Delta \epsilon_z) = K_e (\Delta \epsilon_v) \quad (57)$$

จากสมการ (56) และ (57) จะได้

$$K_e = \frac{K_s K_f}{K_s n + K_f (1-n)}$$

จากสมการ (5), (52) และ (55) จะได้ความเค้นรวม σ ตามสมการ

$$\sigma = \sigma' + u_f = (D' + D_f) \epsilon \quad (58)$$

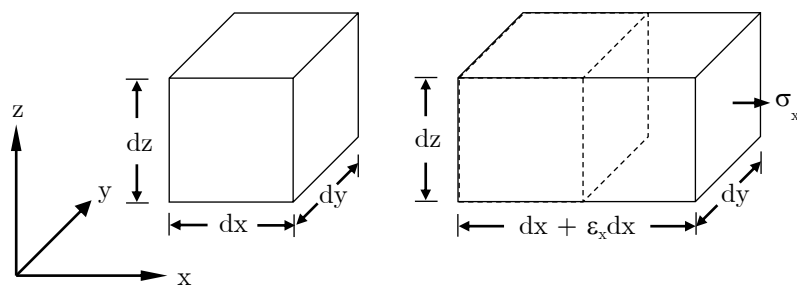
และจากสมการ (52) และ (58) จะได้

$$D = D' + D_f \quad (59)$$

2.3.4 พลังงานความเคียด (strain energy)

เมื่อวัสดุใดได้รับความเค้น งานที่เกิดจากการกระทำจะสะสมในเนื้อของวัสดุนั้นในรูปแบบของพลังงานความเคียด ตัวอย่างเช่น เมื่อออกแรงกดสปริง สปริงจะหดตัว พลังงานจำนวนหนึ่งจะถูกสะสมไว้ในเนื้อสปริง และเมื่อคลายแรงกดออก สปริงจะยืดตัวกลับมาในสภาพเดิม การยืดตัวของสปริงก็คือการคายพลังงานที่สะสมไว้ รูปแบบของพลังงานความเคียดมี 4 ลักษณะคือ พลังงานความเคียดที่เกิดจากแรงกระทำตามแนวแกนของเอลิเมนต์ พลังงานความเคียดที่เกิดจากโมเมนต์ดัดหรือคู่ควบ พลังงานความเคียดที่เกิดจากโมเมนต์บิด (torsion) และพลังงานความเคียดที่เกิดจากแรงเฉือน สำหรับในส่วนของแบบจำลองนี้จะพิจารณาเฉพาะพลังงานความเคียดที่เกิดจากแรงกระทำตามแนวแกน และแรงเฉือนเท่านั้น

ต่อไปจะพิจารณาพลังงานความเคียดของเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยม เมื่อเอลิเมนต์ได้รับแรงกระทำตามแนวแกน และแรงเฉือน



รูปที่ 2.13 การเปลี่ยนแปลงความยาวของเอลิเมนต์เมื่อได้รับความเค้น σ_x

รูปที่ 2.13 เมื่อความเค้น σ_x กระทำกับเอลิเมนต์ ทำให้เอลิเมนต์เปลี่ยนแปลงความยาวของด้านที่ขนานกับระนาบ xy สมมติให้ด้านของเอลิเมนต์เปลี่ยนแปลงความยาว $\varepsilon_x dx$ เมื่อ ε_x เป็นความเครียดในทิศทางที่ขนานกับแกน x ดังนั้น ความเค้น σ_x ที่กระทำกับเอลิเมนต์จะให้เกิดงานสะสมในรูปของพลังงานความเครียด

เนื่องจาก W ได้จากแรง $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_x \in \mathbb{R}^3$ ที่ทำให้เอลิเมนต์ยืดออกด้วยการกระจัด $\mathbf{r}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ จะได้

$$W = \int \mathbf{F}_x \cdot d\mathbf{r}$$

เพราะว่า \mathbf{F}_x เป็นแรงที่กระทำตามแกน x และตั้งฉากกับหน้าตัดของเอลิเมนต์ขนาด $dydz$ จะได้

$$\mathbf{F}_x = \sigma_x dydz \mathbf{i}$$

ขนาดของการกระจัด \mathbf{r} เป็นความยาวของเอลิเมนต์ส่วนที่เพิ่มขึ้นจากความยาวเดิม จะได้

$$\mathbf{r} = \varepsilon_x dx \mathbf{i}$$

ดังนั้น งาน W เขียนในรูปของความเค้น σ_x และความเครียด ε_x จะได้

$$W = \int \sigma_x dydz d(\varepsilon_x dx)$$

กรณีที่เอลิเมนต์มีความยืดหยุ่นเชิงเส้น จึงเป็นไปตามกฎของฮุก $\sigma_x = E\varepsilon_x$ เมื่อ E คือโมดูลัสความยืดหยุ่น และเนื่องจาก dx, dy และ dz เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\varepsilon_x} E\varepsilon_x d\varepsilon_x \cdot dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} E\varepsilon_x^2 \cdot dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \cdot dx dy dz \end{aligned}$$

$$\text{หรือ } dU_x = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \cdot dV$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเอลิเมนต์ได้รับแรงเค้น σ_y

$$\begin{aligned} W &= \int \sigma_y dx dz d(\varepsilon_y dy) \\ &= \int_0^{\varepsilon_y} E\varepsilon_y d\varepsilon_y \cdot dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} E\varepsilon_y^2 \cdot dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y \cdot dx dy dz \end{aligned}$$

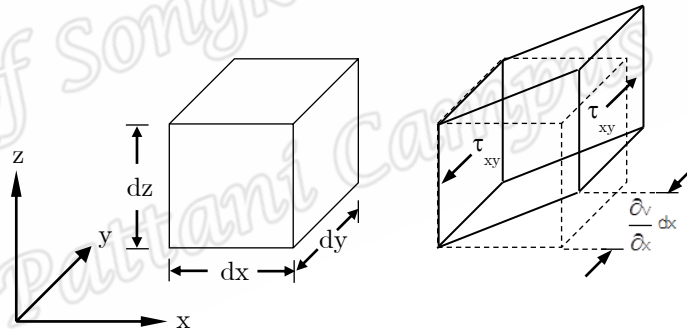
$$\text{หรือ } dU_y = \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y \cdot dV$$

และเมื่อเอลิเมนต์ได้รับแรงเค้น σ_z

$$\begin{aligned} W &= \int \sigma_z dx dy d(\varepsilon_z dz) \\ &= \int_0^{\varepsilon_z} E \varepsilon_z d\varepsilon_z \cdot dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} E \varepsilon_z^2 \cdot dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z \cdot dx dy dz \end{aligned}$$

$$\text{หรือ } dU_z = \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z \cdot dV$$

กรณีที่มีแรงเค้นเฉือน τ_{xy} บนหน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ yz ทำให้หน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy เกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดของมุมจากเดิมที่เป็นมุมฉาก



รูปที่ 2.14 การเปลี่ยนรูปหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy เมื่อความเค้น τ_{xy} มากระทำ

จากรูปที่ 2.14 ความเครียดเฉือน $\gamma'_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}$ และความเค้น τ_{xy} ทำให้เกิดการ

กระจัด เท่ากับ $\frac{\partial v}{\partial x} dx$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } W &= \int \tau_{xy} dy dz d(\gamma'_{xy} dx) \\ &= \int \tau_{xy} d\gamma'_{xy} \cdot dx dy dz \end{aligned}$$

$$dU_{xy} = \int \tau_{xy} d\gamma'_{xy} \cdot dV$$

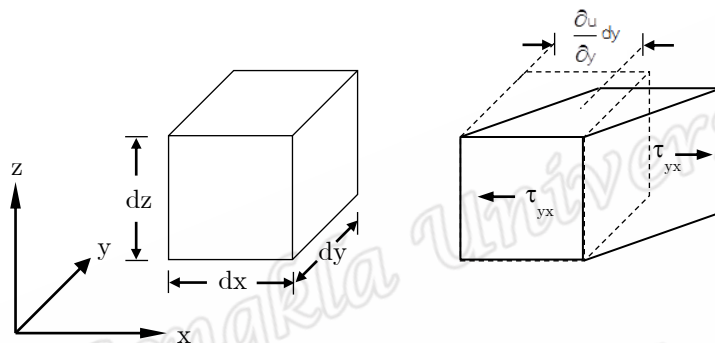
เนื่องจาก $\tau_{xy} = G \gamma'_{xy}$ เมื่อ G คือค่าโมดูลัสเฉือน

$$\begin{aligned} dU_{xy} &= \int_0^{\gamma_{xy}} G'_{xy} d\gamma'_{xy} \cdot dV \\ &= \frac{1}{2} G(\gamma'_{xy})^2 \cdot dV \end{aligned}$$

จะได้

$$dU_{xy} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma'_{xy} \cdot dV$$

กรณีที่มีแรงเค้นเฉือน τ_{yx} บนหน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xz ทำให้หน้าตัดของเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xy เกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดของมุมจากเดิมที่เป็นมุมฉาก



รูปที่ 2.15 การเปลี่ยนรูปหน้าตัดเอลิเมนต์ที่ขนานกับระนาบ xz เมื่อความเค้น τ_{yx} มากระทำ

จากรูปที่ 2.15 ความเครียดเฉือน $\gamma'_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y}$ และความเค้น τ_{yx} ทำให้เกิดการ

กระจัด เท่ากับ $\frac{\partial u}{\partial y} dy$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } W &= \int \tau_{yx} dx dz d(\gamma'_{yx} dy) \\ &= \int \tau_{yx} d\gamma'_{yx} \cdot dx dy dz \end{aligned}$$

$$dU_{yx} = \int \tau_{yx} d\gamma'_{yx} \cdot dV$$

เนื่องจาก $\tau_{yx} = G\gamma'_{yx}$ เมื่อ G คือค่าโมดูลัสเฉือน

$$\begin{aligned} dU_{yx} &= \int_0^{\gamma_{yx}} G\gamma'_{yx} d\gamma'_{yx} \cdot dV \\ &= \frac{1}{2} G(\gamma'_{yx})^2 \cdot dV \end{aligned}$$

จะได้

$$dU_{yx} = \frac{1}{2} \tau_{yx} \gamma'_{yx} \cdot dV$$

ในการทำงานเดียวกัน สำหรับกรณีที่เอลิเมนต์ได้รับแรงเค้นเฉือน τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} และ τ_{zy}

$$dU_{xz} = \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma'_{xz} \cdot dV$$

$$dU_{zx} = \frac{1}{2} \tau_{zx} \gamma'_{zx} \cdot dV$$

$$dU_{yz} = \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma'_{yz} \cdot dV$$

$$dU_{zy} = \frac{1}{2} \tau_{zy} \gamma'_{zy} \cdot dV$$

โดยที่ $\gamma'_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}$ $\gamma'_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z}$ $\gamma'_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}$ $\gamma'_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z}$

จะได้ งานจากความเค้นทั้งหมด dU จากสมการ

$$\begin{aligned} dU &= dU_x + dU_y + dU_z + dU_{xy} + dU_{yx} + dU_{xz} + dU_{zx} + dU_{yz} + dU_{zy} \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma'_{xy} + \tau_{yx} \gamma'_{yx} + \tau_{xz} \gamma'_{xz} + \tau_{zx} \gamma'_{zx} + \tau_{yz} \gamma'_{yz} + \tau_{zy} \gamma'_{zy}) dV \end{aligned}$$

เนื่องจากเอลิเมนต์อยู่ในสภาวะสมดุล ดังนั้น $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ และ $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ จะได้

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} (\gamma'_{xy} + \gamma'_{yx}) + \tau_{xz} (\gamma'_{xz} + \gamma'_{zx}) + \tau_{yz} (\gamma'_{yz} + \gamma'_{zy})) dV$$

เขียนในรูปสมการเมทริกซ์

$$dU = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dV$$

โดยที่ $\gamma_{xy} = \gamma'_{xy} + \gamma'_{yx}$ $\gamma_{xz} = \gamma'_{xz} + \gamma'_{zx}$ $\gamma_{yz} = \gamma'_{yz} + \gamma'_{zy}$

หรือเขียนในรูปย่อ

$$dU = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

และพลังงานความเค้นรวม

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

2.4 เกณฑ์การวิบัติลาดดิน (slope failure criterion)

ความคราก (yielding) หมายถึงพฤติกรรมของวัสดุภายหลังสภาพอิลาสติก (inelastic behavior) กล่าวคือ เมื่อวัสดุถูกแรงกระทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความเค้นจนกระทั่งถึงจุดคราก (yield point) เป็นผลให้วัสดุแสดงพฤติกรรมแบบอิลาสโตพลาสติก (elasto-plastic behavior) หรือมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างถาวร [8] เกณฑ์การวิบัติลาดดินคือความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของลาดดินสำหรับการประเมินการวิบัติของลาดดิน นั่นคือ ถ้าลาดดินได้รับความเค้นอยู่ภายใต้เกณฑ์การวิบัติ ลาดดินยังคงมีเสถียรภาพ แต่หากลาดดินได้รับความเค้นจนกระทั่งละเมิดเกณฑ์การวิบัติ ลาดดินจะเกิดการวิบัติ

2.4.1 แบบจำลองของมอร์-คูลอมบ์ (Mohr-Coulomb Model)

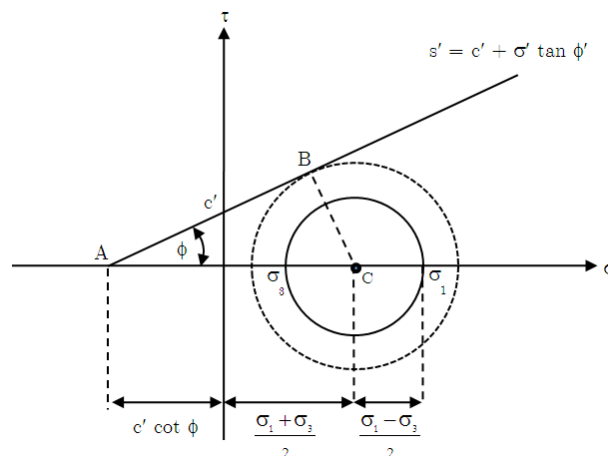
วิศิษฐ์ [6] ได้นำเสนอสมการของมอร์-คูลอมบ์ในรูปของหน่วยแรงประสิทธิผล ดังนี้

$$s' = c' + \sigma' \tan \phi' \quad (60)$$

เมื่อ c' แทน หน่วยแรงเชื่อมแน่นรูปหน่วยแรงประสิทธิผล

ϕ' แทน มุมเสียดทานภายในรูปหน่วยแรงประสิทธิผล

σ' แทน ความเค้นปกติรูปหน่วยแรงประสิทธิผล



รูปที่ 2.16 เส้นขอบเขตการวิบัติ และระนาบวิบัติ

(ที่มา: วิศิษฐ์ [6])

สมการ (60) เรียกว่าเงื่อนไขการวิบัติมอร์-คูลอมบ์ และกราฟของสมการ (60) ดังรูปที่ 2.16 มีลักษณะเป็นกราฟเส้นตรง เรียกว่า เส้นขอบเขตการวิบัติ (Mohr envelope or failure envelope) เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำต่อมวลดิน ดินจะมีกำลังรับแรงเฉือนซึ่งจะต้านแรงเฉือนที่เกิดขึ้น หากผลของความเค้นเฉือนมากกว่ามีค่าเท่ากับกำลังรับแรงเฉือนของดิน ดินก็จะเกิด

การวิบัติ แสดงด้วยวงกลมของมอร์ (Mohr's circle) ณ จุด B คือจุดที่ความเค้นเฉือนสูงสุดเท่ากับกำลังรับแรงเฉือนของดิน วงกลมของมอร์จะสัมผัสกับเส้นขอบเขตการวิบัติพอดิ กำหนดให้ r แทนเกณฑ์การวิบัติของมอร์-คูลอมบ์

$$r = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2c' \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi}$$

ถ้า r เข้าใกล้ 1 เอลิเมนต์จะเข้าใกล้การวิบัติ

สำหรับเกณฑ์การวิบัติที่จะกล่าวถึงต่อไปมีลักษณะเป็นพื้นผิวความคราก (yield surface) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของความเค้น (yield function) ตามแบบจำลองอีลาสโตพลาสติก (elasto-plastic) ที่อธิบายพฤติกรรมของดินทั้งเงื่อนไขแบบไม่ระบายน้ำ และเงื่อนไขแบบระบายน้ำ ส่วนนี้จะนำเสนอนิยามสำหรับเกณฑ์การวิบัติที่จะกล่าวถึงต่อไป

ความเค้นทั่วไป (generalized stresses) คือ ความเค้นที่กระทำต่อมวลดินในปริภูมิสามมิติ เป็นความเค้นที่คำนวณได้จากตัวแบบกำลังรับแรงเฉือน เขียนแทนด้วย \mathbf{T}_3 โดยที่

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

ความเค้นหลัก (principal stresses) คือ ความเค้นที่กระทำบนระนาบหลัก (principal stresses) เขียนแทนด้วย \mathbf{T}_p โดยที่

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$ สามารถหาโดยเทคนิคปัญหาค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue problem) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ

$$|\mathbf{T}_3 - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_3| = 0$$

เมื่อ \mathbf{I}_3 แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix)

ค่าความเค้นไม่แปรเปลี่ยน (stress invariants) คือ

$$[I_1 \quad I_2 \quad I_3]^T$$

เมื่อ I_1, I_2 และ I_3 เป็นความเค้นไม่แปรเปลี่ยนลำดับที่ 1, 2 และ 3 (first, second and third stress invariants) นิยามโดยความเค้นประสิทธิ์ผลดังนี้

$$I_1 = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3$$

$$I_2 = \sigma'_1\sigma'_2 + \sigma'_2\sigma'_3 + \sigma'_1\sigma'_3$$

$$I_3 = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$$

ความเค้นเบี่ยงเบนไม่แปรเปลี่ยนลำดับที่ 2 (second deviator stress invariants) คือ

$$J_2 = \frac{1}{6}((\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2)$$

ค่าความเค้นประสิทธิผลเฉลี่ย (mean effective stress) คือ

$$p' = \frac{I_1}{3}$$

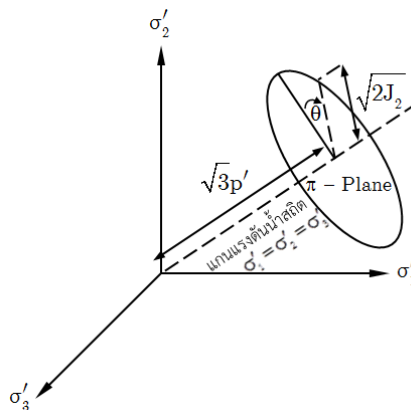
ค่าความเค้นเบี่ยงเบน (deviator stress) คือ

$$q = \sqrt{3J_2}$$

และค่ามุมโลดี (Lode's angle) คือ

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \cdot \frac{\sigma'_2 - \sigma'_3}{\sigma'_1 - \sigma'_3} - 1 \right) \right)$$

ความหมายเชิงกายภาพของค่าความเค้นไม่แปรเปลี่ยน ดังรูป 2.17



รูปที่ 2.17 ความหมายเชิงกายภาพของค่าความเค้นไม่แปรเปลี่ยน

(ที่มา: สุเชษฐ์ [8])

2.4.2 แบบจำลองวอน ไมส์ (von Mises model)

กรณีการวิเคราะห์พฤติกรรมกำลังของดินในระยะสั้น ในทางทฤษฎีสามารถถือว่าเป็นพฤติกรรมภายใต้เงื่อนไขแบบไม่ระบายน้ำ เพราะในระหว่างที่ดินได้รับแรงเฉือนน้ำในมวลดินยังไม่ระบายออก ดังนั้นการวิเคราะห์พฤติกรรมดินในเงื่อนไขนี้จะใช้ความเค้นรวม (total stress

analysis, TSA) และเรียกกำลังรับแรงเฉือนว่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำ (undrained shear strength) เขียนแทนด้วย s_u โดยในปี ค.ศ. 1985 ปีเตอร์ โลดส์ และกาย โฮลส์บี (Wroth & Houlsby) ได้สรุปค่าพารามิเตอร์กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำที่เหมาะสมสำหรับการปฏิบัติว่าเป็นฟังก์ชันของแรงเสียดทานภายในและอัตราส่วนการอัดตัวคายน้ำ (OCR) นั่นคือ

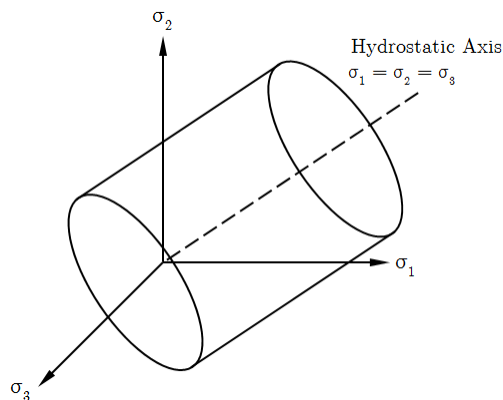
$$\frac{s_u}{\sigma'_{v_0}} = f(\phi, OCR)$$

เมื่อ $\left(\frac{s_u}{\sigma'_{v_0}} \right)$ แทนค่าพารามิเตอร์กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำ

ในปี ค.ศ. 1983 วอน ไมซีส (von Mises) นำเสนอแบบจำลองที่นำมาใช้อธิบายพฤติกรรมดินที่มีความเชื่อมแน่น (cohesive soil) โดยนิยามฟังก์ชันความครากวอน ไมซีสตามสมการ ดังนี้

$$f = \sqrt{J_2} - \frac{2}{\sqrt{3}} s_u = 0$$

รูปที่ 2.18 แสดงพื้นผิวความครากวอน ไมซีส จะมีลักษณะพื้นผิวเป็นรูปทรงกระบอกในปริภูมิความเค้นหลัก (principle stress space) ความเค้นจะมีค่าไม่แปรเปลี่ยนตามค่า p เรียกว่าความเค้นเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นตามแกนแรงดันน้ำสถิต (hydrostatic axis)



รูปที่ 2.18 พื้นผิวความครากวอน ไมซีส (von Mises yield surface)

(ที่มา: สุเชษฐ์ [8])

แบบจำลองวอน ไมซีสที่ได้กล่าวมาข้างต้นเป็นตัวแทนสำหรับวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินในเงื่อนไขแบบไม่ระบายน้ำ สำหรับการวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินในเงื่อนไขแบบระบายน้ำเป็นการวิเคราะห์ความเค้นในมวลดินเมื่อน้ำได้ถูกระบายออกหมดแล้ว ดังนั้นการวิเคราะห์

กำลังของดินในเงื่อนไขนี้จะใช้ความเค้นประสิทธิผล (effective stress analysis, ESA) และแบบจำลองที่นำมาใช้อธิบายลักษณะของดินภายใต้เงื่อนไขแบบระบายน้ำ มีดังต่อไปนี้

2.4.3 แบบจำลองดริคเกอร์-พรากเกอร์ (Drucker-Prager model)

แบบจำลองดริคเกอร์-พรากเกอร์ (Drucker & Prager, 1952) มีฟังก์ชันดังนี้

$$f = \sqrt{3J_2} - M(\theta)(p' + c' \cot \phi') = 0$$

โดยที่ M ในแบบจำลองอาจได้จากการเลือกทดสอบดินภายใต้เงื่อนไขดังต่อไปนี้

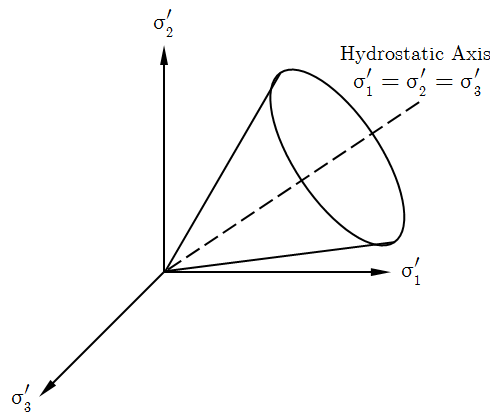
- กรณีการทดสอบแรงอัดสามแกน $\theta = -30^\circ$ คือ

$$M(\phi') = M_c = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'}$$

- กรณีการทดสอบแรงดึงสามแกน $\theta = 30^\circ$ คือ

$$M(\phi') = M_E = \frac{6 \sin \phi'}{3 + \sin \phi'}$$

จากรูปที่ 2.19 แสดงพื้นผิวความครากดริคเกอร์-พรากเกอร์ มีลักษณะเป็นรูปทรงกรวยในปริภูมิความเค้นหลัก โดยที่ความเค้นจะแปรเปลี่ยนตาม p' ที่เพิ่มขึ้นตามแกนแรงดันน้ำสถิต



รูปที่ 2.19 พื้นผิวความครากดริคเกอร์-พรากเกอร์ (Drucker-Prager yield surface)

(ที่มา: สุเชษฐ์ [8])

2.4.4 แบบจำลองลาดี-ดิงแคน (Lade-Duncan model)

แบบจำลองลาดี-ดิงแคน (Lade & Duncan, 1975) มีฟังก์ชันความครากดังนี้

$$f = \frac{I'_1}{I'_3} - k = 0$$

เมื่อ k แทนพารามิเตอร์วัสดุ (material parameter) ขึ้นกับความหนาแน่น ต่อมาเพื่อความเหมาะสมในการคำนวณเชิงตัวเลข จึงได้มีการแปลงฟังก์ชันความครากลาติ-ดั่งแคนอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$f = \sqrt{3J_2} - M(\theta)(p' + c' \cot \phi') = 0$$

โดยที่ค่า $M(\theta)$ คำนวณได้จากการแก้สมการกำลังสามเพื่อหาค่า M_{LD}

$$2 \sin 2\theta M_{LD}^3 + 9M_{LD}^2 - 27C_{LD} = 0$$

เมื่อ

$$C_{LD} = \frac{\eta \left(\frac{p_a}{3p'} \right)^m}{27 + \eta \left(\frac{p_a}{3p'} \right)^m}$$

โดยที่ η และ m คือพารามิเตอร์วัสดุ

และ p_a คือค่าแรงดันบรรยากาศ (atmospheric pressure)

2.4.5 แบบจำลองมัสซึโอกา-นากาอิ (Matsuoka-Nakai model)

แบบจำลองมัสซึโอกา-นากาอิ (Matsuoka & Nakai, 1974) นิยามฟังก์ชันความครากดั่งนี้

$$f = \frac{I_1 I_2}{I_3} - (9 + 8 \tan^2 \phi') = 0$$

ในการทำงานเดียวกัน เพื่อความสะดวกในการคำนวณเชิงตัวเลข จึงได้มีการแปลงฟังก์ชันความครากมัสซึโอกา และนากาอิอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$f = \sqrt{3J_2} - M(\theta)(p' + c' \cot \phi') = 0$$

โดยที่ค่า $M(\theta)$ คำนวณได้จากการแก้สมการกำลังสามเพื่อค่า M_{MN}

$$2C_{MN} \sin 3\theta M_{MN}^3 + 9(C_{MN} - 3)M_{MN}^2 - 27(C_{MN} - 9) = 0$$

เมื่อ
$$C_{MN} = \frac{27 \cdot 9 - M_C^2}{2M_C^3 - 9M_C^2 + 27}$$

และ M_C ได้จากเงื่อนไขการทดสอบแรงอัดสามแกน $\theta = -30^\circ$ โดยที่

$$M_c = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'}$$

2.4.6 แบบจำลองโฮลส์บี (Houlsby model)

แบบจำลองโฮลส์บี (Houlsby, 1986) เป็นแบบจำลองสำหรับอธิบายพฤติกรรมของวัสดุเสียดทาน และกฎการไหลแบบไม่สอดคล้อง โดยได้เสนอไว้ในรูปแบบฟังก์ชันกระจายพลังงาน (dissipation function, d_f) นั่นคือ

$$d_f = \left(\frac{8}{9} \left(c' + \mu\sigma'_1 \right) \left(c' + \mu\sigma'_2 \right) \left(\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p \right)^2 + \left(c' + \mu\sigma'_2 \right) \left(c' + \mu\sigma'_3 \right) \left(\dot{\epsilon}_2^p - \dot{\epsilon}_3^p \right)^2 + \left(c' + \mu\sigma'_3 \right) \left(c' + \mu\sigma'_1 \right) \left(\dot{\epsilon}_3^p - \dot{\epsilon}_1^p \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

เมื่อ $\mu = \tan \phi'$ แทน แฟกเตอร์เสียดทาน (frictional factor) หรือสามารถแปลงฟังก์ชันกระจายพลังงานเป็นฟังก์ชันความคราก เขียนแทนด้วย f โดยที่

$$f = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{c' + \mu\sigma'_1} + \frac{\sigma'_2 - \sigma'_3}{c' + \mu\sigma'_2} + \frac{\sigma'_3 - \sigma'_1}{c' + \mu\sigma'_3} - 8$$

จากเกณฑ์การวิบัติของลาดดินเหล่านี้เป็นเกณฑ์ในการแบ่งสถานะของดินว่าอยู่ในสภาพอิลาสติกหรืออิลาสโตพลาสติก ถ้าความครากน้อยกว่าศูนย์ลาดดินจะมีพฤติกรรมอิลาสติกนั้นคือความเค้นอยู่ในพื้นผิวความคราก แต่ถ้าความครากเท่ากับศูนย์ลาดดินจะมีพฤติกรรมอิลาสโตพลาสติกนั้นคือลาดดินจะเกิดการความครากหรือวิบัติ

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินประกอบด้วยตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดิน ตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดิน และเกณฑ์การวิบัติลาดดิน ตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินตามสมการ (30) จะถูกนำมาใช้เพื่อหาค่าเฮดที่ตำแหน่งใด ๆ ในดินเพื่อนำมาประมาณค่าปริมาณน้ำในดินและน้ำหนักรวมซึ่งจะมีผลต่อกำลังรับแรงเฉือนของดิน การวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินจะใช้หลักการความสมดุล การเข้ากันได้ พฤติกรรมเชิงกลของวัสดุ และเงื่อนไขขอบสำหรับวิเคราะห์หาความเค้นและความเครียดเพื่อนำมาใช้คำนวณค่าความครากด้วยฟังก์ชันความครากตามแบบจำลองที่ได้นำเสนอในหัวข้อที่ 2.4 ความครากเป็นค่าที่ใช้บ่งบอกถึงสถานะความเค้นที่เกิดขึ้นภายในซึ่งเป็นค่าที่นำมาใช้ในการประเมินเสถียรภาพลาดดิน เนื่องจากการหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินที่มีลักษณะเป็นรูปทรงอิสระทำได้ยาก ดังนั้นงานวิทยานิพนธ์นี้จึงใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขหรือค่าประมาณของเฮด ความเค้นและความเครียดที่จุดใด ๆ ในลาดดิน โดยในขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะต้องใช้ระบบสมการเชิงเส้น เรียกว่าสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element equation) ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ในบทต่อไปจะกล่าวถึงสมการไฟไนต์เอลิเมนต์รวมถึงขั้นตอนวิธีในการคำนวณหาผลเฉลยของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ตามที่ได้กล่าวมาในบทนี้

บทที่ 3

การวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

บทนี้จะนำเสนอการวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดิน และการวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่นิยมนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรม โดยสามารถวิเคราะห์ปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง เช่น การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ความเค้น การสั่นสะเทือนของเครื่องจักร โครงสร้างอาคาร สะพานหรือโครงสร้างอื่น ๆ รวมทั้งยังสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน การไหลของของไหล และการถ่ายเทมวล เป็นต้น [2] การวิเคราะห์โครงสร้างที่ไม่ซับซ้อน สามารถหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่ต้องการทราบ เช่น การกระจัดที่ตำแหน่งใด ๆ ของชิ้นส่วนได้โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลยที่ได้จะเรียกว่าผลเฉลยแม่นยำ แต่โครงสร้าง หรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกลที่มีความซับซ้อนซึ่งประกอบด้วยส่วนเว้า ส่วนโค้งต่าง ๆ ทำให้พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนไม่สม่ำเสมอ จึงทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำจากสมการอนุพันธ์ได้ ฉะนั้นจึงจำเป็นต้องใช้วิธีอื่น เช่น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการทางพีชคณิต

สำหรับการวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดินและกำลังรับแรงเฉือนของดินก็ประสบปัญหาเช่นเดียวกับปัญหาที่ได้กล่าวมาข้างต้น เพราะเนื่องจากลาดดินมีลักษณะเป็นรูปทรงอิสระการประมาณค่าผลเฉลยของตัวแบบเหล่านี้จึงต้องใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขสามารถทำได้หลายวิธี เช่น วิธีสมดุลโดยตรง (direct equilibrium method) วิธีงานหรือพลังงาน (work or energy method) วิธีของกาเลอร์คิน (Galerkin's method) และวิธีการแปรผัน (variation method) เป็นต้น ในงานวิทยานิพนธ์นี้จะใช้วิธีการแปรผันเพื่อหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินในสภาวะคงตัว และวิธีสมดุลโดยตรงสำหรับตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดิน

บทนี้จะกล่าวถึงการหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 2 ได้แก่ ตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินในสภาวะคงตัว และตัวแบบกำลังรับแรงเฉือน รวมถึงขั้นตอนวิธีในการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยจะเริ่มจากการนำข้อมูลความสูงต่ำของภูมิประเทศมาสร้างเป็นแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ การหาสมการรวมของระบบ การกำหนดเงื่อนไขค่าขอบในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และการหาผลเฉลย สุดท้ายจะกล่าวถึงอัลกอริทึมซึ่งเป็นภาพรวมของกระบวนการทั้งหมดในการวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับในส่วนแรกของบทนี้จะนำเสนอสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดิน

3.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดิน

จากบทที่ 2 ได้นำเสนอแบบจำลองการไหลของน้ำใต้ดินในสภาวะคงตัว โดยเขียนในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือ

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + v_s = 0$$

เงื่อนไขขอบประกอบด้วย

$$h = h_\beta$$

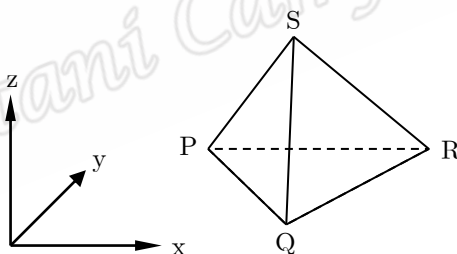
$$k_x \frac{\partial h}{\partial x} \cdot n_x + k_y \frac{\partial h}{\partial y} \cdot n_y + k_z \frac{\partial h}{\partial z} \cdot n_z + v_d = 0$$

เมื่อ h_β แทน เสดที่ผิวดิน

v_d แทน อัตราเร็วการไหลของน้ำเข้าสู่หรือออกจากลาดดิน

และ $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ แทน เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยของหน้าตัดที่น้ำไหลผ่าน

ในส่วนนี้จะนำเสนอสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบดังกล่าว ซึ่งหาได้จากวิธีการแปรผันโดยใช้เอลิเมนต์ชนิดรูปทรงสี่หน้า (tetrahedron) สมมติให้เอลิเมนต์ประกอบด้วยจุดยอด ได้แก่ $P(x_P, y_P, z_P)$, $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, $R(x_R, y_R, z_R)$ และ $S(x_S, y_S, z_S)$ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 เอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า

สมมติให้การกระจายเสดในลาดดินจำลองด้วยฟังก์ชัน h โดยที่ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก \mathbb{R}^3 ไป \mathbb{R} ดังสมการ

$$h(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (61)$$

เมื่อ a_1, a_2, a_3 และ a_4 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เขียนในรูปสมการเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$h(x, y, z) = [1 \quad x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (62)$$

แทนค่าพิกัดของจุด P, Q, R และ S ลงในสมการ (61) จะได้

$$h_P = h(x_P, y_P, z_P) = a_1 + a_2x_P + a_3y_P + a_4z_P$$

$$h_Q = h(x_Q, y_Q, z_Q) = a_1 + a_2x_Q + a_3y_Q + a_4z_Q$$

$$h_R = h(x_R, y_R, z_R) = a_1 + a_2x_R + a_3y_R + a_4z_R$$

$$h_S = h(x_S, y_S, z_S) = a_1 + a_2x_S + a_3y_S + a_4z_S$$

เขียนในรูปสมการเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} h_P \\ h_Q \\ h_R \\ h_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (63)$$

กำหนดให้

$$\mathbf{h} = [h_P \quad h_Q \quad h_R \quad h_S]^T$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T$$

สมการ (63) เขียนในรูปย่อ

$$\mathbf{h} = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

จากภาคผนวก ก.2 แสดงให้เห็นว่า \mathbf{X} เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non – singular matrix) ดังนั้นสามารถนำ \mathbf{X}^{-1} ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{h} \quad (64)$$

เนื่องจาก $\mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{X}} \text{adj} \mathbf{X}$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{X}} \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{X}) & C_{21}(\mathbf{X}) & C_{31}(\mathbf{X}) & C_{41}(\mathbf{X}) \\ C_{12}(\mathbf{X}) & C_{22}(\mathbf{X}) & C_{32}(\mathbf{X}) & C_{42}(\mathbf{X}) \\ C_{13}(\mathbf{X}) & C_{23}(\mathbf{X}) & C_{33}(\mathbf{X}) & C_{43}(\mathbf{X}) \\ C_{14}(\mathbf{X}) & C_{24}(\mathbf{X}) & C_{34}(\mathbf{X}) & C_{44}(\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

เมื่อ $C_{ij}(\mathbf{X})$ แทน โคแฟกเตอร์ (cofactor)

จากสมการ (64) จะได้

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{X}} \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{X}) & C_{21}(\mathbf{X}) & C_{31}(\mathbf{X}) & C_{41}(\mathbf{X}) \\ C_{12}(\mathbf{X}) & C_{22}(\mathbf{X}) & C_{32}(\mathbf{X}) & C_{42}(\mathbf{X}) \\ C_{13}(\mathbf{X}) & C_{23}(\mathbf{X}) & C_{33}(\mathbf{X}) & C_{43}(\mathbf{X}) \\ C_{14}(\mathbf{X}) & C_{24}(\mathbf{X}) & C_{34}(\mathbf{X}) & C_{44}(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_P \\ h_Q \\ h_R \\ h_S \end{bmatrix} \quad (65)$$

จากสมการ (65) ทำให้สมการ (62) เขียนได้ดังนี้

$$h(x,y,z) = [1 \quad x \quad y \quad z] \cdot \frac{1}{\det \mathbf{X}} \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{X}) & C_{21}(\mathbf{X}) & C_{31}(\mathbf{X}) & C_{41}(\mathbf{X}) \\ C_{12}(\mathbf{X}) & C_{22}(\mathbf{X}) & C_{32}(\mathbf{X}) & C_{42}(\mathbf{X}) \\ C_{13}(\mathbf{X}) & C_{23}(\mathbf{X}) & C_{33}(\mathbf{X}) & C_{43}(\mathbf{X}) \\ C_{14}(\mathbf{X}) & C_{24}(\mathbf{X}) & C_{34}(\mathbf{X}) & C_{44}(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_P \\ h_Q \\ h_R \\ h_S \end{bmatrix} \quad (66)$$

และจากภาคผนวก ก.1 จะได้ $\det \mathbf{X} = 6V$ เมื่อ V คือปริมาตรของเอลิเมนต์

กำหนดให้

$$\begin{aligned} \alpha_P &= C_{11}(\mathbf{X}) & \beta_P &= C_{12}(\mathbf{X}) & \gamma_P &= C_{13}(\mathbf{X}) & \delta_P &= C_{14}(\mathbf{X}) \\ \alpha_Q &= C_{21}(\mathbf{X}) & \beta_Q &= C_{22}(\mathbf{X}) & \gamma_Q &= C_{23}(\mathbf{X}) & \delta_Q &= C_{24}(\mathbf{X}) \\ \alpha_R &= C_{31}(\mathbf{X}) & \beta_R &= C_{32}(\mathbf{X}) & \gamma_R &= C_{33}(\mathbf{X}) & \delta_R &= C_{34}(\mathbf{X}) \\ \alpha_S &= C_{41}(\mathbf{X}) & \beta_S &= C_{42}(\mathbf{X}) & \gamma_S &= C_{43}(\mathbf{X}) & \delta_S &= C_{44}(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

และ

$$N_P = \frac{1}{6V} (\alpha_P + \beta_P x + \gamma_P y + \delta_P z)$$

$$N_Q = \frac{1}{6V} (\alpha_Q + \beta_Q x + \gamma_Q y + \delta_Q z)$$

$$N_R = \frac{1}{6V} (\alpha_R + \beta_R x + \gamma_R y + \delta_R z)$$

$$N_S = \frac{1}{6V} (\alpha_S + \beta_S x + \gamma_S y + \delta_S z)$$

จัดรูปสมการ (66) จะได้

$$h = [N_P \quad N_Q \quad N_R \quad N_S] \begin{bmatrix} h_P \\ h_Q \\ h_R \\ h_S \end{bmatrix} \quad (67)$$

กำหนดให้

$$\mathbf{N}_w = [N_P \quad N_Q \quad N_R \quad N_S]$$

สมการ (67) เขียนในรูปย่อ

$$h = \mathbf{N}_w \mathbf{h}$$

จากสมการ (67) หาคอนุพันธ์ h เทียบกับ x , y และ z จะได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_P}{\partial x} & \frac{\partial N_Q}{\partial x} & \frac{\partial N_R}{\partial x} & \frac{\partial N_S}{\partial x} \\ \frac{\partial N_P}{\partial y} & \frac{\partial N_Q}{\partial y} & \frac{\partial N_R}{\partial y} & \frac{\partial N_S}{\partial y} \\ \frac{\partial N_P}{\partial z} & \frac{\partial N_Q}{\partial z} & \frac{\partial N_R}{\partial z} & \frac{\partial N_S}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_P \\ h_Q \\ h_R \\ h_S \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \beta_P & \beta_Q & \beta_R & \beta_S \\ \gamma_P & \gamma_Q & \gamma_R & \gamma_S \\ \delta_P & \delta_Q & \delta_R & \delta_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_P \\ h_Q \\ h_R \\ h_S \end{bmatrix} \quad (68)$$

กำหนดให้ เมทริกซ์ของความชันทางกลศาสตร์ เขียนแทนด้วย \mathbf{i} โดยที่

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{B}_w = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \beta_P & \beta_Q & \beta_R & \beta_S \\ \gamma_P & \gamma_Q & \gamma_R & \gamma_S \\ \delta_P & \delta_Q & \delta_R & \delta_S \end{bmatrix}$$

สมการ (68) เขียนในรูปย่อ

$$\mathbf{i} = \mathbf{B}_w \mathbf{h}$$

จากกฎของดาร์ซีจะได้อัตราเร็วการไหลของน้ำผ่านดิน เขียนแทนด้วย \mathbf{v} โดยที่

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (69)$$

กำหนดให้

$$\mathbf{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$$

$$\mathbf{D}_w = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (70)$$

สมการ (69) เขียนในรูปย่อ

$$\mathbf{v} = -\mathbf{D}_w \mathbf{i}$$

เมื่อได้สมการอัตราเร็วการไหลของน้ำผ่านดินตามสมการ (69) แล้ว ต่อไปจะหาพลังงานศักย์ต่ำสุดของน้ำภายในดิน โดยการพิจารณาพลังงานศักย์รวมของน้ำจากกฎการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) จะได้ว่าพลังงานศักย์รวม Π เขียนได้ตามสมการ [2]

$$\Pi = U + W_s + W_d$$

เมื่อ U แทน พลังงานการไหลของน้ำภายในเอลิเมนต์ดิน

W_s แทน งานจากแหล่งกำเนิดที่จ่ายน้ำเข้าหรือสูบน้ำออก

และ W_d แทน งานจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านจากเอลิเมนต์ดิน

พลังงานการไหลของน้ำภายในเอลิเมนต์ดินสามารถหาได้จากพลังงานที่สูญเสียจากการไหลของน้ำผ่านดิน เนื่องจากความชันทางชลศาสตร์คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของเฮดต่อหน่วยระยะทางการไหลของน้ำใต้ดิน ดังนั้นเมื่อน้ำไหลผ่านดินในทิศทาง x เป็นระยะทางหนึ่งหน่วยจะเกิดการสูญเสียเฮด เท่ากับ

$$i_x = \frac{\partial h}{\partial x}$$

ในหนึ่งหน่วยเวลาน้ำไหลผ่านดินได้ระยะทาง

$$v_x = k_x i_x$$

และเพราะว่า พลังงานที่สูญเสียจากการไหลของน้ำผ่านดิน เท่ากับ พลังงานการไหลของน้ำผ่านดิน ดังนั้น พลังงานการไหลของน้ำผ่านดินที่จุดใด ๆ ในทิศทาง x ต่อหน่วยเวลา เท่ากับ

$$dU_x = \int_0^{v_x} i_x dv_x = k_x \int_0^{i_x} i_x di_x = \frac{1}{2} k_x i_x^2 = \frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2$$

และพลังงานการไหลของน้ำผ่านเอลิเมนต์ดินในทิศทาง x ต่อหน่วยเวลา เท่ากับ ผลรวมของพลังงานการไหลของน้ำผ่านดินทุกจุดในเอลิเมนต์ดินในทิศทาง x ต่อหน่วยเวลา จะได้

$$U_x = \frac{1}{2} \int_V k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 dV$$

ในทำนองเดียวกัน พลังงานการไหลของน้ำผ่านเอลิเมนต์ดินในทิศทาง y ต่อหน่วยเวลา เท่ากับ

$$U_y = \frac{1}{2} \int_V k_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 dV$$

พลังงานการไหลของน้ำผ่านเอลิเมนต์ดินในทิศทาง z ต่อหน่วยเวลา เท่ากับ

$$U_z = \frac{1}{2} \int_V k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 dV$$

และพลังงานการไหลของน้ำภายในเอลิเมนต์ดินเท่ากับผลรวมพลังงานการไหลในทุกทิศทาง นั่นคือ

$$U = U_x + U_y + U_z$$

ดังนั้น พลังงานการไหลของน้ำภายในเอลิเมนต์ดิน คือ

$$U = \frac{1}{2} \int_V k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 dV \quad (71)$$

เนื่องจาก

$$k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{i}^T \mathbf{D}_w \mathbf{i}$$

จากสมการ (71) พลังงานการไหลของน้ำภายในเอลิเมนต์ดินจึงเขียนในรูปเมทริกซ์ จะได้

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{i}^T \mathbf{D}_w \mathbf{i} dV \quad (72)$$

ต่อไปจะพิจารณางานจากแหล่งกำเนิดน้ำภายในเอลิเมนต์ดิน สมมติให้เอลิเมนต์ดิน ปริมาตรเท่ากับ dV เป็นเอลิเมนต์ที่มีจุดภายในมีค่าเฮดเท่ากันทุกจุด เรียกว่าเอลิเมนต์สมศักย์ (equipotential element) และกำหนดให้แต่ละจุดภายในมีเฮด เท่ากับ h เนื่องจากอัตราเร็วการจ่ายน้ำเข้าหรือสูบน้ำออกโดยแหล่งกำเนิดภายใน เท่ากับ v_s ดังนั้นปริมาตรน้ำที่แหล่งกำเนิดจ่ายเข้าหรือสูบน้ำออกในหนึ่งหน่วยเวลา เท่ากับ

$$v_s dV$$

แรงที่แหล่งกำเนิดนำน้ำที่มีมวล $\rho_w v_s dV$ จ่ายเข้าหรือสูบน้ำออก เขียนแทนด้วย dF_s โดยที่

$$dF_s = (\rho_w v_s dV)g = \gamma_w v_s dV$$

และงานที่แหล่งกำเนิดจ่ายน้ำเข้าสู่หรือสูบน้ำออกจากเอลิเมนต์สมคัย เขียนแทนด้วย dW_s โดยที่

$$dW_s = (dF_s)h = \gamma_w v_s h dV$$

เนื่องจากแต่ละจุดภายในเอลิเมนต์ดินโดยทั่วไปแล้วมีเฮดที่แตกต่างกัน สมมติให้เฮดที่จุดใด ๆ ภายในเอลิเมนต์ดิน เท่ากับ h โดยที่ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก \mathbb{R}^3 ไป \mathbb{R} ดังนั้น งานที่แหล่งกำเนิดจ่ายน้ำเข้าสู่หรือสูบน้ำออกจากเอลิเมนต์ใด ๆ คือ

$$W_s = \gamma_w \int_V v_s h dV \quad (73)$$

แทน h ในสมการ (73) จะได้

$$W_s = \gamma_w \int_V v_s \mathbf{N}_w \mathbf{h} dV = \gamma_w \int_V \mathbf{h}^T \mathbf{N}_w^T v_s dV \quad (74)$$

พิจารณางานจากน้ำไหลเข้าสู่หรือออกจากเอลิเมนต์ดิน สมมติให้พื้นผิวเอลิเมนต์ดิน มีพื้นที่เท่ากับ dS เป็นพื้นผิวที่ทุกจุดมีค่าเฮดเท่ากัน เรียกว่าพื้นผิวสมคัย (equipotential surface) และกำหนดให้แต่ละจุดบนพื้นผิวมีเฮด เท่ากับ h เนื่องจากอัตราเร็วการไหลเข้าหรือออกผ่านพื้นผิว เท่ากับ v_d ดังนั้นปริมาตรน้ำที่ไหลผ่านพื้นผิวสมคัยในหนึ่งหน่วยเวลา เท่ากับ

$$v_d dS$$

แรงที่ทำให้น้ำมวล $\rho_w v_d dS$ ไหลผ่านพื้นผิวสมคัย เขียนแทนด้วย dF_d โดยที่

$$dF_d = (\rho_w v_d dS)g = \gamma_w v_d dS$$

จะได้ งานที่ทำให้น้ำไหลผ่านพื้นผิวสมคัย เขียนแทนด้วย dW_d โดยที่

$$dW_d = (dF_d)h = \gamma_w v_d h dS$$

เนื่องจากแต่ละจุดบนพื้นผิวเอลิเมนต์ดินโดยทั่วไปแล้วมีเฮดที่แตกต่างกัน สมมติให้เฮดที่จุดใด ๆ บนพื้นผิวเอลิเมนต์ดิน เท่ากับ h โดยที่ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก \mathbb{R}^3 ไป \mathbb{R} ดังนั้น งานจากน้ำไหลเข้าสู่หรือออกจากเอลิเมนต์ดิน คือ

$$W_d = \gamma_w \int_S v_d h dS \quad (75)$$

แทน h ในสมการ (75) จะได้

$$W_d = \gamma_w \int_S v_d \mathbf{N}_w \mathbf{h} dS = \gamma_w \int_S \mathbf{h}^T \mathbf{N}_w^T v_d dS \quad (76)$$

จากสมการ (71) ถึง (75) จะได้ พลังงานศักย์รวม Π คือ

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 dV + \gamma_w \int_V v_s h dV + \gamma_w \int_A v_d h dS$$

จากสมการ (72), (74) และ (76) จะได้

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{i}^T \mathbf{D}_w \mathbf{i} dV + \gamma_w \int_V \mathbf{h}^T \mathbf{N}_w^T v_s dV + \gamma_w \int_A \mathbf{h}^T \mathbf{N}_w^T v_d dS \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{h}^T \mathbf{B}_w^T \mathbf{D}_w \mathbf{B}_w \mathbf{h} dV + \gamma_w \int_V \mathbf{h}^T \mathbf{N}_w^T v_s dV + \gamma_w \int_A \mathbf{h}^T \mathbf{N}_w^T v_d dS \end{aligned}$$

เนื่องจาก \mathbf{h} และ \mathbf{h}^T ไม่ขึ้นกับ V ดังนั้น

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \int_V \mathbf{B}_w^T \mathbf{D}_w \mathbf{B}_w dV \mathbf{h} + \gamma_w \mathbf{h}^T \int_V \mathbf{N}_w^T v_s dV + \gamma_w \mathbf{h}^T \int_A \mathbf{N}_w^T v_d dS$$

หาอนุพันธ์ Π เทียบกับ \mathbf{h}^T จะได้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{h}^T} = \int_V \mathbf{B}_w^T \mathbf{D}_w \mathbf{B}_w dV \mathbf{h} + \gamma_w \int_V \mathbf{N}_w^T v_s dV + \gamma_w \int_A \mathbf{N}_w^T v_d dS$$

หาพลังงานศักย์ต่ำสุด โดยกำหนดให้ $\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{h}^T} = 0$ จะได้

$$0 = \int_V \mathbf{B}_w^T \mathbf{D}_w \mathbf{B}_w dV \mathbf{h} + \gamma_w \int_V \mathbf{N}_w^T v_s dV + \gamma_w \int_A \mathbf{N}_w^T v_d dS \quad (77)$$

จัดรูปสมการ (77) จะได้

$$\gamma_w \int_V \mathbf{N}_w^T v_s dV + \gamma_w \int_A \mathbf{N}_w^T v_d dS = - \int_V \mathbf{B}_w^T \mathbf{D}_w \mathbf{B}_w dV \mathbf{h} \quad (78)$$

จากสมการ (78) กำหนดให้ \mathbf{f}_s แทน แรงจากน้ำไหลเข้าสู่เอลิเมนต์ดินปริมาตร V โดยที่

$$\mathbf{f}_s = \gamma_w \int_V \mathbf{N}_w^T v_s dV \quad (79)$$

\mathbf{f}_d แทน แรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านพื้นผิว A ของเอลิเมนต์ดิน โดยที่

$$\mathbf{f}_d = \gamma_w \int_A \mathbf{N}_w^T v_d dS \quad (80)$$

และ \mathbf{f}_w แทน แรงการไหลของน้ำรวม โดยที่

$$\mathbf{f}_w = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_d \quad (81)$$

จากสมการ (78) และสมดุลของแรงแต่ละเอลิเมนต์ จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดิน โดยเขียนในรูปของเมทริกซ์ตามสมการ

$$\mathbf{f}_w = \mathbf{k}_w \mathbf{h} \quad (82)$$

กำหนดให้ \mathbf{k}_w แทน สติฟเนสเมทริกซ์ (stiffness matrix) ของการซึมน้ำ โดยที่

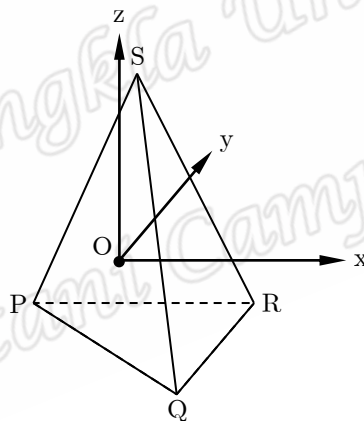
$$\mathbf{k}_w = - \int_V \mathbf{B}_w^T \mathbf{D}_w \mathbf{B}_w dV = - \mathbf{B}_w^T \mathbf{D}_w \mathbf{B}_w V \quad (83)$$

3.1.1 สมการแรงจากแหล่งกำเนิดที่จ่ายน้ำเข้าหรือสูบน้ำออก

จากหัวข้อที่ผ่านมาได้อธิบายถึงการหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดิน ทำให้ได้สมการ (82) และสติฟเนสเมทริกซ์ของการซึมน้ำ \mathbf{k}_w ในส่วนนี้จะอธิบายการหาแรงจากแหล่งกำเนิดที่จ่ายน้ำเข้าหรือสูบน้ำออกจากเอลิเมนต์ดิน จากสมการ (79)

$$\mathbf{f}_s = \gamma_w \int_V \mathbf{N}_w^T v_s dV$$

เพื่อหาแรงจากแหล่งกำเนิดที่จ่ายน้ำเข้าหรือสูบน้ำออกจากเอลิเมนต์ดิน จะต้องหาอินทิกรัล (integral) ในสมการนี้



รูปที่ 3.2 จุดกำเนิดของแกนพิกัด $x - y - z$ อยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลของเอลิเมนต์

เพื่อความสะดวกในการอินทิเกรต (integrate) กำหนดให้ O แทน จุดกำเนิดของแกนพิกัดฉาก และเป็นจุดที่อยู่บนจุดศูนย์กลางมวลของเอลิเมนต์ ดังรูปที่ 3.2 เนื่องจาก $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ เป็นจุดศูนย์กลางมวลของเอลิเมนต์ โดยที่

$$\bar{x} = \frac{x_P + x_Q + x_R + x_S}{4}, \bar{y} = \frac{y_P + y_Q + y_R + y_S}{4} \text{ และ } \bar{z} = \frac{z_P + z_Q + z_R + z_S}{4}$$

และเนื่องจากกำหนดให้แกนพิกัดฉากสำหรับการอินทิเกรตดังนั้นจุดกำเนิดของแกนพิกัดฉากจึงอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล ดังนั้น $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ และ $\bar{z} = 0$ จะได้

$$0 = \frac{x_P + x_Q + x_R + x_S}{4}, 0 = \frac{y_P + y_Q + y_R + y_S}{4} \text{ และ } 0 = \frac{z_P + z_Q + z_R + z_S}{4}$$

ดังนั้น

$$0 = x_P + x_Q + x_R + x_S \quad (84)$$

$$0 = y_P + y_Q + y_R + y_S \quad (85)$$

$$0 = z_P + z_Q + z_R + z_S \quad (86)$$

การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (elementary row operation) โดยนำ 1 คูณแถวที่ 2 ถึง 4 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 1 ของ X และจากสมการ (84), (85) และ (86) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 4 & x_P + x_Q + x_R + x_S & y_P + y_Q + y_R + y_S & z_P + z_Q + z_R + z_S \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix} \quad (87)$$

เมื่อนำ 1 คูณแถวที่ 1, 3 และ 4 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 2 ของ X จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix} \quad (88)$$

เมื่อนำ 1 คูณแถวที่ 2 ถึง 4 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 3 ของ X จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix} \quad (89)$$

เมื่อนำ 1 คูณแถวที่ 1 ถึง 3 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 4 ของ X จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (90)$$

เนื่องจากเมทริกซ์ (87), (88), (89) และ (90) ได้จากการบวกแถวใดแถวหนึ่งของ \mathbf{X} ด้วยผลคูณของแถวอื่นกับค่าคงตัว ดังนั้นตัวกำหนด (determinant) ของเมทริกซ์ทั้งหมดจึงมีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ดังนั้น $4 \cdot C_{11}(\mathbf{X}) = 4 \cdot C_{21}(\mathbf{X}) = 4 \cdot C_{31}(\mathbf{X}) = 4 \cdot C_{41}(\mathbf{X})$

หรือ $C_{11}(\mathbf{X}) = C_{21}(\mathbf{X}) = C_{31}(\mathbf{X}) = C_{41}(\mathbf{X})$

เนื่องจาก $\alpha_P = C_{11}(\mathbf{X})$ $\alpha_Q = C_{21}(\mathbf{X})$ $\alpha_R = C_{31}(\mathbf{X})$ $\alpha_S = C_{41}(\mathbf{X})$

ดังนั้น $\alpha_P = \alpha_Q = \alpha_R = \alpha_S$ (91)

และเนื่องจาก ปริมาตรของเอลิเมนต์

$$V = \frac{1}{6} \det \mathbf{X}$$

ดังนั้น

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (\alpha_P + \alpha_Q + \alpha_R + \alpha_S)$$

จากสมการ (91) จะได้

$$V = \frac{4}{6} \alpha_P$$

เพราะฉะนั้น

$$\alpha_P = \alpha_Q = \alpha_R = \alpha_S = \frac{3}{2} V$$
 (92)

และจากนิยามของจุดศูนย์กลางมวล

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dV}{\int dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \, dV}{\int dV} \quad \text{และ} \quad \bar{z} = \frac{\int z \, dV}{\int dV}$$

แต่เนื่องจาก $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$ และ $\bar{z} = 0$ ดังนั้น

$$0 = \frac{\int x \, dV}{\int dV}, \quad 0 = \frac{\int y \, dV}{\int dV} \quad \text{และ} \quad 0 = \frac{\int z \, dV}{\int dV}$$

จะได้

$$0 = \int x \, dV \quad (93)$$

$$0 = \int y \, dV \quad (94)$$

$$0 = \int z \, dV \quad (95)$$

นำ β_P , γ_P และ δ_P คูณสมการ (93), (94) และ (95) ตามลำดับ จะได้

$$0 = \int \beta_P x \, dV, 0 = \int \gamma_P y \, dV \text{ และ } 0 = \int \delta_P z \, dV \quad (96)$$

นำ β_Q , γ_Q และ δ_Q คูณสมการ (93), (94) และ (95) ตามลำดับ จะได้

$$0 = \int \beta_Q x \, dV, 0 = \int \gamma_Q y \, dV \text{ และ } 0 = \int \delta_Q z \, dV \quad (97)$$

นำ β_R , γ_R และ δ_R คูณสมการ (93), (94) และ (95) ตามลำดับ จะได้

$$0 = \int \beta_R x \, dV, 0 = \int \gamma_R y \, dV \text{ และ } 0 = \int \delta_R z \, dV \quad (98)$$

นำ β_S , γ_S และ δ_S คูณสมการ (93), (94) และ (95) ตามลำดับ จะได้

$$0 = \int \beta_S x \, dV, 0 = \int \gamma_S y \, dV \text{ และ } 0 = \int \delta_S z \, dV \quad (99)$$

ดังนั้น

$$\int N_P \, dV = \frac{1}{6V} \int (\alpha_P + \beta_P x + \gamma_P y + \delta_P z) \, dV = \frac{\alpha_P}{6V}$$

$$\int N_Q \, dV = \frac{1}{6V} \int (\alpha_Q + \beta_Q x + \gamma_Q y + \delta_Q z) \, dV = \frac{\alpha_Q}{6V}$$

$$\int N_R \, dV = \frac{1}{6V} \int (\alpha_R + \beta_R x + \gamma_R y + \delta_R z) \, dV = \frac{\alpha_R}{6V}$$

$$\int N_S \, dV = \frac{1}{6V} \int (\alpha_S + \beta_S x + \gamma_S y + \delta_S z) \, dV = \frac{\alpha_S}{6V}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{N}_w^T \, dV &= \int_V [N_P \quad N_Q \quad N_R \quad N_S]^T \, dV \\ &= \frac{1}{6V} \int_V [\alpha_P \quad \alpha_Q \quad \alpha_R \quad \alpha_S]^T \, dV \\ &= \frac{1}{6V} [\alpha_P \quad \alpha_Q \quad \alpha_R \quad \alpha_S]^T V \end{aligned}$$

จากสมการ (92) จะได้

$$\int_V \mathbf{N}_w^T dV = \frac{V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น แรงจากแหล่งกำเนิดจ่ายน้ำเข้าสู่หรือสูบน้ำออกจากเอลิเมนต์ดิน จากสมการ (79) จะได้

$$\mathbf{f}_s = \gamma_w \int_V \mathbf{N}_w^T v_s dV = \gamma_w v_s \int_V \mathbf{N}_w^T dV = \gamma_w v_s \cdot \frac{V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ V แทน ปริมาตรของเอลิเมนต์ดิน

3.1.2 สมการแรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านจากเอลิเมนต์ดิน

การหาสมการแรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านเอลิเมนต์ดิน จากสมการ (80)

$$\mathbf{f}_d = \gamma_w \int_A \mathbf{N}_w^T v_d dS \quad (100)$$

เพื่อการหาสมการแรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านเอลิเมนต์ดินจะต้องหาอินทิกรัลในสมการนี้โดยดำเนินการในทำนองเดียวกับหัวข้อที่ 3.1.1 จะได้

$$\int_A \mathbf{N}_w^T dS = \frac{S}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จากสมการ (100) จะได้แรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านพื้นผิวแต่ละด้านของเอลิเมนต์ดินดังนี้
แรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านพื้นผิวของ ΔPQS เขียนแทนด้วย $\mathbf{f}_{d,(P,Q,S)}$ โดยที่

$$\mathbf{f}_{d,(P,Q,S)} = \gamma_w v_d \cdot \frac{S_{(P,Q,S)}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $S_{(P,Q,S)}$ แทน พื้นที่ของ ΔPQS

แรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านพื้นผิว ΔQRS เขียนแทนด้วย $\mathbf{f}_{d,(Q,R,S)}$ โดยที่

$$\mathbf{f}_{d,(Q,R,S)} = \gamma_w v_d \cdot \frac{S_{(Q,R,S)}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $S_{(Q,R,S)}$ แทน พื้นที่ของ ΔQRS

แรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านพื้นผิว ΔRPS เขียนแทนด้วย $\mathbf{f}_{d,(R,P,S)}$ โดยที่

$$\mathbf{f}_{d,(R,P,S)} = \gamma_w v_d \cdot \frac{S_{(R,P,S)}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $S_{(R,P,S)}$ แทน พื้นที่ของ ΔRPS

และแรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านพื้นผิว ΔPQR เขียนแทนด้วย $\mathbf{f}_{d,(P,Q,R)}$ โดยที่

$$\mathbf{f}_{d,(P,Q,R)} = \gamma_w v_d \cdot \frac{S_{(P,Q,R)}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $S_{(P,Q,R)}$ แทน พื้นที่ของ ΔPQR

และแรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านพื้นผิว S ของเอลิเมนต์ดิน เท่ากับผลรวมของแรงจากน้ำไหลเข้าหรือออกผ่านพื้นผิวทั้งหมดของเอลิเมนต์ นั่นคือ

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{f}_{d,(P,Q,S)} + \mathbf{f}_{d,(Q,R,S)} + \mathbf{f}_{d,(R,P,S)} + \mathbf{f}_{d,(P,Q,R)} \quad (101)$$

และจากสมการ (81) และ (101) จะได้แรงการไหลของน้ำใต้ดินรวม \mathbf{f}_w ดังสมการ

$$\mathbf{f}_w = -\mathbf{f}_s + \mathbf{f}_{d,(P,Q,S)} + \mathbf{f}_{d,(Q,R,S)} + \mathbf{f}_{d,(R,P,S)} + \mathbf{f}_{d,(P,Q,R)} \quad (102)$$

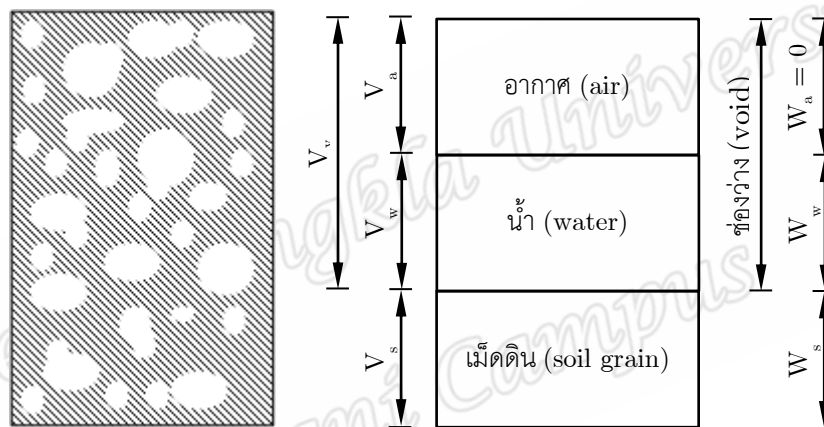
และแทน $\mathbf{f}_{d,(P,Q,S)}$, $\mathbf{f}_{d,(Q,R,S)}$, $\mathbf{f}_{d,(R,P,S)}$, $\mathbf{f}_{d,(P,Q,R)}$ และ \mathbf{f}_s ในสมการ (102) จะได้สมการ

$$\mathbf{f}_w = \gamma_w \left(\frac{v_d}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{(P,Q,R)} \\ S_{(P,Q,S)} \\ S_{(R,P,S)} \\ S_{(Q,R,S)} \end{bmatrix} - \frac{v_s}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} V \right) \quad (103)$$

ในหัวข้อที่ผ่านมาข้างต้นนั้นได้กล่าวถึงสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สทิตเพนทเมทริกซ์ของการซึมน้ำ และสมการแรงการไหลของน้ำใต้ดินรวมไปแล้ว ซึ่งสมการเหล่านี้จะนำมาใช้ในการหาผลเฉลยจากตัวแบบจำลองการไหลของน้ำใต้ดินโดยสมการ (82) จะได้ค่าประมาณของเฮดที่ตำแหน่งจุดยอดของเอลิเมนต์ดิน ในขั้นตอนต่อไปจะนำค่าประมาณเฮดที่ได้นี้ไปใช้คำนวณหาน้ำหนักของน้ำที่อยู่ในเอลิเมนต์ดินและน้ำหนักรวมของเอลิเมนต์ดินซึ่งจะเป็นค่าพารามิเตอร์ที่สำคัญที่จะใช้ในการวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินต่อไป ในหัวข้อถัดไปจะอธิบายถึงการหาน้ำหนักรวมของเอลิเมนต์

3.1.3 น้ำหนักรวมของดิน

ก่อนที่จะกล่าวถึงการหาน้ำหนักรวมของดินในลำดับถัดไปจะขออธิบายถึงสมบัติของดินดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.3 ส่วนประกอบของดิน

(ที่มา: วิศิษฐ์ [6])

จากรูปที่ 3.3 ดินมีส่วนประกอบได้แก่ เม็ดดิน ช่องว่างระหว่างเม็ดดิน หรือโพรงดิน ซึ่งภายในโพรงดินจะมีน้ำอยู่หรือไม่ขึ้นอยู่กับสภาพและสถานะของดินนั้น ๆ ส่วนประกอบดินแสดงในรูปไดอะแกรม (phase diagram) [6]

น้ำหนักของดินเท่ากับผลรวมของน้ำหนักของเม็ดดินกับน้ำหนักของน้ำในดินและน้ำหนักของอากาศในดิน เขียนได้เป็นสมการดังนี้

$$W = W_s + W_w + W_a$$

เมื่อ W แทน น้ำหนักของดิน

W_s แทน น้ำหนักของเม็ดดิน

W_w แทน น้ำหนักของน้ำในดิน

และ W_a แทน น้ำหนักของอากาศในดิน

แต่น้ำหนักของอากาศในดินมีค่าน้อยมากจึงกำหนดให้น้ำหนักของอากาศในดินมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น น้ำหนักของดินเท่ากับผลรวมของน้ำหนักของเม็ดดินและน้ำหนักของน้ำในดิน นั่นคือ

$$W = W_s + W_w \quad (104)$$

และปริมาณน้ำในดิน (water content) เท่ากับอัตราส่วนของน้ำหนักน้ำในดินต่อน้ำหนักเม็ดดิน

$$w = \frac{W_w}{W_s} \quad (105)$$

เมื่อ w แทน ปริมาณน้ำในดิน

จะได้น้ำหนักของน้ำในดิน เท่ากับผลคูณของปริมาณน้ำกับน้ำหนักของเม็ดดินตามสมการ

$$W_w = wW_s$$

แทน W_w ในสมการ (104) จะได้

$$W = W_s(1 + w) \quad (106)$$

เนื่องจากน้ำหนักของเม็ดดินเท่ากับผลคูณของหน่วยน้ำหนักดินแห้ง (dry unit weight) กับ ปริมาตรเม็ดดิน

$$W_s = \gamma_d V_s \quad (107)$$

เมื่อ γ_d แทน หน่วยน้ำหนักดินแห้ง

และ V_s แทน ปริมาตรเม็ดดิน

แทน W_s ในสมการ (106) จะได้น้ำหนักของดินตามสมการ

$$W = \gamma_d V_s (1 + w) \quad (108)$$

และเนื่องจากความพรุน (porosity) เท่ากับอัตราส่วนของปริมาตรโพรงดินต่อปริมาตรรวมของดิน

$$n = \frac{V_v}{V} \quad (109)$$

เมื่อ n แทน ความพรุน

V แทน ปริมาตรของดิน

และ V_v แทน ปริมาตรโพรงดิน

เพราะว่าปริมาตรของโพรงดินเท่ากับผลต่างระหว่างปริมาตรดินกับปริมาตรเม็ดดิน

$$V_v = V - V_s$$

แทน V_v ในสมการ (109) จะได้

$$n = \frac{V - V_s}{V} \quad (110)$$

เพื่อจะหา V_s จัดรูปสมการ (110) จะได้

$$V_s = V (1 - n)$$

แทน V_s ในสมการ (108) จะได้

$$W = \gamma_d V (1 - n) + w \quad (111)$$

ต่อไปพิจารณาอัตราส่วนของน้ำหนักต่อปริมาตรของดินเรียกว่าหน่วยน้ำหนักรวม หรือหน่วยน้ำหนักดินเปียก (bulk unit weight or total unit weight)

$$\gamma_t = \frac{W}{V}$$

เมื่อ γ_t แทน หน่วยน้ำหนักรวมหรือหน่วยน้ำหนักดินเปียก

เนื่องจากปริมาตรของดินเท่ากับผลรวมของปริมาตรเม็ดดินกับปริมาตรโพรงดิน และน้ำหนักของดินเท่ากับผลรวมของน้ำหนักของเม็ดดินและน้ำหนักของน้ำในดิน ทำให้หน่วยน้ำหนักรวมเขียนได้ดังสมการ (112)

$$\gamma_t = \frac{W}{V} = \frac{W_s + W_w}{V_s + V_v} = \frac{\gamma_s V_s + \gamma_w V_w}{V_s + V_v} \quad (112)$$

เนื่องจากหน่วยน้ำหนักของเม็ดดินเท่ากับผลคูณของความถ่วงจำเพาะของเม็ดดิน (specific gravity of solids) กับหน่วยน้ำหนักของน้ำ

$$\gamma_s = G_s \gamma_w \quad (113)$$

เมื่อ G_s แทน ความถ่วงจำเพาะของเม็ดดิน

ปริมาตรน้ำในดินเท่ากับผลคูณของดีกรีความอิ่มตัว (degree of saturation) กับปริมาตรโพรงดิน

$$V_w = S_d V_v \quad (114)$$

และปริมาตรโพรงดินเท่ากับผลคูณของอัตราส่วนช่องว่าง หรืออัตราส่วนโพรง (void ratio) กับปริมาตรเม็ดดิน

$$V_v = e V_s \quad (115)$$

นำ V_v แทนในสมการ (114) จะได้

$$V_w = S_d (e V_s) = e S_d V_s \quad (116)$$

แทน γ_s , V_w และ V_v ในสมการ (112) จะได้

$$\gamma_t = \frac{(G_s \gamma_w) V_s + \gamma_w (e S_d V_s)}{V_s + e V_s} = \frac{G_s + e S_d}{1 + e} \cdot \gamma_w \quad (117)$$

เพื่อจะหาพจน์ $e S_d$ จัดรูปสมการ (116) จะได้

$$eS_d = \frac{V_w}{V_s} = \frac{W_w}{\gamma_w} \cdot \frac{\gamma_s}{W_s} = \frac{W_w}{W_s} \cdot \frac{\gamma_s}{\gamma_w} \quad (118)$$

เนื่องจากพจน์ G_s จากสมการ (113) จะได้

$$G_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_w} \quad (119)$$

จากสมการ (105) และสมการ (119) จึงทำให้สมการ (118) เขียนได้ดังสมการ

$$eS_d = wG_s \quad (120)$$

แทน eS_d ในสมการ (117) จะได้

$$\gamma_t = \frac{G_s(1+w)}{1+e} \cdot \gamma_w$$

หน่วยน้ำหนักดินรวมในกรณีที่ดินอิ่มตัวด้วยน้ำ เรียกว่า หน่วยน้ำหนักดินอิ่มตัว (specific weight of saturated) ค่าตึกรัความอิ่มตัว S_d เท่ากับ 1 จากสมการ (117) จะได้

$$\gamma_{\text{sat}} = \frac{G_s + e}{1+e} \cdot \gamma_w$$

เมื่อ γ_{sat} แทน หน่วยน้ำหนักดินอิ่มตัว

หน่วยน้ำหนักดินรวมในกรณีที่ดินแห้ง เรียกว่า หน่วยน้ำหนักของดินแห้ง (unit weight of dry) ค่าตึกรัความอิ่มตัว S_d เท่ากับ 0 จากสมการ (117) จะได้

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V} = \frac{G_s \gamma_w}{1+e} = \frac{\gamma_t}{1+w}$$

เมื่อ γ_d แทน หน่วยน้ำหนักดินแห้ง

และหน่วยน้ำหนักพุง (unit weight of submerged) คือ ผลต่างระหว่างหน่วยน้ำหนักดินอิ่มตัว กับหน่วยน้ำหนักของน้ำ

$$\gamma' = \gamma_{\text{sat}} - \gamma_w$$

เมื่อ γ' แทน หน่วยน้ำหนักพุง

สำหรับอัตราส่วนที่เกี่ยวข้องกับปริมาตรของอากาศในดิน ได้แก่ ร้อยละของช่องว่างอากาศ (percentage of air void) คือ ร้อยละปริมาตรอากาศในดินต่อปริมาตรดิน

$$A_v = \frac{V_a}{V} \times 100\%$$

เมื่อ A_v แทน ร้อยละของช่องว่างอากาศ

และ V_a แทน ปริมาตรอากาศในดิน

และปริมาณช่องว่างอากาศ (air content) คือ ร้อยละปริมาตรอากาศในดินต่อปริมาตรโพรงดิน

$$A_o = \frac{V_a}{V_v} \times 100\%$$

เมื่อ A_o แทน ปริมาณช่องว่างอากาศ

การวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดิน ซึ่งผลจากการวิเคราะห์โดยสมการ (82) จะทำให้ทราบถึงค่าเฮดที่ตำแหน่งใด ๆ ในดิน และเพื่อหาปริมาณความชื้นหรือปริมาณของน้ำที่จะมีผลต่อหน่วยน้ำหนักรวมของดิน

เนื่องจากความเร็วการไหลของน้ำ \mathbf{v} เป็นสนามเวกเตอร์ (vector field) ปกคลุมพื้นผิวเอลิเมนต์ดิน จากการวิเคราะห์เพื่อหาค่าเฮดที่ตำแหน่งจุดยอดของเอลิเมนต์โดยสมการ (82) การหาความเร็วการไหลของน้ำผ่านเอลิเมนต์ดินสามารถหาได้จากสมการ

$$\mathbf{v} = -\mathbf{D}_w \mathbf{B}_w \mathbf{h} \quad (121)$$

เขียน \mathbf{v} ในรูปเวกเตอร์ จะได้ $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ จากสมการ (121) เนื่องจาก v_x, v_y และ v_z เป็นค่าคงตัว จึงทำให้ $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ดังนั้น \mathbf{v} จึงเป็น divergence free velocity field ถ้ากำหนดให้ปริมาตร S เป็นส่วนที่ซ้อนทับกัน (intersection) ระหว่างส่วนปกคลุมเอลิเมนต์ดิน M กับจุดภายใน (interior point) เอลิเมนต์ดิน ขอบเขต (boundary) ของ S เขียนแทนด้วยพื้นผิว ∂S และ $\mathbf{n}(\tau)$ คือเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยของพื้นผิว τ จากทฤษฎีบทของเกาส์จะได้ ฟลักซ์ (flux) ของ \mathbf{v} บนพื้นผิว ∂S

$$\int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau) d\tau = \int_S \nabla \cdot \mathbf{v} dS = 0 \quad (122)$$

เนื่องจาก ∂S ประกอบด้วยพื้นผิวส่วนที่น้ำไหลผ่านเข้าสู่เอลิเมนต์ดิน ∂S_{in} และพื้นผิวส่วนที่น้ำไหลออกจากเอลิเมนต์ดิน ∂S_{out} โดยที่ $\partial S_{out} = \partial S - \partial S_{in}$ จะได้ $\partial S = \partial S_{in} \cup \partial S_{out}$ และ $\partial S_{in} \cap \partial S_{out} = \emptyset$ จากสมการ (122) จะได้

$$\int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau) d\tau = \int_{\partial S_{in}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau) d\tau + \int_{\partial S_{out}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau) d\tau = 0 \quad (123)$$

กำหนดให้ A แทนพื้นที่ผิว τ จะได้ฟลักซ์ของ \mathbf{v} บน ∂S_{in} แทนปริมาตรน้ำไหลเข้าต่อหน่วยเวลา

$$\int_{\partial S_{in}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau) d\tau = \sum_{\tau \in \partial S_{in}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau) \cdot A_\tau \quad (124)$$

และฟลักซ์ของ \mathbf{v} บน ∂S_{out} แทนปริมาตรน้ำไหลออกต่อหน่วยเวลา

$$\int_{\partial S_{out}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau) d\tau = \sum_{\tau \in \partial S_{out}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau) \cdot A_{\tau} \quad (125)$$

จากสมการ (123) ถึง (125) ปริมาณน้ำที่ไหลเข้าสู่เท่ากับปริมาณน้ำที่ไหลออกจากเอลิเมนต์ดิน

$$\sum_{\tau \in \partial S_{in}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau) \cdot A_{\tau} = - \left(\sum_{\tau \in \partial S_{out}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau) \cdot A_{\tau} \right)$$

ดังนั้น ปริมาณน้ำที่ไหลผ่านเอลิเมนต์ดินต่อหน่วยเวลา V_w หาได้จากสมการ

$$V_w = \frac{1}{2} \sum_{\tau \in \partial S} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau)| \cdot A_{\tau} \quad (126)$$

และเมื่อน้ำในดินเพิ่มขึ้นด้วยปริมาตร V_w จากสมการ (111) จะได้

$$W = \gamma_d V (1 - n) + w + \gamma_w V_w \quad (127)$$

เมื่อ γ_w แทน หน่วยน้ำหนักของน้ำ (unit weight of water) ที่อุณหภูมิ 4 องศาเซลเซียส และความดัน 1 บรรยากาศ มีค่าประมาณ 9.81×10^3 นิวตันต่อลูกบาศก์เมตร

3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดิน

การวิเคราะห์ความเค้นและความเครียดในดิน จะแบ่งเนื้อดินออกเป็นเอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าเช่นเดียวกับการหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดิน พิจารณาเอลิเมนต์ในรูปที่ 3.3 โดยเอลิเมนต์ดินประกอบด้วยจุดยอด ได้แก่ $P(x_P, y_P, z_P)$, $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, $R(x_R, y_R, z_R)$ และ $S(x_S, y_S, z_S)$

เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดเป็นปัญหาสามมิติ และการยืดหยุ่นของเนื้อดินเป็นเส้นตรง ดังนั้นจึงใช้ฟังก์ชันพหุนามเชิงเส้น 3 ตัวแปรเป็นแบบจำลองการกระจาย กำหนดให้ u , v และ w เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก \mathbb{R}^3 ไป \mathbb{R} ดังสมการ

$$u(x, y, z) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \quad (128)$$

$$v(x, y, z) = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z \quad (129)$$

$$w(x, y, z) = a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z \quad (130)$$

เมื่อ $a_i \in \mathbb{R}$ โดยที่ $i = 1, 2, \dots, 12$

สมการ (128) ในรูปสมการเมทริกซ์

$$u(x, y, z) = [1 \quad x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (131)$$

แทนค่าพิกัดของจุด P, Q, R และ S ลงในสมการ (128) จะได้

$$u_P = u(x_P, y_P, z_P) = a_1 + a_2x_P + a_3y_P + a_4z_P$$

$$u_Q = u(x_Q, y_Q, z_Q) = a_1 + a_2x_Q + a_3y_Q + a_4z_Q$$

$$u_R = u(x_R, y_R, z_R) = a_1 + a_2x_R + a_3y_R + a_4z_R$$

$$u_S = u(x_S, y_S, z_S) = a_1 + a_2x_S + a_3y_S + a_4z_S$$

ซึ่งเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} u_P \\ u_Q \\ u_R \\ u_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (132)$$

กำหนดให้

$$\mathbf{u} = [u_P \quad u_Q \quad u_R \quad u_S]^T$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T$$

สมการ (132) เขียนในรูปย่อ

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

จากภาคผนวก ก.2 แสดงให้เห็นว่า \mathbf{X} เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non – singular matrix) ดังนั้นสามารถนำ \mathbf{X}^{-1} ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{u} \quad (133)$$

เนื่องจาก $\mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{X}} \text{adj} \mathbf{X}$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{X}} \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{X}) & C_{21}(\mathbf{X}) & C_{31}(\mathbf{X}) & C_{41}(\mathbf{X}) \\ C_{12}(\mathbf{X}) & C_{22}(\mathbf{X}) & C_{32}(\mathbf{X}) & C_{42}(\mathbf{X}) \\ C_{13}(\mathbf{X}) & C_{23}(\mathbf{X}) & C_{33}(\mathbf{X}) & C_{43}(\mathbf{X}) \\ C_{14}(\mathbf{X}) & C_{24}(\mathbf{X}) & C_{34}(\mathbf{X}) & C_{44}(\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

เมื่อ $C_{ij}(\mathbf{X})$ แทน โคแฟกเตอร์

จากสมการ (133) จะได้

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{X}} \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{X}) & C_{21}(\mathbf{X}) & C_{31}(\mathbf{X}) & C_{41}(\mathbf{X}) \\ C_{12}(\mathbf{X}) & C_{22}(\mathbf{X}) & C_{32}(\mathbf{X}) & C_{42}(\mathbf{X}) \\ C_{13}(\mathbf{X}) & C_{23}(\mathbf{X}) & C_{33}(\mathbf{X}) & C_{43}(\mathbf{X}) \\ C_{14}(\mathbf{X}) & C_{24}(\mathbf{X}) & C_{34}(\mathbf{X}) & C_{44}(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_P \\ u_Q \\ u_R \\ u_S \end{bmatrix} \quad (134)$$

นำ \mathbf{a} จากสมการ (134) แทนลงในสมการ (131) จะได้

$$u(x,y,z) = [1 \quad x \quad y \quad z] \cdot \frac{1}{\det \mathbf{X}} \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{X}) & C_{21}(\mathbf{X}) & C_{31}(\mathbf{X}) & C_{41}(\mathbf{X}) \\ C_{12}(\mathbf{X}) & C_{22}(\mathbf{X}) & C_{32}(\mathbf{X}) & C_{42}(\mathbf{X}) \\ C_{13}(\mathbf{X}) & C_{23}(\mathbf{X}) & C_{33}(\mathbf{X}) & C_{43}(\mathbf{X}) \\ C_{14}(\mathbf{X}) & C_{24}(\mathbf{X}) & C_{34}(\mathbf{X}) & C_{44}(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_P \\ u_Q \\ u_R \\ u_S \end{bmatrix} \quad (135)$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} \alpha_P &= C_{11}(\mathbf{X}) & \beta_P &= C_{12}(\mathbf{X}) & \gamma_P &= C_{13}(\mathbf{X}) & \delta_P &= C_{14}(\mathbf{X}) \\ \alpha_Q &= C_{21}(\mathbf{X}) & \beta_Q &= C_{22}(\mathbf{X}) & \gamma_Q &= C_{23}(\mathbf{X}) & \delta_Q &= C_{24}(\mathbf{X}) \\ \alpha_R &= C_{31}(\mathbf{X}) & \beta_R &= C_{32}(\mathbf{X}) & \gamma_R &= C_{33}(\mathbf{X}) & \delta_R &= C_{34}(\mathbf{X}) \\ \alpha_S &= C_{41}(\mathbf{X}) & \beta_S &= C_{42}(\mathbf{X}) & \gamma_S &= C_{43}(\mathbf{X}) & \delta_S &= C_{44}(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

จากภาคผนวก ก.1 จะได้ $\det \mathbf{X} = 6V$ เมื่อ V คือปริมาตรของเอลิเมนต์ กำหนดให้

$$N_P = \frac{1}{6V} (\alpha_P + \beta_P x + \gamma_P y + \delta_P z) \quad (136)$$

$$N_Q = \frac{1}{6V} (\alpha_Q + \beta_Q x + \gamma_Q y + \delta_Q z) \quad (137)$$

$$N_R = \frac{1}{6V} (\alpha_R + \beta_R x + \gamma_R y + \delta_R z) \quad (138)$$

$$N_S = \frac{1}{6V} (\alpha_S + \beta_S x + \gamma_S y + \delta_S z) \quad (139)$$

จัดรูปสมการ (135) จะได้ฟังก์ชันการกระจายทิศทางขนานแกน x

$$u = [N_P \quad N_Q \quad N_R \quad N_S] \begin{bmatrix} u_P \\ u_Q \\ u_R \\ u_S \end{bmatrix} \quad (140)$$

ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชันการกระจายทิศทางขนานแกน y

$$v = [N_P \quad N_Q \quad N_R \quad N_S] \begin{bmatrix} v_P \\ v_Q \\ v_R \\ v_S \end{bmatrix} \quad (141)$$

และฟังก์ชันการกระจัดทิศทางขนานแกน z

$$w = [N_P \quad N_Q \quad N_R \quad N_S] \begin{bmatrix} w_P \\ w_Q \\ w_R \\ w_S \end{bmatrix} \quad (142)$$

จากสมการ (140), (141) และ (142) เขียนเป็นสมการเมทริกซ์ และจัดลำดับของการกระจัดโดยเรียงตามลำดับของจุดยอด P, Q, R และ S จะได้

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S & 0 & 0 \\ 0 & N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S & 0 \\ 0 & 0 & N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \\ u_Q \\ v_Q \\ w_Q \\ u_R \\ v_R \\ w_R \\ u_S \\ v_S \\ w_S \end{bmatrix} \quad (143)$$

กำหนดให้

$$\phi = [u \quad v \quad w]^T$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S & 0 & 0 \\ 0 & N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S & 0 \\ 0 & 0 & N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S \end{bmatrix}$$

และ $\mathbf{d} = [u_P \quad v_P \quad w_P \quad u_Q \quad v_Q \quad w_Q \quad u_R \quad v_R \quad w_R \quad u_S \quad v_S \quad w_S]^T$

สมการ (143) เขียนในรูปย่อ

$$\phi = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (144)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัดตามสมการ (36) เขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (145)$$

อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันการกระจัด u เทียบกับ x , y และ z ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_P}{\partial x} & \frac{\partial N_Q}{\partial x} & \frac{\partial N_R}{\partial x} & \frac{\partial N_S}{\partial x} \\ \frac{\partial N_P}{\partial y} & \frac{\partial N_Q}{\partial y} & \frac{\partial N_R}{\partial y} & \frac{\partial N_S}{\partial y} \\ \frac{\partial N_P}{\partial z} & \frac{\partial N_Q}{\partial z} & \frac{\partial N_R}{\partial z} & \frac{\partial N_S}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_P \\ u_Q \\ u_R \\ u_S \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_P & \beta_Q & \beta_R & \beta_S \\ \gamma_P & \gamma_Q & \gamma_R & \gamma_S \\ \delta_P & \delta_Q & \delta_R & \delta_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_P \\ u_Q \\ u_R \\ u_S \end{bmatrix} \quad (146)$$

ในทำนองเดียวกัน อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันการกระจัด v เทียบกับ x , y และ z

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_P & \beta_Q & \beta_R & \beta_S \\ \gamma_P & \gamma_Q & \gamma_R & \gamma_S \\ \delta_P & \delta_Q & \delta_R & \delta_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_P \\ v_Q \\ v_R \\ v_S \end{bmatrix} \quad (147)$$

และอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันการกระจัด w เทียบกับ x , y และ z

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_P & \beta_Q & \beta_R & \beta_S \\ \gamma_P & \gamma_Q & \gamma_R & \gamma_S \\ \delta_P & \delta_Q & \delta_R & \delta_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_P \\ w_Q \\ w_R \\ w_S \end{bmatrix} \quad (148)$$

จากสมการ (146), (147) และ (148) ทำให้สมการ (145) เขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_P & 0 & 0 & \beta_Q & 0 & 0 & \beta_R & 0 & 0 & \beta_S & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_P & 0 & 0 & \gamma_Q & 0 & 0 & \gamma_R & 0 & 0 & \gamma_S & 0 \\ 0 & 0 & \delta_P & 0 & 0 & \delta_Q & 0 & 0 & \delta_R & 0 & 0 & \delta_S \\ \gamma_P & \beta_P & 0 & \gamma_Q & \beta_Q & 0 & \gamma_R & \beta_R & 0 & \gamma_S & \beta_S & 0 \\ \delta_P & 0 & \beta_P & \delta_Q & 0 & \beta_Q & \delta_R & 0 & \beta_R & \delta_S & 0 & \beta_S \\ 0 & \delta_P & \gamma_P & 0 & \delta_Q & \gamma_Q & 0 & \delta_R & \gamma_R & 0 & \delta_S & \gamma_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \\ u_Q \\ v_Q \\ w_Q \\ u_R \\ v_R \\ w_R \\ u_S \\ v_S \\ w_S \end{bmatrix} \quad (149)$$

กำหนดให้

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_P & 0 & 0 & \beta_Q & 0 & 0 & \beta_R & 0 & 0 & \beta_S & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_P & 0 & 0 & \gamma_Q & 0 & 0 & \gamma_R & 0 & 0 & \gamma_S & 0 \\ 0 & 0 & \delta_P & 0 & 0 & \delta_Q & 0 & 0 & \delta_R & 0 & 0 & \delta_S \\ \gamma_P & \beta_P & 0 & \gamma_Q & \beta_Q & 0 & \gamma_R & \beta_R & 0 & \gamma_S & \beta_S & 0 \\ \delta_P & 0 & \beta_P & \delta_Q & 0 & \beta_Q & \delta_R & 0 & \beta_R & \delta_S & 0 & \beta_S \\ 0 & \delta_P & \gamma_P & 0 & \delta_Q & \gamma_Q & 0 & \delta_R & \gamma_R & 0 & \delta_S & \gamma_S \end{bmatrix}$$

สมการ (149) เขียนในรูปย่อ

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (150)$$

เนื่องจากเมทริกซ์ \mathbf{B} ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดต่อ แต่ไม่ขึ้นกับพิกัด x , y และ z ดังนั้นความเครียดจะเป็นค่าคงตัว ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดสำหรับเอลิเมนต์สามมิติ คือ

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-2\nu}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

เขียนในรูปย่อ

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (151)$$

นำ $\boldsymbol{\varepsilon}$ จากสมการ (150) แทนลงในสมการ (151) จะได้

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{d} \quad (152)$$

จากพลังงานศักย์รวม

$$\Pi = U + W \quad (153)$$

เมื่อ U แทน พลังงานความเครียด

และ W แทน พลังงานจากแรงภายนอก

เนื่องจาก
$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

และ
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

จะได้

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (154)$$

สำหรับงานจากแรงภายนอก ประกอบด้วย 3 ส่วนคือ งานจากน้ำหนักของเอลิเมนต์ดิน โหลดที่กระทำเป็นจุด และโหลดกระทำกระจาย โดยงานแต่ละส่วนสามารถหาได้ดังนี้

งานเนื่องจากน้ำหนักของเอลิเมนต์ดิน คือ งานที่เกิดขึ้นจากแรงโน้มถ่วงที่กระทำกับเอลิเมนต์ดินให้เคลื่อนที่ หาได้จากสมการ (155)

$$W_\Gamma = - \int_V \phi^T \Gamma_s dV \quad (155)$$

เมื่อ W_Γ แทน งานเนื่องจากน้ำหนักของเอลิเมนต์ดิน

ϕ แทน ฟังก์ชันการกระจัด

และ Γ_s แทน หน่วยน้ำหนักของดิน

งานเนื่องจากโหลดที่กระทำเป็นจุด คือ งานที่เกิดขึ้นจากแรงภายนอกมากระทำกับ
 เอลิเมนต์ดินที่จุดใด ๆ หาได้จากสมการ (156)

$$W_p = -d^T P \quad (156)$$

เมื่อ W_p แทน งานเนื่องจากโหลดที่กระทำเป็นจุด

d แทน การกระจัดที่จุดยอดของเอลิเมนต์

และ P แทน โหลดภายนอกที่กระทำที่จุดยอด

งานเนื่องจากโหลดกระทำกระจาย คือ งานที่เกิดขึ้นจากแรงภายนอกมากระทำกับ
 เอลิเมนต์ดิน โดยแรงที่มากระทำนี้จะกระจายทั่วบนพื้นผิวใด ๆ ของเอลิเมนต์ดินอย่างต่อเนื่องและ
 สม่าเสมอ หาได้จากสมการ (157)

$$W_T = -\int_S \phi^T T dS \quad (157)$$

เมื่อ W_T แทน งานเนื่องจากโหลดกระทำกระจาย

และ T แทน โหลดที่กระทำแบบกระจายที่กระทำต่อพื้นที่ S มีหน่วยเป็นแรงต่อพื้นที่

ดังนั้น พลังงานจากแรงภายนอก

$$W = W_\Gamma + W_p + W_T \quad (158)$$

นำ W จากสมการ (158) แทนลงในสมการ (153) จะได้

$$\Pi = U + W_\Gamma + W_p + W_T \quad (159)$$

จากสมการ (154) ถึง (157) ทำให้สมการ (159) เขียนได้เป็นดังนี้

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \phi^T \boldsymbol{\Gamma}_s dV - d^T \mathbf{P} - \int_S \phi^T \mathbf{T} dS$$

นำ ϕ และ $\boldsymbol{\varepsilon}$ จากสมการ (144) และ (150) ตามลำดับ แทนลงในสมการ (153) จะได้

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V d^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d dV - \int_V d^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Gamma}_s dV - d^T \mathbf{P} - \int_S d^T \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS$$

เนื่องจาก d หรือการกระจัดที่จุดต่อไม่ขึ้นอยู่กับพิกัด x , y และ z จึงเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\Pi = \frac{1}{2} d^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV d - d^T \int_V \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Gamma}_s dV - d^T \mathbf{P} - d^T \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS$$

จะเห็นว่าสามพจน์ท้ายของสมการนั้นคือพลังงานที่เกิดจากแรงภายนอกคูณด้วยการกระจัด ถ้าให้ \mathbf{f}
 เท่ากับแรงทั้งหมดที่กระทำบนเอลิเมนต์ จะได้

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Gamma}_s dV + \mathbf{P} + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS \quad (160)$$

ดังนั้นพลังงานศักย์รวมเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f}$$

หาพลังงานศักย์ต่ำสุด โดย $\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = 0$ นั่นคือ

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f} \right) = 0$$

จัดรูปสมการจะได้

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{d} \quad (161)$$

กำหนดให้ \mathbf{k} แทน สติฟเนสเมทริกซ์ โดยที่

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (162)$$

เนื่องจาก $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ ไม่ขึ้นอยู่กับ x, y และ z เมื่ออินทิเกรตสมการ (162) จะได้

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} V \quad (163)$$

นำ \mathbf{D} จากสมการ (59) แทนในสมการ (163) จะได้

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^T \mathbf{D}' + \mathbf{D}_f \mathbf{B} V \quad (164)$$

แทน \mathbf{k} ในสมการ (161) จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนของดิน

$$\mathbf{f} = \mathbf{k} \mathbf{d} \quad (165)$$

3.2.1 การหาแรงเนื่องจากมวล

พจน์แรกของสมการ (160) แรงเนื่องจากมวล (body force) กระทำที่จุดยอดของเอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า

$$\text{เนื่องจาก} \quad \mathbf{f}_\Gamma = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{T}_s dV \quad (166)$$

โดยที่เมทริกซ์ \mathbf{N} ได้จากสมการ (144) นั่นคือ

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S & 0 & 0 \\ 0 & N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S & 0 \\ 0 & 0 & N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{\Gamma}_s = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$$

เมื่อ γ_x , γ_y และ γ_z แทน หน่วยน้ำหนักเอลิเมนต์ดินในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ
เนื่องจาก

$$\mathbf{N}^T \mathbf{\Gamma}_s = \begin{bmatrix} N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S & 0 & 0 \\ 0 & N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S & 0 \\ 0 & 0 & N_P & 0 & 0 & N_Q & 0 & 0 & N_R & 0 & 0 & N_S \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} \quad (167)$$

แทนสมการ (136) ถึง (139) ลงในสมการ (167) จะได้

$$\mathbf{N}^T \mathbf{\Gamma}_s = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} (\alpha_P + \beta_P x + \gamma_P y + \delta_P z) \cdot \gamma_x \\ (\alpha_P + \beta_P x + \gamma_P y + \delta_P z) \cdot \gamma_y \\ (\alpha_P + \beta_P x + \gamma_P y + \delta_P z) \cdot \gamma_z \\ (\alpha_Q + \beta_Q x + \gamma_Q y + \delta_Q z) \cdot \gamma_x \\ (\alpha_Q + \beta_Q x + \gamma_Q y + \delta_Q z) \cdot \gamma_y \\ (\alpha_Q + \beta_Q x + \gamma_Q y + \delta_Q z) \cdot \gamma_z \\ (\alpha_R + \beta_R x + \gamma_R y + \delta_R z) \cdot \gamma_x \\ (\alpha_R + \beta_R x + \gamma_R y + \delta_R z) \cdot \gamma_y \\ (\alpha_R + \beta_R x + \gamma_R y + \delta_R z) \cdot \gamma_z \\ (\alpha_S + \beta_S x + \gamma_S y + \delta_S z) \cdot \gamma_x \\ (\alpha_S + \beta_S x + \gamma_S y + \delta_S z) \cdot \gamma_y \\ (\alpha_S + \beta_S x + \gamma_S y + \delta_S z) \cdot \gamma_z \end{bmatrix} \quad (168)$$

แทนสมการ (168) ในสมการ (166) และจาก (96) ถึง (99) จะได้

$$\mathbf{f}_T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \alpha_P & 0 & 0 & \alpha_Q & 0 & 0 & \alpha_R & 0 & 0 & \alpha_S & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_P & 0 & 0 & \alpha_Q & 0 & 0 & \alpha_R & 0 & 0 & \alpha_S & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_P & 0 & 0 & \alpha_Q & 0 & 0 & \alpha_R & 0 & 0 & \alpha_S \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$$

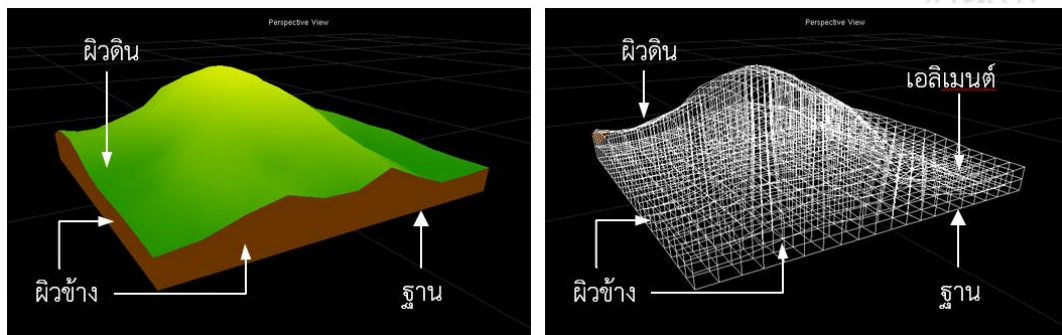
จากสมการ (92) จะได้ $\alpha_P = \alpha_Q = \alpha_R = \alpha_S = \frac{3}{2} V$ ดังนั้น

$$\mathbf{f}_T = \frac{V}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} \quad (169)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้นำเสนอในหัวข้อที่ 3.1 และ 3.2 นั้นเป็นสมการจะถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยลำดับถัดไปจะนำเสนอแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดินและขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

3.3 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element model) ของลาดดิน

แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นแบบจำลองโครงสร้างของระบบที่ถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยเรียกว่าเอลิเมนต์ ซึ่งแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะต้องเหมือนหรือสอดคล้องกับโครงสร้างเดิมให้มากที่สุด งานวิทยานิพนธ์นี้ได้กำหนดให้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดินมีองค์ประกอบหลัก 4 ส่วน ได้แก่ ผิวดิน ผิวน้ำ ฐาน และเอลิเมนต์ ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดิน

เพื่อความสะดวกในการอธิบายต่อไปนี้กำหนดให้

(Ω, Ψ) แทนแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดิน

เมื่อ Ω แทนเซตของจุดยอด ω โดยที่ $\omega \in \mathbb{R}^3$

Ψ แทนเซตของรูปทรงสี่หน้า ψ ที่มี Ω_ψ แทนเซตของจุดยอด และ $\Omega_\psi \subset \Omega$

$\Phi_\psi = \{\phi \subset \Omega_\psi : n(\phi) = 3\}$

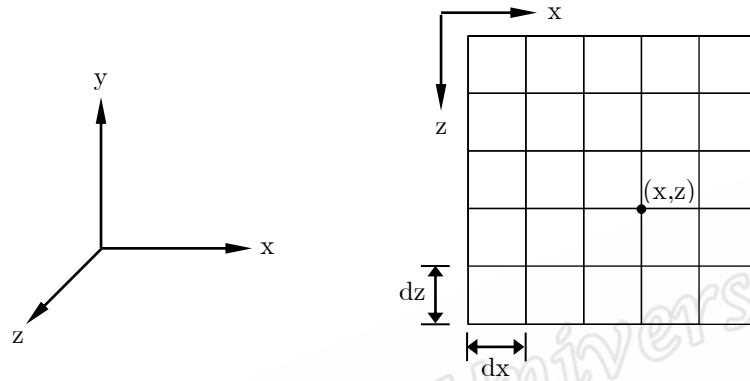
$\Psi_{p,q} = \{\psi \in \Psi : p, q \in \Omega_\psi\}$

Ω_t, Ω_s และ Ω_b แทนเซตของจุดยอดบนผิวดิน ผิวน้ำ และฐาน ตามลำดับ

โดยที่ $\Omega_t, \Omega_s, \Omega_b \subset \Omega$

การสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดินจะนำข้อมูลความสูงของภูมิประเทศจากภารกิจสำรวจข้อมูลภูมิประเทศด้วยเรดาร์ดาวเทียม (Shuttle Radar Topography Mission, SRTM) [25] ที่มีการจัดเก็บในรูปแบบกริด (grid) โดยอ้างอิงพิกัดฉากดังรูป 3.5 ซึ่งกำหนดแกน x และ z เป็นแกนพิกัดบนระนาบกริด และแกน y เป็นแกนตั้งฉากกับระนาบกริด ความ

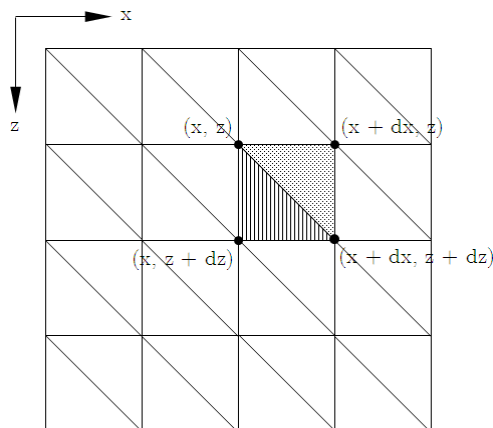
สูงของภูมิประเทศที่ตำแหน่ง (x, z) ใด ๆ มีทิศทางตามแกน y ถ้าข้อมูลภูมิประเทศมีความละเอียด $dx \times dz$ หมายถึงกริดข้อมูลมีระยะห่างระหว่างเส้นกริดตามแกน x เท่ากับ dx และระยะห่างระหว่างเส้นกริดตามแกน z เท่ากับ dz สำหรับการสำรวจข้อมูลภูมิประเทศโดยทั่วไปจะกำหนดระยะห่างในการเก็บข้อมูลตามแกน x และแกน z เท่ากัน



รูปที่ 3.5 กริดข้อมูลความสูงของภูมิประเทศ

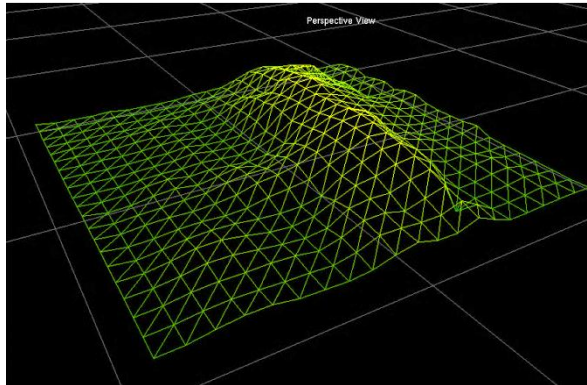
3.3.1 การจำลองผิวดิน (a soil surface modeling)

การจำลองผิวดินเป็นการจำลองภาพผิวดินโดยสร้างจากการประกอบกันของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็นจุดตัดของเส้นกริด พิจารณาส่วนที่แรเงาซึ่งเป็นภาพจากมุมมองด้านบนของผิวดินที่มีจุดยอดที่จุด (x, z) , $(x + dx, z)$, $(x + dx, z + dz)$ และ $(x, z + dz)$ ได้จากการประกอบกันของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่จุด (x, z) , $(x + dx, z + dz)$ และ $(x, z + dz)$ และสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่จุด (x, z) , $(x + dx, z)$ และ $(x + dx, z + dz)$ รูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 ภาพจากมุมมองด้านบนของแบบจำลองผิวดินที่ได้จากการประกอบกันของรูปสามเหลี่ยม

เมื่อนำข้อมูลความสูงทั้งหมดมาสร้างภาพผิวดินจะได้แบบจำลองผิวดินดังรูป 3.7



รูปที่ 3.7 ภาพจำลองผิวดิน

3.3.2 การลงสีผิวดิน (shading)

สีผิวดินที่ตำแหน่งใด ๆ ที่มีความสูงเป็น y ถูกกำหนดตามค่าความสูงสัมพันธ์ y_r

ตามสมการ

$$y_r = \frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \quad (170)$$

เมื่อ y_{\min} แทนความสูงที่มีค่าต่ำสุด

y_{\max} แทนความสูงที่มีค่าสูงสุด

เมื่อคำนวณความสูงสัมพันธ์ที่ตำแหน่งใด ๆ แล้วนำความสูงสัมพันธ์มาหาค่าระดับสีหาได้จาก

$$L_{\text{color}} = y_r \times 255 \quad (171)$$

เมื่อ L_{color} แทนค่าระดับสี แล้วนำค่าระดับสีมาหาค่าสีผิวดิน โดยที่ (red, green, blue) แทนสีผิวดินที่ตำแหน่งใด ๆ ได้ดังนี้

$$\text{Red} = L_{\text{color}}, \text{Green} = \frac{256 + L_{\text{color}}}{2}, \text{Blue} = 0$$

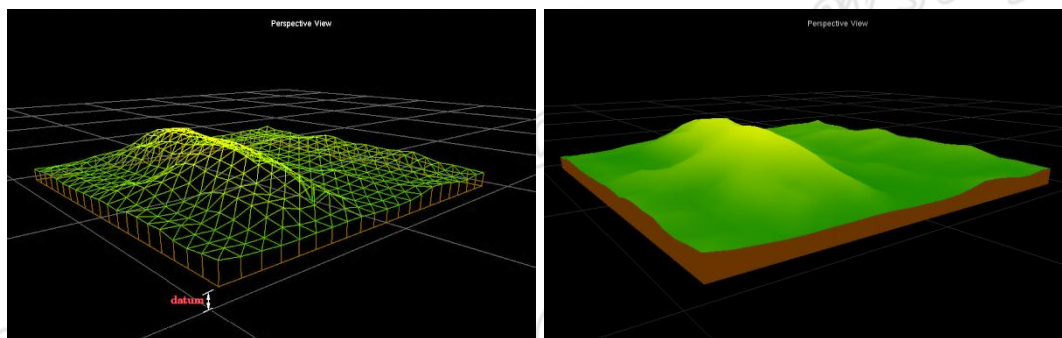
สำหรับสีผิวดินตามความสูงทั้งหมดแสดงได้ดังรูปที่ 3.8 โดยสีผิวดินจะแสดงถึงระดับความสูงของพื้นที่ลาดดิน กล่าวคือ สีเขียวแสดงพื้นที่ต่ำและสีเหลืองแสดงพื้นที่สูง



รูปที่ 3.8 สีผิวดินตามความสูงทั้งหมด

3.3.3 การสร้างแบบจำลองลาดดินให้เป็นรูปทรงตัน

เนื่องจากการวิเคราะห์การวิบัติของลาดดินนอกจากจะต้องพิจารณาลักษณะรูปร่างภายนอกของลาดดิน ได้แก่ ความสูงของตำแหน่งใด ๆ หรือความชันที่ผิวดินแล้ว การวิเคราะห์จำเป็นต้องพิจารณาค่าความชัน หรือแรงเค้นที่เกิดขึ้นภายในโครงสร้างของลาดดินด้วย ดังนั้นแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดินจึงต้องมีลักษณะเป็นรูปทรงตันเพื่อการวิเคราะห์หาค่าเสดหรือการกระจายความเค้นและความเครียดที่ตำแหน่งใด ๆ ภายในโครงสร้างของลาดดิน การสร้างแบบจำลองของลาดดินให้เป็นรูปทรงตันสามารถดำเนินการได้จากการนำแบบจำลองของผิวดินมาสร้างเป็นรูปทรงปิด โดยประกอบผิวด้านบนของรูปทรงตันซึ่งได้จากแบบจำลองผิวดินเข้ากับผิวด้านข้างทั้งสองด้าน ได้แก่ ด้านซ้าย ขวา หน้า และหลัง สำหรับฐานของแบบจำลองสร้างจากรูปสี่เหลี่ยม โดยความสูงของฐานวัดจากระดับน้ำทะเล เท่ากับ datum ดังรูปที่ 3.9

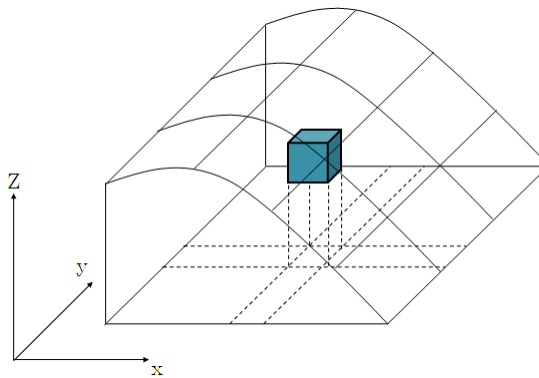


รูปที่ 3.9 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดินที่มีลักษณะเป็นรูปทรงตัน

3.3.4 การแบ่งเอลิเมนต์ (discretization) ของแบบจำลองลาดดิน

ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะต้องแบ่งแบบจำลองลาดดินที่ได้จากหัวข้อ 3.3.3 ออกเป็นส่วนย่อย ๆ อย่างต่อเนื่อง ตามรูปร่างลักษณะที่แท้จริงของลาดดิน และเรียกส่วนย่อยของดินเหล่านี้ว่าเอลิเมนต์ดิน ซึ่งเมื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาแล้วผลเฉลยที่ได้รับนั้นจะเป็นผลเฉลยที่จุดต่อ (node) ของแต่ละเอลิเมนต์ดิน เนื่องจากแบบจำลองลาดดินมีลักษณะเป็นรูปทรงตัน 3 มิติ และสำหรับในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกใช้เอลิเมนต์ดินที่มีลักษณะเป็นรูปทรงสี่หน้า ดังนั้นเพื่อให้ได้เอลิเมนต์ดินรูปทรงสี่หน้าจึงทำการแบ่งแบบจำลองลาดดินออกเป็นเอลิเมนต์ดินตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่หนึ่ง แบ่งแบบจำลองลาดดินออกเป็นเอลิเมนต์ดินรูปทรงสี่เหลี่ยมอย่างต่อเนื่อง และให้มีรูปร่างลักษณะใกล้เคียงกับลาดดินเดิมให้มากที่สุด ดังรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 ตัวอย่างลาดดินที่ถูกแบ่งเป็นส่วนย่อยรูปทรงสี่เหลี่ยม

การแบ่งเอลิเมนต์ของลาดดินเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยม จะเป็นการแบ่งเอลิเมนต์เพื่อกำหนดความละเอียดในการวิเคราะห์ โดยสามารถกำหนดค่าความละเอียดได้จากการกำหนดรอบของการแบ่งหรือ Iteration ในแต่ละรอบการแบ่งเอลิเมนต์จะมีการประมาณค่าความสูงของตำแหน่งจุดกึ่งกลางระหว่างจุดยอดที่อยู่ติดกันด้วยค่าความสูงเฉลี่ย ตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$y_{\bar{x}} = \frac{y(x, z) + y(x + dx, z)}{2}, \quad \bar{x} = x + \frac{dx}{2} \quad (172)$$

$$y_{\bar{z}} = \frac{y(x, z) + y(x, z + dz)}{2}, \quad \bar{z} = z + \frac{dz}{2} \quad (173)$$

$$y_I = \frac{y_1(x, z) + y_{I+1}(x, z)}{2} \quad (174)$$

เมื่อ l แทนระดับชั้น (layer) ที่ได้จากการแบ่งลาดดินตามระดับความสูง โดยชั้นผิวดินจะมี $l = 0$

การประมาณค่าความสูงที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของแต่ละหน้าเอลิเมนต์หาได้จาก

$$y_f = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \quad (175)$$

เมื่อ A, B, C และ D เป็นจุดยอดของแต่ละหน้าเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยม

การประมาณค่าความสูงที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางเอลิเมนต์หาได้จาก

$$y_c = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D + y_E + y_F + y_G + y_H}{8} \quad (176)$$

เมื่อ A, B, C, D, E, F, G และ H เป็นจุดยอดของเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยม

ขั้นตอนวิธีการแบ่งเอลิเมนต์ของลาดดินเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยม ดำเนินการได้ดังนี้

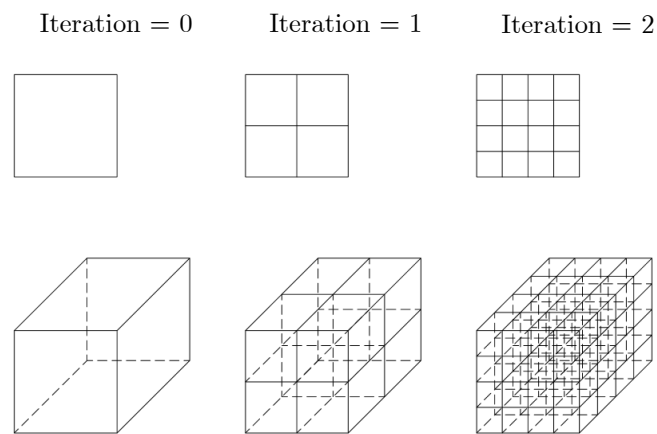
1. User defines Iteration.
2. For $i = 1$ to Iteration do

2.1 For each element. Determine new vertices are middle point on each edge and center point on face and volume.

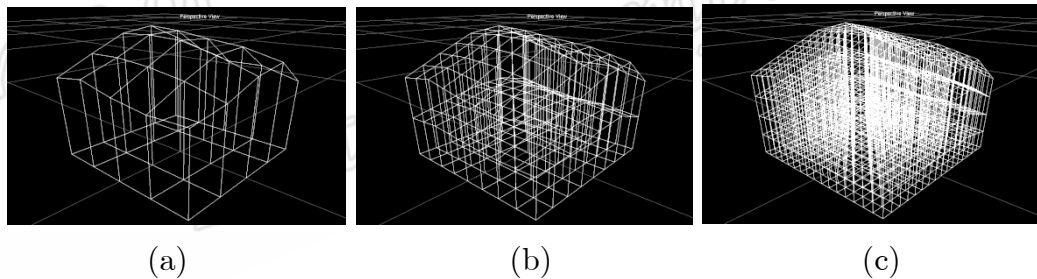
2.2 Create new element that a vertices' coordinate from step 2.1

3. End For

ผลการดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้น แสดงได้ดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 ผลการแบ่งเอลิเมนต์ เมื่อกำหนด Iteration = 0, 1 และ 2

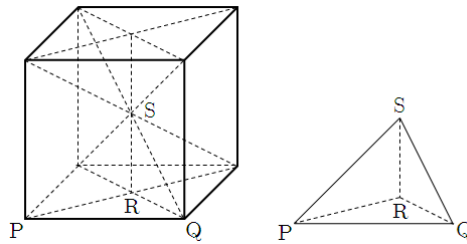


รูปที่ 3.12 แบบจำลองของลาดดินที่ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ด้วยค่า Iteration = 0, 1 และ 2

รูปที่ 3.12 (a) แสดงแบบจำลองของลาดดินจากกริดข้อมูลเริ่มต้น (Iteration = 0) ขนาด 4×4 ซึ่งจะประกอบด้วยชั้นดิน 2 ชั้น ได้แก่ ชั้นผิวดินและฐาน มีจุดยอดทั้งหมด 50 จุด และมีเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมทั้งหมด 16 เอลิเมนต์ (b) แสดงแบบจำลองของลาดดินที่ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ด้วยค่า Iteration = 1 จะได้แบบจำลองของลาดดินที่ประกอบด้วยชั้นดิน 3 ชั้น มีจุดยอดทั้งหมด 243 จุด และมีเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมทั้งหมด 128 เอลิเมนต์ (c) แสดงแบบจำลองของลาดดินที่ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ด้วยค่า Iteration = 2 จะได้แบบจำลองของลาดดินที่ประกอบด้วยชั้นดิน 5 ชั้น มีจุดยอดทั้งหมด 1,445 จุด และมีเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมทั้งหมด 1,024 เอลิเมนต์

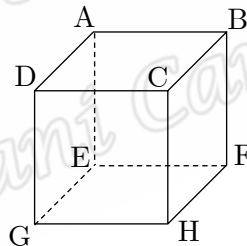
กรณีทั่วไปถ้าแบบจำลองลาดดินจากกริดเริ่มต้นขนาด $m \times n$ เมื่อถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ด้วยค่า Iteration = k จะได้แบบจำลองของลาดดินที่ประกอบด้วยชั้นดิน $2^k + 1$ ชั้น มีจุดยอดทั้งหมด $(2^k + 1)(2^k m + 1)(2^k n + 1)$ จุด และมีเอลิเมนต์ทั้งหมด $2^{3k} mn$ เอลิเมนต์

ขั้นที่สอง แบ่งเอลิเมนต์ดินรูปทรงสี่เหลี่ยมแต่ละรูปเป็นรูปทรงสี่หน้า ดังรูปที่ 3.13



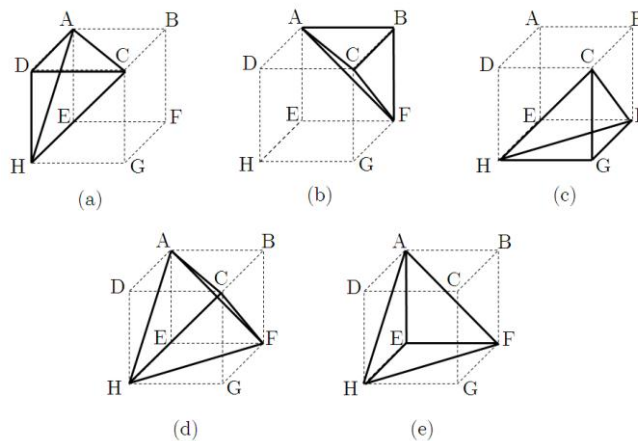
รูปที่ 3.13 รูปทรงสี่เหลี่ยม ที่สามารถแบ่งเป็นรูปทรงสี่หน้า

ขั้นตอนนี้จะแบ่งแต่ละเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมให้เป็นรูปทรงสี่หน้าจำนวน 5 รูป ซึ่งวิธีการแบ่ง สมมติให้เอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมประกอบด้วยจุดยอด 8 จุด ได้แก่ จุด A, B, C, D, E, F, G และ H ดังรูป 3.14



รูปที่ 3.14 เอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมประกอบด้วยจุดยอด 8 จุด

เมื่อนำเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมดังรูปที่ 3.14 มาแบ่งจะได้เอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าดังรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 การแบ่งเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมให้เป็นรูปทรงสี่หน้า จำนวน 5 รูป

กรณีทั่วไปถ้าแบบจำลองของลาดดินจากกริดข้อมูลเริ่มต้นขนาด $m \times n$ เมื่อถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ด้วยค่า $\text{Iteration} = k$ จะได้แบบจำลองของลาดดินที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมทั้งหมด 5×2^{3k} เอลิเมนต์

3.4 การวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เงื่อนไขขอบ

เนื่องจากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดินนี้ได้ถูกกำหนดให้ส่วนที่ได้รับน้ำฝนคือส่วนผิวลาดดิน และน้ำจะไหลซึมออกจากระบบผ่านทางผิวด้านข้างและฐาน ฉะนั้นเงื่อนไขขอบจึงเป็นดังต่อไปนี้

สำหรับแต่ละ $\psi \in \Psi$

- ความชื้นของฝนของเอลิเมนต์ ψ เขียนแทนด้วย $v_{\text{rain},\psi}$ โดยที่

$$v_{\text{rain},\psi} = \begin{cases} v_{\text{rain}} & , \exists \phi \in \Phi_\psi, \phi \subset \Omega_t \\ 0 & , \forall \phi \in \Phi_\psi, \phi \not\subset \Omega_t \end{cases} \quad (177)$$

เมื่อ v_{rain} แทน ค่าพารามิเตอร์ความชื้นฝน

- อัตราเร็วการไหลซึมออกของเอลิเมนต์ ψ เขียนแทนด้วย $v_{\text{drain},\psi}$ โดยที่

$$v_{\text{drain},\psi} = \begin{cases} v_{\text{drain}} & , \exists \phi \in \Phi_\psi, \phi \subset \Omega_s \cup \Omega_b \\ 0 & , \forall \phi \in \Phi_\psi, \phi \not\subset \Omega_s \cup \Omega_b \end{cases} \quad (178)$$

เมื่อ v_{drain} แทน ค่าพารามิเตอร์อัตราเร็วการไหลซึมออก

และเมื่อกำหนดเงื่อนไขของสำหรับความชื้นฝนและอัตราเร็วการไหลซึมออกของแต่ละเอลิเมนต์แล้วจะนำ $v_{\text{rain},\psi}$ หรือ $v_{\text{drain},\psi}$ แทนค่า v_d ในสมการ (103)

สำหรับแต่ละ $\omega \in \Omega_t$

- กำหนดเฮด h_ω ตามสมการ

$$h_\omega = y_\omega \quad (179)$$

เมื่อ y_ω แทนเฮดระดับที่จุด ω

และเมื่อกำหนดเงื่อนไขของสำหรับเฮดของแต่ละเอลิเมนต์แล้วจะนำ h_ω แทนค่า \mathbf{h} ในสมการ (82)

สมการรวมของระบบ

สมการรวมของระบบที่มีจุดยอดทั้งหมด m จุด เขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{F}_w = \mathbf{K}_w \mathbf{H}_w \quad (180)$$

เมื่อ $\mathbf{F}_w = [f_i]_m$ โดยที่ f_i แทนแรงลัพธ์จากการขีมน้ำที่จุดยอด i

$\mathbf{H}_w = [h_i]_m$ โดยที่ h_i แทนเฮดรวมที่จุดยอด i

และ $\mathbf{K}_w = [k_{ij}]_{m \times m}$ โดยที่ k_{ij} แทนสทิพเนสเมทริกซ์รวมที่จุดยอด i และ j

กำหนดให้ สทิพเนสเมทริกซ์ของ ψ , $\psi \in \Psi$ จากสมการ (83) เขียนแทนด้วย k_ψ และสทิพเนสเมทริกซ์ย่อยของ k_ψ ที่จุดยอด i และ j เขียนแทนด้วย $k_{ij,\psi}$ จะได้

$$k_{ij} = \sum_{\psi \in \Psi_{i,j}} k_{ij,\psi} \quad (181)$$

และเมทริกซ์แรงการไหลของน้ำรวมของ ψ , $\psi \in \Psi$ จากสมการ (103) แทนด้วย f_ψ และเมทริกซ์แรงการไหลของน้ำรวมของ f_ψ ที่จุดยอด i เขียนแทนด้วย $f_{i,\psi}$ จะได้

$$f_i = \sum_{\psi \in \Psi_i} f_{i,\psi} \quad (182)$$

การหาผลเฉลยของระบบสมการ

การวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดิน จากสมการ (180) เขียนในรูปเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \quad (183)$$

จากสมการ (183) เมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบพบว่ามีแรงเนื่องจากการขีมน้ำ f_i ที่ไม่ทราบค่า การหาผลเฉลยจะดำเนินการตัดแถวและหลักของเมทริกซ์ \mathbf{F}_w , \mathbf{K}_w และ \mathbf{H}_w ที่สมนัยกับ f_i ที่ไม่ทราบค่า จะได้สมการ

$$\mathbf{F}'_w = \mathbf{K}'_w \mathbf{H}'_w \quad (184)$$

เมื่อ $\mathbf{F}'_w = [f_i]_{m'}$

$\mathbf{K}'_w = [k_{ij}]_{m' \times m'}$

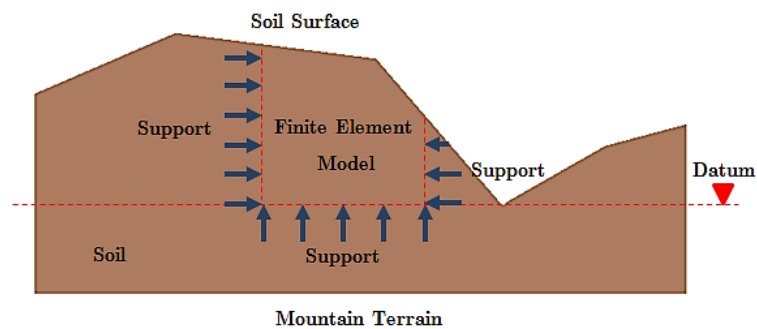
และ $\mathbf{H}'_w = [h_i]_{m'}$

โดยที่ i และ j แทนลำดับของแถวและคอลัมน์ของแรงปฏิกิริยาที่ทราบค่าในเมทริกซ์

ดำเนินการหาผลเฉลยของสมการ (184) โดยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss eliminate) จะได้เฮด H'_w ที่ตำแหน่งจุดยอดใด ๆ ของแต่ละเอลิเมนต์

3.5 การวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินด้วยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ เงื่อนไขขอบ

เนื่องจากการวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินเป็นการวิเคราะห์โครงสร้างของลาดดินภายใต้แรงกระทำที่เกิดขึ้นจากน้ำหนักของลาดดิน ซึ่งแรงกระทำนี้จะมีการถ่ายเทไปสู่ฐานรองรับ (support) เพื่อยึดลาดดินให้ตรึงกับที่ สำหรับฐานรองรับในงานวิทยานิพนธ์นี้จะหมายถึงดินบริเวณรอบหรือชั้นดินที่อยู่ลึกกว่าชั้นดินในโครงสร้างของแบบจำลองลาดดินที่กำลังพิจารณา ดังรูปที่ 3.16

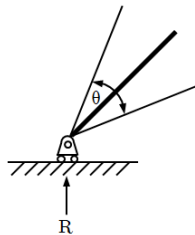


รูปที่ 3.16 ฐานรองรับโครงสร้างของลาดดิน

ฐานรองรับโครงสร้างโดยทั่วไปมีหลายรูปแบบ และฐานรองรับแต่ละรูปแบบจะมีความสามารถในการรับแรงและโมเมนต์ต่างกัน จึงทำให้มีการกระจัดและแรงปฏิกิริยา (reaction force) ที่เกิดขึ้นต่างกัน แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะฐานรองรับที่นำมาใช้รองรับโครงสร้างของลาดดินที่เหมาะสมกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และลักษณะของเอลิเมนต์ ได้แก่ ฐานรองรับแบบล้อเลื่อน (roller) และข้อยึด (link)

- ฐานรองรับแบบล้อเลื่อน

ฐานรองรับประเภทนี้สามารถเคลื่อนตัวไปมาตามพื้นผิวเรียบที่รองรับฐาน ดังนั้นฐานรองรับจึงสามารถรับแรงที่มีทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวของฐานเท่านั้น ดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 ฐานรองรับแบบล้อเลื่อน

การกำหนดเงื่อนไขขอบ สำหรับแต่ละ $v \in \Omega_s \cup \Omega_b$ เป็นฐานรองรับแรง มีการกระจัดและแรงปฏิกิริยา ดังสมการต่อไปนี้

$$\mathbf{d}_{n,v} = 0 \quad (185)$$

เมื่อ $\mathbf{d}_{n,v}$ แทนการกระจัดของจุดยอด v ในทิศทาง n

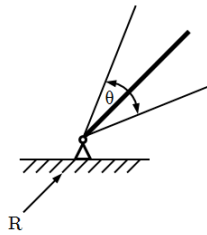
โดยที่ n แทนเวกเตอร์ปกติของระนาบรองรับฐาน

$$\mathbf{R}_{m,v} = 0 \quad (186)$$

เมื่อ $\mathbf{R}_{m,v}$ แทนแรงปฏิกิริยาที่จุดยอด v ในทิศทาง m โดยที่ $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$

- ฐานรองรับแบบข้อยึด

ฐานรองรับประเภทนี้มีตัวข้อยึดที่มีจุดต่อเป็นจุดหมุน สามารถรับแรงดึงหรือแรงอัดได้ตามแนวเดียวกับข้อยึด แต่ไม่สามารถรับแรงเฉือนหรือโมเมนต์ตัดได้ ดังรูปที่ 3.18



รูปที่ 3.18 ฐานรองรับแบบข้อยึด

การกำหนดเงื่อนไขขอบ สำหรับแต่ละ $v \in \Omega_s \cup \Omega_b$ เป็นฐานรองรับแรง มีการกระจัดและแรงปฏิกิริยา ดังสมการ

$$\mathbf{d}_n = 0 \quad (187)$$

เมื่อ \mathbf{d}_n แทนการกระจัดของจุดยอด v

สมการรวมของระบบ

สมการรวมของระบบที่มีจุดยอดทั้งหมด m จุด เขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{K}_s \mathbf{D}_s \quad (188)$$

เมื่อ $\mathbf{F}_s = [f_i]_m$ โดยที่ f_i แทนแรงลัพธ์ที่จุดยอด i

$\mathbf{D}_s = [d_i]_m$ โดยที่ d_i แทนการกระจัดที่จุดยอด i

และ $\mathbf{K}_s = [k_{ij}]_{m \times m}$ โดยที่ k_{ij} แทนสทิงเฟนสเมทริกซ์รวมที่จุดยอด i และ j

กำหนดให้ สทิวพเนสเมทริกซ์ของ ψ , $\psi \in \Psi$ จากสมการ (164) เขียนแทนด้วย k_ψ และสทิวพเนสเมทริกซ์ย่อยของ k_ψ ที่จุดยอด i และ j เขียนแทนด้วย $k_{ij,\psi}$ จะได้

$$k_{ij} = \sum_{\psi \in \Psi_{i,j}} k_{ij,\psi} \quad (189)$$

และเมทริกซ์แรงรวมของ ψ , $\psi \in \Psi$ จากสมการ (165) แทนด้วย f_ψ และเมทริกซ์แรงรวมของ f_ψ ที่จุดยอด i เขียนแทนด้วย $f_{i,\psi}$ จะได้

$$f_i = \sum_{\psi \in \Psi_i} f_{i,\psi} \quad (190)$$

การหาผลเฉลยของระบบสมการ

การวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือน จากสมการ (188) เขียนในรูปเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (191)$$

จากสมการ (191) เมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบพบว่ามีแรงปฏิกิริยา f_1 ที่ฐานรองรับ บางแรงเป็นแรงที่ไม่ทราบค่า การหาผลเฉลยจะดำเนินการตัดแฉกและหลักของเมทริกซ์ \mathbf{F}_s , \mathbf{K}_s และ \mathbf{D}_s ที่สมนัยกับ f_1 ที่ไม่ทราบค่า จะได้สมการ

$$\mathbf{F}'_s = \mathbf{K}'_s \mathbf{D}'_s \quad (192)$$

$$\text{เมื่อ } \mathbf{F}' = [f_i]_{m'}$$

$$\mathbf{d}' = [d_i]_{m'}$$

$$\text{และ } \mathbf{k}' = [k_{ij}]_{m' \times m'}$$

โดยที่ i และ j แทนลำดับของแฉกและคอลัมน์ของแรงปฏิกิริยาที่ทราบค่าในเมทริกซ์

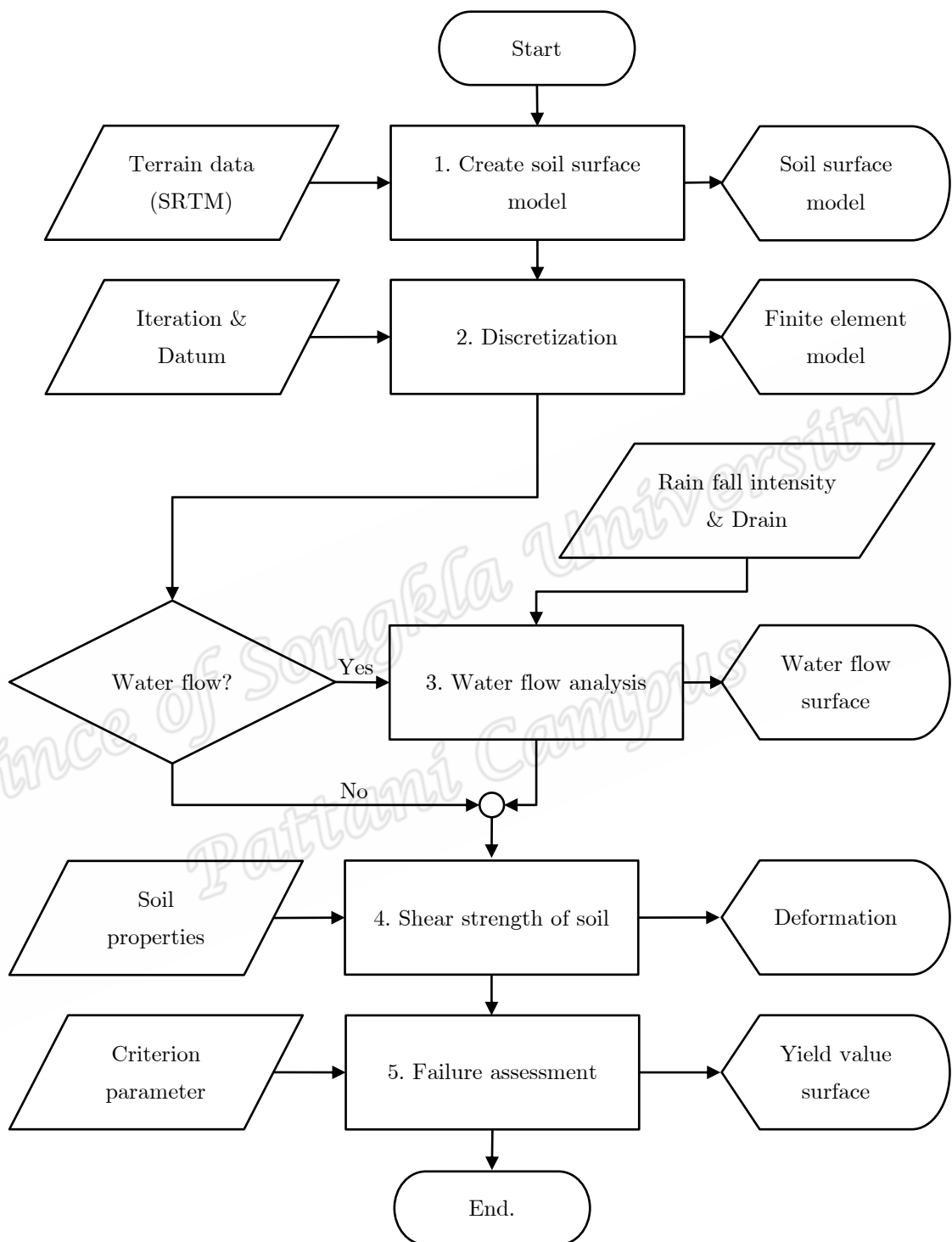
เมื่อดำเนินการหาผลเฉลยของสมการ (192) โดยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ จะได้ \mathbf{D}'_s และนำไปแทนในสมการ (165) จะได้ \mathbf{F} ซึ่งเป็นแรงภายใน (internal force) ที่ตำแหน่งจุดยอดใด ๆ ของแต่ละเอลิเมนต์

3.6 อัลกอริทึมการวิเคราะห์การวิบัติของลาดดิน

ในส่วนท้ายของบทนี้จะกล่าวถึงภาพรวมของกระบวนการทั้งหมดในการวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดิน ได้แก่ สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดิน วิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดิน วิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดินและคำนวณเกณฑ์วิบัติของลาดดินแสดงตามผังงาน ดังรูป 3.19

กระบวนการวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. **สร้างแบบจำลองผิวดิน (create soil surface)** โดยนำข้อมูลความสูงของภูมิประเทศมาดำเนินการตามหัวข้อที่ 3.3.1 ถึง 3.3.3 จะได้แบบจำลองผิวดินและแบบจำลองลาดดินตามลำดับ
2. **แบ่งเอลิเมนต์ (discretization)** นำแบบจำลองลาดดินที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 มาสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ตามหัวข้อที่ 3.3.4 โดยแบ่งเป็นเอลิเมนต์ของแบบจำลองตามจำนวนรอบการทำซ้ำ iteration และระดับอ้างอิง datum
3. **วิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดิน (groundwater flow analysis)** นำแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 มาวิเคราะห์ตามหัวข้อที่ 3.4 ในขั้นตอนนี้จะได้ลักษณะการไหลของน้ำใต้ดิน ปริมาณน้ำในดินและน้ำหนักรวม
4. **วิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดิน (shear strength of soil)** นำผลที่ได้จากขั้นที่ 3 มาวิเคราะห์ตามหัวข้อที่ 3.5 จะได้การเปลี่ยนรูปของลาดดิน ความเค้นและความเครียดที่จุดยอดของแต่ละเอลิเมนต์ดิน
5. **ประเมินการวิบัติ (failure assessment)** ของลาดดินโดยนำความเค้นที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 มาประเมินการวิบัติด้วยเกณฑ์การวิบัติตามหัวข้อที่ 2.4



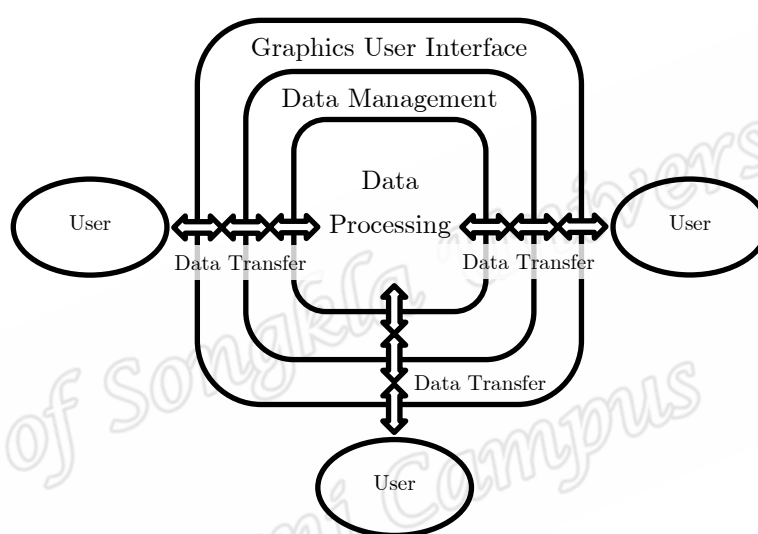
รูปที่ 3.19 ผังงานการวิเคราะห์และสร้างภาพดินโคลนถล่ม

ในบทต่อไปจะกล่าวถึงการออกแบบและประดิษฐ์ซอฟต์แวร์ SoilFE 1.0 เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณผลเฉลยของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

บทที่ 4

การออกแบบและประดิษฐ์ซอฟต์แวร์

โปรแกรม SoilFE 1.0 ได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นสำหรับวิเคราะห์การวิบัติของลาดดินตามผังงานดังรูปที่ 3.19 โดยโปรแกรมประกอบด้วย 3 โมดูล (module) ได้แก่ โมดูลประสานงานกับผู้ใช้ (user interface module) โมดูลจัดการข้อมูล (data management module) และโมดูลประมวลผลข้อมูล (data processing module) โมดูลหลักทั้งหมดมีการประสานกันดังรูปที่ 4.1

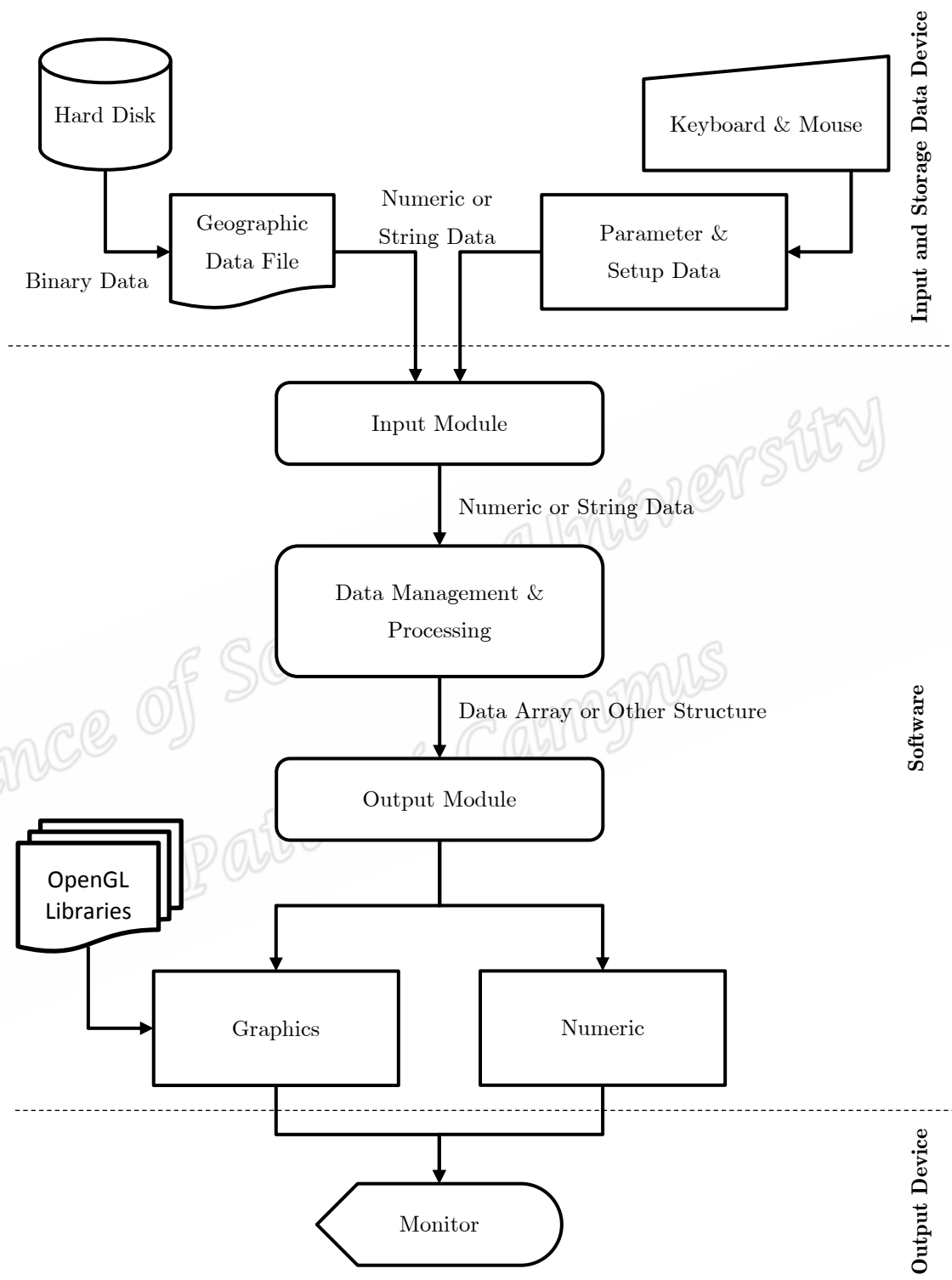


รูปที่ 4.1 โมดูลของโปรแกรม SoilFE 1.0

4.1 โมดูลประสานงานกับผู้ใช้

โมดูลประสานงานกับผู้ใช้เป็นส่วนการทำงานรับและแสดงผลข้อมูล ข้อมูลนำเข้า ได้แก่ ความสูงของลาดดิน สมบัติของดิน สมบัติการไหลของน้ำ และค่าพารามิเตอร์ของเกณฑ์การวิบัติ เป็นต้น ข้อมูลนำออก ได้แก่ ตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดิน ค่าเฮด การกระจาย ความเค้น ความเครียด และค่าวิบัติ เป็นต้น การแสดงผลข้อมูลสามารถแสดงผลได้ทั้งในรูปแบบเชิงตัวเลขและภาพเสมือนจริง ดังรูปที่ 4.2

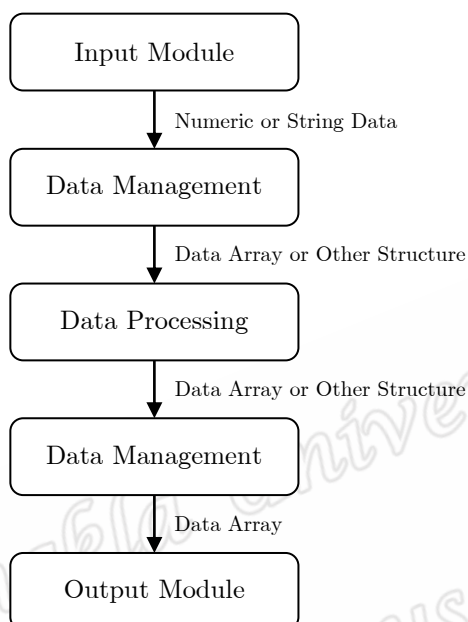
โมดูลประสานงานกับผู้ใช้ประกอบด้วยโมดูลย่อย 2 โมดูล ได้แก่ โมดูลรับข้อมูลเข้า (input module) และโมดูลนำข้อมูลออก (output module)



รูปที่ 4.2 โมดูลประสานงานกับผู้ใช้

4.2 โมดูลจัดการข้อมูล

โมดูลจัดการข้อมูลเป็นส่วนทำงานที่มีหน้าที่นำข้อมูลจากโมดูลรับข้อมูลเข้ามาจัดการรูปแบบโครงสร้างให้เหมาะสมกับการประมวลผลหรือการแสดงผล ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 โมดูลจัดการข้อมูล

ข้อมูลและโครงสร้างข้อมูลที่ใช้ในโปรแกรมมีดังนี้

4.2.1 แฟ้มข้อมูลความสูงของภูมิประเทศ (geographic data file)

แฟ้มข้อมูลความสูงของภูมิประเทศ เป็นแฟ้มข้อมูลที่จัดเก็บเป็นรูปแบบ Esri ASCII raster ดังนี้

- Header format

Ncols	xxx
Nrows	xxx
Xllcorner	xxx
Yllcorner	xxx
Cellsize	xxx
NODATA_value	xxx

ตารางที่ 4.1 รายละเอียดของส่วนหัวแฟ้มข้อมูลความสูงของภูมิประเทศ

Parameter	Description	Requirements
NCOLS	Number of cell columns	Integer greater than 0.
NROWS	Number of cell rows	Integer greater than 0.
XLLCORNER	X – coordinate of the origin by lower left corner of the cell	Match with y – coordinate type.
YLLCORNER	Y – coordinate of the origin by lower left corner of the cell	Match with x – coordinate type.
CELLSIZE	Cell size	Greater than 0.
NODATA_VALUE	The input values to be NoData in the output raster	Optional. Default is -9999.

(ที่มา: ArcGis [25])

- Data Format

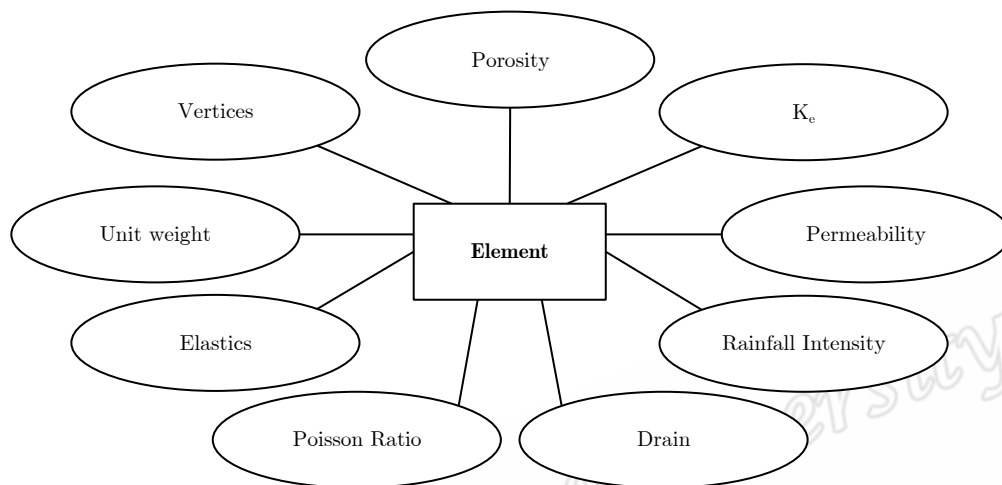
xxx	xxx	...	xxx	}	NROWS
xxx	xxx	...	xxx		
⋮	⋮	⋮	⋮		
xxx	xxx	...	xxx		
<div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center;"> <div style="border-top: 1px solid black; width: 100%;"></div> </div>					NCOLS

เมื่อ xxx แทนข้อมูลความสูงของภูมิประเทศที่ตำแหน่ง (x, y) ไต ๆ

การจัดเก็บข้อมูลความสูงของภูมิประเทศเพื่อนำไปใช้ในการประมวลผล โปรแกรม จะทำการจัดเก็บในรูปแบบอาร์เรย์ข้อมูลประเภทจำนวนจริงแบบ 2 มิติ

4.2.2 โครงสร้างข้อมูลเอลิเมนต์

เมื่อตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดินถูกสร้างขึ้น ข้อมูลแต่ละเอลิเมนต์จะถูกจัดเก็บในข้อมูลที่มีโครงสร้างดังนี้



รูปที่ 4.4 โครงสร้างข้อมูลเอลิเมนต์

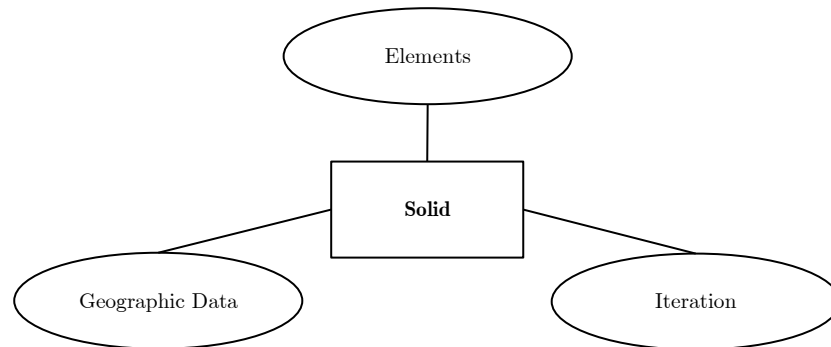
จากรูปที่ 4.4 Element แทนโครงสร้างข้อมูลเอลิเมนต์ ประกอบด้วยรายละเอียดตามตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 รายละเอียดโครงสร้างข้อมูลเอลิเมนต์

Attributes	Mean
vertices	ข้อมูลจุดยอด ได้แก่ เลขที่ และพิกัดของจุดยอด โดยแต่ละเอลิเมนต์จะประกอบด้วยจุดยอดจำนวน 4 จุด
unit weight	หน่วยน้ำหนักดิน
elastics	โมดูลัสของความยืดหยุ่น
Poisson ratio	อัตราส่วนปัวส์ซง
porosity	ความพรุนของดิน
K_c	โมดูลัสเชิงปริมาตรเทียบเท่าของไหล
permeability	สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดิน
rainfall intensity	ความเข้มฝน
drain	อัตราการไหลเข้าหรือออก

4.2.3 โครงสร้างข้อมูลของแข็ง

สำหรับตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดินจะถูกจัดเก็บในโครงสร้างข้อมูลดังนี้



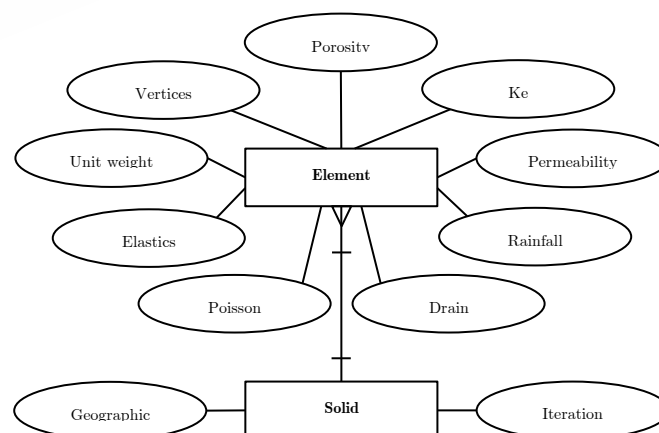
รูปที่ 4.5 โครงสร้างข้อมูลของแข็ง

จากรูปที่ 4.5 Solid แทนโครงสร้างข้อมูลของแข็งรายละเอียดตามตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 รายละเอียดโครงสร้างข้อมูลของแข็ง

Attributes	Mean
geographic	ข้อมูลความสูงของภูมิประเทศในรูปอาร์เรย์แบบ 2 มิติ
elements	ข้อมูลเอลิเมนต์
iteration	จำนวนรอบการแบ่งเอลิเมนต์

จากโครงสร้างข้อมูลที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 4.2.1 – 4.2.3 สามารถนำเสนอในรูปของระบบโครงสร้างข้อมูลสำหรับจัดเก็บข้อมูลตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดินได้ดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 ระบบโครงสร้างข้อมูลสำหรับจัดเก็บข้อมูลตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของลาดดิน

4.3 โมดูลประมวลผลข้อมูล

โมดูลประมวลผลข้อมูล ประกอบด้วยหน่วยการคำนวณต่อไปนี้

- พีชคณิตเชิงเส้น
- พหุนาม
- ไฟไนต์เอลิเมนต์
- IsoLine และ IsoSurface
- การแสดงผลภาพ 3 มิติ และภาคตัดลาดติน

ในบทต่อไปจะกล่าวถึงผลการวิจัยซึ่งเป็นผลจากการนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 มาใช้ในวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดินและประเมินการวิบัติของลาดดินตัวอย่าง โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้กล่าวถึงในบทที่ 3 และประมวลผลโดยซอฟต์แวร์ที่ได้ตามที่ได้ ออกแบบและประดิษฐ์ขึ้นดังรายละเอียดที่ได้กล่าวไว้ในบทนี้

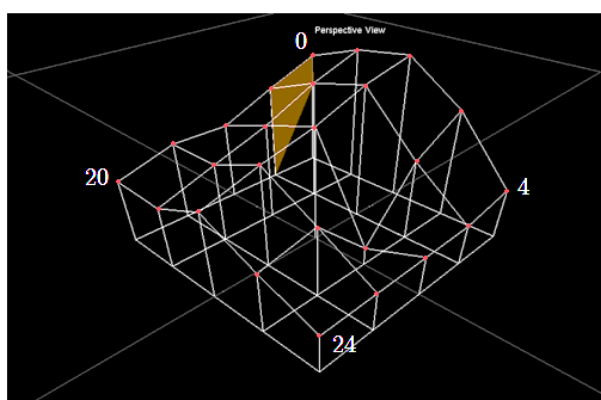
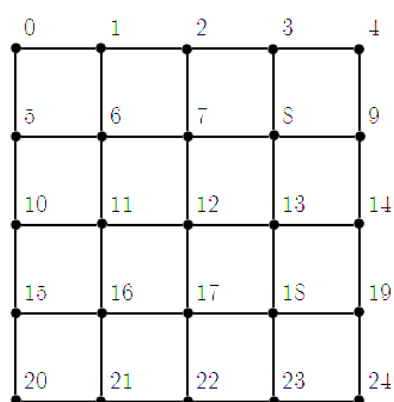
Prince of Songkla University
Pattani Campus

บทที่ 5

การจำลองเสถียรภาพลาดดิน

บทนี้จะนำเสนอการจำลองเสถียรภาพลาดดิน โดยใช้ข้อมูลความสูงของภูมิประเทศ จากตัวอย่างลาดดินและพื้นที่ในเขตอำเภอนาทวี จังหวัดสงขลา การจำลองเสถียรภาพลาดดินในพื้นที่แต่ละแห่งได้ดำเนินการและปรากฏผลเป็นดังนี้

5.1 การจำลองเสถียรภาพลาดดินจากข้อมูลพื้นที่ตัวอย่าง



รูปที่ 5.1 ตัวอย่างลาดดินในมุมมองด้านบน (รูปซ้าย) และมุมมองทัศนียภาพ (รูปขวา)

ตารางที่ 5.1 พิกัดของจุดยอดบนผิวดินตัวอย่าง

เลขที่จุด	x	y	z
0	0	218	0
1	0	251	90
2	0	265	180
3	0	202	270
4	0	95	360
5	90	183	0
6	90	220	90
7	90	244	180
8	90	150	270
9	90	76	360
10	180	144	0
11	180	178	90

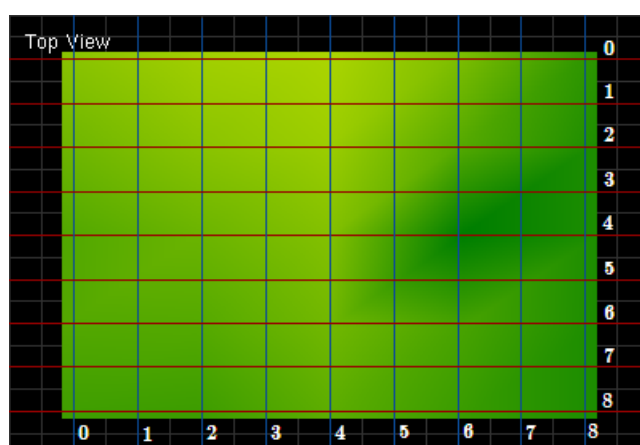
เลขที่จุด	x	y	z
13	180	34	270
14	180	75	360
15	270	146	0
16	270	147	90
17	270	187	180
18	270	132	270
19	270	74	360
20	360	118	0
21	360	115	90
22	360	158	180
23	360	112	270

ในการจำลองนี้จะใช้ข้อมูลจากตัวอย่างลาดดินที่มีความละเอียด 90×90 ตารางเมตร ซึ่งมีพื้นที่ 360×360 ตารางเมตร และแบ่งเป็นพื้นที่ 90×90 ตารางเมตร จำนวน 16 ส่วน ดังรูป 5.1 ผิวดินประกอบด้วยจุดยอดจำนวน 25 จุด มีพิกัดตั้งตารางที่ 5.1 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ของดินตามตารางที่ 5.2

ตารางที่ 5.2 ค่าพารามิเตอร์ของดินตัวอย่าง

Parameter	Value	Unit
modulus of elastic	10	MPa
Poisson ratio	0.30	-
dry unit weight	16	kN/m ³
porosity	0.35	-
bulk modulus of soil solid particle	56.7	GPa
bulk modulus of the pore fluid	2.16	GPa
permeability	54	mm/hr
rain fall intensity	20	mm/hr
drain	1	mm/hr
unit weight of water	9.81	kN/m ³

การจำลองจะแบ่งเป็น 3 ส่วน ได้แก่ ส่วนที่ 1 จำลองการไหลของน้ำใต้ดิน ส่วนที่ 2 จำลองการกระจัดของจุดยอดที่มีผลจากแรงภายนอก และส่วนที่ 3 ประเมินการวิบัติของลาดดิน

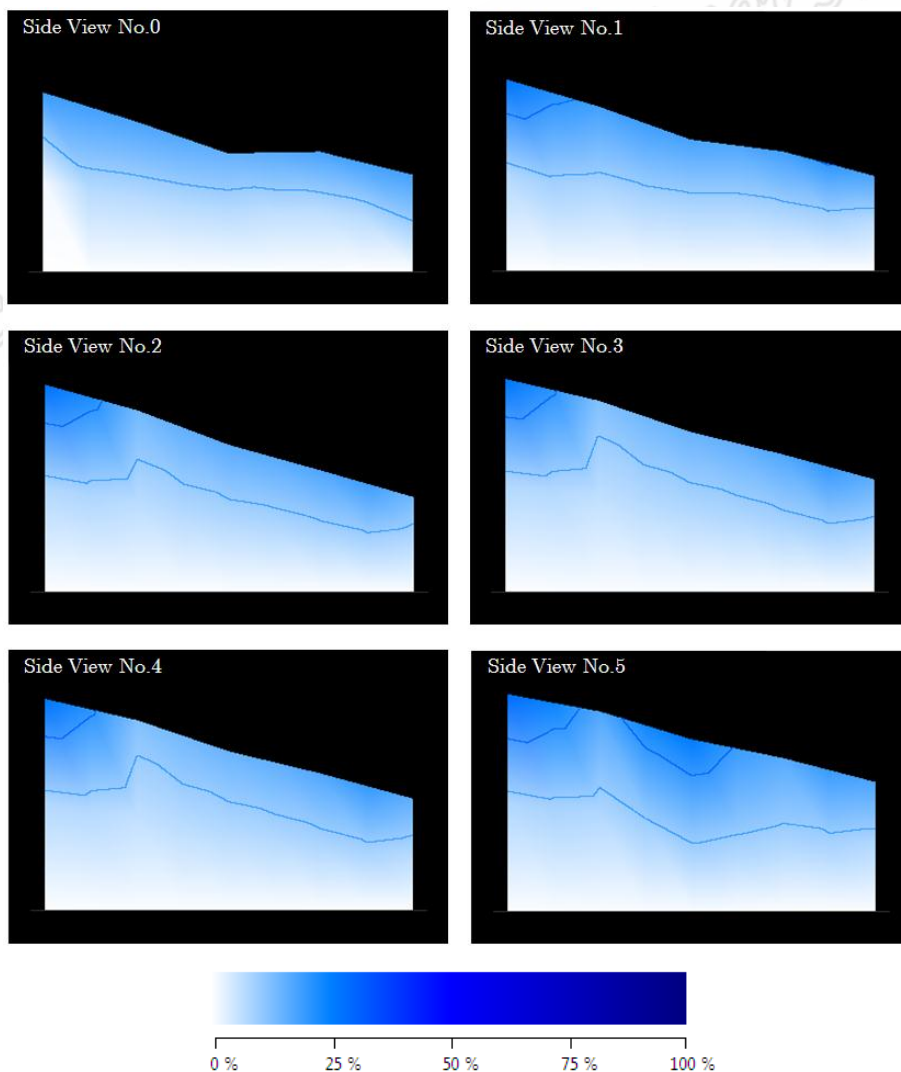


รูปที่ 5.2 ลาดดินและระนาบตัดจากมุมมองด้านบน

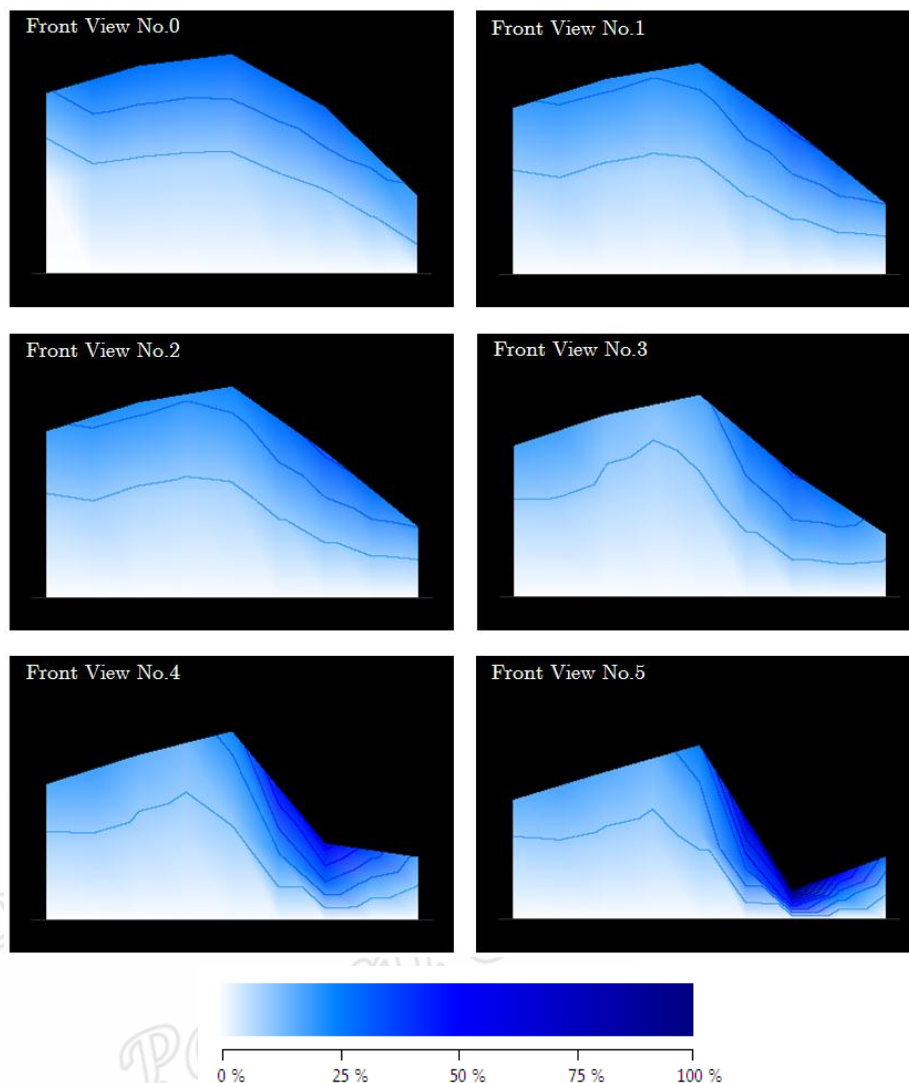
เพื่อความสะดวกต่อการนำเสนอผลการจำลอง ในส่วนนี้จะนำเสนอผลการคำนวณ ในลักษณะรูประนาบตัดลาดดิน จากรูปที่ 5.2 แสดงภาพของลาดดินจากมุมมองด้านบน เส้นสีแดงคือ ระนาบตัดลาดดินด้านหน้า และเส้นสีน้ำเงินคือระนาบตัดลาดดินด้านข้าง ระนาบตัดลาดดินทั้ง ด้านหน้าและด้านข้างจะมีหมายเลขกำกับไว้ตั้งแต่หมายเลข 0 ถึง 8

5.1.1 ผลการจำลองการไหลของน้ำใต้ดิน

ผลการจำลองการไหลของน้ำใต้ดินจะแสดงในรูปเส้นไอโซ (isoline) ของปริมาณ น้ำในดินเมื่อการไหลของน้ำใต้ดินเข้าสู่สภาวะคงตัว โดยรูปที่ 6.3 แสดงระนาบตัดลาดดินด้านข้าง ตั้งแต่ระนาบตัดหมายเลข 0 ถึง 5 และรูปที่ 6.4 แสดงระนาบตัดลาดดินด้านหน้าตั้งแต่ระนาบตัด หมายเลข 0 ถึง 5 ระนาบตัดแสดงบริเวณพื้นที่ที่สีน้ำเงินเข้มจะมีปริมาณน้ำในดินสูงกว่าพื้นที่สีอ่อน



รูปที่ 5.3 เส้นไอโซแสดงค่าปริมาณน้ำบนระนาบตัดด้านข้างของลาดดิน



รูปที่ 5.4 เส้นไอโซแสดงค่าปริมาณน้ำบนระนาบตัดด้านหน้าของลาดดิน

จากรูปที่ 5.3 และ 5.4 แสดงให้เห็นว่าดินในบริเวณใกล้ผิวดินซึ่งเป็นส่วนที่รับน้ำฝน จะมีปริมาณน้ำในดินสูงกว่าดินที่อยู่ลึกลงไป และดินบริเวณเชิงเขาที่มีความลาดชันสูงจะมีปริมาณน้ำในดินสูงกว่าดินบริเวณอื่น ๆ ทั้งนี้เพราะเนื่องจากการไหลของน้ำใต้ดินอยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงโน้มถ่วงโลกเมื่อน้ำฝนไหลซึมจากชั้นผิวดินลงสู่ใต้ดินบริเวณเชิงเขาที่มีความลาดชันสูงซึ่งมีลักษณะเป็นแอ่งกระทะจะรับน้ำจากพื้นที่ส่วนอื่น ๆ ไว้จึงทำให้มีปริมาณน้ำในดินสูงกว่าพื้นที่บริเวณอื่น ๆ ซึ่งผลการจำลองนี้ก็เป็นผลที่ควรจะเป็น ผลการคำนวณพบว่าปริมาณน้ำในดินมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 8.16×10^{-3} ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1.3429×10^{-2} ค่าปริมาณน้ำในดินสูงสุด 1.77×10^{-1} และต่ำสุดเท่ากับ 1.97×10^{-5} และเมื่อหาปริมาณน้ำในดินโดยกำหนดความชื้นฝนในช่วง 0 – 50 มิลลิเมตร/ชั่วโมง และอัตราการไหลออก 10 มิลลิเมตร/ชั่วโมง ปรากฏผลการคำนวณดังตารางที่ 6.5

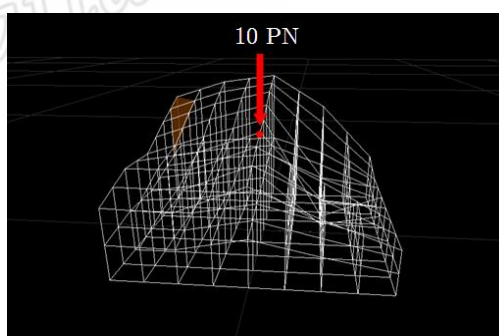
ตารางที่ 5.3 ผลการคำนวณปริมาณน้ำในดิน กำหนดความชื้นฝนในช่วง 0 – 50 มิลลิเมตร/ชั่วโมง และอัตราเร็วการไหลออก 10 มิลลิเมตร/ชั่วโมง

rain Fall Intensity	mean	S.D.	max	min
0	0	0	0	0
10	8.32×10^{-3}	1.31×10^{-2}	1.70×10^{-1}	9.83×10^{-6}
20	8.61×10^{-3}	1.3429×10^{-2}	1.77×10^{-1}	1.97×10^{-5}
30	8.90×10^{-3}	1.38×10^{-2}	1.85×10^{-1}	2.95×10^{-5}
40	9.19×10^{-3}	1.42×10^{-2}	1.93×10^{-1}	3.93×10^{-5}
50	9.48×10^{-3}	1.46×10^{-2}	2.00×10^{-1}	4.91×10^{-5}

ตารางที่ 5.3 แสดงให้เห็นว่าเมื่อกำหนดความชื้นฝนเพิ่มขึ้น ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสูงสุดและต่ำสุดของปริมาณน้ำในดินจะมีค่าเพิ่มขึ้น

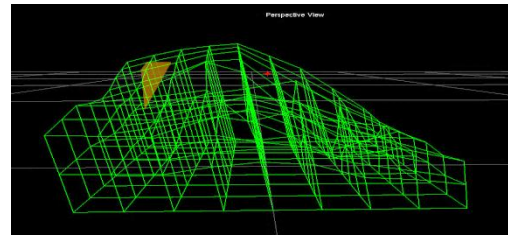
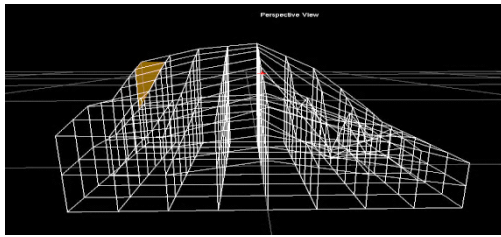
5.1.2 ผลการจำลองการกระจัดของจุดยอดที่มีผลจากแรงภายนอก

การจำลองการกระจัดของจุดยอดที่มีผลจากแรงกระทำภายนอกขนาด 10 PN โดยแรงกระทำบนลาดดินที่พิกัด (225, 198.5, 180) ดังรูปที่ 5.5 และกำหนดให้ทุกจุดบนฐานของลาดดินมีลักษณะเป็นฐานรองรับแบบข้อยึด

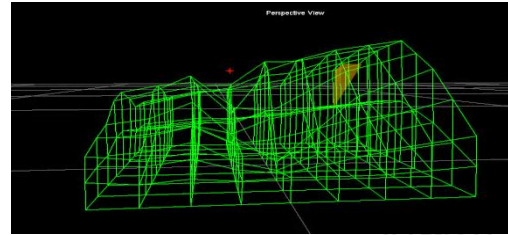
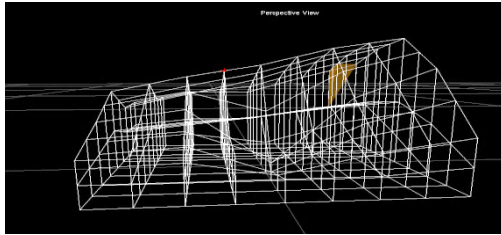


รูปที่ 5.5 ลาดดินตัวอย่างที่มีแรงภายนอกขนาด 10 PN

รูปที่ 5.6 แสดงผลการจำลองการกระจัดของจุดยอดพบว่าเมื่อลาดดินได้รับแรงกระทำภายนอก ณ บริเวณพิกัดที่กำหนด แรงกระทำจะกระจายไปยังโครงสร้างส่วนต่าง ๆ ของลาดดิน ความเครียดที่เกิดขึ้นภายในโครงสร้างดินทำให้เกิดการเปลี่ยนรูป นั่นคือดินบริเวณที่ได้รับแรงกระทำโดยตรงจะเกิดการยุบตัวตามทิศทางของแรงกระทำ และในขณะเดียวกันดินบางส่วนในบริเวณอื่นจะมีการยกตัวสูงขึ้นหรือลาดตัวออกไป



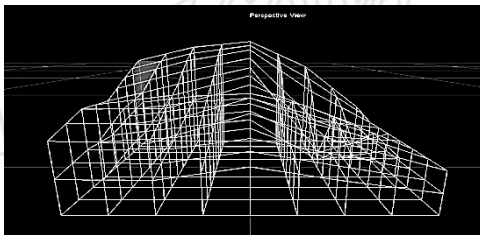
ลาดดินด้านหน้า



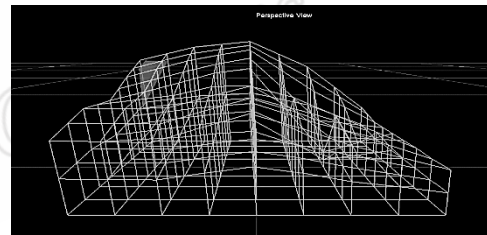
ลาดดินด้านข้าง

รูปที่ 5.6 เปรียบเทียบรูปทรงของลาดดินก่อนแรงกระทำ (รูปซ้าย) และหลังแรงกระทำ (รูปขวา)

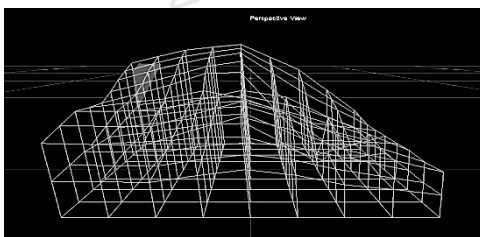
เมื่อจำลองการกระจัดของจุดยอดที่มีผลจากแรงกระทำภายนอกขนาด 0, 2, 4, 6, 8 และ 10 PN ปรากฏผลการทดสอบ ดังรูป 5.7



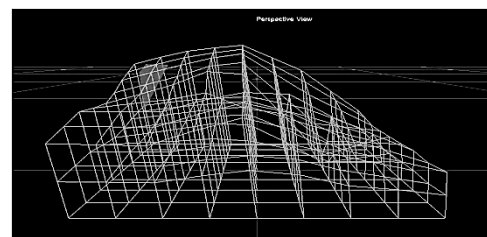
(0 PN)



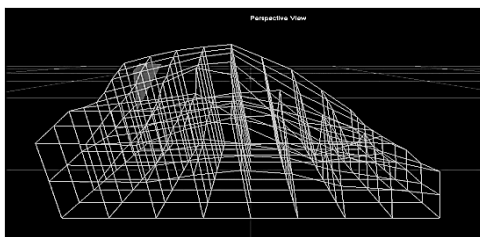
(2 PN)



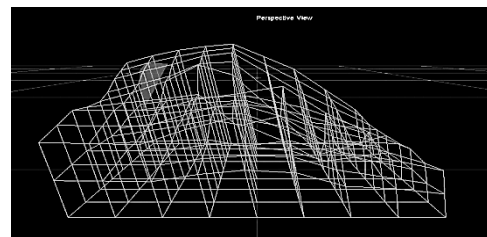
(4 PN)



(6 PN)



(8 PN)



(10 PN)

รูปที่ 5.7 การเปลี่ยนรูปของลาดดินเมื่อมีแรงภายนอกกระทำขนาด 0, 2, 4, 6, 8 และ 10 PN

จากรูปที่ 5.7 แสดงให้เห็นว่าเมื่อกำหนดแรงภายนอกกระทำต่อลาดดินเพิ่มขึ้น ความเค้นภายในโครงสร้างของดินที่สูงขึ้นทำให้ลาดดินมีการเปลี่ยนรูปจากเดิมมากขึ้น

5.1.3 ประเมินการวิบัติของลาดดิน

ส่วนนี้จะทำการประเมินการวิบัติของลาดดินที่ไม่มีแรงกระทำภายนอกโดยจะทำการทดสอบทั้งกรณีดินแห้งและดินเปียก สำหรับกรณีดินเปียกจะแบ่งการทดสอบเป็น 2 เงื่อนไข ได้แก่ เงื่อนไขที่ 1 คำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยเงื่อนไขแบบไม่ระบายน้ำ โดยทำการวิเคราะห์พฤติกรรมดินด้วยแบบจำลองวอน ไมซีส และเงื่อนไขที่ 2 การคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยเงื่อนไขแบบระบายน้ำ ต่อไปนี้จะนำเสนอผลการประเมินการวิบัติของลาดดินกรณีดินแห้ง ดังนี้

การประเมินการวิบัติของลาดดินกรณีดินแห้ง

จากหัวข้อ 5.1 ทราบว่าเมื่อกำหนดให้ความเค้นเฉือนเท่ากับ 0 เมตรต่ออนาที ทำให้ปริมาณน้ำในดินเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความเค้นรวมเท่ากับความเค้นประสิทธิผล ดังนั้นการคำนวณกรณีดินแห้งจึงใช้ความเค้นรวมในการวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนของดิน และวิเคราะห์พฤติกรรมของดินด้วยแบบจำลอง ได้แก่ แบบจำลองวอน ไมซีส, แบบจำลองดริคเคอร์-ปราเกอร์, แบบจำลองลาตี-ดั่งแคน, แบบจำลองมัสซีโอคา-นากาอิ และแบบจำลองโฮลส์บี เนื่องจากเป็นการคำนวณในกรณีดินแห้ง จึงไม่แบ่งกรณีการคำนวณตามเงื่อนไขการระบายน้ำ

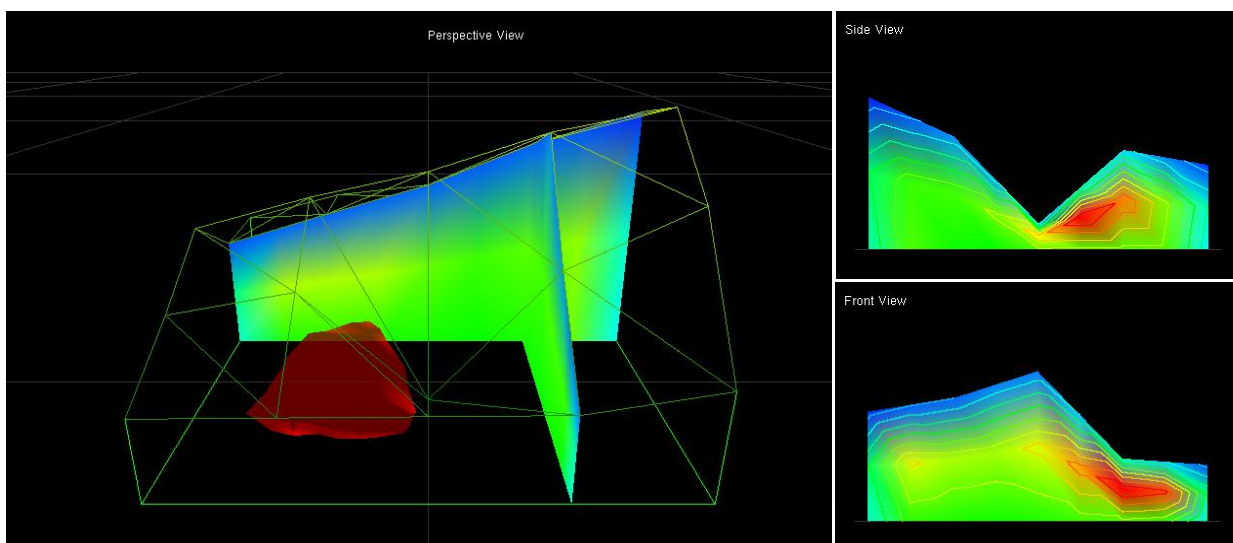
- การคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยแบบจำลองวอน ไมซีส

การคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลองวอน ไมซีส กำหนดพารามิเตอร์ ได้แก่ กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำมีค่าตามตารางที่ 5.4

ตารางที่ 5.4 พารามิเตอร์ของแบบจำลองวอน ไมซีส

parameter	value	unit
undrained shear strength	7×10^{-8}	-

ผลการคำนวณแสดงด้วยเส้นและพื้นผิวไอโซ โดยสีเส้นและพื้นผิวไอโซของลาดดิน ถูกกำหนดโดยฟังก์ชันความครากวอน ไมซีส เส้นและพื้นผิวไอโซสีแดงจะเป็นส่วนที่มีค่าฟังก์ชันความครากสูงเป็นบริเวณที่มีความเสี่ยงสูงต่อการวิบัติ รูปที่ 5.8 แสดงให้เห็นว่าดินบริเวณเชิงเนินที่มีความลาดชันสูงเป็นบริเวณที่มีค่าความครากสูงซึ่งมีความเสี่ยงสูงต่อการวิบัติ



รูปที่ 5.8 เส้นและพื้นผิวไอโซจากการทดสอบการคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลองวงวน ไมซีส

ค่าการวิบัติจากการคำนวณด้วยแบบจำลองวงวน ไมซีส มีค่าเฉลี่ย 8.40×10^{-6} ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 5.41×10^{-6} สัมประสิทธิ์การแปรผัน 6.44×10^{-1} ค่าสูงสุด 2.28×10^{-5} ค่าต่ำสุด 6.04×10^{-8} และดินบริเวณที่มีความเสี่ยงสูงต่อการวิบัติเป็นร้อยละ 3.70 ของปริมาตรดินทั้งหมด

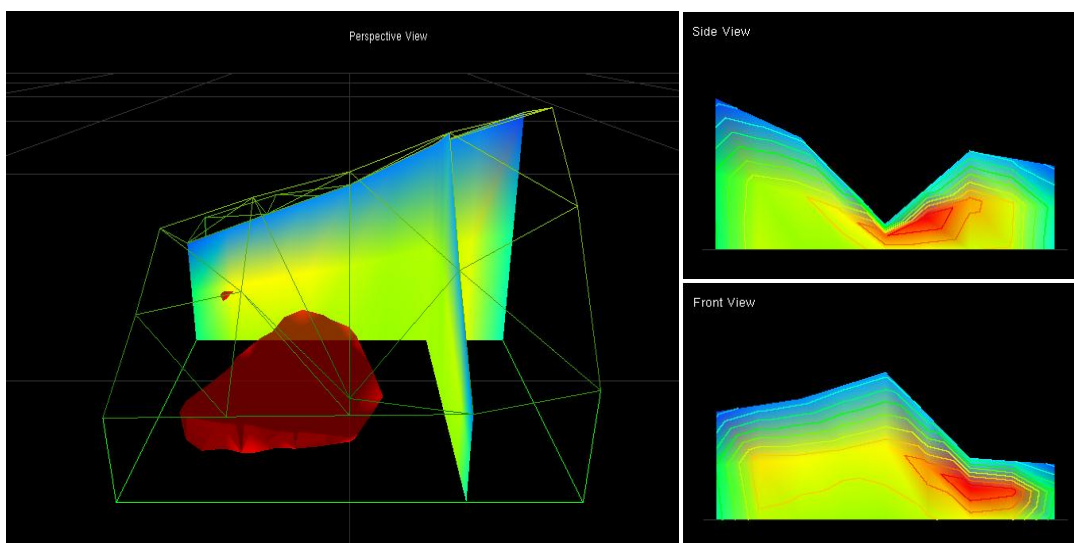
- การคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยแบบจำลองตรักเคอร์ – ปรากฏเกอร์

ทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยแบบจำลองตรักเคอร์ – ปรากฏเกอร์ กำหนดพารามิเตอร์ ได้แก่ แรงยึดเหนี่ยวของดิน, มุมเสียดทาน และกำหนดค่า M ในแบบจำลองจากการทดสอบแรงอัดสามแกน ดังตารางที่ 5.5

ตารางที่ 5.5 พารามิเตอร์ของแบบจำลองตรักเคอร์ – ปรากฏเกอร์

parameter	value	unit
cohesion intercept	0	-
angle of internal friction	30	degrees
triaxial test	compression	-

ผลการคำนวณแสดงด้วยเส้นและพื้นผิวไอโซ รูปที่ 5.9 พบว่าดินบริเวณที่รองรับลาดดินที่มีความชันสูงเป็นบริเวณที่มีความเสี่ยงสูงต่อการวิบัติเช่นเดียวกับแบบจำลองวงวน ไมซีส



รูปที่ 5.9 เส้นและพื้นผิวไอโซจากการคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลองตรรกเกอร์ – ปรากเกอร์

จากการคำนวณค่าการวิบัติด้วยแบบจำลองตรรกเกอร์ – ปรากเกอร์ พบว่ามีค่าเฉลี่ย 2.72×10^{-5} ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.67×10^{-5} สัมประสิทธิ์การแปรผัน 6.13×10^{-1} ค่าสูงสุด 6.31×10^{-5} ค่าต่ำสุด 5.62×10^{-7} และบริเวณที่เสี่ยงต่อการวิบัติสูงเป็นร้อยละ 9.87 ของปริมาตรดิน

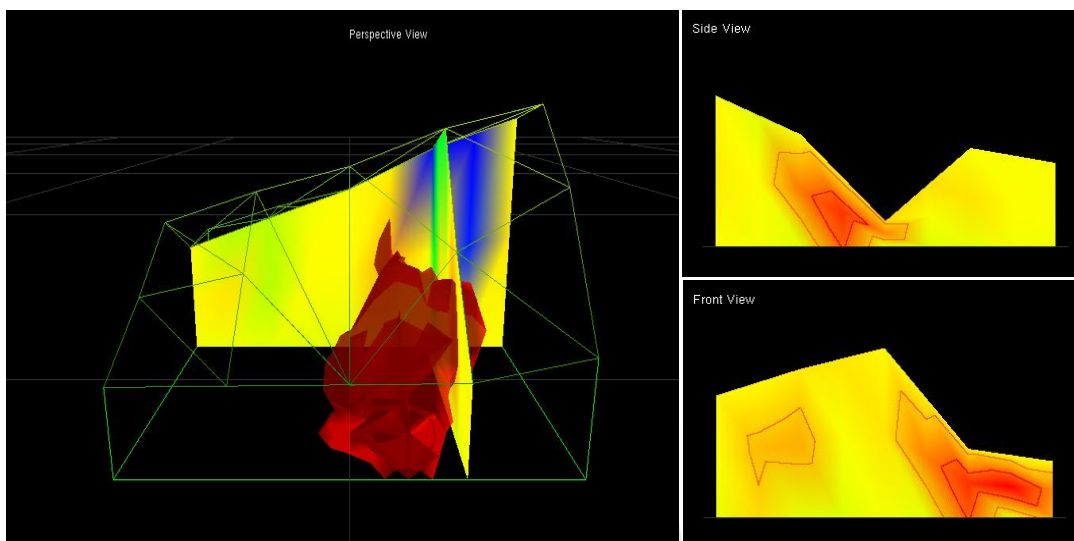
- การคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยแบบจำลองลาตี – ดั้งแคน

ทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยแบบจำลองลาตี – ดั้งแคน กำหนดพารามิเตอร์ ได้แก่ แรงยึดเหนี่ยวของดิน, มุมเสียดทาน กำหนดค่า M ในแบบจำลองจากการทดสอบแรงอัดสามแกน และแรงดันบรรยากาศ นอกจากนี้มีการกำหนดพารามิเตอร์ของวัสดุได้แก่ η และ m แสดงตามตารางที่ 5.6

ตารางที่ 5.6 พารามิเตอร์ของแบบจำลองลาตี – ดั้งแคน

parameter	value	unit
cohesion intercept	0	-
angle of internal friction	30	degrees
triaxial test	compression	-
atmospheric pressure	101.4	atm
η	41.7	-
m	0.5	-

ผลการคำนวณแสดงด้วยเส้นและพื้นผิวไอโซ รูปที่ 5.10 แสดงให้เห็นว่าดินบริเวณที่รองรับลาดดินที่มีความชันสูงเป็นบริเวณที่มีความเสี่ยงสูงต่อการวิบัติ



รูปที่ 5.10 เส้นและพื้นผิวไอโซจากการทดสอบการคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลองลาดี – ดั้งแคน

ค่าการวิบัติจากการคำนวณด้วยแบบจำลองลาดี-ดั้งแคน พบว่ามีค่าเฉลี่ย 4.37×10^{-5} ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3.02×10^{-4} สัมประสิทธิ์การแปรผัน 6.92 ค่าสูงสุด 6.97×10^{-4} ค่าต่ำสุด 2.12×10^{-3} และดินบริเวณที่มีความเสี่ยงสูงต่อการวิบัติเป็นร้อยละ 54.32 ของปริมาตรดิน

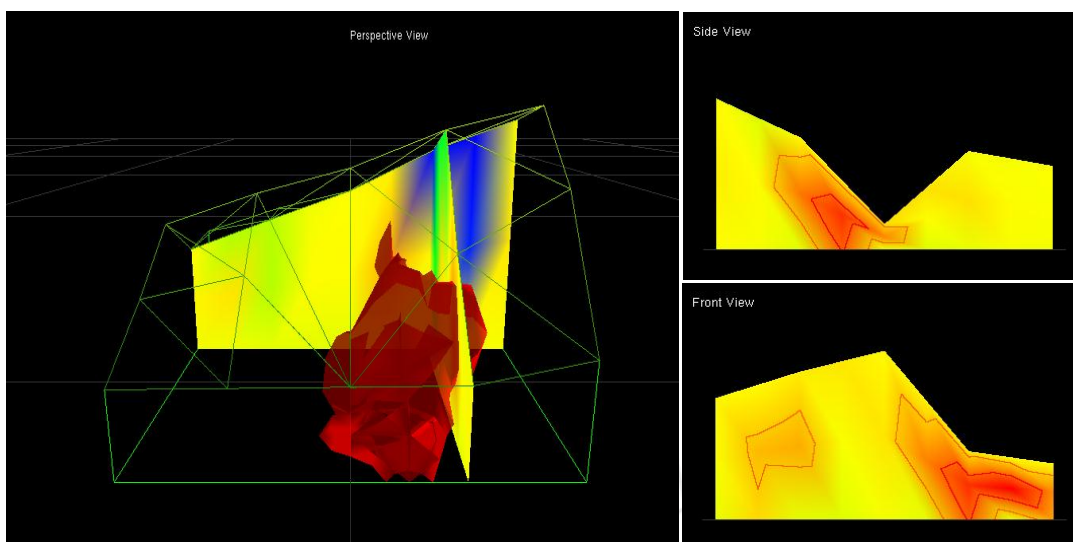
- การคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยแบบจำลองมัสซีโอกา – นากาอิ

ทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยแบบจำลองมัสซีโอกา – นากาอิ กำหนดพารามิเตอร์ ได้แก่ แรงยึดเหนี่ยวของดิน มุมเสียดทาน และกำหนดค่า M ในแบบจำลองจากการทดสอบแรงอัดสามแกน ดังตารางที่ 5.7

ตารางที่ 5.7 พารามิเตอร์ของแบบจำลองมัสซีโอกา – นากาอิ

parameter	value	unit
cohesion intercept	0	-
angle of internal friction	30	degrees
triaxial test	compression	-

ผลการคำนวณแสดงด้วยเส้นและพื้นผิวไอโซ รูปที่ 5.11 แสดงให้เห็นว่าดินบริเวณที่รองรับลาดดินที่มีความชันสูงเป็นบริเวณที่มีความเสี่ยงสูงต่อการวิบัติเช่นเดียวกับกรณีการทดสอบด้วยแบบจำลองลาตี – ดั้งแคน



รูปที่ 5.11 เส้นและพื้นผิวไอโซจากการคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลองมัสซีโอกา – นากาอิ

ค่าการวิบัติจากการคำนวณด้วยแบบจำลองมัสซีโอกา – นากาอิ พบว่ามีค่าเฉลี่ย 2.86×10^{-5} ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 2.25×10^{-4} สัมประสิทธิ์การแปรผัน 7.84 ค่าสูงสุด 5.23×10^{-4} ค่าต่ำสุด 1.57×10^{-3} และดินบริเวณที่มีความเสี่ยงสูงต่อการวิบัติเป็นร้อยละ 48.56 ของปริมาตรดิน

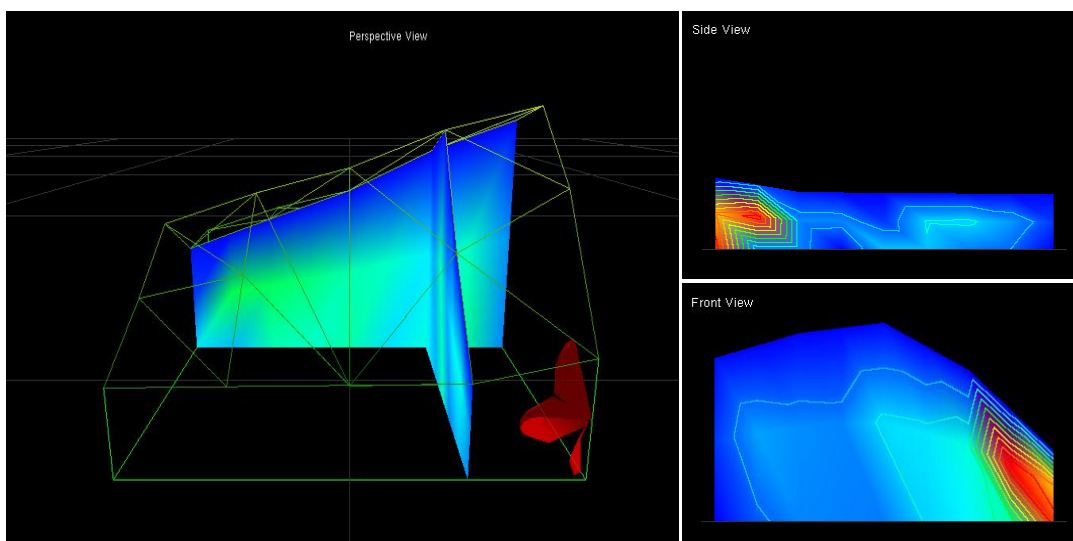
- การคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยแบบจำลองโฮลส์บี

ทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยแบบจำลองโฮลส์บี กำหนดพารามิเตอร์ ได้แก่ แรงยึดเหนี่ยวของดิน และมุมเสียดทาน แสดงตามตารางที่ 5.8

ตารางที่ 5.8 พารามิเตอร์ของแบบจำลองโฮลส์บี

parameter	value	unit
cohesion intercept	0	-
angle of internal friction	30	degrees

ผลการคำนวณแสดงด้วยเส้นและพื้นผิวไอโซ รูปที่ 5.12 แสดงให้เห็นว่าดินบริเวณที่รองรับลาดดินที่มีความชันสูงเป็นบริเวณที่มีความเสี่ยงสูงต่อการวิบัติ



รูปที่ 5.12 เส้นและพื้นผิวไอโซจากการทดสอบการคำนวณการวิบัติด้วยแบบจำลองโฮลส์ปี

ค่าการวิบัติจากการคำนวณด้วยแบบจำลองโฮลส์ปี พบว่ามีค่าเฉลี่ย 3.84×10^{-17} ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3.98×10^{-17} สัมประสิทธิ์การแปรผัน 1.04 ค่าสูงสุด 2.05×10^{-16} ค่าต่ำสุด 3.27×10^{-20} และดินบริเวณที่มีความเสี่ยงสูงต่อการวิบัติเป็นร้อยละ 2.88 ของปริมาตรดิน

ประเมินการวิบัติของลาดดินกรณีดินเปียก

การทดสอบกรณีดินเปียกจะแบ่งการทดสอบเป็น 2 เงื่อนไข ได้แก่ เงื่อนไขที่ 1 ทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยเงื่อนไขแบบไม่ระบายน้ำ โดยทำการวิเคราะห์พฤติกรรมดินด้วยแบบจำลองวอน ไมซีส์ และเงื่อนไขที่ 2 ทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินด้วยเงื่อนไขแบบระบายน้ำโดยทำการวิเคราะห์พฤติกรรมดินด้วยแบบจำลองมัสซึโอกา – นากาอิ การทดสอบกรณีดินเปียกทั้งสองกรณีจะมีการกำหนดค่าความชื้นผ่นเท่ากับ 0, 10, 20, 30, 40 และ 50 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง ได้ผลการทดสอบการคำนวณตามตารางที่ 5.9

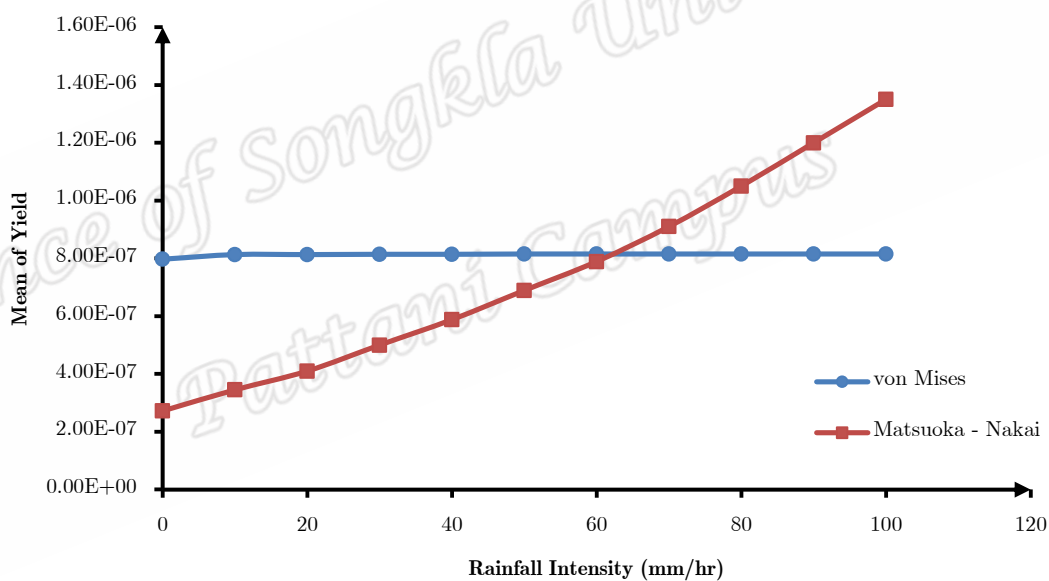
ตารางที่ 5.9 ผลการทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินเปียก

Rain Fall Intensity	Von Mises		Matsuoka – Nakai	
	Mean	S.D.	Mean	S.D.
0	7.97×10^{-7}	9.13×10^{-7}	2.72×10^{-7}	7.04×10^{-5}
10	8.13×10^{-7}	9.29×10^{-7}	4.31×10^{-7}	2.06×10^{-5}
20	8.13×10^{-7}	9.29×10^{-7}	4.39×10^{-7}	2.12×10^{-5}

ตารางที่ 5.9 (ต่อ) ผลการทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินเปียก

Rain Fall Intensity	Von Mises		Matsuoka – Nakai	
	Mean	S.D.	Mean	S.D.
30	8.14×10^{-7}	9.30×10^{-7}	5.00×10^{-7}	2.19×10^{-5}
40	8.14×10^{-7}	9.30×10^{-7}	5.88×10^{-7}	2.30×10^{-5}
50	8.15×10^{-7}	9.31×10^{-7}	7.25×10^{-7}	2.46×10^{-5}

จากตารางที่ 5.9 แสดงผลการทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินเปียกทั้งเงื่อนไขแบบไม่ระบายน้ำและระบายน้ำ พบว่าเมื่อความชื้นผืนเพิ่มขึ้นการวิบัติของลาดดินจะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อพิจารณากราฟแสดงการเปรียบเทียบแนวโน้มของผลการทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินเปียกระหว่างเงื่อนไขแบบไม่ระบายน้ำและระบายน้ำ ดังรูปที่ 5.13



รูปที่ 5.13 กราฟเปรียบเทียบผลการทดสอบการคำนวณการวิบัติของลาดดินเปียก

ระหว่างแบบจำลองนอน ไมซีส์และแบบจำลองมัสซึโอกา – นากาอิ

จากรูปที่ 5.13 พบว่าเมื่อความชื้นผืนเพิ่มขึ้นค่าการวิบัติของลาดดินกรณีเงื่อนไขแบบไม่ระบายน้ำจะมีค่าค่อนข้างคงตัว แต่สำหรับค่าการวิบัติของลาดดินกรณีเงื่อนไขแบบระบายน้ำจะมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งเป็นไปตามลักษณะพฤติกรรมกำลังของดิน กล่าวคือ กรณีเงื่อนไขแบบไม่ระบายน้ำความเค้นหลักจะไม่แปรเปลี่ยนไปตามค่าความเค้นเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นตามแรงดันน้ำสถิต แต่กรณีเงื่อนไขแบบระบายน้ำความเค้นหลักจะแปรเปลี่ยนไปตามค่าความเค้นเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นตามแรงดันน้ำสถิต

5.2 การจำลองเสถียรภาพลาดดินจากข้อมูลพื้นที่เขตอำเภอนาทวี จังหวัดสงขลา

ในส่วนนี้จะนำเสนอการจำลองและสร้างภาพเสมือนการไหลของน้ำใต้ดิน การเปลี่ยนรูปของลาดดินและการประเมินการวิบัติของลาดดินโดยใช้ข้อมูลจากพื้นที่เขตอำเภอนาทวี จังหวัดสงขลา ดังต่อไปนี้

5.2.1 ผลการจำลองการไหลของน้ำใต้ดิน

ตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์:

ข้อมูลสำหรับการจำลองในส่วนนี้เป็นข้อมูลที่ได้จากการสำรวจข้อมูลภูมิประเทศจากเรดาร์ดาวเทียม (SRTM) มีความละเอียดประมาณ 90×90 เมตร โดยเลือกข้อมูลจากพื้นที่ตั้งแต่ 6.683° ถึง 6.693° ละติจูดเหนือ และตั้งแต่ 100.745° ถึง 100.752° ลองจิจูดตะวันออก ซึ่งเป็นพื้นที่ภูเขาในเขตอำเภอนาทวี จังหวัดสงขลา มีพื้นที่ประมาณ 0.5184 ตารางกิโลเมตร ตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นจะถูกแบ่งเป็นพื้นที่ 8×8 ส่วน และกำหนดพารามิเตอร์ดินดังนี้

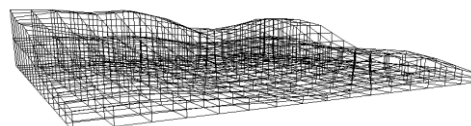
ตารางที่ 5.10 ค่าพารามิเตอร์ดินสำหรับการจำลองในเขตอำเภอนาทวี จังหวัดสงขลา

Parameter	Value	Unit
modulus of elastic	10	MPa
Poisson ratio	0.35	-
dry unit weight	16	kN/m ³
porosity	0.33	-
bulk modulus of soil solid particle	56.7	Gpa
bulk modulus of the pore fluid	2.16	Gpa
permeability	54	mm/hr
unit weight of water	9.81	kN/m ³

สำหรับตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการจำลองนี้แสดงในรูปที่ 5.14



(ก)



(ข)

รูปที่ 5.14 ตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการจำลองการไหลของน้ำใต้ดิน

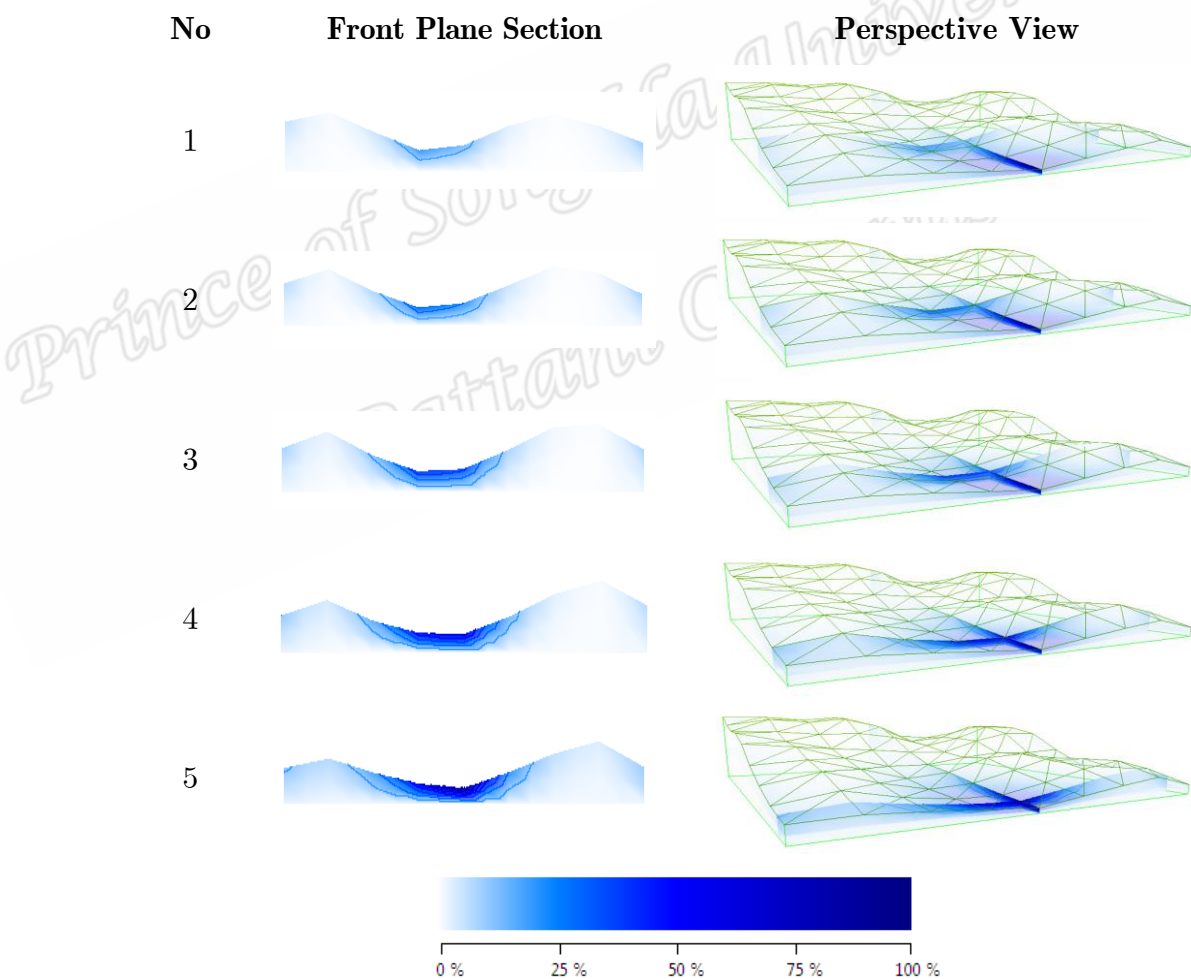
(ที่มา: Kunnapon [26])

การกำหนดเงื่อนไขค่าขอบ:

เนื่องจากตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ได้รับฝนที่บริเวณผิวดินและเมื่อน้ำไหลซึมลงสู่ใต้ดินน้ำจะไหลออกจากตัวแบบทางด้านฐานและผิวด้านข้างทุกด้านของเอลิเมนต์ดิน ดังนั้นที่บริเวณผิวดินจะกำหนดให้อัตราการไหลเข้าของน้ำเท่ากับความเร็วที่ความเข้มฝนเท่ากับ 10 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง และที่ฐานและผิวด้านข้างของเอลิเมนต์ดินจะกำหนดให้อัตราเร็วการไหลออกของน้ำเท่ากับ 5 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง ที่ผิวดินมีค่าเฮดระดับเท่ากับค่าความสูงของภูมิประเทศ

ผลการจำลอง:

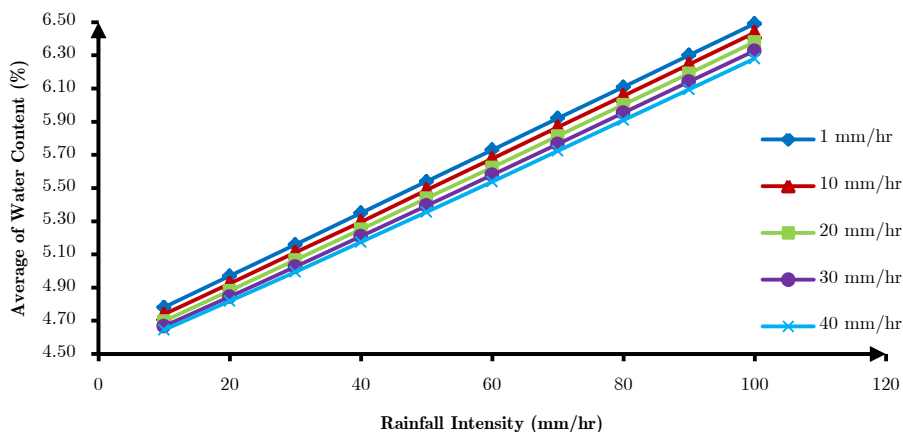
ผลการจำลองพบว่าสำหรับแต่ละระนาบตัดด้านหน้าของลาดดินนั้นจะแสดงให้เห็นว่าบริเวณพื้นที่ราบลุ่มจะมีปริมาณน้ำในดินสูงกว่าบริเวณอื่น ๆ เนื่องจากการไหลของน้ำใต้ดินนี้อยู่ภายใต้อิทธิพลแรงโน้มถ่วงโลก แสดงดังรูปที่ 5.15



รูปที่ 5.15 ผลการจำลองการไหลของน้ำใต้ดินบนระนาบตัดด้านหน้าของลาดดิน

(ที่มา: Kunnapon [26])

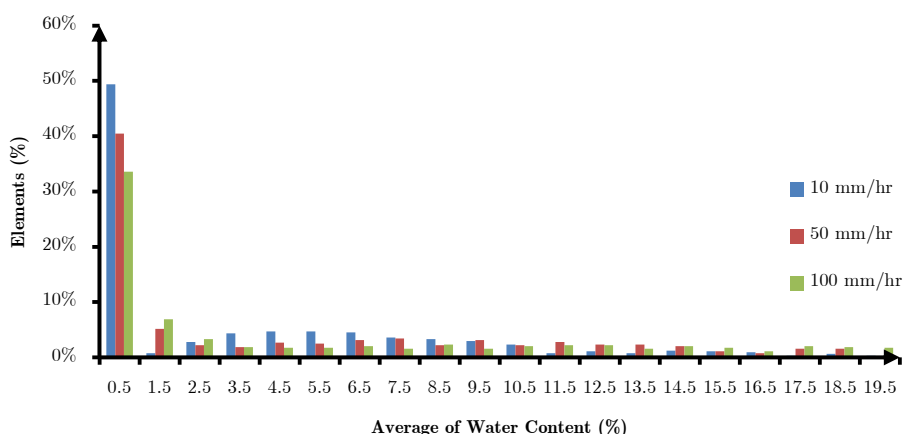
และเมื่อจำลองการไหลของน้ำใต้ดิน โดยกำหนดค่าความชื้นผืนตั้งแต่ 10 – 100 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง อัตราเร็วการไหลออกของน้ำ เป็น 1, 10, 20, 30 และ 40 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง แสดงดังรูปที่ 5.16



รูปที่ 5.16 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของปริมาณน้ำในดินกับความชื้นผืน

(ที่มา: Kunnapon [26])

จากรูปที่ 5.16 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของปริมาณน้ำในดินกับความชื้นผืนพบว่าบนกราฟแต่ละเส้นจะมีอัตราเร็วการไหลออกของน้ำเป็นค่าคงตัว จะได้ว่าค่าเฉลี่ยของปริมาณน้ำในดินจะแปรผันตามความชื้นผืน แต่ในทางกลับกันเมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างกราฟแต่ละเส้นที่ระดับความชื้นผืนเท่ากันพบว่าปริมาณน้ำในดินจะลดลงเมื่อกำหนดอัตราเร็วการไหลออกของน้ำมากขึ้น



รูปที่ 5.17 ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณน้ำในดินกับร้อยละของเอลิเมนต์

(ที่มา: Kunnapon [26])

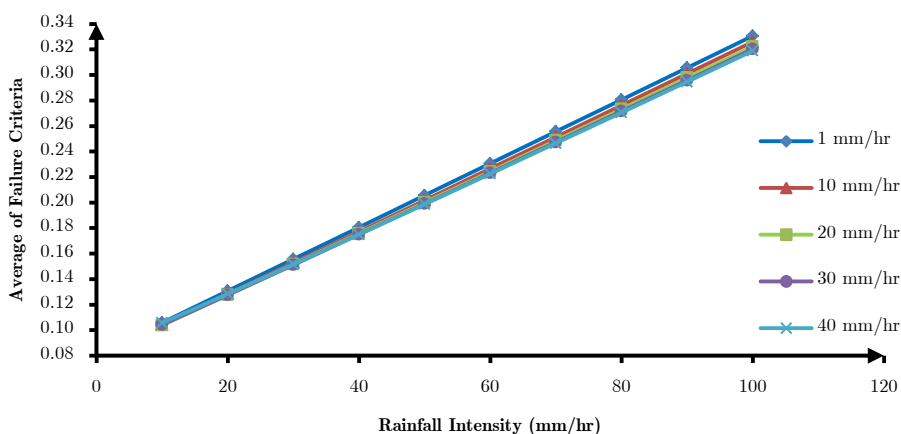
ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของปริมาณน้ำในดินกับร้อยละของเอลิเมนต์ดินจากรูปที่ 5.17 แสดงเอลิเมนต์ดินร้อยละ 52 มีค่าเฉลี่ยของปริมาณน้ำในดินน้อยกว่า 20% และเอลิเมนต์ส่วนใหญ่จะมีปริมาณน้ำในดินประมาณ 0.0 – 1.0 % เมื่อกำหนดความชื้นฝนเป็น 10, 50 และ 100 มิลลิเมตร/ชั่วโมง และอัตราเร็วการไหลออกของน้ำเป็น 1 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง อย่างไรก็ตามความสัมพันธ์นี้จะขึ้นอยู่กับลักษณะของภูมิประเทศและปริมาณน้ำในดิน

ต่อไปจะทำการประเมินเสถียรภาพลาดดินโดยใช้แบบจำลองของตรีกเกอร์ – ปรากเกอร์เป็นเกณฑ์การวิบัติลาดดิน โดยจะกำหนดค่าพารามิเตอร์ดังตารางที่ 5.11

ตารางที่ 5.11 พารามิเตอร์สำหรับเกณฑ์วิบัติลาดดินในเขตอำเภอนาหว้า จังหวัดสงขลา

parameter	value	unit
cohesion intercept	0	-
angle of internal friction	30	degrees
triaxial test	compression	-

รูปที่ 5.18 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของเกณฑ์วิบัติกับความชื้นฝนพบว่าค่าวิบัติจะแปรผันตามความชื้นฝนเช่นเดียวกับปริมาณน้ำในดินตามกราฟรูปที่ 5.16



รูปที่ 5.18 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของเกณฑ์วิบัติกับความชื้นฝน

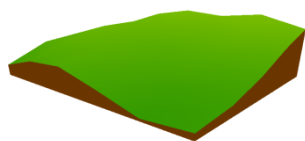
(ที่มา: Kunnapon [26])

5.2.2 การจำลองการเปลี่ยนรูป และความคราก

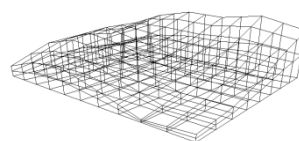
ในส่วนนี้จะทำการจำลองการเปลี่ยนรูป และการความครากของลาดดินซึ่งเป็นผลจากแรงกระทำภายนอกและปริมาณน้ำในดิน

ตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์:

ข้อมูลภูมิประเทศสำหรับสร้างตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ในส่วนนี้จะเลือกพื้นที่ส่วนหนึ่งมาจากการจำลองในหัวข้อ 5.2.1 เป็นพื้นที่ตั้งแต่ 6.685° ถึง 6.689° ละติจูดเหนือ และตั้งแต่ 100.745° ถึง 100.748° ลองจิจูดตะวันออก มีพื้นที่ประมาณ 0.1296 ตารางกิโลเมตร และแบ่งตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นพื้นที่ 4×4 ส่วนดังรูปที่ 5.19 และกำหนดพารามิเตอร์ดังตารางที่ 5.12



(ก)



(ข)

รูปที่ 5.19 ตัวแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการจำลองการเปลี่ยนรูปและความคราก

(ที่มา: Kunnapon [26])

ตารางที่ 5.12 พารามิเตอร์สำหรับการจำลองการเปลี่ยนรูปและความคราก

parameter	value	unit
cohesion intercept	0	-
angle of internal friction	30	degrees
triaxial test	compression	-

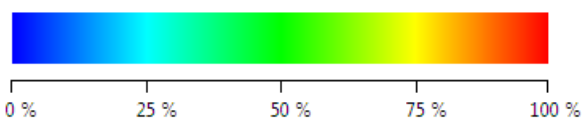
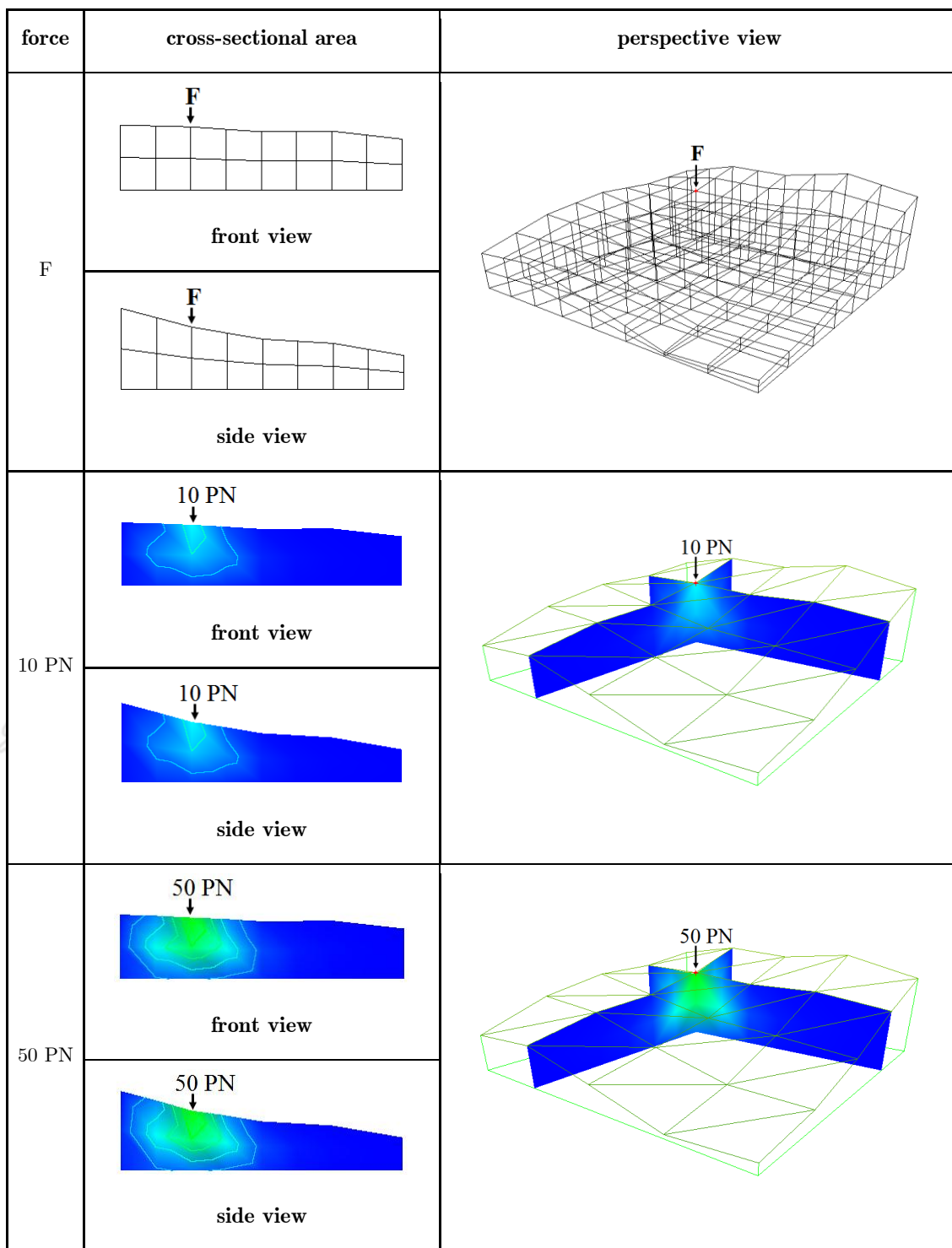
การกำหนดเงื่อนไขค่าขอบ:

สมมติให้จุดยอดทุกจุดบนผิวด้านได้แก่ หน้า หลัง ซ้ายและขวาของตัวแบบมีฐานรองรับประเภทลื่นและสำหรับฐานของตัวแบบมีฐานรองรับประเภทข้อยึด

ผลการจำลอง:

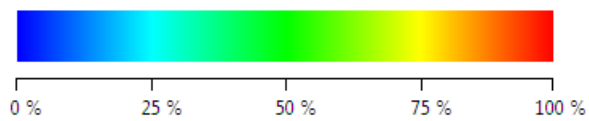
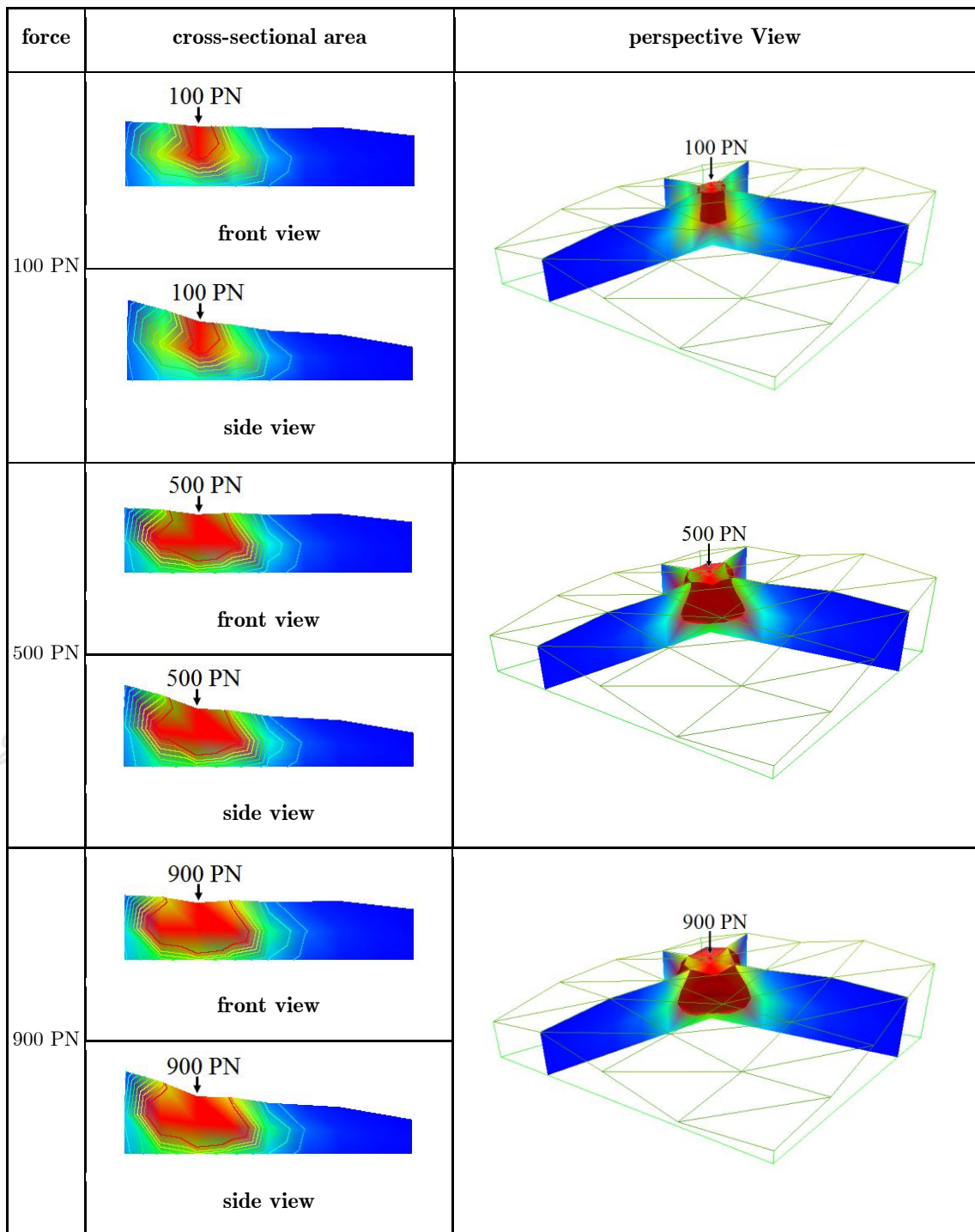
ผลการจำลองจะแสดงให้เห็นว่าถ้ามีแรงภายนอกที่มีขนาด 10, 50, 100, 500 และ 900 PN กด (compress) ลงบนจุดสีแดงบนลาดดินแล้วจะทำให้ลาดดินเปลี่ยนรูป บริเวณที่เป็นพื้นที่สีแดงที่แสดงในแต่ละรูปตามตารางที่ 5.13 หมายถึงพื้นที่ที่มีความเค้นสูงกว่าบริเวณอื่นอันเนื่องมาจากแรงภายนอกมากกระทำส่งผลให้บริเวณดังกล่าวมีความครากสูงและมีความเสี่ยงที่จะเกิดการวิบัติมากที่สุด และเมื่อพิจารณาแนวโน้มของการขยายพื้นที่เสี่ยงก็พบว่าเมื่อแรงภายนอกที่กระทำมีขนาดเพิ่มมากขึ้นพื้นที่ที่เสี่ยงต่อการวิบัติก็จะขยายตัวเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน

ตารางที่ 5.13 เปรียบเทียบการเปลี่ยนรูปและความครากของลาดดินที่เป็นผลจากแรงภายนอก



(ที่มา: Kunnapon [26])

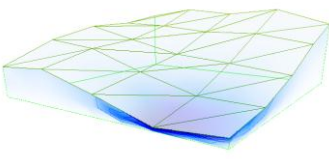
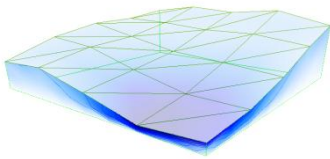
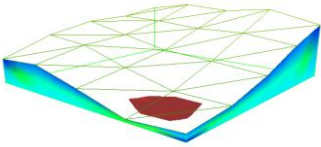
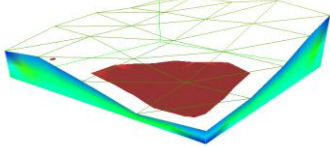
ตารางที่ 5.13 เปรียบเทียบการเปลี่ยนรูปและความครากของลาดดินที่เป็นผลจากแรงภายนอก (ต่อ)



(ที่มา: Kunnapon [26])

ในส่วนท้ายนี้จะทำการจำลองเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณน้ำในดินกับค่าความครากโดยใช้แบบจำลองตรังเคอร์ – ปรากเกอร์ สำหรับกรณีการวิเคราะห์ปริมาณน้ำในดินพื้นที่สีน้ำเงินเข้มคือบริเวณที่มีปริมาณน้ำในดินสูง และสำหรับกรณีการคำนวณค่าความครากพื้นที่สีแดงคือบริเวณที่มีค่าความครากสูง ปรากฏผลตามตารางที่ 5.14

ตารางที่ 5.14 ผลการคำนวณค่าความครากด้วยแบบจำลองตรังเคอร์ – ปรากเกอร์

Case	(i)	(ii)
Water Content		
Yield		

(ที่มา: Kunnapon [26])

จากตารางที่ 5.14 แสดงผลการจำลองซึ่งจะแบ่งเป็น 2 กรณีประกอบด้วยกรณี (i) กำหนดความชื้นฝน 10 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง และกรณี (ii) กำหนดความชื้นฝน 50 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง โดยทั้งสองกรณีจะกำหนดอัตราเร็วการไหลออกเป็น 5 มิลลิเมตรต่อชั่วโมง กรณีที่ (i) พบว่าปริมาณน้ำเฉลี่ยเป็น 5.95×10^{-2} และค่าเฉลี่ยของความครากเป็น 4.43×10^{-3} และกรณีที่ (ii) พบว่าปริมาณน้ำเฉลี่ยเป็น 1.66×10^{-1} และค่าเฉลี่ยของความครากเป็น 5.15×10^{-3} จะเห็นได้ว่ากรณี (ii) ลาดดินได้รับฝนด้วยความชื้นสูงกว่า (i) ซึ่งหมายถึงกรณีที่ (ii) จะมีปริมาณน้ำในดินเฉลี่ยและความครากสูงกว่า ดังนั้นกรณี (ii) จึงมีความเสี่ยงต่อการวิบัติสูงกว่า (i)

บทที่ 6

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

6.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ตัวแบบการไหลของน้ำใต้ดินในสถานะคงตัว โดยผลการคำนวณจากหัวข้อ 5.1.1 และ 5.2.1 แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองสามารถแสดงการกระจายเขต ทิศทางการไหลของน้ำใต้ดิน และปริมาณน้ำในดินได้ดี แต่อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดินด้วยตัวแบบนี้ยังคงมีข้อจำกัดเนื่องจากการวัดอัตราการไหลของน้ำออกจากลาดดินในทางปฏิบัติทำได้ยาก จึงต้องอาศัยค่าประมาณที่เหมาะสมจะทำให้ผลการวิเคราะห์มีความแม่นยำมากขึ้น

ตัวแบบกำลังรับแรงเฉือนในดิน โดยผลการคำนวณจากหัวข้อ 5.1.2 และ 5.2.2 แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองสามารถแสดงการเปลี่ยนรูปของลาดดินได้ตามแรงกระทำ รวมถึงแสดงการกระจายความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในลาดดินได้ดี แต่ทั้งนี้ความแม่นยำของการวิเคราะห์ยังต้องพิจารณาปัจจัยอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ความแม่นยำในการวัดค่าพารามิเตอร์ของดิน การกำหนดฐานรองรับที่สอดคล้องกับสภาพของปัญหาจริง โหลดที่กระทำบนลาดดิน เป็นต้น

6.2 การวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดิน และการวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนในดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์ปัญหาในปริภูมิ 3 มิติ จึงใช้เอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าซึ่งสามารถประกอบเป็นแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีรูปทรงใกล้เคียงกับลักษณะภูมิประเทศจริง แต่อย่างไรก็ตามความคลาดเคลื่อนในการคำนวณยังคงขึ้นอยู่กับข้อกำหนดความละเอียดหรือจำนวนของเอลิเมนต์ในแบบจำลอง และถึงแม้ว่าในแบบจำลองจะใช้เอลิเมนต์จำนวนมากขึ้นซึ่งนอกจากจะต้องใช้ทรัพยากรของระบบเป็นอย่างมากแล้ว ความคลาดเคลื่อนในการคำนวณยังคงเกิดขึ้นอันเนื่องมาจากการปัดเศษที่เกิดขึ้นในกระบวนการทำซ้ำที่มีรอบการทำซ้ำอย่างมหาศาล

นอกจากนี้ในการวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนในดิน ยังคงมีข้อจำกัดจากลักษณะของเอลิเมนต์ที่ใช้รูปทรงสี่หน้าและฟังก์ชันเชิงเส้นสามตัวแปรที่สามารถอธิบายลักษณะการเปลี่ยนรูปของลาดดินที่เกิดจากแรงปกติมากกว่าเท่านั้น แต่ไม่สามารถอธิบายลักษณะการเปลี่ยนรูปที่เกิดจากโมเมนต์ได้

6.3 การออกแบบและประดิษฐ์ซอฟต์แวร์

เนื่องจากการแสดงผลลัพธ์ของการคำนวณสามารถแสดงผลในรูปแบบ 3 มิติ จึงทำให้ผู้ใช้สะดวกต่อการพิจารณาถึงบริเวณที่มีความเสี่ยงต่อภัยพิบัติดินถล่ม ซอฟต์แวร์ได้รวมโมดูลของระบบการวิเคราะห์การไหลของน้ำใต้ดินและระบบวิเคราะห์กำลังรับแรงเฉือนในดินซึ่งทำให้สะดวกต่อ

การพิจารณากำลังรับแรงเฉือนที่มีผลจากการซึมน้ำในดิน รวมถึงผู้ใช้สามารถกำหนดปัจจัยต่าง ๆ ให้สอดคล้องกับปัญหาจริงได้ ได้แก่ ความชื้นผืน ลักษณะดิน ลักษณะของฐานรองรับ เงื่อนไขการระบายน้ำ และเกณฑ์ในการวิเคราะห์ที่เหมาะสม เป็นต้น ซอฟต์แวร์ได้ถูกออกแบบมาในรูปแบบกราฟิกที่สะดวกต่อการนำไปใช้วิเคราะห์ความเสี่ยงพื้นที่อื่น ๆ ได้ แต่อย่างไรก็ตามซอฟต์แวร์นี้ยังคงมีข้อจำกัดอันเนื่องจากการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 6.2 การพัฒนาให้การประมวลผลมีความรวดเร็วและแม่นยำขึ้นเป็นสิ่งสำคัญ การคำนวณเชิงขนานจึงเป็นแนวทางหนึ่งในการแก้ปัญหาที่ทำให้ซอฟต์แวร์นี้จะได้รับการพัฒนาต่อยอดต่อไป

วิทยานิพนธ์นี้เป็นการบูรณาการของการคำนวณเชิงวิทยาศาสตร์ คอมพิวเตอร์ ภูมิศาสตร์ ภูมิศาสตร์สารสนเทศเพื่อประโยชน์ต่อการเตือนภัยพิบัติดินถล่มและการจัดการทรัพยากรที่ดิน

Prince of Songkla University
Pattani Campus

รายการอ้างอิง

- [1] กวี ไกรระวี. “แบบจำลองการคาดการณ์จุดวิกฤตของการขาดเสถียรภาพลาดดินเป็นผลให้เกิดดินถล่ม” *วารสารอนุรักษ์ดินและน้ำ*, ปีที่ 25, ฉบับที่ 3, หน้า 36 – 45, สิงหาคม 2552.
- [2] เดช พุทธเจริญทอง. *การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์*. กรุงเทพฯ: พิมพ์ดี, 2541.
- [3] นิตยา หวังวงศ์โรจน์. *อุทกวิทยา*. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, 2551.
- [4] รัฐธรรม อีสโรพาร. *คู่มือการใช้โปรแกรม KUslope version 2.0*. กรุงเทพฯ: ศูนย์วิจัยและพัฒนาวิศวกรรม ปฐพีและฐานราก, 2550.
- [5] รัฐธรรม อีสโรพาร และวรากร ไม้เรียง. “การจำลองลักษณะรากพืชเพื่อการวิเคราะห์เสถียรภาพลาดดิน” ในเอกสารประกอบการประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 8, 2545, หน้า 178 – 180.
- [6] วิศิษฐ์ อยู่ยงวัฒนา. *ปฐพีกลศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 3, กรุงเทพฯ: โพรเพซ, 2554.
- [7] สุขเชษฐ์ ลิขิตเลอสรวง. *วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรมธรณีเทคนิค*. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2550.
- [8] สุขเชษฐ์ ลิขิตเลอสรวง. *ปฐพีกลศาสตร์พลาสติกซีติและทฤษฎีสถานะวิกฤต*. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2553.
- [9] C. T.F. Ross. *Finite Element Methods in Engineering Science*. Wiltshire: Ellis Horwood, 1935.
- [10] C.J. F. Chung and A. G. Fabbri. “Probabilistic Prediction Models for Landslide Hazard Mapping.” *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, vol. 65, pp. 1389 – 1399, December 1999.

- [11] C.P. Wroth and G.T. Houlsby. "Soil mechanics – Property characterization and analysis procedures." *Proceedings of the Eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. San Francisco, 1985.*
- [12] D.C. Drucker. "A more fundamental approach to plastic stress – strain relations." *ASME, Proceedings of the 1st U.S. National Congregation of Applied Mechanics, 1951*, pp. 487 – 491.
- [13] D.M. Potts and L. Zdravković. *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Theory*. New York: Thomas Telford, 1999.
- [14] G.T. Houlsby. "A general failure criterion for frictional and cohesive materials." *Soils and Foundations*, vol. 26, pp. 97 – 101, 1986.
- [15] Th.W.J. van Asch, J.-P. Malet, L.P.H. van Beek and D. Amitrano. "Techniques, Advances, Problems and Issues in Numerical Modeling of Landslide Hazard." Internet: www.arxiv.org/abs/0709.2642, April 6, 2012 [September 9, 2014].
- [16] L. Cascini, S. Cuomo, M. Pastor, G. Sorbino and L. Piciullo. "Modeling of Propagation and Entrainment Phenomena for Landslides of The Flow Type: The May 1998 case study." *Landslides and Engineered Slopes: Protecting Society through Improved Understanding – Eberhardt et al. (eds)*, 2012, pp. 1723 – 1729.
- [17] H. Matsuoka and T. Nakai. "Stress – deformation and strength characteristics of soil under three Different principal stresses." *Proceedings of JSCE*, No.232, 1974, pp. 59 – 70.

- [18] H. Popa and L. Batali. “Using Finite Element Method in geotechnical design. Soil constitutive laws and calibration of the parameters: Retaining wall case study.” *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, vol. 5, pp. 177 – 186, July 2010.
- [19] K. Georgiadis. “Development, implementation and application of partially saturated soil models in Finite element analysis.” Ph.D. Thesis, University of London, Faculty of Engineering, London, 2003.
- [20] K. Pareta and U. Pareta. “Landslide Modeling and Susceptibility Mapping of Giri River Watershed, Himachal Pradesh (India).” *International Journal of Science and Technology*, vol. 2, pp. 91 – 104, February, 2012.
- [21] L. Xinpo, W. Chenghua and X. Jun. “Sufficient Stability Analysis of Unsaturated Loess Slopes Subjected to Rainfall Infiltration Effects.” *Wuhan University Journal of Natural Science*, vol. 11, pp. 825 – 828, 2006.
- [22] P.V. Lade and J.M. Duncan. “Elasto – plastic stress – strain theory for cohesionless soil.” *Proceedings ASCE, Journal Soil Mechanics and Foundation Division*, No.99, 1975, pp. 421 – 427.
- [23] R. Hassani, I. R. Ionescu and T. Lachand – Robert. “Optimization techniques in landslides modeling.” *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, vol. 32, pp. 158 – 169, October 2004.
- [24] ThairathOnline. “ดินถล่ม” Internet: www.thairath.co.th/tags/ดินถล่ม, November 8, 2014 [December 12, 2014].

- [25] ArcGis Resources, URL:http://resources.esri.com/help/9.3/arcgisdesktop/com/gp_toolref/spatial_analyst_tools/esri_ascii_raster_format.htm [May 28, 2016].
- [26] K. Thumhiwaid, S. Chuai-Aree and A. Phon-On. “Numerical Algorithm for Simulation and Visualization of Landslide by Water Content and Slope Factors” *Proceedings of the 20th International Annual Symposium on Computational Science and Engineer*, 2016, pp. 31 – 44.

Prince of Songkla University
Pattani Campus

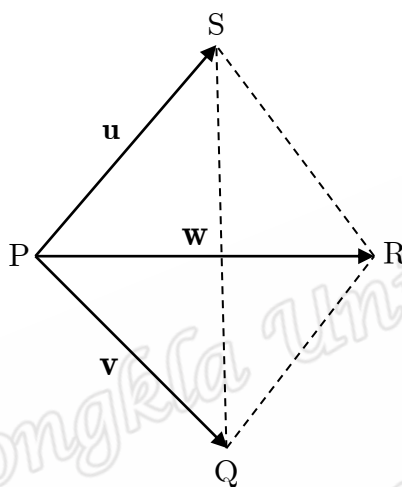
Prince of Songkla University
Pattani Campus
ภาคผนวก ก

ภาคผนวก ก. ปริมาตรของทรงสี่หน้า และความไม่เป็นเอกฐานของเมทริกซ์ \mathbf{X}

ทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ \mathbf{u} , \mathbf{v} และ \mathbf{w} เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3

ปริมาตรของทรงสี่หน้าที่สร้างจาก \mathbf{u} , \mathbf{v} และ \mathbf{w} เท่ากับ $\frac{1}{6} |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$

บทพิสูจน์



รูปที่ 1 รูปทรงสี่หน้าที่สร้างจากเวกเตอร์ \mathbf{u} , \mathbf{v} และ \mathbf{w}

เนื่องจาก ปริมาตรของทรงสี่หน้า $= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$

$$\text{พื้นที่ฐาน} = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$$

$$\text{ความสูง} = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}$$

$$\text{ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่หน้า} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \right) \left(\frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} \right) = \frac{1}{6} |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

(ก.1) ถ้ารูปทรงสี่หน้าตามรูปที่ 1 มีจุดยอด $P(x_P, y_P, z_P)$, $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, $R(x_R, y_R, z_R)$

และ $S(x_S, y_S, z_S)$ จะได้ ปริมาตรของทรงสี่หน้า เท่ากับ $\frac{1}{6} |\det \mathbf{X}|$ โดยที่

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)$

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (x_R - x_P, y_R - y_P, z_R - z_P)$$

และ $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z) = (x_S - x_P, y_S - y_P, z_S - z_P)$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของทรงสี่หน้า} &= \frac{1}{6} |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \\ &= \frac{1}{6} \left| (u_x, u_y, u_z) \cdot \left(\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \right) \right| \\ &= \frac{1}{6} \left| u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ x_R - x_P & y_R - y_P & z_R - z_P \\ x_S - x_P & y_S - y_P & z_S - z_P \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 0 & x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ 0 & x_R - x_P & y_R - y_P & z_R - z_P \\ 0 & x_S - x_P & y_S - y_P & z_S - z_P \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} |\det \mathbf{X}| \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า \mathbf{u} , \mathbf{v} และ \mathbf{w} เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3 เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นร่วมกันและอยู่บนระนาบเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$

(ก.2) เนื่องจากในทางปฏิบัติแล้วจะมีการแบ่งแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ให้เป็นรูปทรงสี่หน้าที่มีปริมาตรไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ $\det \mathbf{X} \neq 0$

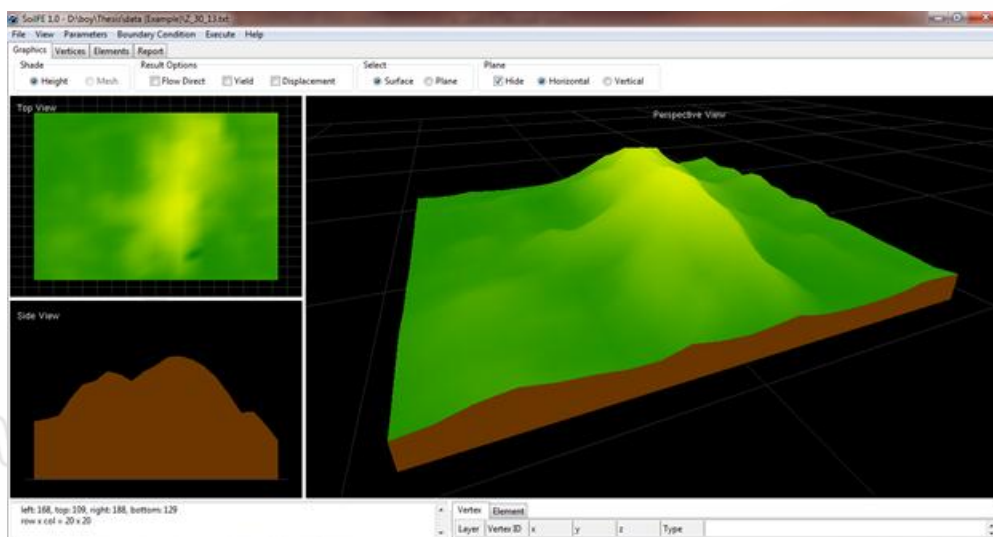
Prince of Songkla University
Pattani Campus
ภาคผนวก ข

ภาคผนวก ข. คู่มือการใช้งานโปรแกรม SoilFE 1.0

โปรแกรม SoilFE 1.0 ได้ถูกพัฒนาขึ้นสำหรับวิเคราะห์การวิบัติของลาดดินด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

1. ส่วนประกอบของโปรแกรม

โปรแกรมประกอบด้วยแสดงผลภาพกราฟิกในมุมมองด้านบน (top view) ด้านหน้า (front view) ด้านข้าง (side view) และทัศนียภาพ (perspective view) สีภาพพื้นผิวลาดดินจะแสดงสีตามระดับความสูงต่ำของลาดดิน ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 หน้าต่างงานหลัก (main window) ของโปรแกรม

1.1. ส่วนประกอบของหน้าต่างงานหลัก

หน้าต่างงานของโปรแกรม มีส่วนประกอบ 3 ส่วน ได้แก่

- ส่วนเมนูหลัก (main menu) ดังรูปที่ 1 ประกอบด้วย



รูปที่ 2 เมนูหลักของโปรแกรม

File

สำหรับการดำเนินการเปิด (open) ปิด (close) ไฟล์ข้อมูลสูงต่ำของลาดดิน และออกจากโปรแกรม

View

สำหรับเปิดหน้าต่าง map image เพื่อแสดงภาพลาดดินในมุมมองด้านบน กำหนดหน่วยวัดต่าง ๆ (units) ที่ใช้ในการคำนวณ และกำหนดค่าพารามิเตอร์ของหน้าต่างงาน (view port)

Parameters

สำหรับกำหนดค่าพารามิเตอร์ของวัสดุ (materials) ในแบบจำลอง ได้แก่ ดินและการซึมน้ำ เป็นต้น

Boundary Condition

สำหรับกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นในการคำนวณทั้งกรณีการวิเคราะห์ความเค้น ความเครียด และการไหลซึมของน้ำผ่านดิน

Execute

สำหรับการดำเนินการประมวลผล ได้แก่

- Discretization คือการแบ่งลาดดินเป็นเอลิเมนต์ย่อย
- Force Only คือการประมวลผลค่าความเค้นและความเครียด
- Principle Stress คือค่าความเค้นหลัก
- Yield Function คือค่าฟังก์ชันความครากโดยสามารถเลือกฟังก์ชันความครากได้ตามตัวแบบของ Von mises, Drucker-Prager, Lade-Duncan, Matsuoka-Nakai หรือ Houlby

Help

สำหรับแสดงคู่มือการใช้ และระบบช่วยเหลือผู้ใช้

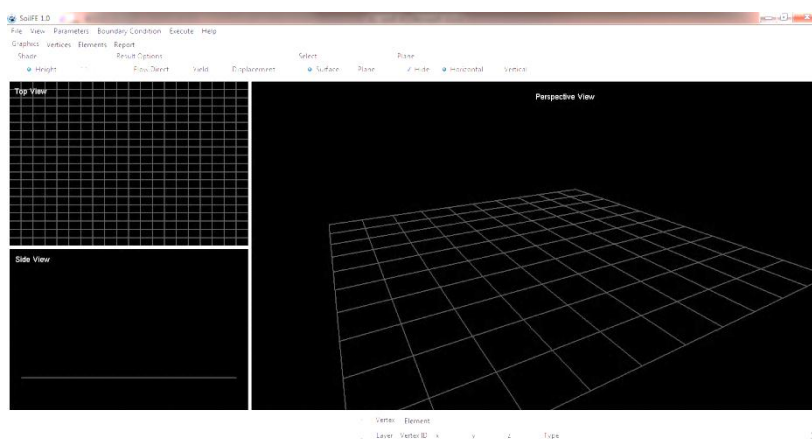
- **ส่วนดำเนินการและแสดงผล (operation and output)**

ส่วนดำเนินการและแสดงผลคือส่วนสำหรับการดำเนินการเกี่ยวกับการเลือกจุด (vertex) หรือเอลิเมนต์ของลาดดิน การกำหนดเงื่อนไขของจุดรองรับ (support vertex) การกำหนดแรงที่กระทำบนจุดใด ๆ บนลาดดิน รวมถึงการแสดงผลทั้งในรูปแบบภาพกราฟิก (graphics) และตารางค่า (table) ส่วนดำเนินการและแสดงผลประกอบด้วย 4 ส่วน ได้แก่

- ส่วนแสดงผลแบบภาพกราฟิก (graphics)
- ส่วนดำเนินการและแสดงข้อมูลจุด (vertices)

- ส่วนดำเนินการและแสดงข้อมูลเอลิเมนต์ (elements)
- ส่วนแสดงรายงาน (report)
- ส่วนแสดงผลแบบภาพกราฟิก (graphics)

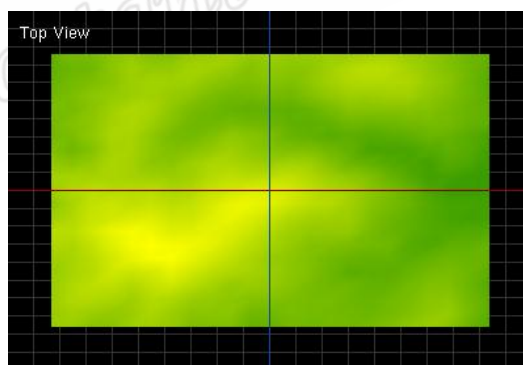
ส่วนแสดงผลแบบภาพกราฟิก คือส่วนดำเนินการและแสดงพื้นผิวของลาดดิน



รูปที่ 3 ส่วนแสดงผลแบบภาพกราฟิก

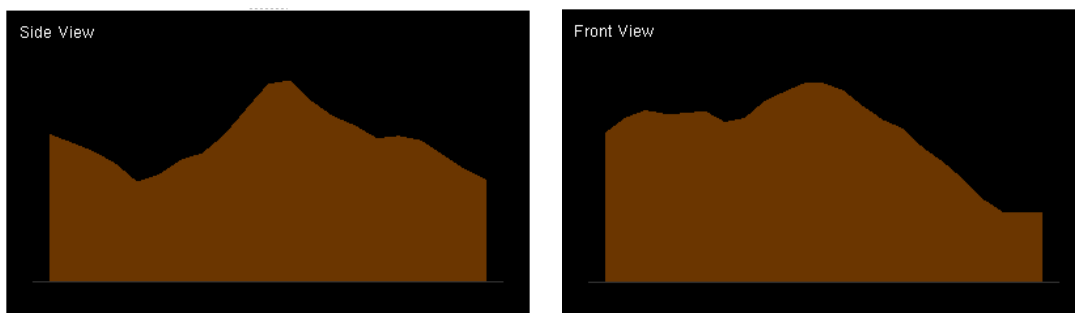
จากรูปที่ 3 ส่วนแสดงผลแบบภาพกราฟิกแบ่งเป็น 3 ส่วน ได้แก่

- ส่วนมุมบนด้านซ้าย แสดงภาพลาดดินในมุมมองด้านบน ดังรูป 4



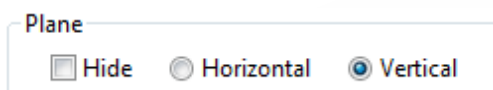
รูปที่ 4 แสดงภาพลาดดินในมุมมองด้านบน

- ส่วนมุมล่างด้านซ้าย แสดงภาพลาดดินในมุมมองด้านข้างหรือมุมมองด้านหน้า ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 ภาพลาดดินในมุมมองด้านข้าง และด้านหน้า

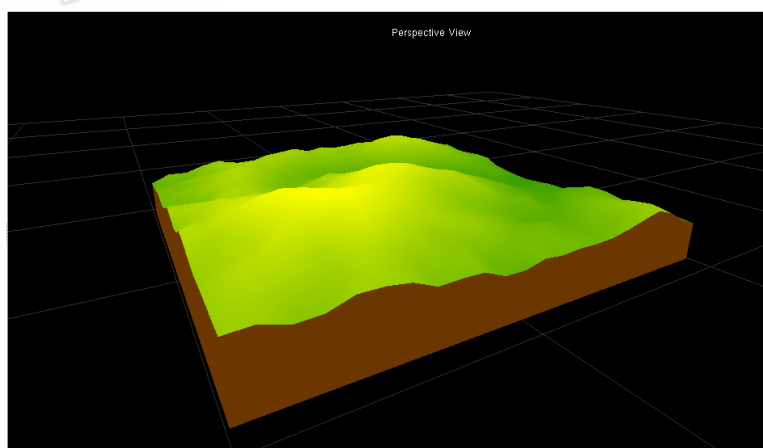
ผู้ใช้โปรแกรมสามารถเลือกให้โปรแกรมแสดงภาพด้านข้างหรือด้านหน้าของลาดดินได้โดยการเลือก radio box ดังรูป 6



รูปที่ 6 radio box สำหรับเลือกแสดงมุมมองของลาดดินบนส่วนมุมล่างด้านซ้าย

ภาพของลาดดินที่แสดงบนมุมมองด้านข้างหรือด้านหน้านั้นคือภาพของหน้าตัดลาดดินที่ตัดโดยระนาบที่มีเวกเตอร์ปกติที่ตั้งฉากกับระนาบ XY และ YZ ที่แสดงด้วยเส้นสีแดงและสีน้ำเงินตามลำดับ ดังรูปที่ 7

- ส่วนด้านขวา แสดงภาพลาดดินในมุมมองทัศนียภาพ ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 ภาพลาดดินในมุมมองทัศนียภาพ

การแปลง (transformation) ภาพของลาดดินในมุมมองนี้สามารถควบคุมโดยใช้เมาส์ (mouse) ดังนี้

- การหมุน (rotation) ดำเนินการโดยกดปุ่มเมาส์ด้านซ้าย (left click)
- การเลื่อน (pan) ดำเนินการโดยกดปุ่มเมาส์ด้านขวา (right click)
- การย่อ – ขยาย (zoom in – zoom out) ดำเนินการโดยกดปุ่มเมาส์ทั้งสองข้าง (left & right click)

2. ส่วนดำเนินการและแสดงข้อมูลจุด (vertices)

ส่วนดำเนินการและแสดงข้อมูลจุด คือส่วนสำหรับเลือกจุด หรือกำหนดแรงที่กระทำบนจุดใด ๆ บนลาดดิน ประกอบด้วย 2 ส่วน ดังรูปที่ 8

2.1. ตารางสำหรับเลือกและแสดงข้อมูลจุด (vertices table) ประกอบด้วย

- Vertex ID
- พิกัดบนระนาบ 3 มิติ
- ประเภทจุด มี 3 ประเภทคือ จุดบนพื้นผิว (surface) จุดภายใน (interior) จุดฐาน (base)
- แรงที่กระทำ (action force)
- การกระจัด (displacement)
- ค่าฟังก์ชันความคราก (yield function)

Layer	Vertex ID	x	y	z	Type	F@x	F@y	F@z	d@x	d@y	d@z	f
0	0	0	102	0	Surface	0	0	0	-1.70E-13	-1.61E-13	-2.36E-13	-3.49E-22
0	1	0	153	90	Surface	0	0	0	-1.60E-13	-1.88E-13	-2.56E-13	-2.83E-22
0	2	0	201	180	Surface	0	0	0	-1.27E-13	-1.75E-13	-2.54E-13	-4.39E-22
0	3	0	218	270	Surface	0	0	0	-6.27E-14	-1.33E-13	-2.49E-13	-4.23E-22
0	4	0	251	360	Surface	0	0	0	-1.51E-14	-1.12E-13	-2.49E-13	-2.89E-22
0	5	0	265	450	Surface	0	0	0	1.93E-14	-9.31E-14	-2.41E-13	-2.06E-22
0	6	0	202	540	Surface	0	0	0	3.92E-14	-4.32E-14	-2.62E-13	-4.15E-23
0	7	90	102	0	Surface	0	0	0	-1.48E-13	-1.63E-13	-2.52E-13	-2.58E-22
0	8	90	171	90	Surface	0	0	0	-1.39E-13	-1.82E-13	-2.47E-13	-2.69E-22
0	9	90	187	180	Surface	0	0	0	-9.60E-14	-1.50E-13	-2.47E-13	-2.42E-22
0	10	90	183	270	Surface	0	0	0	-3.62E-14	-9.66E-14	-2.47E-13	-3.44E-22
0	11	90	220	360	Surface	0	0	0	9.03E-15	-7.20E-14	-2.48E-13	-3.26E-22
0	12	90	244	450	Surface	0	0	0	4.33E-14	-5.21E-14	-2.43E-13	-2.30E-22
0	13	90	150	540	Surface	0	0	0	6.55E-14	-1.37E-15	-2.63E-13	-2.61E-22
0	14	180	119	0	Surface	0	0	0	-1.37E-13	-1.57E-13	-2.47E-13	-2.86E-22
0	15	180	169	90	Surface	0	0	0	-1.01E-13	-1.51E-13	-2.45E-13	-2.07E-22
0	16	180	172	180	Surface	0	0	0	-5.45E-14	-1.09E-13	-2.44E-13	-2.13E-22
0	17	180	144	270	Surface	0	0	0	-2.77E-15	-5.05E-14	-2.45E-13	-2.22E-22
0	18	180	178	360	Surface	0	0	0	3.90E-14	-1.82E-14	-2.44E-13	-3.30E-22
0	19	180	210	450	Surface	0	0	0	6.83E-14	3.51E-15	-2.41E-13	-6.51E-22
0	20	180	34	540	Surface	0	0	0	6.81E-14	4.88E-14	-3.06E-13	8.82E-22
0	21	270	111	0	Surface	0	0	0	-1.16E-13	-1.34E-13	-2.40E-13	-2.69E-22
0	22	270	157	90	Surface	0	0	0	-5.49E-14	-1.04E-13	-2.43E-13	-2.45E-22
0	23	270	155	180	Surface	0	0	0	-1.01E-14	-6.06E-14	-2.47E-13	-1.89E-22
0	24	270	146	270	Surface	0	0	0	3.39E-14	-1.50E-14	-2.39E-13	-1.88E-22
0	25	270	147	360	Surface	0	0	0	7.63E-14	3.47E-14	-2.44E-13	-3.63E-22
0	26	270	187	450	Surface	0	0	0	1.10E-13	6.86E-14	-2.45E-13	-5.50E-22
0	27	270	132	540	Surface	0	0	0	1.00E-13	6.90E-14	-2.05E-13	-8.27E-22
0	28	360	92	0	Surface	0	0	0	-7.46E-14	-1.03E-13	-2.45E-13	-2.26E-22

รูปที่ 8 ส่วนดำเนินการและแสดงข้อมูลจุด

2.2. ส่วนกำหนดแรง การกระจัดสำหรับเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

Category:

Detail:

Mode
 Vertex Vertices

Coordinate
 ID: Type:
 28 Surface
 x: y: z:
 90 229 450

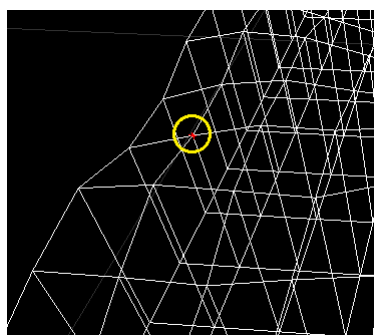
Force
 x: y: z:
 0 0 0
 Show

Displacement
 Initial
 x:
 y:
 z:

รูปที่ 9 ส่วนกำหนดแรง และการกระจัด

เมื่อเลือกจุดที่มี Vertex ID ไต ๆ แล้วบนส่วนแสดงกราฟิกจุดที่เลือกจะถูกทำเครื่องหมายสีแดง

Graphics	Vertices	Elements	Report									
Layer	Vertex ID	x	y	z	Type	F@x	F@y	F@z	d@x	d@y	d@z	
0	21	0	179	1890	Surface	0	0	0	0	0	0	
0	22	0	165	1980	Surface	0	0	0	0	0	0	
0	23	90	162	0	Surface	0	0	0	0	0	0	
0	24	90	176	90	Surface	0	0	0	0	0	0	
0	25	90	181	180	Surface	0	0	0	0	0	0	
0	26	90	216	270	Surface	0	0	0	0	0	0	
0	27	90	243	360	Surface	0	0	0	0	0	0	
0	28	90	229	450	Surface	0	0	0	0	0	0	
0	29	90	232	540	Surface	0	0	0	0	0	0	
0	30	90	250	630	Surface	0	0	0	0	0	0	



รูปที่ 10 การเลือกจุดบนส่วนดำเนินการและแสดงจุดที่เลือกด้วยเครื่องหมายกากบาทสีแดง

3. ส่วนดำเนินการและแสดงข้อมูลเอลิเมนต์ (elements)

คือส่วนสำหรับเลือกและแสดงข้อมูลเอลิเมนต์บนภาคดิน ดังรูปที่ 11

Element ID	p	q	r	s	Volume	W0x	W0y	W0z	S0x	S0y	S0z	T0xy	T0xz	T0yz	S01	S02	S03	f	Water Content
0	0	8	7	1	1.30E+5	0.00	-3.55E+2	0.00	-4.18E-8	7.07E-8	-2.14E-7	4.04E-8	-7.08E-8	-4.59E-8	-3.70E-7	-2.74E-8	-5.07E-8	-1.88E-22	0.00
1	0	8	50	1	2.07E+5	0.00	-5.37E+2	0.00	-4.31E-10	1.68E-8	-2.02E-7	5.11E-8	-5.83E-8	-4.99E-8	-5.89E-8	-1.71E-8	-1.10E-7	-9.74E-23	0.00
2	56	57	50	8	2.31E+5	0.00	-6.00E+2	0.00	-1.15E-7	-1.15E-7	-2.69E-7	0.00	-7.69E-8	-7.69E-8	-2.34E-7	-1.78E-7	-8.82E-8	-7.20E-22	0.00
3	0	56	50	8	3.69E+5	0.00	-9.58E+2	0.00	2.00E-8	3.22E-9	-3.84E-7	9.48E-8	-9.87E-8	-1.07E-7	-4.97E-8	-1.09E-7	-2.02E-7	-4.70E-22	0.00
4	0	50	56	49	1.38E+5	0.00	-3.58E+2	0.00	-1.10E-7	-1.10E-7	-2.57E-7	0.00	-7.35E-8	-7.35E-8	-2.23E-7	-1.70E-7	-8.43E-8	-6.29E-22	0.00
5	1	57	9	8	2.31E+5	0.00	-6.00E+2	0.00	2.60E-9	1.82E-8	-1.94E-7	5.03E-8	-5.56E-8	-4.78E-8	-4.55E-8	-1.57E-8	-1.12E-7	-7.69E-23	0.00
6	1	9	51	2	2.71E+5	0.00	-7.06E+2	0.00	-7.33E-9	3.78E-8	-1.96E-7	5.35E-8	-6.35E-8	-4.10E-8	-7.29E-8	7.56E-9	-1.00E-7	-2.01E-22	0.00
7	57	58	51	9	2.52E+5	0.00	-6.56E+2	0.00	-1.15E-7	-1.15E-7	-2.69E-7	0.00	-7.69E-8	-7.69E-8	-2.34E-7	-1.78E-7	-8.82E-8	-7.22E-22	0.00
8	1	57	51	9	4.59E+5	0.00	-1.19E+3	0.00	1.33E-8	-8.12E-9	-4.06E-7	9.50E-8	-1.04E-7	-1.14E-7	-8.31E-8	-1.33E-7	-1.85E-7	-2.36E-22	0.00
9	1	51	57	50	2.07E+5	0.00	-5.37E+2	0.00	-1.20E-7	-1.20E-7	-2.79E-7	0.00	-7.97E-8	-7.97E-8	-2.42E-7	-1.84E-7	-9.14E-8	-8.03E-22	0.00
10	2	58	10	9	2.52E+5	0.00	-6.56E+2	0.00	-1.30E-8	2.05E-8	-1.98E-7	4.77E-8	-6.15E-8	-4.47E-8	-9.61E-8	-1.44E-9	-9.27E-8	-2.17E-22	0.00
11	2	10	52	3	2.94E+5	0.00	-7.65E+2	0.00	-1.45E-8	3.91E-8	-1.95E-7	5.15E-8	-6.53E-8	-3.85E-8	-9.40E-8	1.55E-8	-9.15E-8	-2.92E-22	0.00
12	58	59	52	10	2.47E+5	0.00	-6.42E+2	0.00	-1.15E-7	-1.15E-7	-2.69E-7	0.00	-7.68E-8	-7.68E-8	-2.33E-7	-1.78E-7	-8.81E-8	-7.19E-22	0.00
13	2	58	52	10	5.18E+5	0.00	-1.35E+3	0.00	2.46E-8	7.70E-10	-3.98E-7	9.86E-8	-1.01E-7	-1.13E-7	-3.88E-8	-1.23E-7	-2.10E-7	-7.04E-22	0.00
14	2	52	58	51	2.71E+5	0.00	-7.06E+2	0.00	-1.19E-7	-1.19E-7	-2.77E-7	0.00	-7.90E-8	-7.90E-8	-2.40E-7	-1.83E-7	-9.06E-8	-7.82E-22	0.00
15	3	59	11	10	2.47E+5	0.00	-6.42E+2	0.00	-3.00E-8	1.11E-9	-2.08E-7	4.03E-8	-6.45E-8	-4.89E-8	-1.47E-7	-4.17E-8	-4.83E-8	-1.22E-22	0.00
16	3	11	53	4	3.39E+5	0.00	-8.81E+2	0.00	-2.19E-9	2.08E-8	-1.96E-7	5.02E-8	-5.81E-8	-4.66E-8	-6.15E-8	-8.59E-9	-1.07E-7	-1.21E-22	0.00
17	59	60	53	11	2.97E+5	0.00	-7.72E+2	0.00	-1.16E-7	-1.16E-7	-2.70E-7	0.00	-7.71E-8	-7.71E-8	-2.34E-7	-1.78E-7	-8.85E-8	-7.19E-22	0.00
18	3	59	53	11	5.91E+5	0.00	-1.54E+3	0.00	2.92E-8	1.40E-8	-3.89E-7	1.02E-7	-1.00E-7	-1.08E-7	-1.69E-8	-9.81E-8	-2.31E-7	-8.38E-22	0.00
19	3	53	59	52	2.94E+5	0.00	-7.65E+2	0.00	-1.16E-7	-1.16E-7	-2.72E-7	0.00	-7.77E-8	-7.77E-8	-2.36E-7	-1.80E-7	-8.91E-8	-7.42E-22	0.00
20	4	60	12	11	2.97E+5	0.00	-7.72E+2	0.00	-1.61E-8	-1.25E-8	-2.09E-7	4.05E-8	-5.78E-8	-5.59E-8	-1.19E-7	-7.53E-8	-4.39E-8	-7.51E-23	0.00
21	4	12	54	5	3.58E+5	0.00	-9.30E+2	0.00	2.16E-9	-3.35E-10	-1.95E-7	4.54E-8	-5.18E-8	-5.30E-8	-5.32E-8	-5.17E-8	-8.81E-8	-1.32E-23	0.00
22	60	61	54	12	3.29E+5	0.00	-8.56E+2	0.00	-1.13E-7	-1.13E-7	-2.65E-7	0.00	-7.57E-8	-7.57E-8	-2.30E-7	-1.75E-7	-8.68E-8	-6.86E-22	0.00
23	4	60	54	12	6.68E+5	0.00	-1.74E+3	0.00	2.09E-8	1.93E-8	-3.86E-7	9.99E-8	-1.03E-7	-1.04E-7	-4.26E-8	-7.60E-8	-2.27E-7	-4.97E-22	0.00
24	4	54	60	53	3.39E+5	0.00	-8.81E+2	0.00	-1.16E-7	-1.16E-7	-2.71E-7	0.00	-7.75E-8	-7.75E-8	-2.35E-7	-1.79E-7	-8.89E-8	-7.38E-22	0.00
25	5	61	13	12	3.29E+5	0.00	-8.56E+2	0.00	7.04E-9	1.21E-8	-1.91E-7	4.92E-8	-5.23E-8	-4.98E-8	-3.15E-8	-2.92E-8	-1.11E-7	-5.11E-23	0.00
26	5	13	55	6	2.73E+5	0.00	-7.09E+2	0.00	5.10E-9	5.10E-9	-2.09E-7	5.10E-8	-5.60E-8	-5.60E-8	-4.59E-8	-4.59E-8	-1.07E-7	-4.15E-23	0.00
27	61	62	55	13	2.03E+5	0.00	-5.27E+2	0.00	-1.23E-7	-1.23E-7	-2.87E-7	0.00	-8.19E-8	-8.19E-8	-2.49E-7	-1.90E-7	-9.39E-8	-8.71E-22	0.00
28	5	61	55	13	5.60E+5	0.00	-1.46E+3	0.00	1.03E-8	4.33E-9	-4.04E-7	9.71E-8	-1.07E-7	-1.10E-7	-8.86E-8	-1.01E-7	-1.99E-7	-2.50E-22	0.00

รูปที่ 11 ส่วนการดำเนินการและแสดงข้อมูลเอลิเมนต์ (elements)

4. ส่วนแสดงรายงาน (report)

ส่วนแสดงรายงาน คือส่วนแสดงผลข้อมูลของจุด เอลิเมนต์ ผลการคำนวณได้แก่ ค่าความเค้นและความเครียด การกระจัดของจุดใด ๆ ในรูปแบบของข้อมูลตัวเลขที่สามารถนำออก (export) ไปใช้ร่วมกับโปรแกรมประมวลผลอื่น ๆ ได้ ดังรูปที่ 12

```

Layers 0 = [
102, 153, 201, 218, 251, 265, 202;
102, 171, 187, 183, 220, 244, 150;
119, 169, 172, 144, 178, 210, 34;
111, 157, 155, 146, 147, 187, 132;
92, 126, 149, 118, 115, 158, 112;
84, 106, 91, 85, 91, 102, 84;
81, 80, 82, 82, 85, 84, 78;
]

Layers 1 = [
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
]

Vertices = [
[0, 0, 102];
[0, 90, 153];
[0, 180, 201];
[0, 270, 218];
[0, 360, 251];
[0, 450, 265];
[0, 540, 202];
[90, 0, 102];
[90, 90, 171];
[90, 180, 187];
[90, 270, 183];
[90, 360, 220];
[90, 450, 244];
[90, 540, 150];
[180, 0, 119];
[180, 90, 169];
[180, 180, 172];
[180, 270, 144];
[180, 360, 178];
[180, 450, 210];
[180, 540, 34];
[270, 0, 111];
]

```

รูปที่ 12 ส่วนแสดงรายงาน (report)

5. ส่วนแสดงสถานะโปรแกรม (program status)

ส่วนแสดงสถานะโปรแกรม คือส่วนแสดงสถานการณ์ทำงานในกระบวนการต่าง ๆ ของโปรแกรม ได้แก่ แสดงตำแหน่งข้อมูลจากไฟล์ข้อมูลที่ถูกอ่านเข้ามาในโปรแกรม ขนาดของข้อมูล ค่าพารามิเตอร์ที่ผู้ใช้กำหนด สถานะของการคำนวณว่าอยู่ในขั้นตอนใด ดังรูปที่ 13

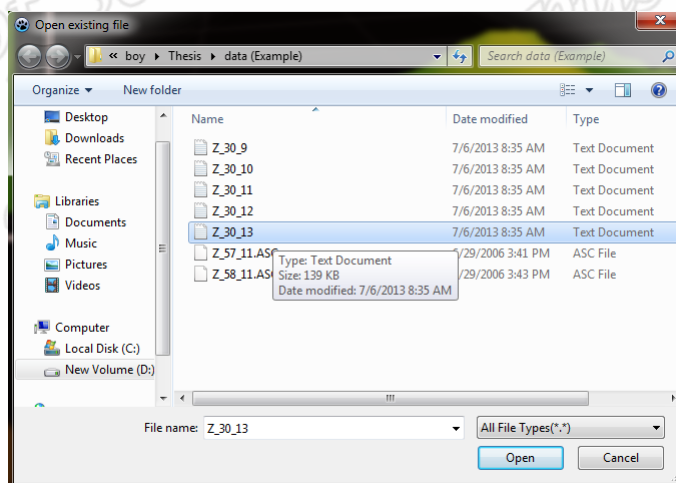


รูปที่ 13 แสดงส่วนแสดงสถานะโปรแกรม (program status)

6. การใช้โปรแกรมคำนวณค่าฟังก์ชันความคราก

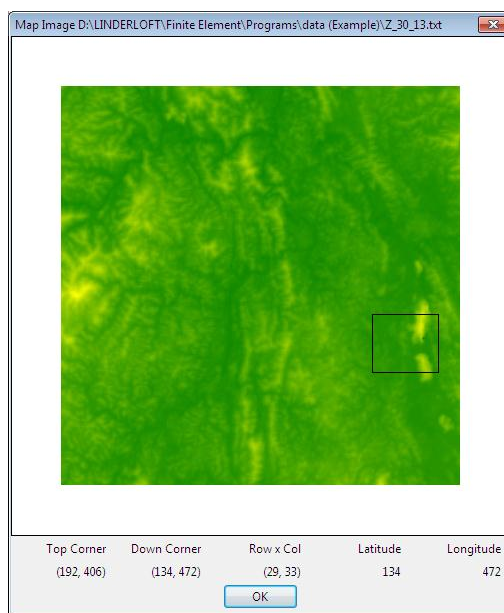
การคำนวณค่าฟังก์ชันความครากโดยโปรแกรม SoilFE 1.0 ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. เปิดโปรแกรม SoilFE 1.0 เลือกเมนู File → Open แล้วเลือกไฟล์ข้อมูลลาดดินในหน้าต่าง Open file ดังรูป 14



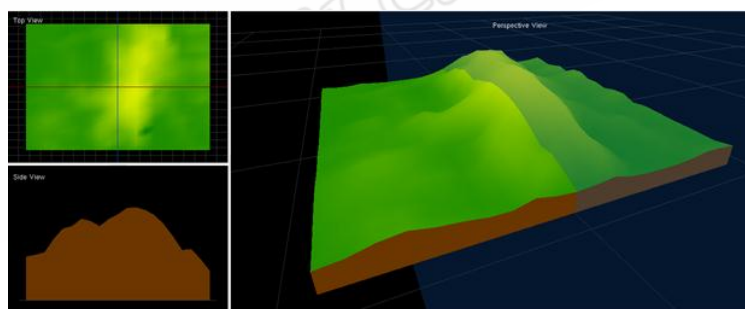
รูปที่ 14 หน้าต่าง Open existing file

2. Drag mouse เพื่อเลือกพื้นที่ของลาดดินบนหน้าต่าง Map Image แล้วคลิก OK แสดงดังรูปที่ 15

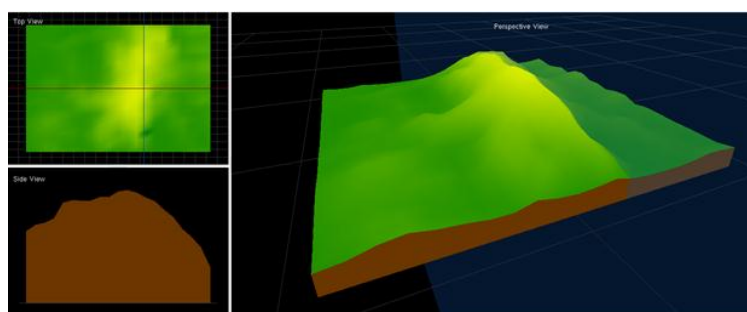


รูปที่ 15 หน้าต่าง Map Image

3. ภาพของลาดดินที่เลือกตามข้อที่ 2 จะปรากฏบนส่วนแสดงผลภาพกราฟิก ทั้งมุมมองด้านบน ด้านข้าง และมุมมองทัศนียภาพ ผู้ใช้สามารถเลือกส่วนหน้าต่างตัดได้ให้แสดงผลมุมมองด้านข้าง โดยการใช้เมาส์เลื่อนที่ระนาบตัดสีน้ำเงินบนมุมมองทัศนียภาพ ดังรูป 16 (ก) และ (ข)



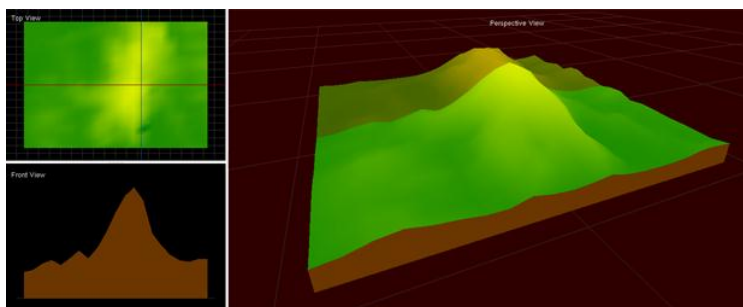
(ก)



(ข)

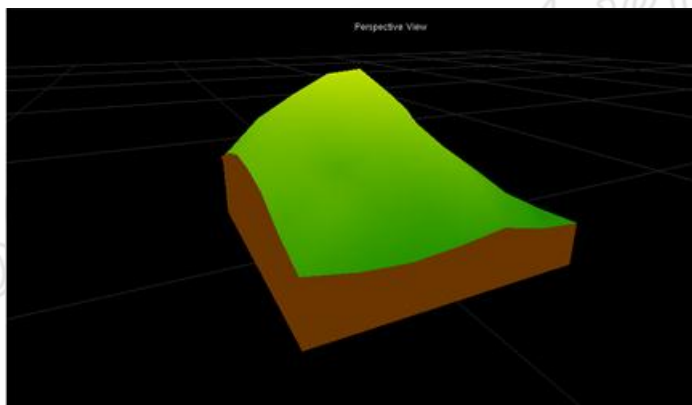
รูปที่ 16 (ก) ภาพตัดลาดดินด้านข้าง และ (ข) แสดงภาพตัดลาดดินด้านข้าง

และเมื่อเลื่อนระนาบตัดสีแดงบนมุมมองทัศนียภาพ ภาพหน้าตัดด้านหน้าจะถูกแสดง ดังรูปที่ 17



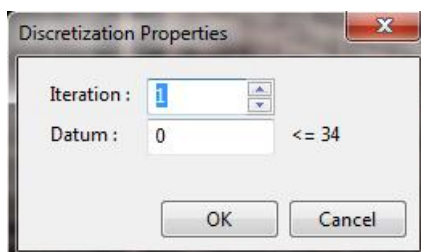
รูปที่ 17 แสดงภาพตัดลาดดินด้านหน้า

4. แบ่งลาดดินเป็นส่วนเอลิเมนต์ย่อย จากรูปที่ 4.20 แสดงภาพลาดดินที่ต้องการวิเคราะห์



รูปที่ 18 ลาดดินที่ต้องการวิเคราะห์

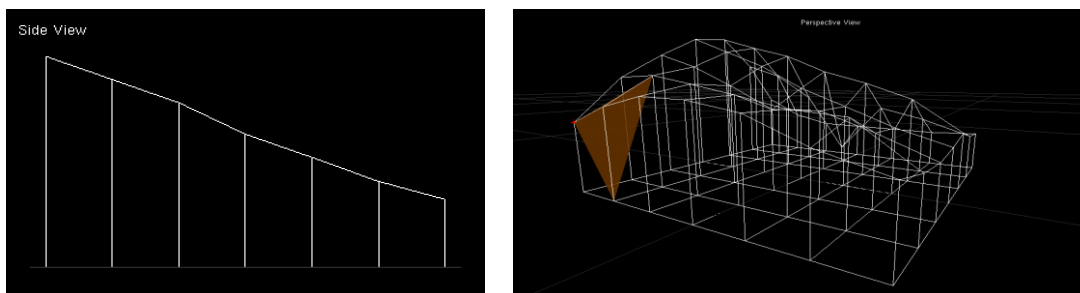
เลือกคำสั่ง Execute → Discretization จะปรากฏหน้าต่าง Discretization Properties ดังรูปที่ 19



รูปที่ 19 แสดงหน้าต่าง Discretization Properties

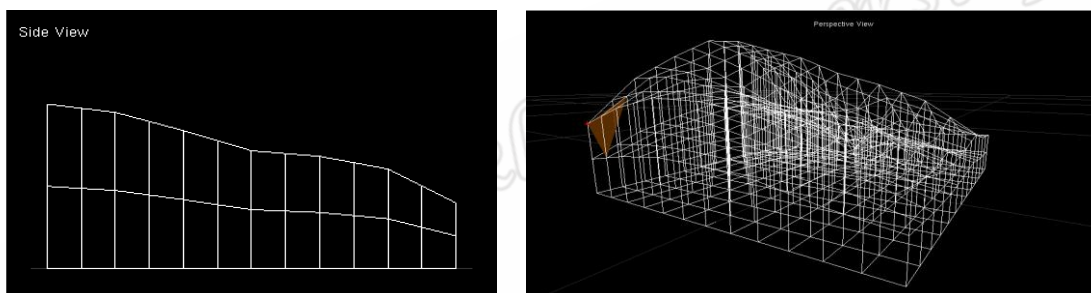
กำหนดรอบของการแบ่งเอลิเมนต์ย่อย (iteration)

กรณี Iteration = 0 ดังรูปที่ 20



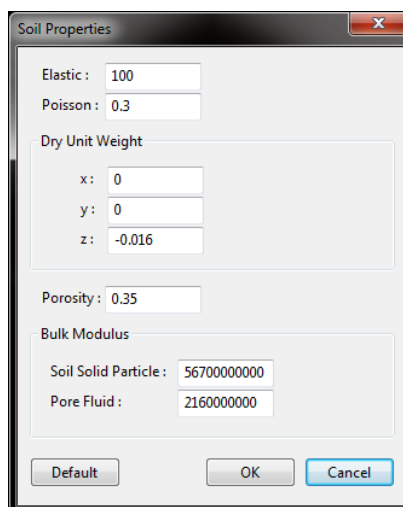
รูปที่ 20 แสดงภาพลาดดินที่แบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยโดยการกำหนดค่า Iteration = 0

กรณี Iteration = 1 ดังรูปที่ 21



รูปที่ 21 แสดงภาพลาดดินที่แบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยโดยการกำหนดค่า Iteration = 1

- กำหนดค่าพารามิเตอร์ของดิน โดยเลือกเมนูคำสั่ง Parameter → Soil จะปรากฏหน้าต่างงาน Soil Properties ดังรูปที่ 22



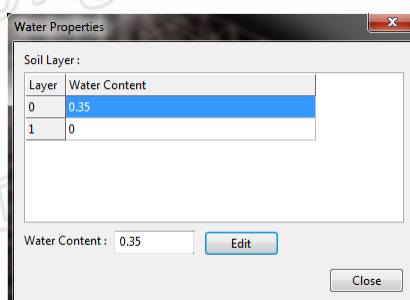
รูปที่ 22 แสดงหน้าต่างงาน Soil Properties

ในที่นี้ได้กำหนดค่าพารามิเตอร์ของดินดังนี้

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์ของดิน

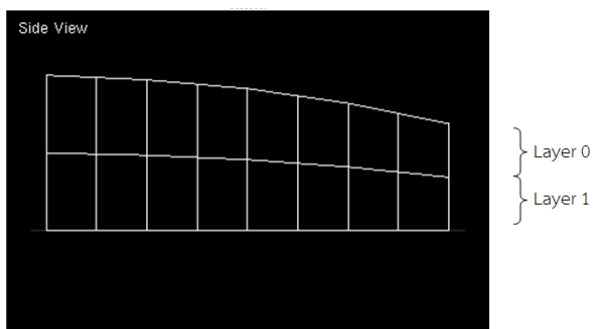
Parameter	Value	Unit
modulus of elastic	10	MPa
dry unit weight	16	kN/m ³
permeability	54	Mm/hr
Poisson ratio	0.35	-
porosity	0.33	-
bulk modulus of soil solid particle	56.7	GPa
bulk modulus of the pore fluid	2.16	GPa

6. กำหนดค่าพารามิเตอร์ปริมาณน้ำในดิน โดยเลือกเมนูคำสั่ง Parameter → Water จะปรากฏหน้าต่างงาน Soil Properties ดังรูปที่ 23



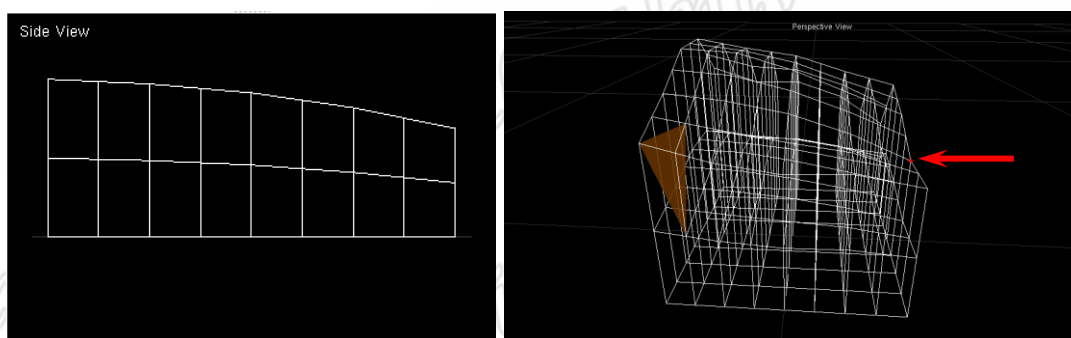
รูปที่ 23 แสดงหน้าต่างงาน Water Properties

สำหรับกรณีที่มีการแบ่งเอลิเมนต์ย่อยของลาดดิน ลาดดินจะถูกแบ่งเป็นแผ่นในแนวระดับในที่นี้เรียกว่า Layer ถ้ากำหนดค่า Iteration = 1 ลาดดินจะมี 2 Layer ได้แก่ Layer 0 และ Layer 1 โดยที่ Layer 0 จะเป็นพื้นผิวลาดดินชั้นบนสุด และ Layer 1 จะเป็นพื้นผิวลาดดินชั้นถัดลงมา ดังรูปที่ 24 การกำหนดค่าพารามิเตอร์ปริมาณน้ำในดิน โดย Layer 0 กำหนดให้มีค่า Water Content = 0.35 และ Layer 1 กำหนดให้มีค่า Water Content = 0

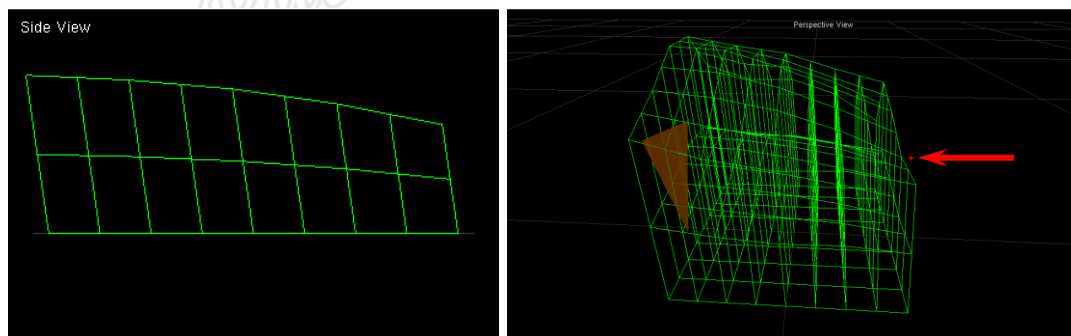


รูปที่ 24 ลาดดินที่ถูกแบ่งเป็น 2 Layer

7. สมมติให้ที่จุดสี่แดงบนลาดดินมีแรงกระทำขนาด 1 KN. ดังรูปที่ 25 (ก) แล้วคำนวณความเค้น ความเครียด และการกระจัด โดยเลือกเมนู Execute → Force Only จะปรากฏผลดังรูปที่ 26 (ข)



(ก)



(ข)

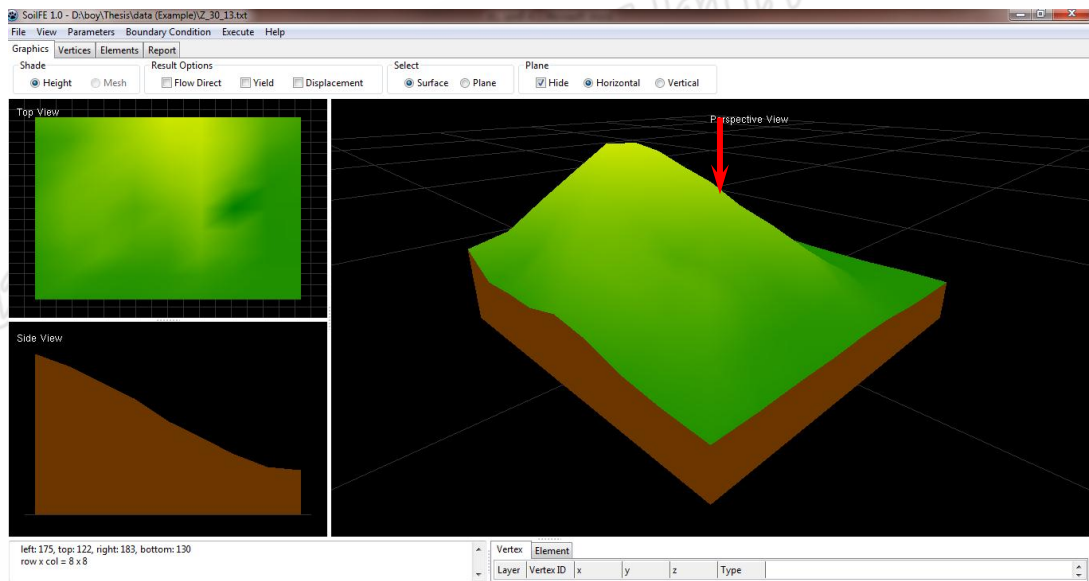
รูปที่ 25 (ก) ลาดดินก่อนที่แรงกระทำ และ (ข) ลาดดินหลังจากแรงกระทำ

รูปที่ 26 แสดงการกระจัดตามแกน x, y และ z เท่ากับ -1.6×10^{-1} , 1.45 และ -2.69×10^{-11} เมตร ตามลำดับ

Layer	Vertex ID	x	y	z	Type	F@x	F@y	F@z	d@x	d@y	d@z	f
0	0	0	231	0	Surface	0	0	0	-1.76E+1	1.60	-2.89E-11	-4.36E-18
0	1	0	248.5	45	Surface	0	0	0	-1.89E+1	1.72	-4.63E-11	-2.01E-18
0	2	0	266	90	Surface	0	0	0	-2.03E+1	1.84	-4.58E-11	-2.34E-18
0	3	0	288	135	Surface	0	0	0	-2.19E+1	1.99	-4.62E-11	-1.97E-18
0	4	0	310	180	Surface	0	0	0	-2.36E+1	2.14	-4.77E-11	-1.86E-18
0	5	0	312	225	Surface	0	0	0	-2.38E+1	2.16	-4.88E-11	-1.89E-18
0	6	0	314	270	Surface	0	0	0	-2.39E+1	2.17	-5.25E-11	-4.50E-18
0	7	0	283	315	Surface	0	0	0	-2.15E+1	1.95	-7.10E-11	-4.52E-18
0	8	0	252	360	Surface	0	0	0	-1.92E+1	1.74	-1.10E-10	-1.01E-19
0	9	45	220.5	0	Surface	0	0	0	-1.68E+1	1.52	-4.58E-11	-2.02E-18
0	10	45	241.25	45	Surface	0	0	0	-1.84E+1	1.67	-5.53E-11	-2.02E-18
0	11	45	262	90	Surface	0	0	0	-1.99E+1	1.81	-5.06E-11	-2.17E-18
0	12	45	284.75	135	Surface	0	0	0	-2.17E+1	1.97	-4.92E-11	-2.14E-18
0	13	45	307.5	180	Surface	0	0	0	-2.34E+1	2.12	-4.89E-11	-1.97E-18
0	14	45	307.25	225	Surface	0	0	0	-2.34E+1	2.12	-4.83E-11	-1.97E-18
0	15	45	307	270	Surface	0	0	0	-2.34E+1	2.12	-4.82E-11	-2.20E-18
0	16	45	273.25	315	Surface	0	0	0	-2.08E+1	1.89	-4.70E-11	-5.54E-18
0	17	45	239.5	360	Surface	0	0	0	-1.82E+1	1.65	-6.94E-11	-7.16E-18
0	18	90	210	0	Surface	-1E3	0	0	-1.60E+1	1.45	-2.69E-11	-1.17E-18
0	19	90	234	45	Surface	0	0	0	-1.78E+1	1.62	-4.72E-11	-2.48E-18
0	20	90	258	90	Surface	0	0	0	-1.96E+1	1.78	-4.56E-11	-2.17E-18

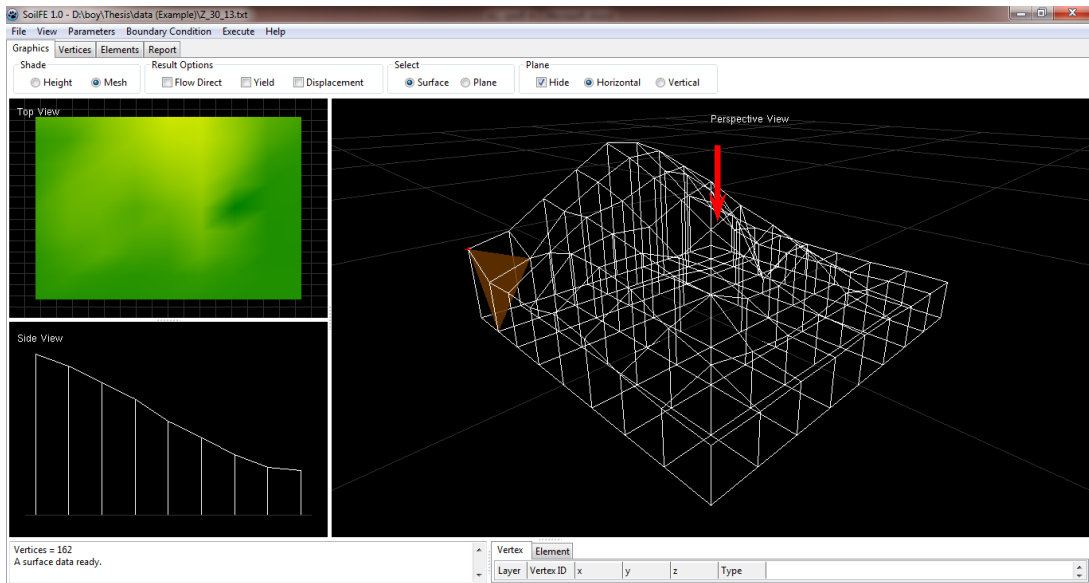
รูปที่ 26 ตารางแสดงข้อมูลของจุดยอดใด ๆ

ถ้าสมมติให้มีแรงกระทำกับลาดดินขนาด 1×10^{18} KN. ที่จุดสีแดงดังรูปที่ 27

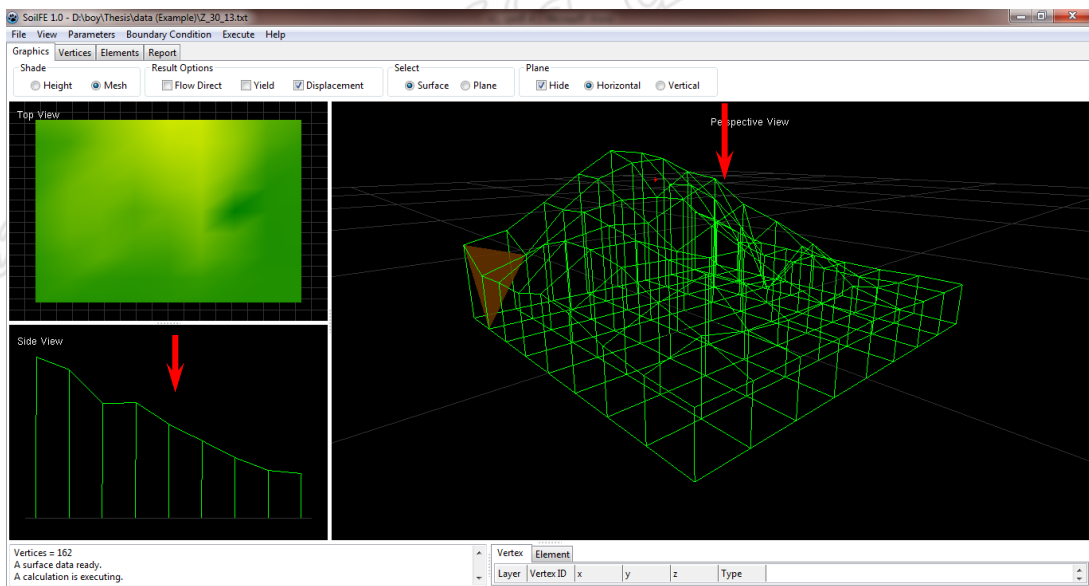


รูปที่ 27 ลาดดินก่อนถูกแรงกระทำ

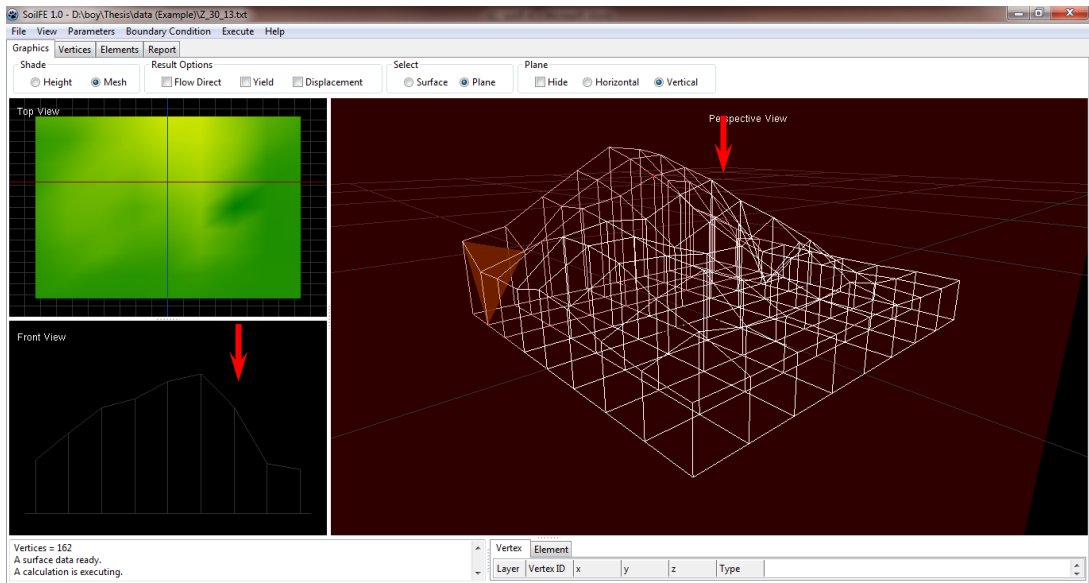
เมื่อคำนวณค่าความเค้น ความเครียด และค่าการกระจัด โดยเลือกเมนู Execute → Force Only จะปรากฏผลดังรูปที่ 28 – 32



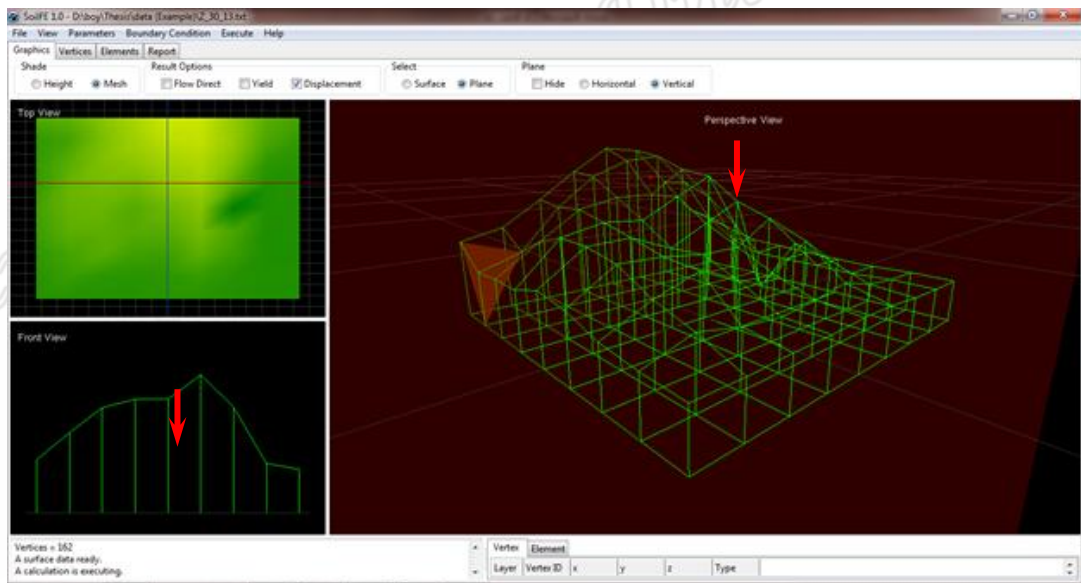
รูปที่ 28 ภาพลาดดินด้านข้างก่อนถูกแรงกระทำ



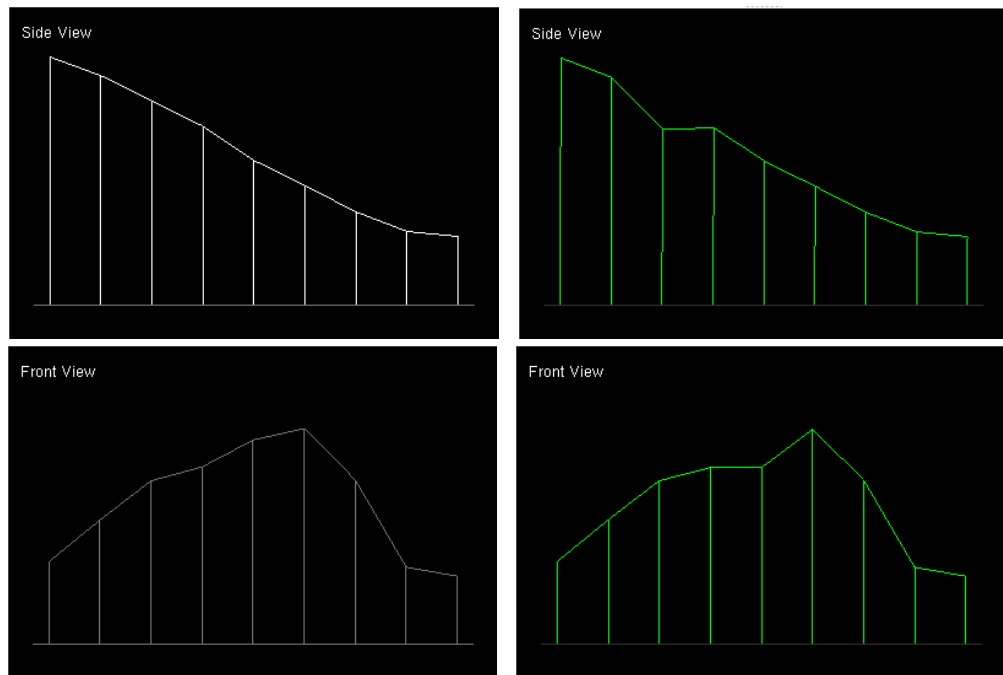
รูปที่ 29 ภาพลาดดินด้านข้างหลังจากถูกแรงกระทำ



รูปที่ 30 ลาดดินด้านหน้าก่อนถูกแรงกระทำ

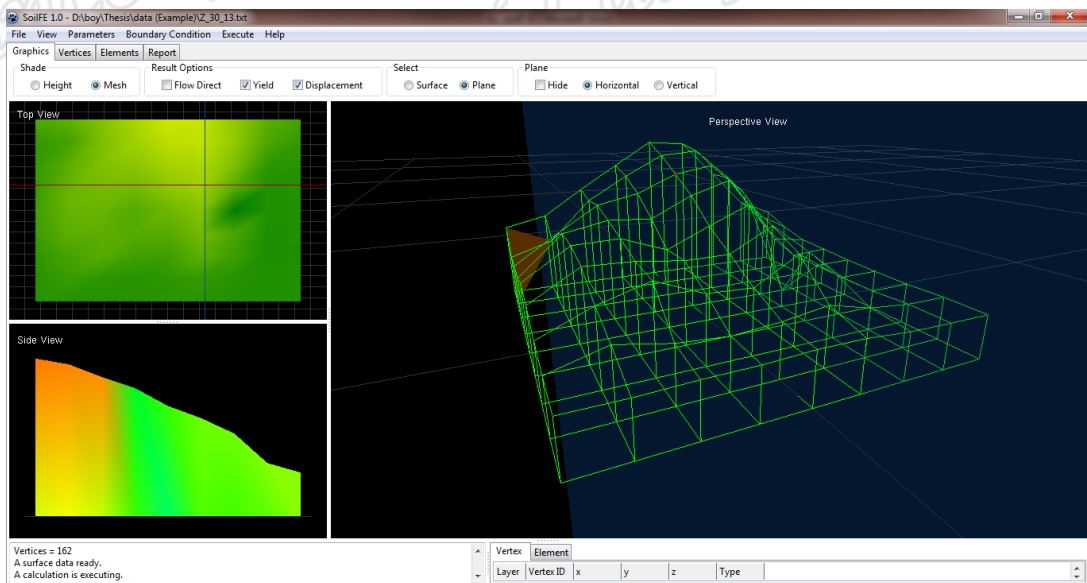


รูปที่ 31 ภาพลาดดินด้านหน้าหลังจากถูกแรงกระทำ

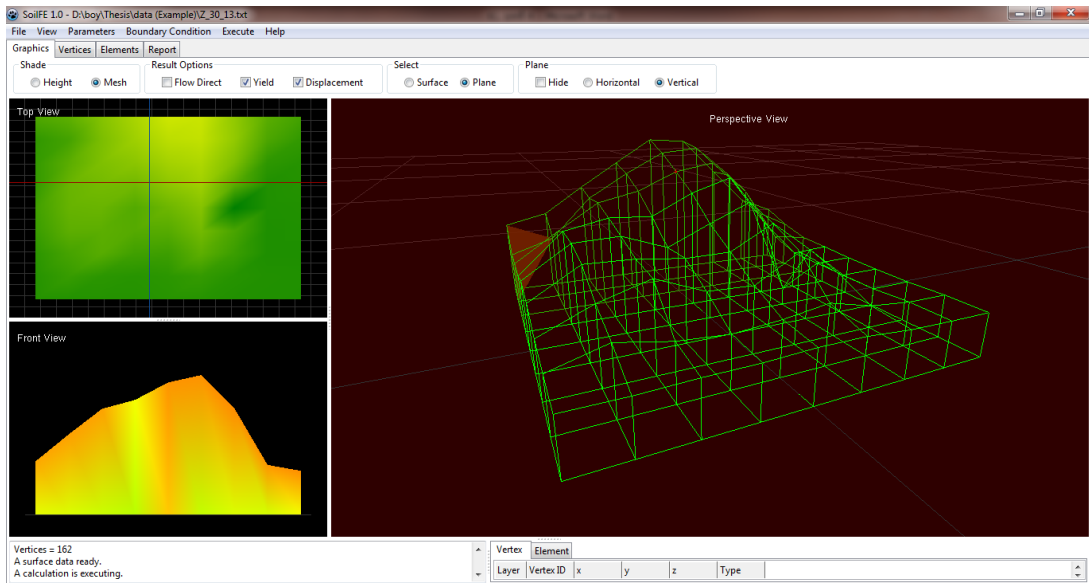


รูปที่ 32 เปรียบเทียบลาดดินก่อน (ซ้าย) และหลัง (ขวา) ที่แรงมากกระทำ

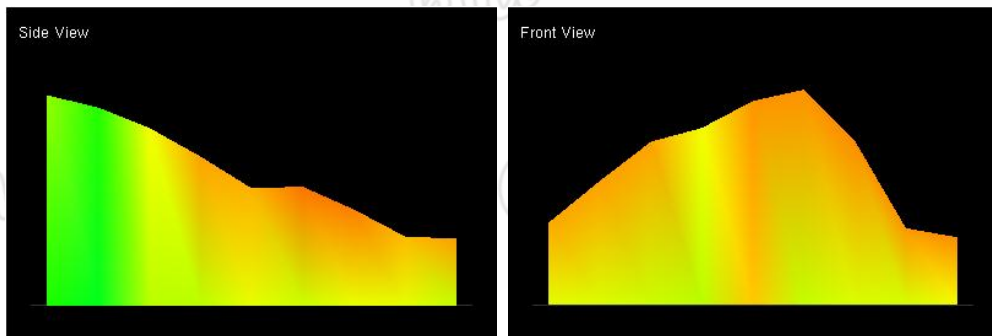
8. การหาค่าความครากของจุดใด ๆ ของลาดดิน โดยใช้ฟังก์ชันความครากของ Houlsby
เลือกเมนู Execute → Failure criteria → Houlsby Model ดังรูปที่ 33 – 35



รูปที่ 33 ค่าฟังก์ชันความครากของลาดดินด้านข้าง



รูปที่ 34 ค่าฟังก์ชันความครากของลาดดินด้านหน้า



รูปที่ 35 ค่าความคราก โดย Houlby Model ของลาดดินด้านข้าง (ซ้าย) และด้านหน้า (ขวา)

จากรูปที่ 35 ทำให้ทราบว่าพื้นที่บริเวณที่มีสีแดงเป็นส่วนที่มีค่าฟังก์ชันความคราก
เข้าใกล้ 1 นั่นคือพื้นที่บริเวณดังกล่าวมีเกณฑ์ที่จะเกิดการวิบัติมากที่สุด

Prince of Songkla University
Pattani Campus

ภาคผนวก ค

Numerical Algorithm for Simulation and Visualization of Landslide by Water Content and Slope Factors

Kunnapon Thumhiwaid¹, Somporn Chuai-Aree² and Aniruth Phon-On³

^{1,2,3}*Department of Mathematics and Computer Science,
Faculty of Science and Technology, Prince of Songkla University,
Pattani Campus, Pattani, Thailand*

^c*E-mail: t_kunnapon@yahoo.com; Fax: +66 73 312179; Tel. +66 8 7478 3378*

ABSTRACT

In this research, we propose a mathematical model for analyzing the soil structure by water content and slope factors that affect to the landslide problem. A deformation of slope is the result of external forces. A distribution of stress that occurs along the slope and slope failure criteria are based on mathematical model and computed using the finite element method. The numerical solution shows the result from mathematical model, algorithm and visualization in three-dimensional space by the investigated software namely SoilFE version 1.0 programmed by Lazarus software and OpenGL library. SoilFE 1.0 can analyze the shear strength along slope and landslide evaluation. This research can be applied for other regions. An application of this numerical method could be see that a foot of the hill has a yield more than upland and other area so that this area has the most opportunities to fail. It could be see that the yield varies according to the water content.

Keywords: Landslide, Groundwater Flow, Finite Element Method, Simulation and Visualization.

1. INTRODUCTION

Landslides in mountainous terrain often occur during or after heavy rainfall, resulting in the loss of life and damage to the natural and built environment [19]. Landslide means that part of the soil shears and declines overall oriented the free surface along the slope [21]. The sloped stability is a result of shears strength in soil profile. The shear strength of soil is the maximum shear force resistance properties that still stable without failure or collapse [8]. The behaviour of the unsaturated soil on the natural slope can be changed by the amount of water in the soil. It means when the water content increases in the soil, soil suction is reduced and the shear strength of the soil is also decreased [7]. The rainfall rate also affects to the rise of groundwater levels and increases the pore water pressure. It causes the failure of the slope [3]. The analysis of soil mechanics problem, especially the slope stability analysis is very complicated since the soil properties are heterogeneous substances and granular material. When water flows into the soil, the weight of the soil and water pore pressure are increased but cohesion and friction are decreased. The numerical method can be used to solve and describe this complicated issue. It

helps to analyse the water flow in soil profile and soil stability. Computer simulation and visualization are the tools for supporting people to understand this problem.

Previously, the research of landslides geology disaster, mainly based on mathematical physics [21], combines with Traditional statics [11-18], modern rock mechanics [19, 20], modern mathematical mechanics and nonlinear science theory. Researching with the aid of two-dimensional planar graph, simple 3D modeling and 2D topographic analysis can't provide Image description for Landslide. It is not conducive to in-depth analysis and control strategies of landslide disaster.

The main objective of this paper is to propose a numerical algorithm based on finite element method. It would be used for simulation including a groundwater flow, deformation of slope, distribution of stress and failure criteria. The numerical solution would be shown a yield that depends on the water content for a failure evaluation. We simulate and visualize a soil slope by the SoilFE 1.0 that we develop.

2. THEORY AND RELATED WORKS

In this section, we review the basic ideas behind the construction of generalized finite element approximations in a three-dimensional (3D). The mathematical model of groundwater flow in steady state was obtained by using the principle of mass conservation and the Bernoulli's equation. The theory of elastic material in geotechnical engineering that they include equilibrium, compatibility, orthogonal strain and constitutive law would be used in analysing for the soil shear strength. And we assessment a slope failure with a yield criterion of soil is Drucker-Prager model.

Groundwater Flow Model

This model is used to calculate h be a potential energy or water head in arbitrary position in soil. Assume that the soil permeability in x , y and z are k_x , k_y and k_z respectively. Let v_s be the water supply rate and v_d be infiltration capacity. This gives [22]

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + v_s = 0 \quad (1)$$

with two following boundary conditions

$$h = h_\beta,$$

$$k_x \frac{\partial h}{\partial x} \cdot n_x + k_y \frac{\partial h}{\partial y} \cdot n_y + k_z \frac{\partial h}{\partial z} \cdot n_z + v_d = 0,$$

where h_β is a head on a soil surface and $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ is an unit normal vector of soil surface.

Shear Strength of Soil Model

Let σ_x, σ_y and σ_z be a normal stress in the x , y and z axis respectively, τ_{yx} and τ_{zx} be shear stress in the direction x and act on a plane that has a normal vector in direction y and z

respectively, $\tau_{xy}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$ and τ_{yx} be similarly described, $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ and ε_z be normal strain in the direction x, y and z axis respectively, γ_{yz}, γ_{xz} and γ_{xy} be a shear strain on a plane that has a normal vector in the direction x, y and z respectively, γ_x, γ_y and γ_z be a unit weight in the direction x, y and z axis respectively, u, v and w represent a displacement function in direction x, y and z respectively, E represent a modulus of elastic and let ν represent a Poisson's ratio . In [1] as follows:

A. Equilibrium

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \gamma_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \gamma_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \gamma_z = 0,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

B. Compatibility

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

and compatibility condition

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}$$

C. Orthogonal Strain

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

D. Constitutive law

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Write in abbreviated form as follows:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

The Slope Failure Criteria

A yield surface is a yield function based on an elasto-plastic model that described a soil aspect in drained condition [4]. The analysis was soil drainage is analyzed in terms of stress in the soil when the water was drained out. Thus, analyses of soil used in this condition are effective stress. And the model used to describe the nature of the soil under the water as a Drucker-Prager model [10] has a yield function f as follows:

$$f = \sqrt{3J_2} - M(\theta)(p' + c' \cot \phi') = 0. \quad (4)$$

The configuration of the M models may be selected from the soil under the following conditions. The three-axis compression testing $\theta = -30^\circ$ is given by

$$M(\phi') = M_c = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} \quad (5)$$

and the three-axis tensile testing $\theta = 30^\circ$ is given by

$$M(\phi') = M_E = \frac{6 \sin \phi'}{3 + \sin \phi'}. \quad (6)$$

The Drucker-Prager yield surface is a cone surface. It is in a principle stress space according to the p' , where $p' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3}{3}$ is called an effective mean stress that is increased according to a hydrostatic axis, $J_2 = \frac{1}{6}((\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2)$ is called an effective second stress invariants, σ'_1 , σ'_2 and σ'_3 be an effective principal stress, c' be an effective cohesion intercept and let ϕ' be an effective internal friction.

3. COMPUTATIONAL METHOD

Modeling and Discretization

In this research, we conduct a terrain data to build a finite element model of soil slope by triangulation method and divide a model into rectangular elements and tetrahedron respectively. Let the rectangular element consist of 8 vertices as A, B, C, D, E, F, G and H that are divided into 5 tetrahedron elements shown in figure 1.

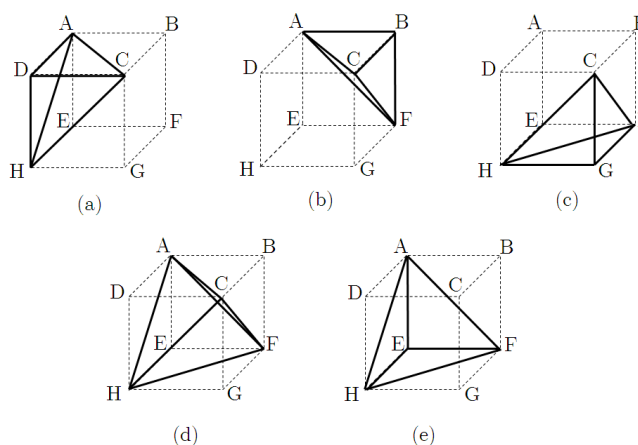


Figure 1. The rectangular is divided into 5 tetrahedron elements

Finite element Equation

The slope model is discretised to be tetrahedral elements that it is shown in figure 2.

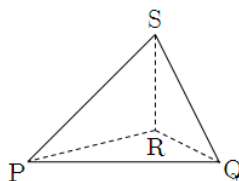


Figure 2. The tetrahedral element

Assume that a tetrahedron element is composed of four vertices including $P(x_P, y_P, z_P)$, $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, $R(x_R, y_R, z_R)$ and $S(x_S, y_S, z_S)$. We obtain a matrix \mathbf{X} ,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_Q & y_Q & z_Q \\ 1 & x_R & y_R & z_R \\ 1 & x_S & y_S & z_S \end{bmatrix}.$$

Groundwater Flow Equation:

The finite element equation from the groundwater flow based on equation (30) is obtained by the variation method as follows:

$$\mathbf{f}_w = \mathbf{k}_w \mathbf{h}. \quad (7)$$

A total force of groundwater flow \mathbf{f}_w can be expanded as below

$$\mathbf{f}_w = \gamma_w \left(\frac{v_d}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(P,Q,R)} \\ A_{(P,Q,S)} \\ A_{(R,P,S)} \\ A_{(Q,R,S)} \end{bmatrix} - \frac{v_s}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \{V\}, \quad (8)$$

where $A_{(P,Q,R)}$, $A_{(P,Q,S)}$, $A_{(R,P,S)}$ and $A_{(Q,R,S)}$ are triangle areas of ΔPQR , ΔPQS , ΔRPS and ΔQRS respectively.

Let \mathbf{k}_w be a stiffness matrix of permeability, where

$$\mathbf{k}_w = \frac{1}{36V} \begin{bmatrix} c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

where c_{ij} is a cofactor of \mathbf{X} and

$$\mathbf{h} = \{h_p \ h_q \ h_r \ h_s\}^T. \quad (10)$$

The rate of water flow which flows through soil element is given by

$$\mathbf{v} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_p \\ h_q \\ h_r \\ h_s \end{bmatrix}. \quad (11)$$

The water volume which flow through soil element per unit time is given by

$$V_w = \frac{1}{2} \sum_{\tau \in \partial S} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\tau)| \cdot A_\tau \quad (12)$$

and the soil weight is given by equation (127),

$$W = \gamma_d V(1-n)(1+w) + \gamma_w V_w, \quad (13)$$

when V_w is a water volume in soil, and γ_w is a unit weight of water at temperature 4 degrees centigrade and pressure 1 atm. approximately 9.81×10^3 newton per cubic meter.

Shear Strength of Soil Equation:

The shear strength of slope analysis must consider a relation between stress and strain. And a finite element equation is obtained by the minimum potential energy given by

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{k}_s \mathbf{d}. \quad (14)$$

All forces acting on the element are given by

$$\mathbf{f}_s = \frac{V}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{Bmatrix} + \mathbf{P}, \quad (15)$$

where γ_x , γ_y and γ_z are units weight of a soil element in direction x, y and z respectively, \mathbf{P} is an external force that it is act in a soil surface and \mathbf{k}_s represent stiffness matrix is given by

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{V}, \quad (16)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & 0 & c_{22} & 0 & 0 & c_{32} & 0 & 0 & c_{42} & 0 & 0 \\ 0 & c_{13} & 0 & 0 & c_{23} & 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & c_{43} & 0 \\ 0 & 0 & c_{14} & 0 & 0 & c_{24} & 0 & 0 & c_{34} & 0 & 0 & c_{44} \\ c_{12} & c_{13} & 0 & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{32} & c_{33} & 0 & c_{42} & c_{43} & 0 \\ c_{12} & 0 & c_{14} & c_{22} & 0 & c_{24} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{42} & 0 & c_{44} \\ 0 & c_{13} & c_{14} & 0 & c_{23} & c_{24} & 0 & c_{33} & c_{34} & 0 & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix},$$

where c_{ij} is a cofactor of \mathbf{X} and

$$\mathbf{d} = \{u_p \quad v_p \quad w_p \quad u_Q \quad v_Q \quad w_Q \quad u_R \quad v_R \quad w_R \quad u_S \quad v_S \quad w_S\}^T.$$

By [3] while deforming of soil, both a pressure in solid phase and fluid phase are varied by a strain change thus $\boldsymbol{\sigma}$ in equation (3) is a total stress. In 1959 Bishop issues a unit effective force of unsaturated soil. That is an equation is defined as follows:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{u}_f, \quad (17)$$

where $\boldsymbol{\sigma}'$ represent Effective Stresses and \mathbf{u}_f represents Pore Fluid Pressure. A relation between a fluid pore pressure u_f and a strain $\boldsymbol{\varepsilon}$ have been respected this equation.

$$\begin{Bmatrix} u_f \\ u_f \\ u_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = K_e \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Write in abbreviated form as follows:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (18)$$

where \mathbf{D}_f represent a pore fluid stiffness matrix and K_e represent an equivalent bulk modulus of pore fluid. And it is following.

$$K_e = \frac{K_s K_f}{K_s n + K_f (1-n)}, \quad (19)$$

where K_s represent a bulk modulus of soil solid particle, K_f represent a bulk modulus of the pore fluid and n represent porosity of soil. From equations (3), (17) and (18) we obtain a total stress equation.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{u}_f = (\mathbf{D}' + \mathbf{D}_f) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (20)$$

From an equation (3) we obtain \mathbf{D} from

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' + \mathbf{D}_f. \quad (21)$$

Algorithm

We conduct above these theories for a simulation and visualization to assessment slope stability. The concrete steps are as follows:

1. Create the finite element model,

- 1.1 Use terrain data to create a soil surface and generate it to a soil volume,
- 1.2 Divide the soil volume into rectangular elements and tetrahedron, respectively,
- 1.3 Calculate a surface area and volume,

2. Simulate the groundwater content,

- 2.1 Initialize and determine boundary conditions,
- 2.2 Determine a water flow force and permeability matrix for each element by equation (8) and equation (9), respectively,
- 2.3 Create a water flow force and permeability matrix of model,
- 2.4 Create equation (7) and solve it determining a head which is an equation (10),
- 2.5 Use the solution from step 2.4 to calculate velocity of a water flow through each element and replace to equation (121) will obtain a flow rate,
- 2.6. Use the result from step 2.5 replace to equation (126) in order to calculate a quantity through element per unit time, weight of water by equation (127) and water content, respectively,

3. Simulation shears strength of soil,

- 3.1 Initialize and determine boundary condition,
- 3.2 Determine an external force and stiffness matrix for each element by equation (169) and equation (16), respectively,

- 3.3 Create an external force and stiffness matrix of model,
- 3.4 Create equation (14) and solve it determining a displacement matrix,
4. Calculate a principle stress by the eigenvalue method,
5. Determine a yield by equation (4).

4. APPLICATION OF THE NUMERICAL METHOD AND DISCUSSION

In this section, simulation and visualization in the study were investigated by using the Lazarus programming namely SoilFE 1.0 software. We would be simulated and visualized including the groundwater flow, deformation and yield. They are proposed as follows.

Groundwater Flow Simulation

Finite Element Model:

The terrain data used in this study that it was collected during the Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) with an approximate resolution of 90 by 90 meters [9]. We choose a data area from 6.683 to 6.693 degrees north latitude and 100.745 to 100.752 degrees east longitude which it has an area about 0.5184 square kilometers. The modeling is created with this terrain data that it is divided into 8 by 8 sub-areas. The parameters of the soil are the modulus of elastic as 10 MPa, Poisson's ratio as 0.35, dry unit weight as 16 kN/m³, porosity as 0.33, Permeability as 54 mm/hr, bulk modulus of soil solid particle as 56.7 GPa and bulk modulus of the pore fluid as 2.16 GPa. It is demonstrated in figure 3.

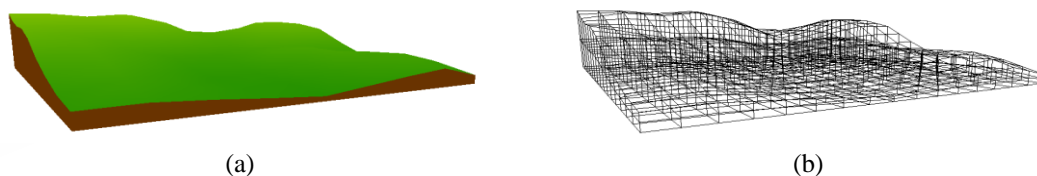


Figure 3. The terrain model for the groundwater flow simulation

This simulation would be shown a groundwater flow feature, relationship of rainfall intensity and average of water content, a distribution of water content data, relationship of a water content and failure criteria. They will show that this numerical method provides a result that it can show the slope stability depend water content.

Boundary Conditions:

A rainfall was applied on the soil surface and drain out of model through side and bottom.

Result:

Simulation and visualization of the groundwater flow in terrain that are received a rain. Simulation shows the results by determining the level of rainfall intensity as 10 mm/hr lasting 72 hours and drain 5 mm/hr. We found that for each a front plane section shows the lowland area has higher water content than the above highland area caused by gravitational force that it show in figure 4.

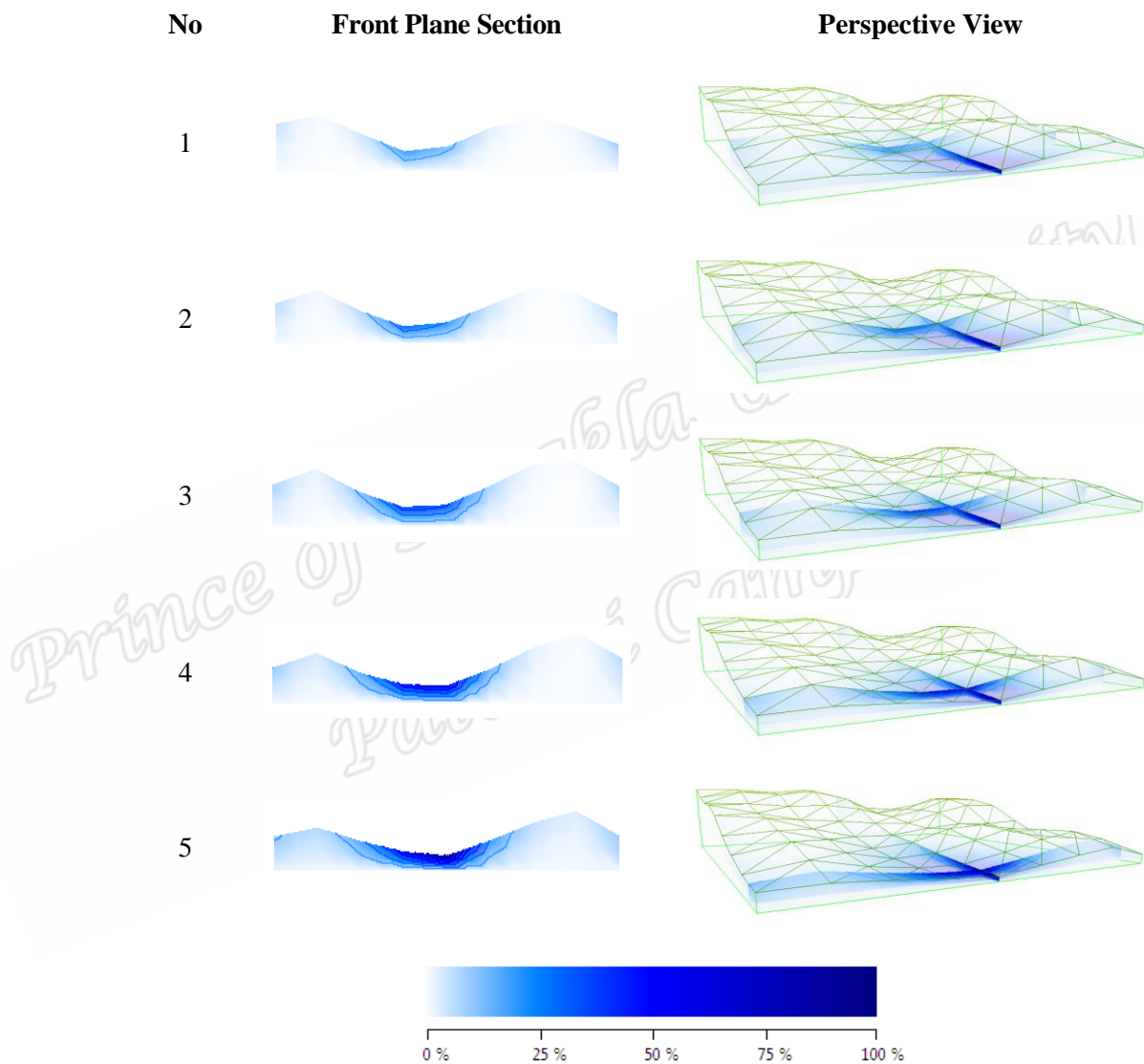


Figure 4. The groundwater flow simulation in each a front plane section

An average of water content when rainfall intensity from 10-100 mm/hr lasting 72 hours with drain as 1, 10, 20, 30 and 40 mm/hr are changed by rainfall intensity demonstrated in figure 5.

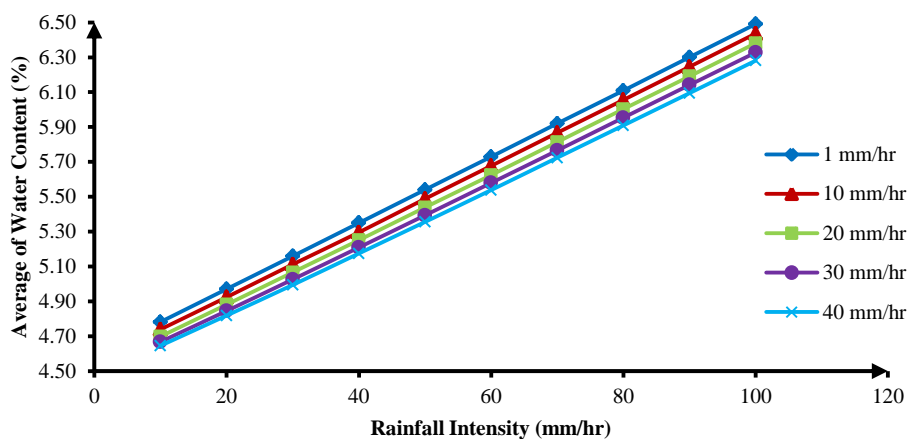


Figure 5. Relationship of a rainfall intensity and average of water content

Figure 5 shows trends of average of water content which it depends on rainfall intensity with a constant drain rate. If the rainfall intensity increase, the average of water content increase. On the other hand, trends of average of water content which it depends on drain rate with constant rainfall intensity. If the drain rate increase, the average of water content decrease.

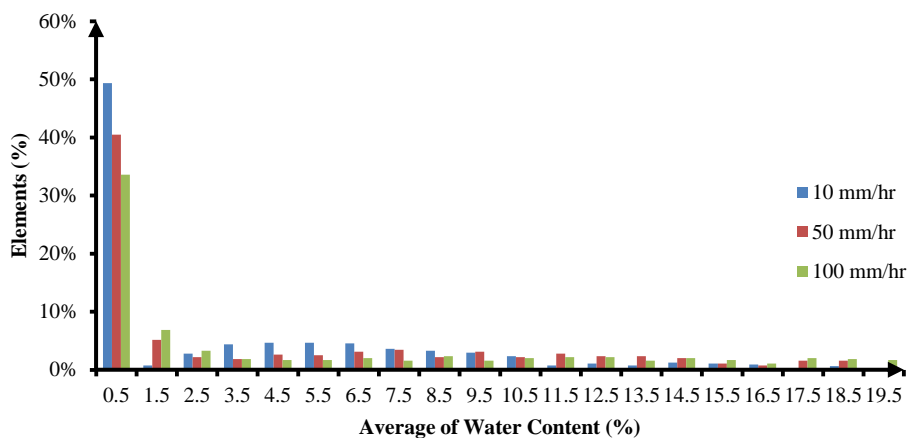


Figure 6. Relationship of an average of water content and a number of elements

Figure 6 illustrates 92% of elements have an average of water content less than 20% and the most elements have an average of water content about 0.0 – 1.0 % when rainfall intensity from 10, 50 and 100 mm/hr lasting 72 hours with drain as 1 mm/hr. However this relation depends on topography and water content.

The Drucker-Prager model that it is a failure criterion would be used to evaluate the slope stability. Parameters of this criterion are cohesion intercept as 0 and angle of internal friction as 30 degrees.

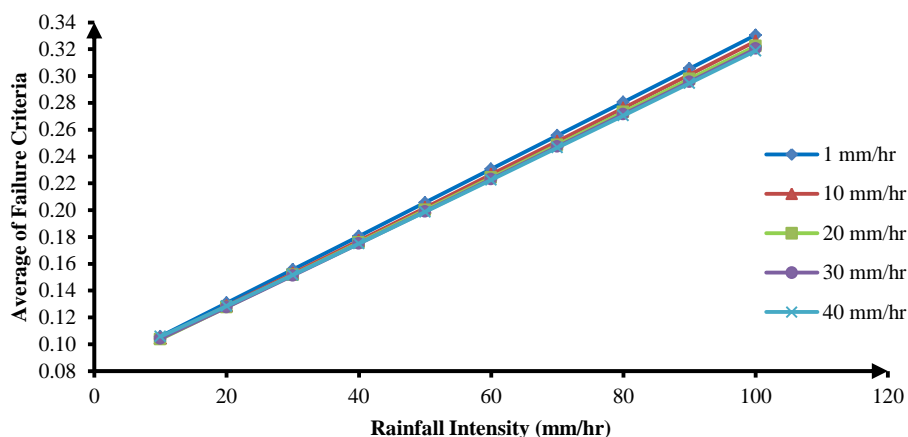


Figure 7. Relationship of a rainfall intensity and average of failure criteria

From figure 7 we observe that an average of failure criteria also depend on a rainfall intensity which is as same as an average of water content in figure 5.

Deformation and yield Simulation

In this simulation, we would like to show a slope deformation and yield which they are a result of an external force act and water content.

Finite Element Model:

We choose a data area that it is sub-area from the groundwater flow simulation. It is an area from 6.685 to 6.689 degrees north latitude and 100.745 to 100.748 degrees east longitude which it has an area about 0.1296 square kilometers. The modeling is created with this terrain data that it is divided into 4 by 4 sub-areas. It is demonstrated in figure 8.



Figure 8. The terrain model for the deformation and yield simulation

The parameters of the soil are the modulus of elastic as 10 MPa, Poisson's ratio as 0.35, dry unit weight as 16 kN/m^3 , porosity as 0.33, Permeability as 54 mm/hr, bulk modulus of soil solid particle as 56.7 GPa, bulk modulus of the pore fluid as 2.16 GPa, Cohesion Intercept as 0 and angle of Internal Friction as 30 degrees.


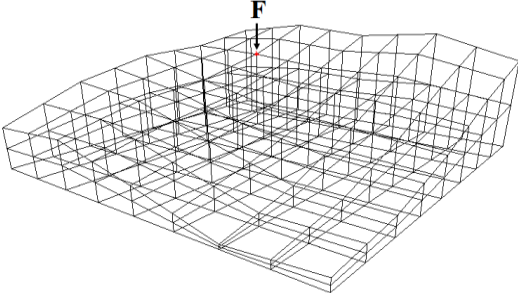
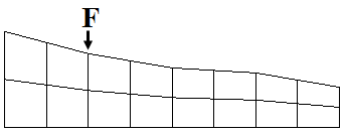
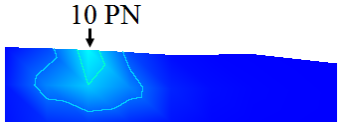
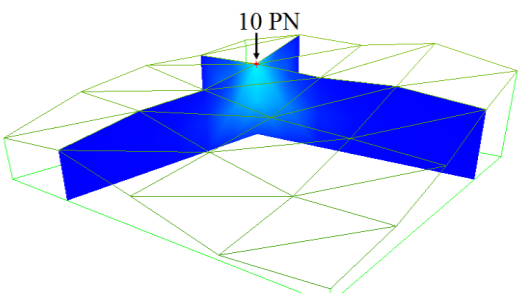
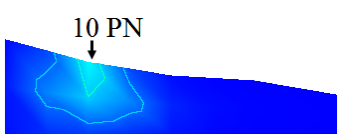
Boundary condition:

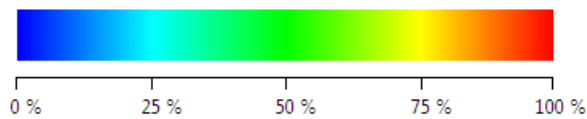
Assume that model sides (front, back, left and right) are supported by a roller and model bottom is supported by link.

Result:

The simulation is shown that if an external force with magnitude as 10, 50, 100, 500 and 900 PN act a soil slope, a soil slope will be deformed as we can see in Table 1.

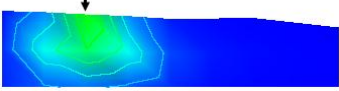
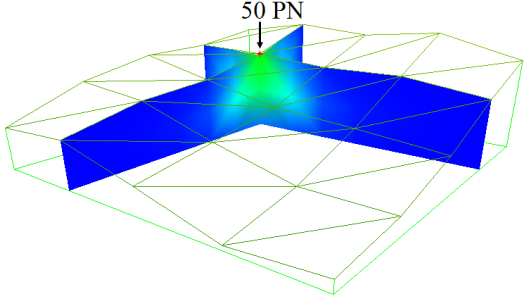
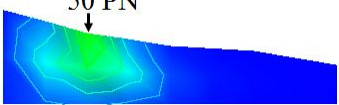
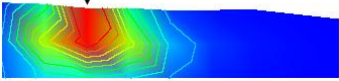
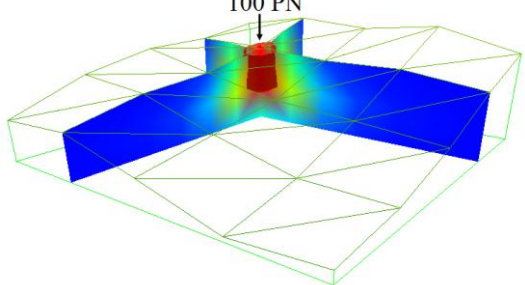
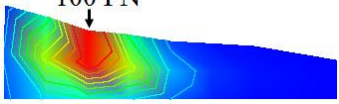
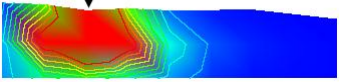
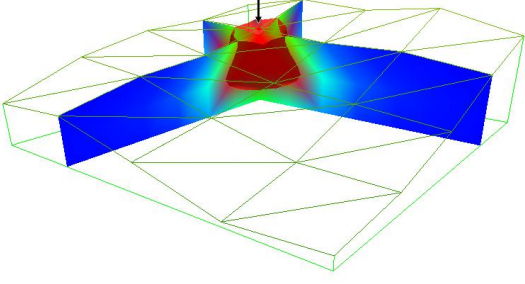
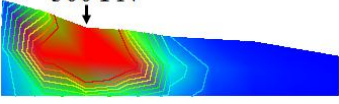
Table 1. Compare the deformation and yields are the result of external force

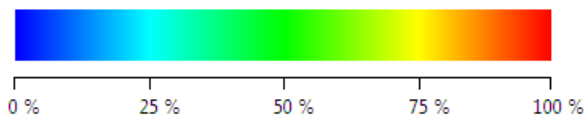
Force	Cross-sectional area	Perspective View
F	 <p>Front View</p>	
	 <p>Side View</p>	
10 PN	 <p>Front View</p>	
	 <p>Side View</p>	



Pr

Table 1. Compare the deformation and yields are the result of external force (Cont.)

Force	Cross-sectional area	Perspective View
50 PN	 <p style="text-align: center;">50 PN ↓</p> <p style="text-align: center;">Front View</p>	 <p style="text-align: center;">50 PN ↓</p>
	 <p style="text-align: center;">50 PN ↓</p> <p style="text-align: center;">Side View</p>	
100 PN	 <p style="text-align: center;">100 PN ↓</p> <p style="text-align: center;">Front View</p>	 <p style="text-align: center;">100 PN ↓</p>
	 <p style="text-align: center;">100 PN ↓</p> <p style="text-align: center;">Side View</p>	
500 PN	 <p style="text-align: center;">500 PN ↓</p> <p style="text-align: center;">Front View</p>	 <p style="text-align: center;">500 PN ↓</p>
	 <p style="text-align: center;">500 PN ↓</p> <p style="text-align: center;">Side View</p>	



Pr

Table 1. Compare the deformation and yields are the result of external force (Cont.)

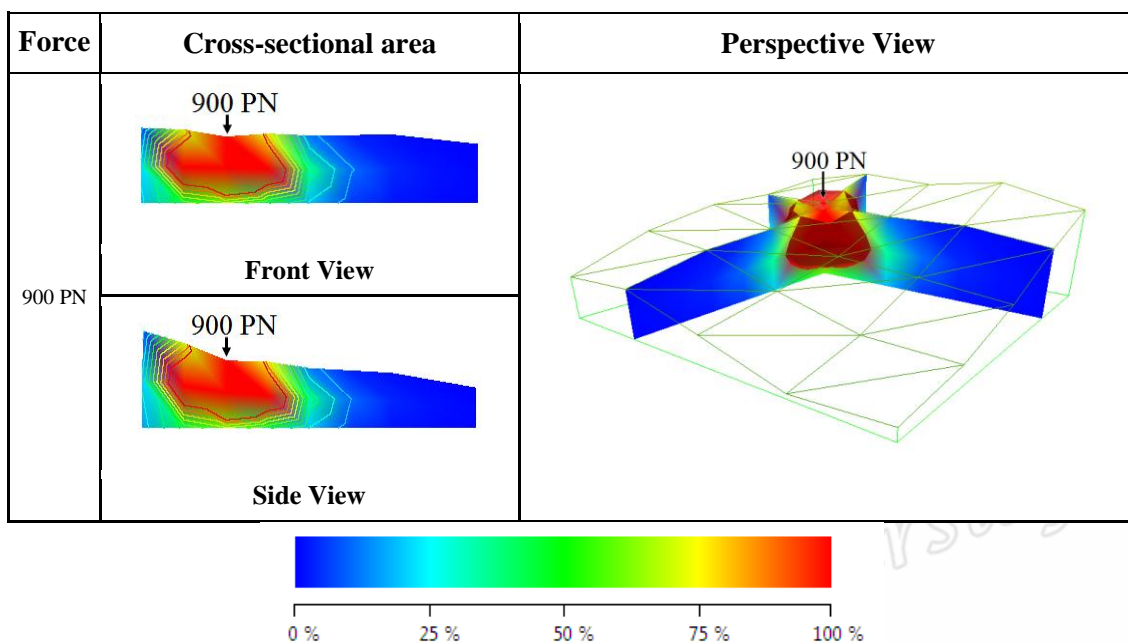


Table 1 shows the result after given the external force with the magnitude 10, 50, 100, 500 and 900 PN in vertical direction that compress on the red point of the sloping soil surface. A red area has the most yields which causes a highest risk to fail.

In order to facilitate the implementation of the calculated shear strength to the assessment of failure of the slope, we used the Drucker-Prager model for explaining the behaviour of soil and evaluate the yield strength. A result of calculation is shown with an equipotential line and surface in red, indicating the areas which high shear and high risk of failure.

Table 2. An equipotential line and surface show a result from a calculation with the Drucker-Prager failure criteria.

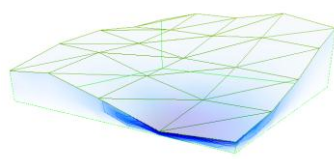
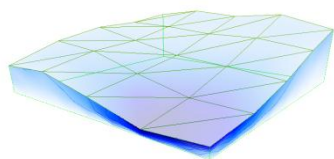
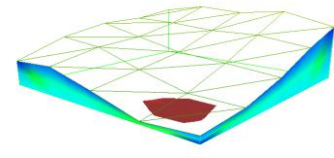
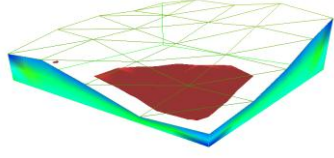
Case	(i)	(ii)
Water Content		
Yield		

Table 2 shows the results of the calculations including case (i) we define rainfall intensity 10 mm/hr and drain 1 mm/hr and case (ii) we define rainfall intensity 50 mm/hr and drain 5 mm/hr.

Case (i) has a result including an average of water content as 5.95×10^{-2} and an average of yield as 4.43×10^{-3} and case (ii) has a result including an average of water content as 1.66×10^{-1} and an average of yield as 5.15×10^{-3} . They are shown that in case (ii), the soil slope is received a rainfall intensity more than case (i). Which means that case (ii) has more an average of yield than case (i) therefore case (ii) has to fail more than case (i).

5. CONCLUSION

The slope stability depending on water content and slope factor has been studied by using the groundwater flow model, shear strength and Drucker-Prager model and all models are derived and implemented by finite element method. The numerical solution illustrates the water flow in the soil slope. From figures 4-7, it could be see that a foot of the hill has a yield more than upland and other areas so that this area has the most opportunities to fail. Moreover, also the upland and lowland area are in neighbourhood of it are affected. Likewise, (Table 1 and 2) the result of this simulation shows that the yield varies according to the water content as if rainfall intensity increases, these areas will raise opportunities to fail.

REFERENCES

1. Phutcharoenthong, D., *The Analysis with Finite Element Method*, Pimdee, Bangkok, 1998.
2. Tunmung, P., *Science and Technology*, 2015, **96**, 184-196.
3. Xinpo, L., Chenghua, W., and Jun, X., *Wuhan University Journal of Natural Science*, 2006, **11**, 825-828.
4. Likitlersuang, S., *Finite Element Method in Geotechnical Engineering*, Chulalongkorn University Press, Bangkok, 2007.
5. Likitlersuang, S., *Soil Mechanics: Plasticity and Critical State Theory*, Chulalongkorn University Press, Bangkok, 2010.
6. Thaiyuenwong, S., *National Conferences Civil Engineer*, 2012, **17**, 1-9.
7. Mairaing, W., *Research Seminar for Highway Development*, 2005, 1-7.
8. Yooyongwattana, W., *Soil Mechanics*, 3th edition, Forepace, Bangkok, 2005.
9. Web Gis, URL: <http://www.webgis.com/srtm3.html>, June 15, 2016.
10. Drucker, D.C., *ASME, Proceedings of the 1st U.S. National Congregation of Applied Mechanics*, 1951, **1**, 487-491.
11. Potts, D.M., and Zdravković, L., *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Theory*, Thomas Telford, New York, 1999.
12. Houlsby, G.T., *Soils and Foundations*, 1986, **26**, 97-101.
13. Cascini, L., Cuomo, S., Pastor, M., Sorbino, G., and Piciullo, L., *Landslides and Engineered Slopes: Protecting Society through Improved Understanding –Eberhardt et al. (eds)*, 2012, 1723-1729.
14. Matsuoka, H., and Nakai, T., *Proceedings of JSCE*, 1974, **232**, 59-70.
15. Popa, H., and Batali., *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, 2010, **5**, 177-186.

16. Georgiadis, K., Ph.D. Thesis, University of London, London, 2003.
17. Lade, P.V., and Duncan, J.M., *Proceedings ASCE, Journal Soil Mechanics and Foundation Division*, 1975, **99**, 1975, 421-427.
18. Hassani, R., Ionescu, I.R., and Lachand – Robert, T., *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, 2004, **32**, 158-169.
19. Pareta, K., and Pareta, U., *International Journal of Science and Technology*, 2012, **2**, 91-104.
20. Chung, C.J. F., and Fabbri, A. G., *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 1999, **65**, 1389-1399.
21. Weihua, H., and Yanyun, L., *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 2012, **46**(1), 445-452.
22. Ross, C. T.F., *Finite Element Methods in Engineering Science*, Wiltshire: Ellis Horwood, New York, 1935.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank the department of Mathematics and Computer Sciences for their assistance and guidance as well as Pattani Bay Watch (PB Watch) at the Prince of Songkla University, Pattani campus. Also the creative area-based collaborative research development project for Songhla province and the southern Thailand empowerment and participation: STEP for financial support.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

ชื่อ-สกุล นายกัณณพนธ์ ธรรมหิเวศ

รหัสประจำตัวนักศึกษา 5520320701

วุฒิการศึกษา

วุฒิ	ชื่อสถาบัน	ปีที่สำเร็จการศึกษา
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่	2541

ทุนการศึกษา

1. ทุนสนับสนุนค่าธรรมเนียมการศึกษาระดับปริญญาโท กองทุนวิจัยคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี
2. ทุนสนับสนุนการวิจัย โดยโครงการเสริมสร้างความเข้มแข็งและการมีส่วนร่วมในภาคใต้ของประเทศไทย STEP
3. ทุนอุดหนุนการวิจัยเพื่อวิทยานิพนธ์ ประจำปี 2556 โดยโครงการความร่วมมือเพื่อการพัฒนาเชิงพื้นที่จังหวัดสงขลาแบบสร้างสรรค์ (MOU ม.อ. – สกว.) มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
4. ทุนสนับสนุนผู้ช่วยวิจัยเพื่อศึกษาในระดับบัณฑิตศึกษาหลักสูตรของมหาวิทยาลัยเครือข่าย ประจำปี 2559 ศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ (CEM)

การตีพิมพ์เผยแพร่ผลงาน

- K. Thumhiwaid, S. Chuai-Aree and A. Phon-On. “Numerical Algorithm for Simulation and Visualization of Landslide by Water Content and Slope Factors” *Proceedings of the 20th International Annual Symposium on Computational Science and Engineer*, 2016, pp. 31 – 44.