การจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร

Finite Beam Element on Nonlinear Two-Parameter Foundation Model

วรเทพ แซ่ล่อง

Worathep Sae-Long

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญา

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of

Master of Engineering in Civil Engineering

Prince of Songkla University

2557

ชื่อวิทยานิพนธ์ การจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร

ผู้เขียน นายวรเทพ แซ่ล่อง

สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

……………………………………...

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ ลิ่มกตัญญู)

คณะกรรมการสอบ

………………………………ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วรพจน์ ประชาเสรี)

……………………………………...กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ ลิ่มกตัญญู)

……………………………………...กรรมการ

(ดร. วิชัยรัตน์ แก้วเจือ)

……………………………………...กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. กิตติศักดิ์ ขันติยวิชัย)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา (วิศวกรรมโครงสร้าง)

….…………………………..…….…………..

(รองศาสตราจารย์ ดร.ธีระพล ศรีชนะ)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

ขอรับรองว่า ผลงานวิจัยนี้มาจากการศึกษาวิจัยของนักศึกษาเอง และได้แสดงความขอบคุณบุคคลที่มีส่วนช่วยเหลือแล้ว

ลงชื่อ..
(รองศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ ลิ่มกตัญญู)
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

ลงชื่อ..
(นาย วรเทพ แซ่ล่อง)
นักศึกษา

ข้าพเจ้าขอรับรองว่า ผลงานวิจัยนี้ไม่เคยเป็นส่วนหนึ่งในการอนุมัติปริญญาในระดับใดมาก่อน และไม่ได้ถูกใช้ในการยื่นขออนุมัติปริญญาในขณะนี้

ลงชื่อ…………………………………………….

(นาย วรเทพ แซ่ล่อง)

นักศึกษา

ชื่อวิทยานิพนธ์ การจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร
ผู้เขียน นายวรเทพ แซ่ล่อง
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา (วิศวกรรมโครงสร้าง)
ปีการศึกษา 2556

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร ภายใต้ทฤษฎีการวิเคราะห์คานของ Euler-Bernoulli และกำหนดให้ดินหรือฐานรากมีสมมุติฐานอยู่ในระนาบความเครียด โดยที่ชิ้นส่วนคานของปัญหาได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัด ผลตอบสนองของปัญหาได้รับจากการวิเคราะห์ด้วยเอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี ซึ่งฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวสร้างจากสมการเชิงเอกพันธ์ที่มาจากสมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหา โดยที่ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กรณี ซึ่งมาจากเงื่อนไขค่าตัวแปรในการแก้หาผลเฉลยของสมการเชิงเอกพันธ์ เนื่องจากค่าตัวแปรที่ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอาจมีค่าไม่คงที่ วิธีการหาค่าเฉลี่ยจึงถูกใช้ เพื่อประมาณค่าตัวแปรก่อนนำไปใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอตัวอย่างเพื่อพิสูจน์ประสิทธิ์ภาพและความแม่นยำของแบบจำลอง

คำหลัก : ชิ้นส่วนคาน, ฐานรากประเภท 2 ตัวแปร, หลักการของงานเสมือน, ฐานราก Pasternak, การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้น, ฐานราก Winkler-Pasternak

Thesis Title Finite Beam Element on Nonlinear Two-Parameter Foundation Model

Author Mr. Worathep Sae-Long

Major Program Civil Engineering (Structural Engineering)

Academic Year 2013

ABSTRACT

This thesis presents an inelastic beam element resting on two-parameter foundation. It is based on Euler-Bernoulli beam theory and an assumption of plane strain for soil or foundation. The element is derived from a displacement-based formulation. The nonlinear responses of the problem are obtained from the analysis with the improved displacement shape functions elements. The improved displacement shape functions are derived from homogeneous solution of the governing differential equilibrium equation. It can be divided to three cases for the homogeneous solutions. Because the values of the beam and foundations parameters may not be constant, the average technique will be used to approximate for the improved displacement shape functions. The numerical examples are used to verify the accuracy and the efficiency of the beam element model.

Keywords : beam elements, two-parameter foundation, virtual displacement principle, Pasternak foundation, nonlinear analysis, Winkler-Pasternak foundation

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี ด้วยความกรุณาให้คำปรึกษาเสนอแนะ สละเวลาในการสั่งสอนพื้นฐานทางทฤษฎี โปรแกรมในการทำงานวิจัย และจัดเตรียมบทความวิชาการที่เกี่ยวข้องงานวิจัยในเรื่องนี้ให้โดย รองศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ ลิ่มกตัญญู ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนันท์ ชุปอุปการ ที่กรุณาให้ข้อเสนอชี้แนะเพิ่มเติมในการทำวิทยานิพนธ์นี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณ คณะกรรมการสอบทุกท่านที่ทำให้วิทยานิพนธ์นี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณ พี่ๆธุรการ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ทุกคนที่ช่วยดำเนินเรื่อง การส่งเอกสารต่างๆที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้

ขอขอบคุณ บัณฑิตวิทยาลัย คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ที่ได้ให้การสนับสนุนทุนการศึกษา ซึ่งได้แก่ ทุนบัณฑิตศึกษาวิศวกรรมและทุนอุดหนุนการวิจัยเพื่อวิทยานิพนธ์ ทำให้สามารถทำงานวิจัยได้อย่างราบรื่น

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณบิดามารดาและเพื่อนๆที่เป็นกำลังใจ พร้อมทั้งให้ความช่วยเหลือซึ่งเป็นแรงผลักดันที่สำคัญที่ทำให้เกิดวิทยานิพนธ์เล่มนี้

วรเทพ แซ่ล่อง

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญ (ต่อ)

รายการภาพประกอบ

รูปที่ **หน้า**

รายการภาพประกอบ (ต่อ)

รูปที่ หน้า

รายการภาพประกอบ (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

รายการภาพประกอบ (ต่อ)

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของการวิจัย

การก่อสร้างเกิดขึ้นตั้งแต่อดีตและมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่องมาจนถึงปัจจุบัน โครงสร้างอาคารหลักๆ โดยทั่วไปจะทำหน้าที่รับและต้านทานน้ำหนักที่กระทำต่อโครงสร้างอาคาร ซึ่งประกอบไปด้วยฐานราก คาน และเสา พฤติกรรมทางกลศาสตร์ของโครงสร้างอาคารเหล่านี้ เมื่อมีแรงมากระทำบนชิ้นส่วน แรงจะถูกส่งถ่ายจากเสาไปยังคาน และคานส่งถ่ายไปยังฐานราก ตามลำดับ ในการออกแบบโครงสร้างอาคารจะต้องออกแบบให้ต้านทานแรงกระทำเพื่อไม่ให้เกิดการวิบัติ ค่าที่นำมาใช้ในการออกแบบจึงมีความสำคัญในการเลือกชิ้นส่วนโครงสร้างอาคารที่นำมาใช้ในการก่อสร้างจริง ในบางกรณีค่าที่ใช้ในการออกแบบมีการประมาณค่าที่มากเกินไป ส่งผลให้ชิ้นส่วนของโครงสร้างอาคารที่ใช้ในการก่อสร้างจริงมีขนาดใหญ่เกินความจำเป็น เพื่อทำให้โครงสร้างอาคารมีความถูกต้อง ปลอดภัย และประหยัดมากที่สุด จึงมีการศึกษาปัญหาดังกล่าวอย่างต่อเนื่องมาจนถึงปัจจุบัน

ปัญหาคานที่อยู่วางอยู่บนดินหรือฐานรากเป็นหนึ่งในปัญหาที่กล่าวมาข้างต้น เนื่องจากพฤติกรรมของดินมีความซับซ้อนในการจำลองเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อจะได้มาซึ่งผลตอบสนองของแบบจำลองที่มีประสิทธิภาพและแม่นยำที่สุดเพื่อจะนำมาใช้ในการออกแบบชิ้นส่วนโครงสร้างอาคาร จึงทำให้มีนักวิจัยทำการศึกษาและพัฒนาต่อเนื่องมาจนถึงปัจจุบัน

ในด้านการออกแบบ พฤติกรรมการวิบัติในกรณีของชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนดินหรือฐานราก โดยทั่วไปการวิบัติจะเกิดขึ้นกับคานก่อนที่ฐานรากจะเกิดการวิบัติ ซึ่งก่อนจะเกิดการวิบัติของคานนั้น จะเกิดการโก่งตัว (Deflection of Beam) เนื่องมาจากหลายปัจจัย ได้แก่ คุณสมบัติของดิน คุณสมบัติของคาน และแรงที่กระทำต่อคาน เป็นต้น ดังนั้นในการวิเคราะห์ได้มีการเพิ่มสมมุติฐานให้ฐานรากมีความแข็งแรงเพียงพอต่อการรับแรงกระทำที่ส่งถ่ายมาและแรงที่ส่งถ่ายอยู่ในรูปของสมการเส้นตรงโดยแรงต้านทานที่ฐานรากกระทำต่อคานเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ

การโก่งตัวของคาน ซึ่งเป็นสมมุติฐานพื้นฐานในการวิเคราะห์ปัญหางานทางด้านธรณีวิศวกรรม วิศวกรรมขนส่ง และวิศวกรรมโครงสร้าง ทำให้เกิดการวิจัยแบบจำลองขึ้น

1.2 การตรวจเอกสาร

จากที่กล่าวมาข้างต้นปัญหาคานที่วางอยู่บนดินหรือฐานรากเป็นปัญหาที่มีการทำการศึกษาและพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อใช้แก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในงาน สามารถยกตัวอย่างได้แก่ งานอุโมงค์ใต้ดิน (Techavorasinskun และ Chub-Uppakarn, 2010) งานผิวทาง (Kim และ Yang, 2010 และ Patil และ Sawant, 2010) ฐานรากตื้น (Limkatanyu และคณะ, 2012 a) และงานเสาเข็มในดิน (Chore และคณะ, 2010) เป็นต้น โดยที่ปัญหาดังกล่าวต้องอาศัยทฤษฎีและสมมุติฐานบางประการในการวิเคราะห์หาผลตอบสนอง ซึ่งได้มีนักวิจัยทำการนำเสนอได้แก่

1.2.1 ทฤษฎี

Euler-Bernoulli ได้เสนอทฤษฎีในการวิเคราะห์คานซึ่งพิจารณาเพียงการเปลี่ยนแปลงรูปเนื่องจากผลของการดัด (Flexural Deformation) โดยมีสมมุติฐานคือ ระนาบของหน้าตัดคานยังคงเป็นระนาบเดิมหลังจากเกิดการเปลี่ยนรูปเนื่องจากการดัด (Plane Section Remain Plane) และระนาบยังคงตั้งฉากกับหน้าตัดตามแกนแนวยาวของคานที่เราพิจารณาก่อนเกิดการเปลี่ยนรูปเนื่องจากการดัด (Plane Section Normal to the Longitudinal Axis)

Terzaghi (1955) ได้เสนอทฤษฎีการตอบสนองของฐานราก (Subgrade Reaction Theory) ซึ่งมีสมมุติฐานง่ายๆมาจากกฎของฮุค (Hooke's Law) นอกจากนี้ Terzaghi ได้เสนอค่าสัมประสิทธิ์การต้านทานของดินหรือฐานราก หรือค่าโมดูลัสต้านทานของดิน (Modulus of Subgrade) ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาทั่วไปๆที่เกี่ยวข้องกับดินหรือฐานรากได้

1.2.2 แบบจำลองพฤติกรรมดินและฐานรากอีลาสติก (Elastic Foundation Models)

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อจำลองพฤติกรรมชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนดินหรือฐานรากซึ่งค่อนข้างซับซ้อน จึงมีนักวิจัยทำการศึกษาอย่างต่อเนื่อง โดยสามารถจำแนกแบบจำลองดังกล่าวออกเป็น 2 กลุ่มหลักๆ (Dutta และคณะ, 2002) ได้แก่ แบบจำลองต่อเนื่อง (Continuum Models) และแบบจำลองสปริง (Selvadurai, 1979) ซึ่งในงานวิจัยนี้สนใจเพียงแบบจำลองสปริง โดยมีนักวิจัยได้เสนอดังต่อไปนี้

Winkler (1867) ได้เสนอแบบจำลองพฤติกรรมของดินและฐานรากในรูปของแบบจำลองอีลาสติกสปริงซึ่งมีความอิสระต่อกัน โดยแบบจำลองดังกล่าวสมมุติให้แรงทุกๆจุดที่กระทำบนดินหรือฐานรากเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าการกระจัดที่เกิดขึ้นในดิน (Soil Displacement) เนื่องจากแบบจำลองอีลาสติกสปริงเป็นแบบจำลองที่จำลองพฤติกรรมดินหรือฐานรากด้วยค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทานของดินหรือค่าโมดูลัสต้านทานของดินเพียงแค่ตัวแปรเดียว ซึ่งมีความอิสระต่อกัน ทำให้เมื่อเกิดการทรุดตัวของดิน ดินบริเวณที่มีแรงมากระทำที่จุดนั้นๆจะเกิดการทรุดตัวที่บริเวณจุดนั้นเท่านั้น บริเวณรอบๆไม่เกิดการทรุดตัว ในความเป็นจริงดินเมื่อเกิดการทรุดตัว ดินจะเกิดการทรุดตัวแบบไม่อิสระต่อกัน เมื่อมีแรงมากระทำ ดินบริเวณรอบๆจะเกิดการทรุดตัวด้วยเช่นกัน

Filonenko-Borodich (1940), Pasternak (1954), Kerr (1964), Vlasov และ Leontiev (1966) ได้เสนอแบบจำลองพฤติกรรมของดินและฐานรากประเภท 2 ตัวแปร เพื่อชดเชยข้อเสียและปรับปรุงแบบจำลองของ Winkler ให้เสมือนจริงมากยิ่งขึ้น โดยการเพิ่มตัวแปรเข้ามาเพื่อจำลองพฤติกรรมของดินให้มีความต่อเนื่องนอกเหนือจากค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทานของดินหรือค่าโมดูลัสต้านทานของดินของแบบจำลอง Winkler ที่ยังคงมีการใช้งานอยู่ Filonenko-Borodich ได้เสนอแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากอีลาสติกประเภท 2 ตัวแปรโดยมีสมมุติฐานคือ ส่วนบนและล่างของแบบจำลองสปริงเชื่อมต่อกับแผ่นอีลาสติก (Elastic Membrane) ที่เคลื่อนตัวด้วยค่าแรงดึง T ต่อมา Pasternak ได้เสนอแบบจำลองดินหรือฐานรากโดยสมมุติให้มีผลเนื่องจากแรงเฉือนระหว่างแบบจำลองสปริงของ Winkler ทำให้แบบจำลองดังกล่าวมีความต่อเนื่องขึ้น แบบจำลองต่อมาถูกเสนอโดย Kerr หรือเป็นที่รู้จักในชื่อ “Generalized Foundation” โดยสมมุติให้แบบจำลองพฤติกรรมดินหรือฐานราก นอกจากมีแบบจำลองสปริงของ Winkler รับแรงภายนอกได้แล้วยังมีแบบจำลองสปริงต้านทานการบิด โดยที่การบิดเป็นสัดส่วนโดยตรงกับมุมบิด แบบจำลองสุดท้ายคือ Vlasov และ Leontiev ได้เสนอแบบจำลองฐานราก

ประเภท 2 ตัวแปรโดยกำหนดให้ดินหรือฐานรากมีพฤติกรรมเป็นอีลาสติกและระยะโก่งที่เกิดขึ้นในดินหรือฐานรากขึ้นอยู่กับโหมดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (Mode shapes) โดยแบบจำลองไม่คิดผลของความเครียดเนื่องจากแรงเฉือนในดินและกำหนดให้แรงเฉือนที่มาจากดินรอบข้างเขียนในรูปของตัวแปร γ ซึ่งอธิบายการเปลี่ยนรูปในดินหรือฐานราก

แบบจำลองที่กล่าวมาข้างต้นจัดเป็นแบบจำลองประเภท 2 ตัวแปรซึ่งถูกพัฒนามาจากแบบจำลองของ Winkler นอกจากนี้ยังมีการพัฒนาการจำลองพฤติกรรมของดินหรือฐานรากโดยการเพิ่มตัวแปรอีกหนึ่งตัวเข้าไปเพื่อทำให้แบบจำลองใกล้เคียงสภาพจริงมากยิ่งขึ้น แบบจำลองดังกล่าวถูกจัดเป็นแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากอีลาสติกประเภท 3 ตัวแปร (Beam Element on Three-Parameter Elastic Foundation) ซึ่งถูกพัฒนาโดย Hetenyi (1950), Kerr (1965) และ Reissner (1967) โดยมีนักวิจัยทำการศึกษาและพัฒนาต่อ คือ Avramidis และ Morfidis (2006) และ Morfidis (2007)

1.2.3 ผลเฉลยและวิธีการหาผลตอบสนองของแบบจำลองพฤติกรรมดินและฐานรากอีลาสติก (Solution Method of Elastic Foundation Models)

เนื่องจากแบบจำลองพฤติกรรมของดินหรือฐานรากมีความซับซ้อนในการหาค่าผลเฉลย วิธีการประมาณด้วยระเบียบเชิงตัวเลข (Numerical Methods) เป็นวิธีหนึ่งที่นิยมในอดีตจนกระทั่งในช่วงปี ค.ศ. 1960 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ ได้ถูกนำมาใช้งานพร้อมกับการพัฒนาทางด้านโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้เจริญไปอย่างมาก ส่งผลให้การนำทั้ง 2 อย่างมาประยุกต์ใช้งานเพื่อแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมเป็นที่แพร่หลาย และต่อมาได้มีการนำวิธีดังกล่าวหาค่าของฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแม่นยำ (Exact Shape Functions) และผลตอบสนองของปัญหาได้สำเร็จโดยมีผู้ทำการวิจัยได้แก่ Ting และ Mockry (1984), Eisenberger และ Yankelevsky (1985), Chiwanga และ Valsangkar (1988), Gendy และ Saleeb (1999), Lee และคณะ (2003), Taciroglu และคณะ (2006), Celep และ Demir (2007), Zhang และคณะ (2009), Kim และ Chung (2009), Kim และ Yang (2010), Chore และคณะ (2010), Raychowdhury (2011) และ Limkatanyu และคณะ (2013 b) เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีนักวิจัยทำการศึกษาและนำเสนอผลตอบสนองของปัญหาโดยสามารถยกตัวอย่างได้แก่

Sea-Long และคณะ (2013) ได้นำเสนอเมทริกซ์การอ่อนตัวแม่นยำ (Exact Flexibility Matrix) ของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานราก Winkler (Bar Element on Winkler Foundation) ภายใต้การวิเคราะห์ด้วยวิธีทฤษฎีแรง (Force-Based Derivation)

Limkatanyu และคณะ (2012 b) ได้นำเสนอฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแม่นยำ (Exact Displacement Functions) ใช้แก้ปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากอีลาสติกประเภท 1 ตัวแปรหรือแบบจำลองของ Winkler ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่กระทำตลอดทั้งความยาวคาน โดยที่ Limkatanyu และคณะ ใช้หลักการของแรงเสมือน (Principle of Virtual Force) ในการสร้างเมทริกซ์ความอ่อนตัวแม่นยำ (Exact Flexibility Matrix) ซึ่งอินเวอร์สได้เมทริกซ์ความแข็งแกร่งแม่นยำ ซึ่งใช้สำหรับแก้ปัญหาดังกล่าว

Zhaohua และ Cook (1983) พัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ ใช้แก้ปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากอีลาสติกประเภท 2 ตัวแปร นอกจากนี้พวกเขายังได้นำเสนอฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแม่นยำ และฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ประมาณด้วยสมการพหุนามกำลังสาม (Cubic Displacement Functions) ของปัญหาภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่กระทำสม่ำเสมอตลอดทั้งความยาวคาน

Vallabhan และ Das (1988) ได้เสนอวิธีการหาค่าตัวแปรที่จำลองลักษณะพฤติกรรมของดินหรือฐานรากโดยใช้กระบวนการทำซ้ำเป็นวิธีที่ใช้ร่วมกับแบบจำลองของ Vlasov ซึ่งเรียกแบบจำลองนี้ว่า “แบบจำลองฐานรากของ Vlasov ที่ถูกปรับปรุง (Modifed Vlasoc Foundation)” (Vallabhan และ Das, 1991) ภายใต้สมมุติฐานดินหรือฐานรากมีพฤติกรรมเป็นสมการเส้นตรง ไอโซโทรปิค (Isotropic) และมีคุณสมบัติเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogeneous Properties)

Razaqpur และ Shah (1991) สร้างระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ใหม่เพื่อขจัดข้อจำกัดในการหาผลเฉลย เช่น การรวมกันระหว่างตัวแปรเนื่องจากคานและฐานรากในปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากประเภท 2 ตัวแปร โดยที่พวกเขาได้เสนอผลเฉลยที่แก้สมการจากสมการเชิงอนุพันธ์ (Governing Differential Equation) ที่สอดคล้องกับแรงกระทำในรูปแบบต่างๆ

Gülkan และ Alemdar (1999) ได้เสนอผลเฉลยฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแม่นยำ (Exact Displacement Shape Functions) จากการวิเคราะห์ปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากอีลาสติกประเภท 2 ตัวแปร (Generalized Two-Parameter Elastic Foundation) ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 กรณี ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของตัวแปรคุณสมบัติของคานและดิน โดยในการศึกษามุ่งเน้นไปที่การสร้างเมทริกซ์ความแข็งแกร่งแม่นยำ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์เมทริกซ์ความแข็งแกร่งแม่นยำได้รับจากฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแม่นยำโดยตรง นอกจากนี้ยังมุ่งเน้นในส่วนของผลตอบสนองจากการรับน้ำหนักบรรทุกในรูปแบบต่างๆ ค่าสัมประสิทธิ์เมทริกซ์ต้านทานมวลและเรขาคณิต

1.2.4 แบบจำลองพฤติกรรมดินและฐานรากไร้เชิงเส้น (Nonlinear Foundation Models)

เนื่องจากพฤติกรรมของดินหรือฐานรากในสภาพความเป็นจริงไม่ได้มีพฤติกรรมอยู่ในช่วงอีลาสติกเท่านั้น ทำให้มีนักวิจัยทำการศึกษาและทำการแสดงการวิเคราะห์ด้วยวิธีต่างๆ เพื่อหาผลตอบสนองของปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานราก โดยกำหนดให้พฤติกรรมของดินหรือฐานรากไม่ได้อยู่ในช่วงอีลาสติกอย่างเดียว แบบจำลองดังกล่าวถูกเรียกว่า “แบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้น (Beam Element on Inelastic Foundation Models)” ผู้ที่ทำการศึกษาได้แก่ Sharma และ Dasgupta (1975), Beaufait และ Hoadley (1980), Yankelevsky และคณะ (1989), Kaliszky และ Logo (1994), Celep และ Demir (2005), Silveira และคณะ (2008), Zhang (2008), Mullapudi และ Ayoub (2010 a), Sapountzakis และ Kampitsis (2010), Sapountzakis และ Kampitsis (2011 a), Sapountzakis และ Kampitsis (2011 b) และ Sapountzakis และ Kampitsis (2013)

โดยเทคนิคที่น่าสนใจในการวิเคราะห์เพื่อหาผลตอบสนองของปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นได้แก่

Mullapudi และ Ayoub (2010 b) ได้เสนอการวิเคราะห์แบบจำลองคานบนฐานไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร (Nonlinear Finite Element Modeling of Beam on Two-Parameter Foundation) โดยใช้วิธีผสม (Mixed Formulation) ซึ่งถูกเสนอโดย Ayoub และ Filippou (2000), Ayoub (2001) และ Ayoub (2003) ประสิทธิภาพของวิธีนี้ขึ้นกับการประมาณฟังก์ชันของแรงและการกระจัด โดยที่ค่าตัวแปรเนื่องจากดินหรือฐานรากทั้ง 2 ตัวแปรสามารถหาค่าได้จากเทคนิคกระบวนการทำซ้ำ (Iterative Technique) โดยที่สำหรับพฤติกรรมของดินหรือฐานรากอยู่ภายใต้สมมุติฐานอยู่ในระนาบความเครียด (Plane Strain) ซึ่งได้มาจากการมองการแบ่งฟังก์ชันการกระจัดในรูปของโหมดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในแบบจำลองของ Vlasov และ Leontiev ภายใต้หลักการวิเคราะห์ปัญหาด้วยทฤษฎีกลศาสตร์ความต่อเนื่อง (Continuum Mechanics) เป็นพฤติกรรมแรงที่ดินหรือฐานรากกระทำต่อคาน

Limkatanyu และคณะ (2013 a) ได้เสนอวิธีการประมาณตัวแปรที่ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันรูปร่างแม่นยำ โดยการใช้วิธีหาค่าเฉลี่ยตัวแปรนั้นก่อนนำไปใช้ประมาณค่าฟังก์ชันรูปร่าง ซึ่งได้มาจากการวิเคราะห์ภายใต้รูปของสมการเอกพันธ์เชิงอนุพันธ์ (Homogeneous Form) ของสมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ (Governing Differential Equilibrium Equation) ของปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากของ Winkler ซึ่งจากงานวิจัยของพวกเขาได้นำเสนอฟังก์ชัน

การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของการกระจัดที่ได้มาจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี (Improved Displacement Shape Functions) ในปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากของ Winkler โดยกำหนดให้ความสัมพันธ์ระหว่างแรง (Force) กับค่าการกระจัด (Deformation) ของคานและดินในรูปของสมการไร้เชิงเส้น (Nonlinear Equation) จากการวิเคราะห์ผลตอบสนองของปัญหาพบว่า วิธีนี้เป็นวิธีหนึ่งที่มีประสิทธิภาพและให้ค่าแม่นยำเมื่อเทียบกับการประมาณผลตอบสนองด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์

ในงานวิจัยนี้เสนอแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร โดยงานวิจัยนี้สนใจเพียงแบบจำลองของ Pasternak ซึ่งถูกเรียกว่า “ฐานราก Winkler-Pasternak” จากแบบจำลองดังกล่าว แบบจำลองสปริงของฐานราก Winkler ถูกยึดติดกับชั้นแรงเฉือน (Shear Layer) ที่สามารถส่งถ่ายแรงเฉือนได้ไปยังชิ้นส่วนคานได้

1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. สร้างแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภทตัวแปร 2 ตัวแปร (Beam Element on Nonlinear Two-Parameter Foundation Model) โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ในการสร้างแบบจำลอง
2. เปรียบเทียบผลตอบสนองของแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร ระหว่างการใช้เอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ (Improved Displacement Shape Functions) กับการใช้เอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการพหุนามกำลังสาม (Cubic Polynomials Interpolation Functions) หรือ Hermitian Polynomials

1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น

เนื่องจากมีปัจจัยหลายปัจจัยเข้ามาเกี่ยวข้องในการวิเคราะห์และเป็นสมมุติฐานที่สำคัญสำหรับงานวิจัยนี้ ซึ่งมาจากทฤษฎีต่างๆที่เกี่ยวข้อง โดยอ้างอิงจากการทบทวนวรรณกรรมของนักวิจัยที่ได้ทำการนำเสนอและตีพิมพ์ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้กำหนดสมมุติฐานคือ

1. ในการวิเคราะห์ชิ้นส่วนคานเป็นไปตามทฤษฎีของ Euler-Bernoulli ระนาบของหน้าตัดคานยังคงเป็นระนาบเดิมตามแกนแนวยาวของคานหลังจากเกิดการเปลี่ยนรูปเนื่องจากการดัดและระนาบยังคงตั้งฉากกับหน้าตัดที่พิจารณาก่อนเกิดการเปลี่ยนรูปเนื่องจากการดัดและไม่คิดผลของการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือน

2. พิจารณาแบบจำลองคานที่อยู่ในช่วง 0 ถึง L โดยที่ L คือความยาวของคาน

3. พฤติกรรมของดินที่พิจารณาเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogeneous)

4. ความเค้นและความเครียดของดินและคุณสมบัติของคานมีสัมพันธ์เชิงเส้นเป็นไปตามกฎของฮุคในช่วงของอีลาสติก

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

1. ศึกษาเนื้อหา ทฤษฎี เอกสารและสิ่งตีพิมพ์ต่างๆที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย

2. ศึกษาวิธีการเขียนภาษาทางคอมพิวเตอร์ สำหรับใช้ในการเขียนโปรแกรมในการวิเคราะห์ปัญหาและศึกษาวิธีใช้โปรแกรมในการวิเคราะห์โครงสร้างที่ใช้ในงานวิจัย

3. ทำการเขียนโปรแกรมเพื่อสร้างแบบจำลองในการวิเคราะห์ปัญหาคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภทตัวแปร 2 ตัวแปร

4. ทำการเปรียบเทียบผลตอบสนองที่ได้จากงานวิจัยกับแบบจำลองคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปรที่ใช้สมการพหุนามกำลังสามในการประมาณค่าฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงการกระจัด (Displacement Interpolation Functions)

5. สรุปผลที่ได้จากการศึกษา

1.6 ประโยชน์ของงานวิจัย

1. ใช้เป็นค่าตัวแทนผลตอบสนองที่ใช้ออกแบบในปัญหาโครงสร้างชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนดินหรือฐานราก

2. สามารถนำงานวิจัยไปประยุกต์ใช้ร่วมกับโปรแกรมการคำนวณโครงสร้างในการออกแบบชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนดินหรือฐานราก

3. เป็นแบบจำลองพื้นฐานในการศึกษาและพัฒนาแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากที่มีความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้น

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย

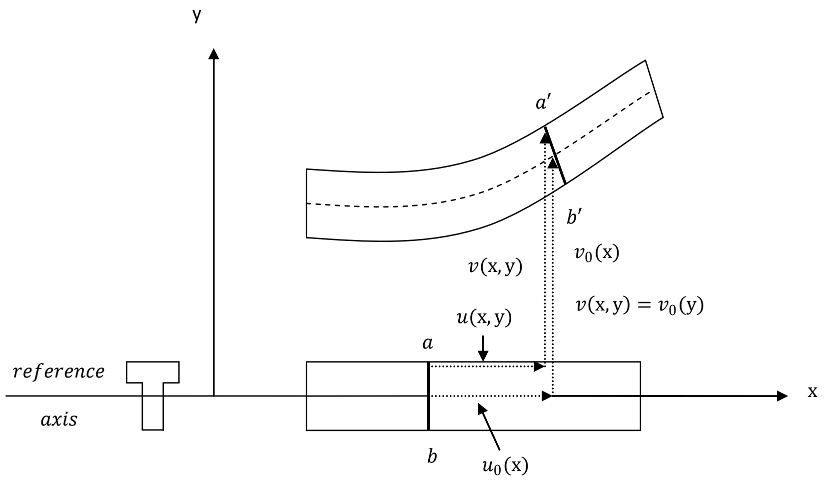
การสร้างแบบจำลองชิ้นส่วนของโครงสร้างบนฐานรากอีลาสติกภายใต้แรงกระทำจากภายนอก โดยทั่วไปวัสดุที่มีพฤติกรรมทางกลศาสตร์อยู่ในช่วงอีลาสติก คือพฤติกรรมของวัสดุหลังจากมีแรงมากระทำ เมื่อทำการปลดแรงกระทำเหล่านั้นออก วัสดุจะคืนรูปกลับเป็นสภาพเดิมเช่นเดียวกับตอนเริ่มต้น ตำแหน่งหรือขอบเขตของการคืนรูปในกรณีอีลาสติกถูกกำหนดด้วยพิกัดการคืนรูป (Elastic Limit) ซึ่งขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของวัสดุ เป็นไปตามทฤษฎีอีลาสติก (Elastic Theory)

เพื่อให้ง่ายต่อการหาผลเฉลยของปัญหา ในงานวิจัยนี้ได้มีการนำทฤษฎีอีลาสติกมาใช้วิเคราะห์พฤติกรรมทางกลศาสตร์ของดินหรือฐานรากที่กระทำต่อคาน และนำทฤษฎีการวิเคราะห์คานของ Euler-Bernoulli ใช้วิเคราะห์ปัญหาของคาน

2.1.1 ทฤษฎีการวิเคราะห์คานของ Euler-Bernoulli (Euler-Bernoulli Beam Theory)

ทฤษฎีการวิเคราะห์คานของ Euler-Bernoulli มีสมมุติฐาน คือระนาบหน้าตัดของคานยังคงเป็นระนาบเดิม หลังจากเกิดการเปลี่ยนรูปเนื่องจากการดัด (Plane Section Remain Plane) และระนาบยังคงตั้งฉากกับหน้าตัดตามแกนแนวยาวของคานที่เราพิจารณาก่อนเกิดการเปลี่ยนรูปเนื่องจากการดัด (Plane Section Normal to the Longitudinal Axis) การเคลื่อนที่ทางกลศาสตร์สามารถอธิบายการเปลี่ยนรูปของหน้าตัดคานที่พิจารณาได้ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ซึ่งจากรูปจุด *ab* เป็นจุดที่พิจารณาก่อนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูป โดยที่หลังจากเกิดการเปลี่ยนแปลงรูป จุดที่เรา

พิจารณาเปลี่ยนเป็นจุด $a'b'$ จะสังเกตได้ว่าจุด $a'b'$ ยังคงอยู่ระนาบเดิมและตั้งฉากกับแนวอ้างอิงตามยาวของหน้าตัด (อ้างอิงจาก Limkatanyu, 2008)



(อ้างอิงจาก : Limkatanyu, 2008, pp. 90.)

รูปที่ 2.1 อธิบายการเคลื่อนที่ทางกลศาสตร์ของหน้าตัดที่พิจารณาภายใต้ผลเนื่องจากการดัด

จากรูปที่ 2.1 พิจารณาหน้าตัด $a'-b'$ การเคลื่อนที่ตำแหน่งของคานสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังสมการ

$$u(x) = u_0(x) - y\frac{dv_0(x)}{dx} \tag{2-1}$$

$$v(x) = v_0(x) \tag{2-2}$$

เมื่อ $u_0(x)$ คือค่าการกระจัดในแนวราบเริ่มต้น (Initial Horizontal Displacement), $v_0(x)$ คือค่าการกระจัดในแนวดิ่งเริ่มต้น (Initial Vertical Displacement), $u(x)$ คือฟังก์ชันการกระจัดในแนวราบ (Horizontal Displacement Function), $v(x)$ คือฟังก์ชันการกระจัดในแนวดิ่ง (Vertical Displacement Function) และ y คือระยะในแนวดิ่ง

จากสมการที่ (2-1)-(2-2) สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงรูปคือ

ความเครียดตามแนวแกน (Axial Strain) $\varepsilon(x)$:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{du_0(x)}{dx} - y\frac{d^2v_0(x)}{dx^2} = \varepsilon_0(x) - y\kappa(x) \tag{2-3}$$

ความเครียดเนื่องจากแรงเฉือน (Shear Strain) $\gamma(x)$:

$$\gamma(x)=\frac{dv(x)}{dx}+\frac{du(x)}{dy}=-\frac{dv_0(x)}{dx}+\frac{dv_0(x)}{dx}=0 \qquad (2\text{-}4)$$

เมื่อ $\varepsilon_0(x)=\frac{du_0(x)}{dx}$ คือค่าความเครียดที่แกนอ้างอิง และ $\kappa(x)=\frac{d^2v_0(x)}{dx^2}$ คือความโค้งของหน้าตัดคาน (Section Curvature) จากสมการที่ (2-4) สมมุติฐานการเปลี่ยนแปลงรูปทางกลศาสตร์ความเครียดเนื่องจากแรงเฉือนมีค่าเท่ากับศูนย์

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อจำลองพฤติกรรมของดินที่กระทำกับโครงสร้างมีการพัฒนามาช้านาน โดยมีหลักการพื้นฐานหลักๆ คือการสมมุติตัวแปรที่แสดงถึงพฤติกรรมของดินที่กระทำกับโครงสร้างอยู่ในรูปของแบบจำลองสปริง เป็นต้น

แบบจำลองพื้นฐานที่จะนำเสนอในงานวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ แบบจำลองชิ้นส่วนแนวแกนที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้น (Inelastic Bar Element Resting on Winkler Foundation), แบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้น (Inelastic Beam Element Resting on Winkler Foundation) และอีกแบบจำลองที่มีการพัฒนาต่อจากแบบจำลองที่กล่าวมาข้างต้น คือ แบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร (Inelastic Beam Element Resting on Two-Parameter Foundation)

2.2 แบบจำลองชิ้นส่วนแนวแกนที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้น (Inelastic Bar Element Resting on Winkler Foundation)

แบบจำลองชิ้นส่วนแนวแกนที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นมีแนวคิดพื้นฐานการวิเคราะห์มาจากแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากของ Winkler โดยที่พฤติกรรมของดินหรือฐานรากถูกจำลองด้วยแบบจำลองสปริงที่ทำหน้าที่ต้านทานแรงในแนวแกนของชิ้นส่วนแนวแกน

2.2.1 นิยาม (Definitions)

ในกรณีศึกษานี้ นำเสนอแบบจำลองชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น ซึ่งแสดงได้ดังในรูปที่ 2.2 โดยที่ใน 1 เอเลเมนต์ประกอบไปด้วย 2 โหนด ซึ่งแต่ละโหนดประกอบไปด้วย 1 อันดับอิสรภาพ (Degree of Freedom) คือค่าการกระจัดในแนวแกน (Axial Displacement)

ค่าการกระจัดที่โหนดสามารถนิยามได้คือ

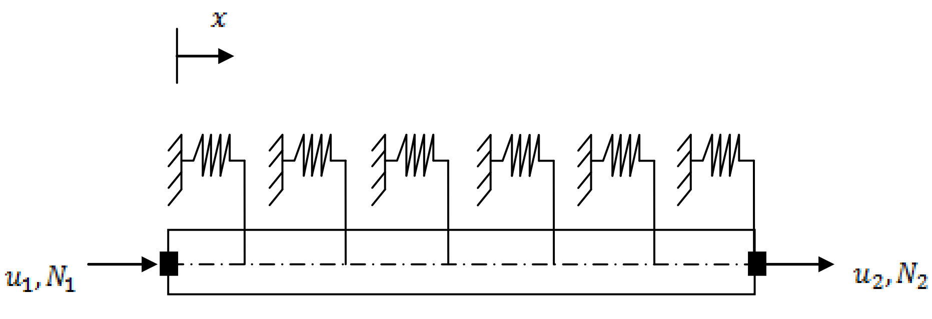
$$\mathbf{U} = \{u_1 \quad u_2\}^T \tag{2-5}$$

เมื่อ **U** คือเวกเตอร์การการะจัดที่โหนด, u คือการกระจัดในแนวแกนและตัวเลขที่ห้อยอยู่ใต้สัญลักษณ์นิยามถึงค่าที่แต่ละโหนดนั้นๆ

แรงที่โหนดสามารถนิยามได้คือ

$$\mathbf{P} = \{N_1 \quad N_2\}^T \tag{2-6}$$

เมื่อ **P** คือเวกเตอร์แรงที่โหนด, N คือค่าแรงในแนวแกนและตัวเลขที่ห้อยอยู่ใต้สัญลักษณ์นิยามถึงค่าที่แต่ละโหนดนั้นๆ



(อ้างอิงจาก : Sae-Long และคณะ, 2013)

รูปที่ 2.2 เอเลเมนต์ของชิ้นส่วนแนวแกนที่วางอยู่บนฐานราก Winkler

การกระจัดในแนวแกนที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนแนวแกน $u_B(x)$ สามารถนิยามรวมเป็นเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{u}(x) = \{u_B(x)\} \tag{2-7}$$

ความเครียดที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนแนวแกน $\varepsilon_B(x)$ สามารถนิยามรวมเป็นเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{d}_B(x) = \{\varepsilon_B(x)\} \tag{2-8}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด $\varepsilon_B(x)$ และการกระจัดในแนวแกน $u_B(x)$ ที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนแนวแกน สามารถหาค่าได้โดยตรงผ่านทางสมการความสอดคล้อง (Compatibility Equation) คือ $\varepsilon_B(x) = \dfrac{du_B(x)}{dx}$

สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{d}_B(x) = \partial_B \mathbf{u}(x) \tag{2-9}$$

โดยที่ ∂_B คือ Differential Operator สามารถนิยามได้คือ

$$\partial_B = \left[\frac{d}{dx}\right] \tag{2-10}$$

แรงในแนวแกนที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนแนวแกน $N(x)$ ถูกนิยามอยู่ในเวกเตอร์ $\mathbf{D}_B(x)$ สามารถเขียนได้คือ

$$\mathbf{D}_B(x) = \{N(x)\} \tag{2-11}$$

การกระจัดของฐานราก Winkler $u_W(x)$ ถูกนิยามอยู่ในเวกเตอร์ $\mathbf{d}_W(x)$ คือ

$$\mathbf{d}_W(x) = \{u_W(x)\} \tag{2-12}$$

จากทฤษฎีฐานรากของ Winkler และสมการความสอดคล้อง สามารถอธิบายสัมพันธ์ระหว่างค่าการกระจัดในแนวแกนของชิ้นส่วนแนวแกน $u_B(x)$ และค่าการกระจัดของฐานราก Winkler $u_W(x)$ ได้คือ

$$u_W(x) = u_B(x) \tag{2-13}$$

จากสมการที่ (2-13) สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{d}_W(x) = \partial_W \mathbf{u}(x) \tag{2-14}$$

เมื่อ ∂_W คือ Differential Operator สามารถนิยามได้คือ

$$\partial_W = [1] \tag{2-15}$$

แรงเนื่องจากฐานราก Winkler ที่หน้าตัดใดๆ $D_W(x)$ ถูกนิยามในเวกเตอร์ $\mathbf{D}_W(x)$ สามารถเขียนได้คือ

$$\mathbf{D}_W(x) = \{D_W(x)\} \tag{2-16}$$

2.2.2 สมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานราก Winkler (Governing Differential Equilibrium Equation: Bar Element on Winkler Foundation)

จากการพิจารณาสมการสมดุลแผนภาพอิสระของชิ้นส่วนย่อยๆของชิ้นส่วนแนวแกนที่มีขนาดเท่ากับ dx โดยวางอยู่บนฐานราก Winkler แสดงดังรูปที่ 2.3

สมการสมดุลในแนวแกน :

$$\frac{dN(x)}{dx} - k_W u_W(x) - q(x) = 0 \tag{2-17}$$

เมื่อ $N(x)$ คือแรงในแนวแกน, k_W คือค่าโมดูลัสต้านทานของดิน และ $q(x)$ คือน้ำหนักบรรทุกที่กระทำภายนอก

จากสมการที่ (2-13) สมการความสอดคล้องความสัมพันธ์ระหว่างค่าการกระจัดในแนวแกนของชิ้นส่วนแนวแกนและฐานราก Winkler นำค่ามาแทนในสมการที่ (2-17) สามารถเขียนได้คือ

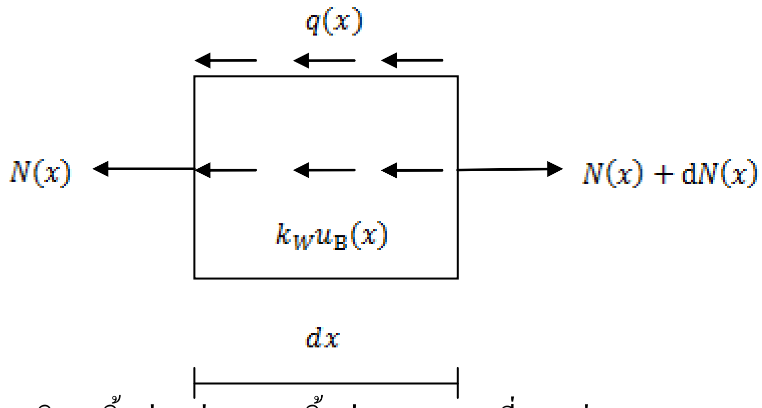
$$\frac{dN(x)}{dx} - k_W u_B(x) - q(x) = 0 \qquad (2\text{-}18)$$

โดยที่ตัวแปร k_W ขึ้นอยู่กับลักษณะของดินหรือฐานราก ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้นิยามความสัมพันธ์ของวัสดุในรูปความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้น โดยนิยามเพิ่มเติมไว้ในส่วนของความสัมพันธ์ของคุณสมบัติวัสดุ

จากสมการที่ (2-18) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\partial_B^T \mathbf{D}_B(x) - \partial_W^T \mathbf{D}_W(x) - \mathbf{p}(x) = 0 \qquad (2\text{-}19)$$

เมื่อ $\mathbf{p}(x) = \{q(x)\}^T$ คือ เวกเตอร์น้ำหนักบรรทุกที่กระทำภายนอกของเอเลเมนต์



รูปที่ 2.3 แผนภาพอิสระชิ้นส่วนย่อยๆของชิ้นส่วนแนวแกนที่วางอยู่บนฐานราก Winkler

2.2.3 การวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัดของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานราก Winkler (Displacement Formulation of Bar Element on Winkler Foundation)

ฟังก์ชันการกระจัด $\mathbf{u}(x)$ สามารถอธิบายในรูปของค่าการกระจัดที่โหนดผ่านทางเวกเตอร์ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง $\mathbf{N}_B(x)$ ได้คือ

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}_B(x)\mathbf{U} \qquad (2\text{-}20)$$

เมื่อ $\mathbf{N}_B(x)$ คือเวกเตอร์ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้รับมาจากการแก้สมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหา

2.2.4 สมการความสอดคล้อง (Compatibility Equation)

การเปลี่ยนแปลงรูปของปัญหาสามารถหาได้จากค่าการกระจัดที่โหนด $\mathbf{U}$ โดยตรง ผ่านความสัมพันธ์คือ

$$\mathbf{d}_B(x) = \mathbf{B}_B(x)\mathbf{U} \tag{2-21}$$

$$\mathbf{d}_W(x) = \mathbf{B}_W(x)\mathbf{U} \tag{2-22}$$

เมื่อ $\mathbf{B}_B(x)$ และ $\mathbf{B}_W(x)$ คือเมทริกซ์ที่นิยามถึงการแปลงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงรูปกับค่าการกระจัดของชิ้นส่วนแนวแกนและฐานราก Winkler ตามลำดับ สามารถนิยามได้คือ

$$\mathbf{B}_B(x) = \partial_B \mathbf{N}_B(x) \tag{2-23}$$

$$\mathbf{B}_W(x) = \partial_W \mathbf{N}_B(x) \tag{2-24}$$

2.2.5 ความสัมพันธ์ของคุณสมบัติวัสดุที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนแนวแกนและฐานราก Winkler (Material Constitutive Laws: Bar and Foundation Section)

ความสัมพันธ์ของแรงในแนวแกน $N(x)$ กับค่าความเครียด $\varepsilon_B(x)$ ของชิ้นส่วนแนวแกนถูกกำหนดให้มีความสัมพันธ์เป็นสมการไบลิเนียร์ สามารถเขียนได้คือ

$$N(x) = \psi\left[\varepsilon_B(x)\right] \text{ หรือ } \mathbf{D}_B(x) = \boldsymbol{\psi}\left[\mathbf{d}_B(x)\right] \tag{2-25}$$

ความสัมพันธ์ของแรงเนื่องจากฐานราก Winkler $D_W(x)$ กับค่าการกระจัดของฐานราก Winkler $u_W(x)$ ถูกกำหนดให้มีความสัมพันธ์เป็นสมการไบลิเนียร์ สามารถเขียนได้คือ

$$D_W(x) = \Xi\left[u_W(x)\right] \text{ หรือ } \mathbf{D}_W(x) = \mathbf{\Xi}\left[\mathbf{d}_W(x)\right] \tag{2-26}$$

ความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้นระหว่างค่าแรงและการเปลี่ยนแปลงรูปของชิ้นส่วนแนวแกนและฐานรากสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\mathbf{D}_B(x) = \mathbf{D}_B^0(x) + \mathbf{k}_B \Delta \mathbf{d}_B(x) \tag{2-27}$$

$$\mathbf{D}_W(x) = \mathbf{D}_W^0(x) + \mathbf{k}_W \Delta \mathbf{d}_W(x) \tag{2-28}$$

เมื่อ $\mathbf{D}_B^0(x)$ และ $\mathbf{D}_W^0(x)$ คือค่าแรงเริ่มต้นที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนแนวแกนและฐานรากตามลำดับ นอกจากนี้ $\mathbf{k}_B$ และ $\mathbf{k}_W$ คือค่าเมทริกซ์สติฟเนสสัมผัสที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนแนวแกนและฐานรากตามลำดับ

2.2.6 หลักการงานเสมือน (The Virtual Displacement Principle)

จากการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการกระจัด (Displacement-Based Formulation) ผ่านหลักการของงานเสมือน ทำให้สมการสมดุลในสมการที่ (2-19) ถูกกำหนดอยู่ในรูปของ Weak Sense โดยกำหนดให้ฟังก์ชันการกระจัด $\delta\mathbf{u}(x)$ เป็นตัวแปร Arbitrary ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการ Weak Equilibrium ได้คือ

$$\int_L \delta\mathbf{u}^T(x)(\partial_B^T \mathbf{D}_B(x) + \partial_W^T \mathbf{D}_W(x) - \mathbf{p}(x))dx = 0 \tag{2-29}$$

แทนค่าสมการที่ (2-27)-(2-28) ลงในสมการที่ (2-29) จากนั้นทำการอินทิเกรตแยกส่วน (Integration by Parts) และทำการแทนค่าสมการที่ (2-20) ลงไป ดังนั้นสามารถเขียนในรูปสมการไฟไนต์เอเลเมนต์ได้คือ

$$(\mathbf{K}_B + \mathbf{K}_W)\Delta\mathbf{U} = \mathbf{P} - (\mathbf{P}_B^0 + \mathbf{P}_W^0) \tag{2-30}$$

เมื่อ

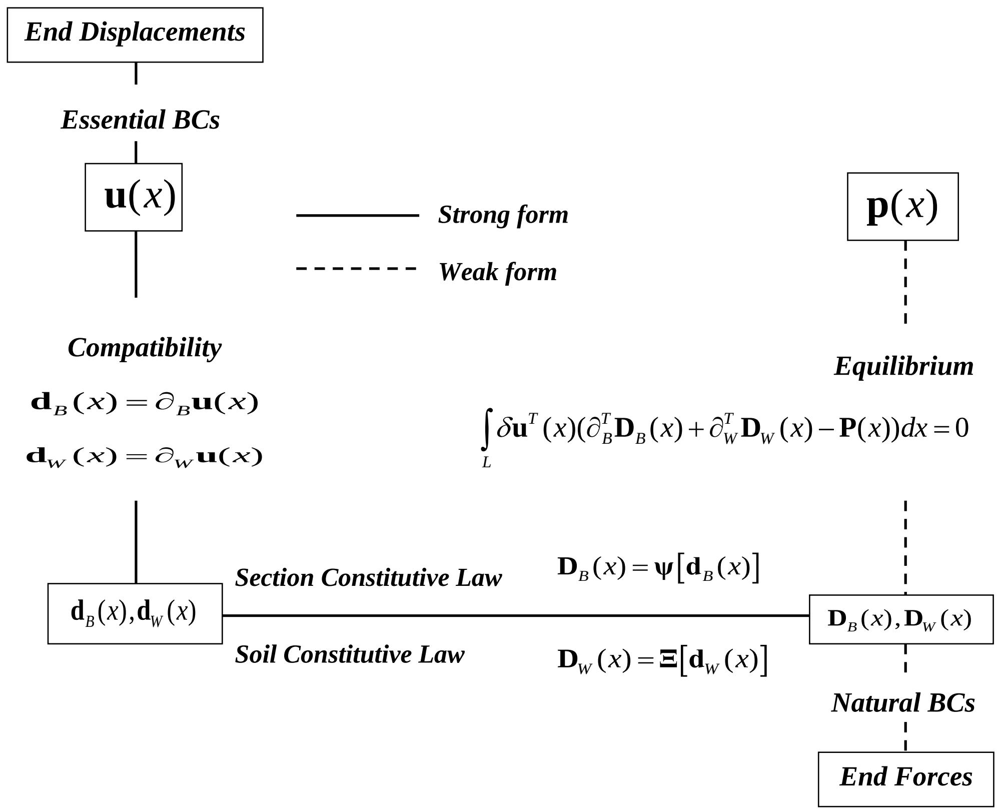
$\mathbf{K}_B = \int_L \mathbf{B}_B^T(x)\mathbf{D}_B(x)\mathbf{B}_B(x)dx$ คือเอเลเมนต์เมทริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนแนวแกน;

$\mathbf{K}_W = \int_L \mathbf{B}_W^T(x)\mathbf{D}_W(x)\mathbf{B}_W(x)dx$ คือเอเลเมนต์เมทริกซ์สติฟเนสของฐานราก Winkler;

$\mathbf{P}_B^0 = \int_L \mathbf{B}_B^T(x)\mathbf{D}_B^0(x)dx$ คือเวกเตอร์เอเลเมนต์แรงต้านทานของชิ้นส่วนแนวแกน; และ

$\mathbf{P}_W^0 = \int_L \mathbf{B}_W^T(x)\mathbf{D}_W^0(x)dx$ คือเวกเตอร์เอเลเมนต์แรงต้านทานของฐานราก Winkler

จากหลักการการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการกระจัด (Displacement-Based Formulation) ของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนที่วางอยู่บนฐานรากของ Winkler สามารถสรุปเป็นแผนภาพ Tonti's Diagram (Tonti, 1977) ได้ดังแสดงในรูปที่ 2.4 โดยที่แผนภาพนำเสนอในรูปของ Weak Form เมื่อ $\mathbf{u}(x)$ คือ Primary Variable ของปัญหา ซึ่งสามารถนำไปหาค่าการเปลี่ยนแปลงรูปของปัญหาโดยตรงผ่านสมการความสอดคล้องในสมการที่ (2-21)-(2-22) นอกจากนี้ความสัมพันธ์ระหว่างสมการความสอดคล้องไปยังสมการสมดุลถูกอธิบายในรูปของ Weighted Integral Form ผ่านหลักการงานเสมือน



รูปที่ 2.4 แผนภาพของ Tonti สำหรับปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานราก Winkler ภายใต้การวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัด

2.2.7 ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ (Improved Displacement Shape Functions)

จากสมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนที่วางอยู่บนฐานราก Winkler ดังแสดงในสมการที่ (2-18) เมื่อนำสมการความสัมพันธ์ของคุณสมบัติวัสดุชิ้นส่วนแนวแกน $N = k_B \dfrac{du_B(x)}{dx}$ มาแทนค่าในสมการที่ (2-18) สามารถเขียนสมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหาใหม่ได้คือ

$$k_B \frac{d^2 u_B(x)}{dx^2} - k_W u_B(x) = q(x) \tag{2-31}$$

เมื่อ k_B คือ Axial Rigidity ของชิ้นส่วนแนวแกน, k_W คือโมดูลัสต้านทานของดินหรือค่าสติฟเนสของฐานราก Winkler และ $q(x)$ คือน้ำหนักบรรทุกที่กระทำภายนอก

นิยามตัวแปร $\lambda = \sqrt{\dfrac{k_W}{k_B}}$ สำหรับแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการที่ (2-31) สามารถคำนวณผลเฉลยเอกพันธ์ของปัญหา (Homogeneous Solution) เมื่อ $q(x) = 0$ ได้คือ

$$u_B(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} \tag{2-32}$$

ผลเฉลยของปัญหาสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้คือ

$$u_B(x) = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{C} \tag{2-33}$$

เมื่อ $\mathbf{\Gamma}$ คือเวกเตอร์หลักที่ประกอบไปด้วยฟังก์ชันในสมการที่ (2-32) และ $\mathbf{C}$ คือเวกเตอร์หลักที่ประกอบไปด้วยค่าคงที่จากการหาปริพันธ์

จากรูปที่ 2.2 เงื่อนไขขอบของปัญหา สามารถเขียนได้คือ

$$u_B\big|_{x=0} = u_1 \text{ และ } u_B\big|_{x=L} = u_2 \tag{2-34}$$

ทำการแทนค่าฟังก์ชันการกระจัดในแนวแกน $u_B(x)$ จากสมการที่ (2-33) แทนค่าลงในสมการที่ (2-34) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\mathbf{U} = \mathbf{TC} \tag{2-35}$$

เมื่อ $\mathbf{T}$ คือเมทริกซ์ที่ใช้แปลงระหว่างค่าพิกัดทั่วไป (Generalized Coordinates) กับค่าการกระจัดที่โหนด

จากนั้นทำการแทนค่าสมการที่ (2-35) ในสมการที่ (2-33) สามารถเขียนได้

$$u_B(x) = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{N}_B(x)\mathbf{U} \tag{2-36}$$

เมื่อ $\mathbf{N}_B(x) = \left[\, N_{B1}(x) \;\; N_{B2}(x) \,\right]$ คือเวกเตอร์แถวที่ประกอบไปด้วยฟังก์ชันรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหา ในกรณีที่ตัวแปร λ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ฟังก์ชันรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหาจะกลายเป็นการเป็นการประมาณฟังก์ชันด้วยสมการเส้นตรง

ฟังก์ชันรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหา $\mathbf{N}_B(x)$

$$N_{B1} = \mathrm{csch}[\lambda L]\sinh[\lambda\left(L - x\right)] \tag{2-37}$$

$$N_{B2} = \mathrm{csch}[\lambda L]\sinh[\lambda x] \tag{2-38}$$

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหาเทียบกับระยะทาง x: $\mathbf{Y}_B(x) = \dfrac{d\mathbf{N}_B(x)}{dx}$

$$Y_{B1} = -\lambda\cosh[\lambda\left(L - x\right)]\mathrm{csch}[\lambda L] \tag{2-39}$$

$$Y_{B2} = \lambda\cosh[\lambda x]\mathrm{csch}[\lambda L] \tag{2-40}$$

ในกรณีที่ค่าตัวแปร λ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ฟังก์ชันรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหา $\mathbf{N}_B(x)$ สามารถเขียนในรูปของสมการเส้นตรงได้คือ

$$N_{B1} = 1 - \frac{x}{L} \tag{2-41}$$

$$N_{B2} = \frac{x}{L} \tag{2-42}$$

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันรูปร่างเทียบกับระยะทาง x: $\mathbf{Y}_B(x) = \dfrac{d\mathbf{N}_B(x)}{dx}$

$$Y_{B1} = -\frac{1}{L} \tag{2-43}$$

$$Y_{B2} = \frac{1}{L} \tag{2-44}$$

สำหรับค่า Axial Rigidity ของชิ้นส่วนแนวแกน k_B และค่าโมดูลัสต้านทานของดินหรือฐานราก k_W ในความสัมพันธ์ของคุณสมบัติวัสดุอาจมีค่าไม่คงที่ ตัวแปร λ สามารถหาได้จากเทคนิคการหาค่าเฉลี่ยจากค่าที่ลู่เข้าในขั้นตอนก่อนหน้านี้เพื่อที่จะไปประมาณค่าฟังก์ชันรูปร่าง $\mathbf{N}_B(x)$ ในกระบวนการรับน้ำหนักบรรทุกนั้นๆ

เทคนิคการประมาณ คือค่าตัวแปร k_B^{AVE} และ k_W^{AVE} จะถูกหาค่าเฉลี่ยก่อนนำไปหาค่าเฉลี่ยตัวแปร λ^{AVE} แสดงได้ดังสมการที่ (2-45)

$$\lambda^{AVE} = \sqrt{\frac{k_W^{AVE}}{k_B^{AVE}}} \tag{2-45}$$

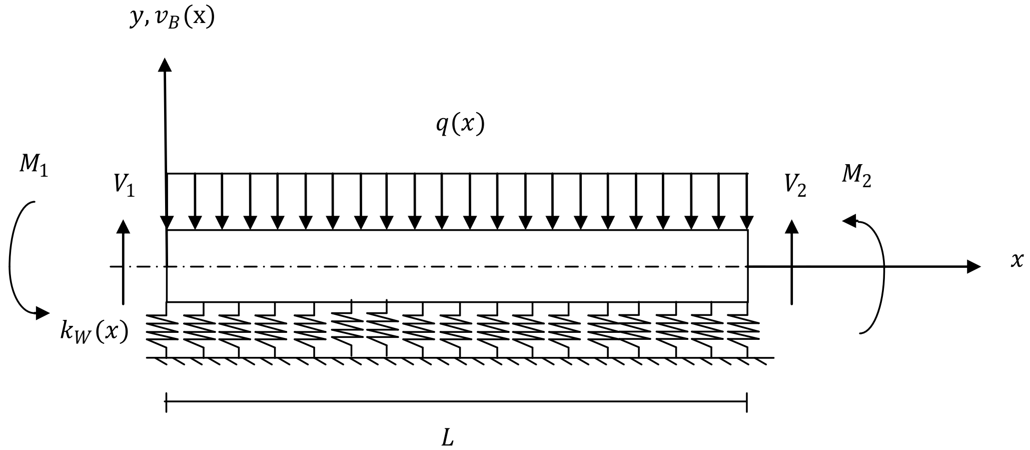
โดยที่ $k_B^{AVE} = \sum_{i=1}^{NIP} \dfrac{k_{Bi} w_i}{L}$ และ $k_W^{AVE} = \sum_{i=1}^{NIP} \dfrac{k_{Wi} w_i}{L}$

เมื่อ w_i คือค่าอัตราส่วนน้ำหนักที่จุดอินทิเกรต i, NIP คือจำนวนจุดในการอินทิเกรต และ L คือความยาวของชิ้นส่วน i

2.3 แบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางบนฐานรากไร้เชิงเส้น (Inelastic Beam Element Resting on Winkler Foundation)

แบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางบนฐานรากอีลาสติกประเภท 1 ตัวแปร เป็นแบบจำลองแรกที่ถูกนำเสนอในการแก้ปัญหาคานที่วางอยู่บนฐานรากอีลาสติก หรือเรียกอีกชื่อว่า “แบบจำลองของ Winkler (1867)” ดังแสดงในรูปที่ 2.5 ต่อมาได้มีการพัฒนาให้แบบจำลองมี

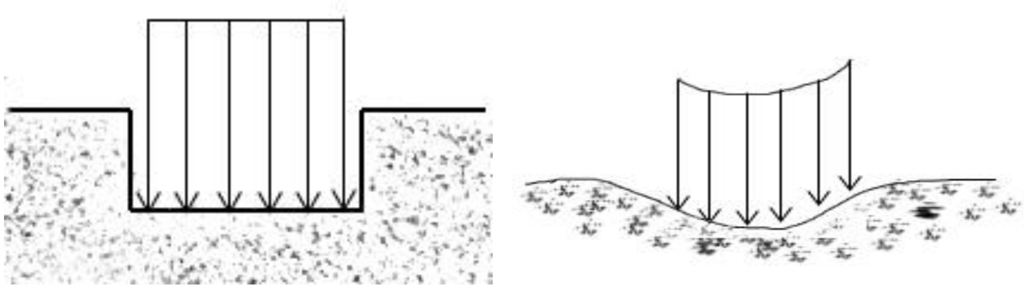
พฤติกรรมความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้น ซึ่งทำให้แบบจำลองดังกล่าว มีประสิทธิภาพและความเสมือนจริงมากขึ้น ซึ่งมีนักวิจัยที่ทำการเสนอแบบจำลองดังกล่าวได้แก่ Limkatanyu และ Spacone (2006) และ Limkatanyu และคณะ (2013 a) เป็นต้น



(อ้างอิงจาก : Limkatanyu และคณะ, 2012 b)

รูปที่ 2.5 ปัญหาคานที่วางบนฐานราก Winkler ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่กระทำ

สมมุติฐานพื้นฐานที่สำคัญของแบบจำลอง Winkler คือแรงปฏิกิริยาของดินทุกๆ จุดที่พิจารณา เป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะโก่งหรือค่าการกระจัดในแนวดิ่งบนคานที่จุดนั้นๆ โดยจำลองพฤติกรรมของดินทางกลศาสตร์ในรูปของแบบจำลองสปริง ซึ่งแบบจำลองสปริงแต่ละตัวอิสระต่อกัน จากสมมุติฐานดังกล่าว เมื่อมีแรงกระทำลงบนแบบจำลองจะเกิดการทรุดดังแสดงในรูปที่ 2.6 (a) เนื่องจากความสัมพันธ์ของแบบจำลองสปริงในแต่ละตัวจะเกิดการทรุดตัวขึ้นอยู่แรงกระทำที่กระทำต่อแบบจำลองสปริงตัวนั้นๆ ในความเป็นจริงเมื่อดินเกิดการทรุดตัว ผิวดินจะเกิดการทรุดตัวแบบต่อเนื่องดังแสดงในรูปที่ 2.6 (b)

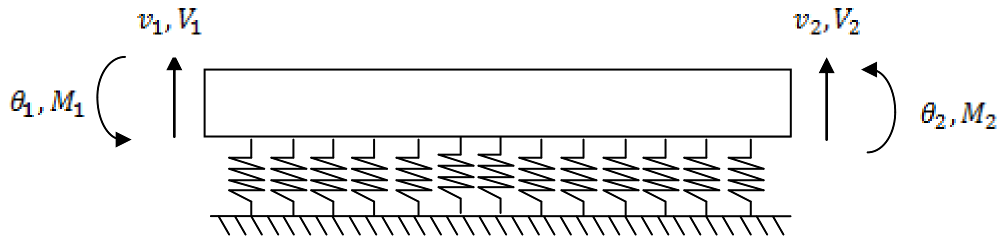


(a) (b)

รูปที่ 2.6 ระยะโก่งในแนวดิ่งของแบบจำลองฐานรากเนื่องจากแรงกระทำสม่ำเสมอโดยไม่พิจารณาผลของคาน (a) Winkler Foundation (b) Elastic Solid Foundation

2.3.1 นิยาม (Definitions)

ในกรณีศึกษานี้ นำเสนอชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้น แสดงได้ดังในรูปที่ 2.7 โดยที่ใน 1 เอเลเมนต์ประกอบไปด้วย 2 โหนด ซึ่งแต่ละโหนดประกอบไปด้วย 2 อันดับอิสรภาพ (Degree of Freedoms) คือ ค่าการกระจัดในแนวดิ่ง (Vertical Displacement) และมุมบิด (Rotation)



(อ้างอิงจาก : Limkatanyu และคณะ, 2013 a)

รูปที่ 2.7 เอเลเมนต์ของคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler

ค่าการกระจัดที่โหนดสามารถนิยามได้คือ

$$\mathbf{U} = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \tag{2-46}$$

เมื่อ $\mathbf{U}$ คือเวกเตอร์การการะจัดที่โหนด, v คือการกระจัดในแนวดิ่ง, θ คือค่ามุมบิดและตัวเลขที่ห้อยอยู่ใต้สัญลักษณ์นิยามถึงค่าที่แต่ละโหนดนั้นๆ

แรงที่โหนดสามารถนิยามได้คือ

$$\mathbf{P} = \{V_1 \;\; M_1 \;\; V_2 \;\; M_2\}^T \tag{2-47}$$

เมื่อ $\mathbf{P}$ คือเวกเตอร์แรงที่โหนด, V คือค่าแรงเฉือน, M คือค่าโมเมนต์และตัวเลขที่ห้อยอยู่ใต้สัญลักษณ์นิยามถึงค่าที่แต่ละโหนดนั้นๆ

การกระจัดในแนวดิ่ง $v_B(x)$ ที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคาน สามารถนิยามรวมเป็นเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{u}(x) = \{v_B(x)\} \tag{2-48}$$

ความโค้งของคาน $\kappa_B(x)$ ที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคาน สามารถนิยามรวมเป็นเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{d}_B(x) = \{\kappa_B(x)\} \tag{2-49}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง $\kappa_B(x)$ และการกระจัดในแนวดิ่ง $v_B(x)$ ที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคานสามารถหาค่าได้โดยตรงผ่านทางสมการความสอดคล้อง (Compatibility Equation) คือ $\kappa_B(x) = \dfrac{d^2 v_B(x)}{dx^2}$ และจากทฤษฎีการวิเคราะห์คานของ Euler-Bernoulli การเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนไม่นำมาพิจารณา โดยที่แรงเฉือนที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคานสามารถหาได้จากสมการสมดุลโดยตรง

สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{d}_B(x) = \partial_B \mathbf{u}(x) \tag{2-50}$$

โดยที่ ∂_B คือ Differential Operator สามารถนิยามได้คือ

$$\partial_B = \left[\frac{d^2}{dx^2} \right] \tag{2-51}$$

โมเมนต์ดัด $M(x)$ ที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคาน ถูกนิยามอยู่ในเวกเตอร์ $\mathbf{D}_B(x)$ สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{D}_B(x) = \{V(x)\} \tag{2-52}$$

การกระจัดของฐานราก Winkler $u_W(x)$ ถูกนิยามอยู่ในเวกเตอร์ $\mathbf{d}_W(x)$ คือ

$$\mathbf{d}_W(x) = \{u_W(x)\} \tag{2-53}$$

จากทฤษฎีฐานรากของ Winkler และสมการความสอดคล้องสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างค่าการกระจัดในแนวดิ่งของชิ้นส่วนคานและฐานรากของ Winkler ได้คือ

$$u_W(x) = v_B(x) \tag{2-54}$$

จากสมการที่ (2-54) สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{d}_W(x) = \partial_W \mathbf{u}(x) \tag{2-55}$$

เมื่อ ∂_W คือ Differential Operator สามารถนิยามได้คือ

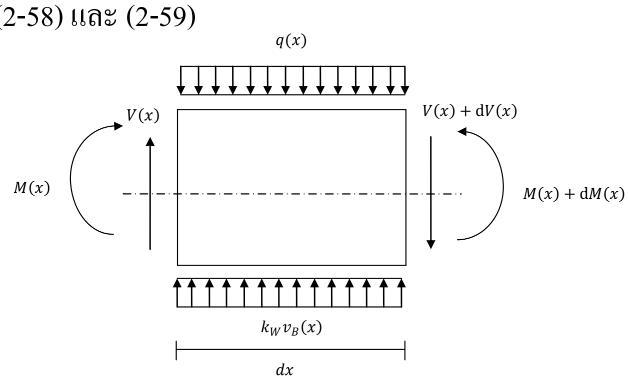
$$\partial_W = [1] \tag{2-56}$$

แรงเนื่องจากฐานราก Winkler $D_W(x)$ ที่หน้าตัดใดๆ ถูกนิยามในเวกเตอร์ $\mathbf{D}_W(x)$ สามารถเขียนได้คือ

$$\mathbf{D}_W(x) = \{D_W(x)\} \tag{2-57}$$

2.3.2 สมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานราก Winkler (Governing Differential Equilibrium Equation: Beam Element on Winkler Foundation)

พิจารณาชิ้นส่วนคานที่วางบนฐานราก Winkler ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่กระทำดังแสดงในรูปที่ 2.8 โดยที่แรงทุกๆจุดที่กระทำบนชิ้นส่วนคานเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าการกระจัดที่เกิดขึ้นที่จุดนั้นๆและความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดเป็นไปตามกฎของฮุค เมื่อทำการพิจารณาแผนภาพอิสระสามารถแสดงสมการสมดุลของชิ้นส่วนคานที่วางบนฐานราก Winkler ดังแสดงสมการที่ (2-58) และ (2-59)



(อ้างอิงจาก : Limkatanyu และคณะ, 2013 a)

รูปที่ 2.8 แผนภาพอิสระชิ้นส่วนย่อยๆของคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler

สมการสมดุลในแนวดิ่ง :

$$\frac{dV(x)}{dx}+q(x)-k_W v_B(x)=0 \tag{2-58}$$

สมการสมดุลโมเมนต์ :

$$\frac{dM(x)}{dx}-V=0 \tag{2-59}$$

เมื่อค่า $V(x)$ คือค่าแรงเฉือน, $M(x)$ คือค่าโมเมนต์ดัด, $q(x)$ คือแรงภายนอกที่กระทำต่อคาน, $v_B(x)$ คือฟังก์ชันการกระจัดในแนวดิ่ง และ k_W คือค่าโมดูลัสต้านทานของดิน (Terzaghi, 1955) ซึ่งหาได้จากการทดสอบดินได้แก่ การทดสอบการรับน้ำหนักของแผ่นเหล็ก

(Plate Load Test) การทดสอบการยุบตัวของดิน (Consolidation Test) การทดสอบหาค่ากำลังดินในแบบสามแกน (Triaxial Test) และการทดลองแคลิฟอร์เนียแบริ่งเรโช (CBR Test)

ทำการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับระยะทาง x ในสมการที่ (2-59) จากนั้นนำค่าที่ได้มาแทนค่าในสมการที่ (2-58) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2-60)

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} + k_W v_B(x) = q(x) \tag{2-60}$$

จากสมการที่ (2-60) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\partial_B^T \mathbf{D}_B(x) - \partial_W^T \mathbf{D}_W(x) - \mathbf{p}(x) = 0 \tag{2-61}$$

เมื่อ $\mathbf{p}(x)=\{q(x)\}^T$ คือเวกเตอร์แรงภายนอกที่กระทำต่อชิ้นส่วนคานของเอเลเมนต์

จากความสัมพันธ์ความสอดคล้องของวัสดุของวัสดุคาน (Material Constitutive Law):

$$M = EI\frac{d^2v_B(x)}{dx^2} \tag{2-62}$$

ทำการแทนค่าสมการที่ (2-62) ในสมการที่ (2-60) จะได้สมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหา (Governing Differential Equilibrium Equation) คือ

$$EI\frac{d^4v_B(x)}{dx^4} + k_W v_B(x) = q(x) \tag{2-63}$$

เมื่อค่า EI คือค่า Flexural Rigidity ของคาน

จากสมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ในสมการที่ (2-63) ทำการพิจารณาในรูปสมการเอกพันธ์เชิงอนุพันธ์ (Homogeneous Form) โดยที่แรงภายนอกมีค่าเท่ากับศูนย์ $q(x)=0$ ดังแสดงในสมการที่ (2-64) เพื่อหาผลเฉลย กำหนดให้ขอบเขตของปัญหาคือ $0 \le x \le L$

$$EI\frac{d^4v_B(x)}{dx^4} + k_W v_B(x) = 0 \tag{2-64}$$

จากสมการสมดุลในแนวดิ่งสมการที่ (2-58) ในรูปสมการเอกพันธ์เชิงอนุพันธ์ ($q(x)=0$) สามารถนิยามค่าแรงดันดิน (Soil Pressure) ที่กระทำต่อชิ้นส่วนคานได้คือ

$$P(x)=k_W v_B(x) \tag{2-65}$$

เมื่อ $P(x)$ คือแรงดันดินที่กระทำต่อชิ้นส่วนคาน

2.3.3 การวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัดของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานราก Winkler (Displacement Formulation of Winkler-Based Beam Element)

ฟังก์ชันการกระจัด $\mathbf{u}(x)$ สามารถอธิบายในรูปของค่าการกระจัดที่โหนด $\mathbf{U}$ ผ่านทางเวกเตอร์ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง $\mathbf{N}_B(x)$ ได้คือ

$$\mathbf{u}(x)=\mathbf{N}_B(x)\mathbf{U} \tag{2-66}$$

เมื่อ $\mathbf{N}_B(x)$ คือเวกเตอร์ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้รับมาจากการแก้สมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหา

2.3.4 สมการความสอดคล้อง (Compatibility Equation)

การเปลี่ยนแปลงรูปของปัญหาสามารถหาได้จากค่าการกระจัดที่โหนด $\mathbf{U}$ โดยตรงผ่านความสัมพันธ์คือ

$$\mathbf{d}_B(x)=\mathbf{B}_B(x)\mathbf{U} \tag{2-67}$$

$$\mathbf{d}_W(x)=\mathbf{B}_W(x)\mathbf{U} \tag{2-68}$$

เมื่อ $\mathbf{B}_B(x)$ และ $\mathbf{B}_W(x)$ คือเมทริกซ์ที่นิยามถึงการแปลงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงรูปกับค่าการกระจัดของคานและฐานราก Winkler ตามลำดับ สามารถนิยามได้คือ

$$\mathbf{B}_B(x)=\partial_B\mathbf{N}_B(x) \tag{2-69}$$

$$\mathbf{B}_W(x) = \partial_W \mathbf{N}_B(x) \tag{2-70}$$

2.3.5 ความสัมพันธ์ของคุณสมบัติวัสดุที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคานและฐานราก Winkler (Material Constitutive Laws: Beam and Foundation Section)

ความสัมพันธ์ของโมเมนต์ดัด $M(x)$ กับค่าความโค้งของคาน $\kappa_B(x)$ ถูกกำหนดให้มีความสัมพันธ์เป็นสมการไบลิเนียร์ สามารถเขียนได้คือ

$$M(x) = \psi\left[\kappa_B(x)\right] \text{ หรือ } \mathbf{D}_B(x) = \boldsymbol{\psi}\left[\mathbf{d}_B(x)\right] \tag{2-71}$$

ความสัมพันธ์ของแรงเนื่องจากฐานรากของ Winkler $D_W(x)$ กับค่าการกระจัดของฐานรากWinkler $u_W(x)$ ถูกกำหนดให้มีความสัมพันธ์เป็นสมการไบลิเนียร์ สามารถเขียนได้คือ

$$D_W(x) = \Xi\left[u_W(x)\right] \text{ หรือ } \mathbf{D}_W(x) = \boldsymbol{\Xi}\left[\mathbf{d}_W(x)\right] \tag{2-72}$$

ความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้นระหว่างค่าแรงและการเปลี่ยนแปลงรูปของชิ้นส่วนคานและฐานรากสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\mathbf{D}_B(x) = \mathbf{D}_B^0(x) + \mathbf{k}_B \Delta\mathbf{d}_B(x) \tag{2-73}$$

$$\mathbf{D}_W(x) = \mathbf{D}_W^0(x) + \mathbf{k}_W \Delta\mathbf{d}_W(x) \tag{2-74}$$

เมื่อ $\mathbf{D}_B^0(x)$ และ $\mathbf{D}_W^0(x)$ คือค่าแรงเริ่มต้นที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคานและฐานรากตามลำดับ นอกจากนี้ $\mathbf{k}_B$ และ $\mathbf{k}_W$ คือค่าเมทริกซ์สติฟเนสสัมผัสที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคานและฐานรากตามลำดับ

2.3.6 หลักการงานเสมือน (The Virtual Displacement Principle)

จากการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการกระจัด (Displacement-Based Formulation) ผ่านหลักการของงานเสมือน ทำให้สมการสมดุลในสมการที่ (2-61) ถูกกำหนดอยู่ในรูปของ Weak

Sense โดยกำหนดให้ฟังก์ชันการกระจัด $\delta\mathbf{u}(x)$ เป็นตัวแปร Arbitrary ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการ Weak Equilibrium ได้คือ

$$\int_L \delta\mathbf{u}^T(x)(\partial_B^T\mathbf{D}_B(x)+\partial_W^T\mathbf{D}_W(x)-\mathbf{p}(x))dx=0 \tag{2-75}$$

ทำการแทนค่าสมการที่ (2-73)-(2-74) ลงในสมการที่ (2-75) จากนั้นทำการอินทิเกรตแยกส่วน (Integration by Parts) และทำการแทนค่าสมการที่ (2-66) ลงไป ดังนั้นสามารถเขียนในรูปสมการไฟไนต์เอเลเมนต์ได้คือ

$$(\mathbf{K}_B+\mathbf{K}_W)\Delta\mathbf{U}=\mathbf{P}-(\mathbf{P}_B^0+\mathbf{P}_W^0) \tag{2-76}$$

เมื่อ

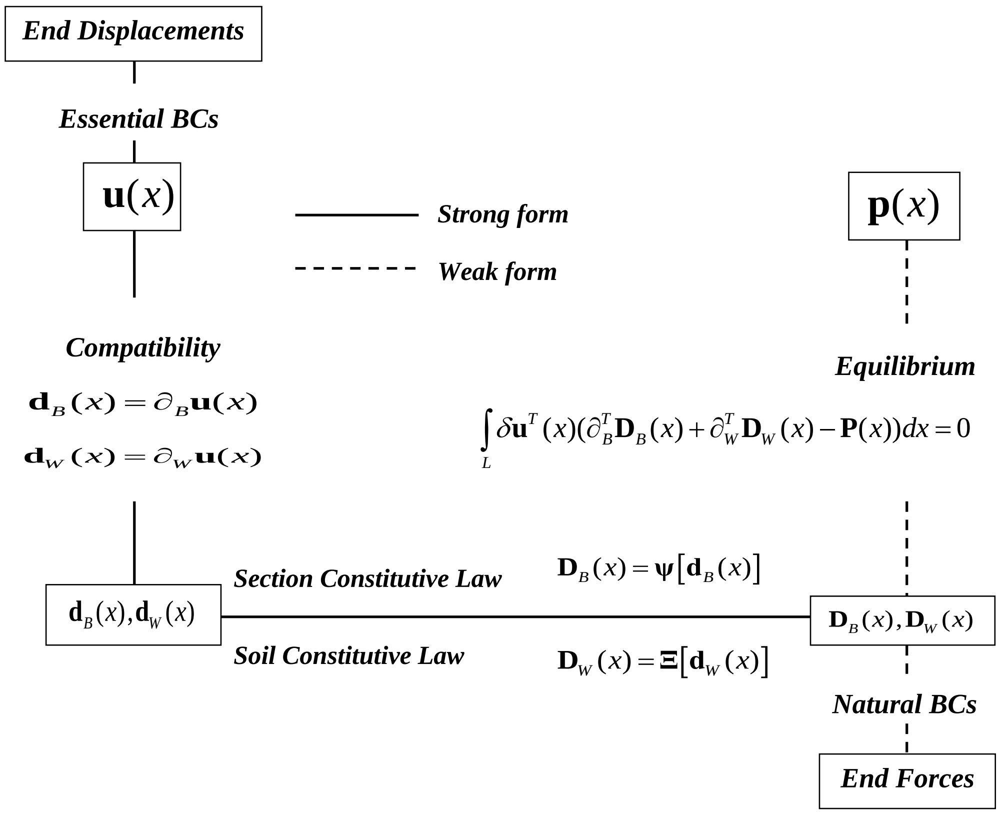
$\mathbf{K}_B=\int_L \mathbf{B}_B^T(x)\mathbf{D}_B(x)\mathbf{B}_B(x)dx$ คือเอเลเมนต์เมทริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนคาน;

$\mathbf{K}_W=\int_L \mathbf{B}_W^T(x)\mathbf{D}_W(x)\mathbf{B}_W(x)dx$ คือเอเลเมนต์เมทริกซ์สติฟเนสของฐานราก Winkler;

$\mathbf{P}_B^0=\int_L \mathbf{B}_B^T(x)\mathbf{D}_B^0(x)dx$ คือเวกเตอร์เอเลเมนต์แรงต้านทานของชิ้นส่วนคาน; และ

$\mathbf{P}_W^0=\int_L \mathbf{B}_W^T(x)\mathbf{D}_W^0(x)dx$ คือเวกเตอร์เอเลเมนต์แรงต้านทานของฐานราก Winkler

จากหลักการการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการกระจัด (Displacement-Based Formulation) ของปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler สามารถสรุปเป็นแผนภาพ Tonti’s Diagram ได้ดังแสดงในรูปที่ 2.9 โดยที่แผนภาพนำเสนอในรูปของ Weak Form เมื่อ $\mathbf{u}(x)$ คือ Primary Variable ของปัญหา ซึ่งสามารถนำไปหาค่าการเปลี่ยนแปลงรูปของปัญหาโดยตรงผ่านสมการความสอดคล้องในสมการที่ (2-67)-(2-68) นอกจากนี้ความสัมพันธ์ระหว่างสมการความสอดคล้องไปยังสมการสมดุลถูกอธิบายในรูปของ Weighted Integral Form ผ่านหลักการงานเสมือน



(อ้างอิงจาก : Limkatanyu และคณะ, 2006)

รูปที่ 2.9 แผนภาพของ Tonti สำหรับปัญหาคานบนฐานราก Winkler ภายใต้การวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัด

2.3.7 ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ (Improved Displacement Shape Functions)

จากสมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ในสมการที่ (2-64) นิยามตัวแปร $\lambda = \sqrt[4]{\dfrac{k_W}{4k_B}}$ โดยที่ $k_B = EI$ และ $\dfrac{d^n}{dx^n} = D^n$ เพื่อใช้ในการแก้หาผลเฉลยของปัญหา ดังนั้นเมื่อนำค่าตัวแปรมาแทนในสมการที่ (2-64) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังแสดงในสมการที่ (2-77)

$$(D^4 + 4\lambda^4)v_B(x) = 0 \tag{2-77}$$

จากสมการที่ (2-77) ค่ารากของผลเฉลย ได้แก่

$$D_1 = \lambda + i\lambda \tag{2-78}$$

$$D_2 = -\lambda + i\lambda \tag{2-79}$$

$$D_3 = -\lambda - i\lambda \tag{2-80}$$

$$D_4 = \lambda - i\lambda \tag{2-81}$$

เมื่อ i คือเลขจำนวนเชิงซ้อน จากสมการที่ (2-78)-(2-81) ผลเฉลยของสมการที่ (2-77) คือ

$$\begin{aligned} v_B(x) &= a_1 e^{\lambda x}(\cos[\lambda x] + \sin[\lambda x]) + a_2 e^{-\lambda x}(\cos[\lambda x] + \sin[\lambda x]) \\ &+ a_3 e^{-\lambda x}(\cos[\lambda x] - \sin[\lambda x]) + a_4 e^{\lambda x}(\cos[\lambda x] - \sin[\lambda x]) \end{aligned} \tag{2-82}$$

โดยที่ผลเฉลยในสมการที่ (2-82) ไม่พิจารณาผลแรงดึงในแนวแกน (Axial Forces) ของชิ้นส่วนคาน

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Functions):

$$e^{\lambda x} = \cosh[\lambda x] + \sinh[\lambda x] \tag{2-83}$$

$$e^{-\lambda x} = \cosh[\lambda x] - \sinh[\lambda x] \tag{2-84}$$

แทนค่าฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกในสมการผลเฉลยที่ (2-82) สามารถเขียนได้:

$$\begin{aligned} v_B(x) &= c_1 \sin[\lambda x]\sinh[\lambda x] + c_2 \sin[\lambda x]\cosh[\lambda x] \\ &+ c_3 \cos[\lambda x]\sinh[\lambda x] + c_4 \cos[\lambda x]\cosh[\lambda x] \end{aligned} \tag{2-85}$$

จากสมการที่ (2-85) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$v_B(x) = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{C} \tag{2-86}$$

เมื่อ $\mathbf{C}$ คือค่าคงที่ที่ได้จากการอินทิเกรต และ $\mathbf{\Gamma}$ คือฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกและตรีโกณมิติ (Hyperbolic-Trigonometric Functions)

จากเงื่อนไขขอบ (Boundary Conditions) ของปัญหาที่เกี่ยวข้องกับค่าการกระจัดแต่ละโหนดดังแสดงในรูปที่ 2.7 ได้แก่

$$v_B\Big|_{x=0} = v_1;\frac{dv_B}{dx}\Big|_{x=0} = \theta_1; v_B\Big|_{x=L} = v_2 \text{ และ } \frac{dv_B}{dx}\Big|_{x=L} = \theta_2 \tag{2-87}$$

ทำการแทนค่าฟังก์ชันการกระจัดในแนวดิ่ง $v_B(x)$ และอนุพันธ์ของฟังก์ชันการกระจัดในแนวดิ่งเทียบกับระยะทาง จากเงื่อนไขขอบในสมการที่ (2-87) แทนค่าในสมการที่ (2-86) สามารถเขียนความสัมพันธ์ในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\mathbf{U} = \mathbf{TC} \tag{2-88}$$

เมื่อ $\mathbf{U}$ คือค่าการกระจัดที่โหนด (Element Nodal Displacements) และ $\mathbf{\Gamma}$ คือเมทริกซ์ที่ใช้แปลงระหว่างค่าพิกัด (Generalized Coordinates) กับค่าการกระจัดที่โหนด จากนั้นทำการแทนค่าสมการ (2-88) ในสมการที่ (2-86) จะได้

$$v_B(x) = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{N}_B(x)\mathbf{U} \tag{2-89}$$

เมื่อ $\mathbf{N}_B(x) = \left[N_{B1}(x)\ N_{B2}(x)\ N_{B3}(x)\ N_{B4}(x)\right]$ คือเวกเตอร์แถวที่ประกอบด้วยฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหา (Improved Displacement Shape Functions)

สมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วน (Displacement shape functions) $\mathbf{N}_B(x)$:

$$N_{B1}(x) = \frac{\phi_2\cos[2L-x]\lambda + \phi_3\cos[\lambda x] - \phi_4\sin[2L-x]\lambda + \phi_5\sin[\lambda x]}{2\phi_1} \tag{2-90}$$

$$N_{B2}(x) = \frac{\phi_4\cos[2L-x]\lambda - \phi_4\cos[\lambda x] + \left(e^{2\lambda L}-1\right)\phi_6\sin[\lambda x]}{2\lambda\phi_1} \tag{2-91}$$

$$N_{B3}(x) = \frac{\phi_8\cos[L-x]\lambda + \phi_9\cos[L+x]\lambda + \phi_{10}\sin[L-x]\lambda - \phi_6\sin[L+x]\lambda}{\phi_1} \tag{2-92}$$

$$N_{B4}(x)=\frac{\phi_6\cos[L-x]\lambda-\phi_6\cos[L+x]\lambda-\left(e^{2\lambda L}-1\right)\phi_{11}\sin[L-x]\lambda}{\lambda\phi_1} \qquad (2\text{-}93)$$

สมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและความโค้งของชิ้นส่วน (Curvature-Displacement Shape Functions) ได้จากการนำสมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนทำการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับระยะทาง x: $\mathbf{B}_B(x)=\dfrac{d\mathbf{N}_B(x)}{dx}$

สามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้คือ $\mathbf{B}_B(x)=\left[B_{B1}(x)\ B_{B2}(x)\ B_{B3}(x)\ B_{B4}(x)\right]$ โดยแต่ละฟังก์ชันสามารถเขียนกระจายได้คือ

$$B_{B1}(x)=\frac{\lambda^2\left(\phi_2\cos[2L-x]\lambda-\phi_{12}\cos[\lambda x]+\phi_4\sin[2L-x]\lambda+\phi_{13}\sin[\lambda x]\right)}{\phi_1} \qquad (2\text{-}94)$$

$$B_{B2}(x)=\frac{\lambda\left(\left(1-e^{2\lambda L}\right)\phi_9\cos[\lambda x]+\phi_2\left(\sin[2L-x]\lambda+\sin[\lambda x]\right)\right)}{\phi_1} \qquad (2\text{-}95)$$

$$B_{B3}(x)=-\frac{2\lambda^2\left(\left(\phi_8+2\phi_9\right)\cos[L-x]\lambda-\phi_9\cos[L+x]\lambda-\left(\phi_{10}+2\phi_6\right)\sin[L-x]\lambda-\phi_6\sin[L+x]\lambda\right)}{\phi_1} \qquad (2\text{-}96)$$

$$B_{B4}(x)=\frac{2\lambda\left(\left(e^{2\lambda L}-1\right)\phi_{14}\cos[L-x]\lambda-2\phi_9\sin[\lambda L]\cos[\lambda x]\right)}{\phi_1} \qquad (2\text{-}97)$$

จากสมการที่ (2-90)-(2-97) ได้มีการนิยามตัวแปรเพื่อลดรูปสมการในสั้นลงเพื่อสะดวกในการเขียน โดยที่สมการดังกล่าวได้มีการอ้างอิงจาก Limkatanyu และคณะ (2013 a) เมื่อ

$\phi_1=\dfrac{-2+\cos[2\lambda L]+\cosh[2\lambda L]}{e^{-(x+2L)\lambda}}$; $\phi_2=e^{2\lambda L}+e^{2\lambda(L-x)}$;

$\phi_3=-2e^{2\lambda L}+e^{4\lambda L}+e^{2\lambda x}-2e^{2\lambda(L+x)}$; $\phi_4=e^{2\lambda L}\left(-1+e^{2\lambda x}\right)$; $\phi_5=e^{4\lambda L}-e^{2\lambda x}$; $\phi_6=e^{2\lambda L}-e^{2\lambda x}$;

$\phi_7=\dfrac{1+e^{4\lambda L}+2e^{2\lambda L}\left(-2+\cos[2\lambda L]\right)}{e^{\lambda(L-x)}}$; $\phi_8=1+e^{2\lambda(L-x)}-2\left(e^{2\lambda L}+e^{2\lambda x}\right)$; $\phi_9=e^{2\lambda L}+e^{2\lambda x}$;

$\phi_{10}=e^{2\lambda(L+x)}-1$; $\phi_{11}=-1+e^{2\lambda x}$; $\phi_{12}=e^{4\lambda L}+e^{2\lambda x}$; $\phi_{13}=-2e^{2\lambda L}+e^{4\lambda L}-e^{2\lambda x}+2e^{2\lambda(L+x)}$ และ

$\phi_{14}=1+e^{2\lambda x}$

ในกรณีที่ค่าโมดูลัสต้านทานของดิน k_W มีค่าเข้าใกล้ 0 รูปแบบฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของการกระจัดในสมการที่ (2-90)-(2-93) ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะกลายเป็น Hermitian Polynomials Interpolation Functions หรือสมการพหุนามกำลังสามซึ่งเขียนได้คือ

$$N_{B1}(x)=x\left(1-\frac{x}{L}\right)^2 \tag{2-98}$$

$$N_{B2}(x)=3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3-1 \tag{2-99}$$

$$N_{B3}(x)=x\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2-\left(\frac{x}{L}\right)\right] \tag{2-100}$$

$$N_{B4}(x)=2\left(\frac{x}{L}\right)^3-3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \tag{2-101}$$

สำหรับค่า Flexural Rigidity ของชิ้นส่วนคาน k_B และค่าโมดูลัสต้านทานของดินหรือฐานราก k_W ในความสัมพันธ์ของคุณสมบัติวัสดุอาจมีค่าไม่คงที่ ตัวแปร λ สามารถหาได้จากเทคนิคการหาค่าเฉลี่ยจากค่าที่ลู่เข้าในขั้นตอนก่อนหน้านี้เพื่อที่จะไปประมาณค่าฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง $\mathbf{N}_B(x)$ ในกระบวนการรับน้ำหนักบรรทุกนั้นๆ (Limkatanyu และคณะ, 2013 a)

เทคนิคการประมาณ คือค่าตัวแปร k_B^{AVE} และ k_W^{AVE} จะถูกหาค่าเฉลี่ยก่อนนำไปหาค่าเฉลี่ยตัวแปร λ^{AVE} แสดงได้ดังในสมการที่ (2-102)

$$\lambda^{AVE}=\sqrt{\frac{k_W^{AVE}}{k_B^{AVE}}} \tag{2-102}$$

โดยที่ $k_B^{AVE}=\sum_{i=1}^{NIP}\frac{k_{Bi}w_i}{L}$ และ $k_W^{AVE}=\sum_{i=1}^{NIP}\frac{k_{Wi}w_i}{L}$

เมื่อ w_i คือค่าอัตราส่วนน้ำหนักที่จุดอินทิเกรต i, NIP คือจำนวนจุดในการอินทิเกรต และ L คือความยาวของชิ้นส่วน i

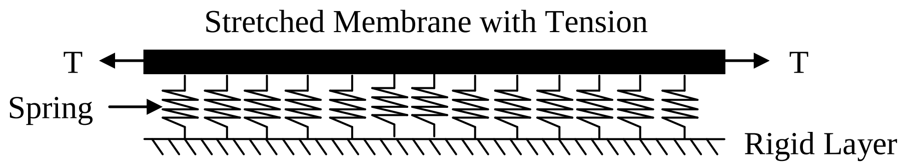
2.4 แบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร (Inelastic Beam Element Resting on Two-Parameter Foundation)

เนื่องจากแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางบนฐานรากอีลาสติกประเภท 1 ตัวแปรหรือแบบจำลองของ Winkler มีข้อบกพร่องในส่วนการจำลองพฤติกรรมของดินเนื่องมาจากแบบจำลองดังกล่าวมีสมมุติฐานคือ แบบจำลองสปริงแต่ละตัวอิสระต่อกันและไม่คิดผลของความเค้นเฉือนในแนวดิ่ง (Vertical Shearing Stress) ที่เกิดขึ้นในดิน จึงได้มีการพัฒนาแบบจำลองเพื่อชดเชยข้อบกพร่องในส่วนนี้ ต่อมาได้มีนักวิจัยทำการศึกษาและเสนอแบบจำลองที่อธิบายพฤติกรรมความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองสปริงของฐานราก Winkler แต่ละตัวเข้าด้วยกัน โดยมีเพิ่มตัวแปรเข้ามาอีกหนึ่งตัว เพื่อจำลองพฤติกรรมของดินเชิงฟิสิกส์ให้มีความใกล้เคียงกับสภาพความเป็นจริงมากขึ้น

มีนักวิจัยหลายท่านได้นำเสนอแบบจำลองดังกล่าว โดยสมมุติตัวแปรที่เพิ่มขึ้นมาอธิบายพฤติกรรมทางกลศาสตร์ที่แตกต่างกันออกไป ได้แก่

Filonenko-Borodich Foundation (1940)

สมมุติฐานของ Filonenko-Borodich คือ ส่วนบนและล่างของสปริงเชื่อมต่อกับ Elastic membrane ที่เคลื่อนตัวด้วยค่าแรงดึง T ดังแสดงในรูปที่ 2.10



(อ้างอิงจาก : Kerr, 1965)

รูปที่ 2.10 ฐานราก Filonenko-Borodich

แรงต้านทานของดินที่กระทำต่อชิ้นส่วนโครงสร้าง $p(x)$ สามารถเขียนในรูปของสมการคือ

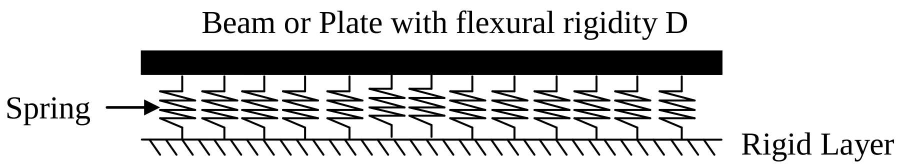
$p(x)=k_W v_B(x)-T\nabla^2 v_B(x)$ สำหรับฐานรากสี่เหลี่ยมหรือฐานรากวงกลม (2-103)

$p(x)=k_W v_B(x)-T\dfrac{d^2 v_B(x)}{dx^2}$ สำหรับ Strip Foundation (2-104)

เมื่อ ∇^2 คือ Laplace Operator $\equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ และ T คือแรงดึง

Hetenyi Foundation (1946)

เป็นแบบจำลองที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนสปริงอิสระที่ติดกับคานอีลาสติก (Elastic Beam) หรือแผ่นบางอีลาสติก (Elastic Plate) ซึ่งสามารถเปลี่ยนรูปเนื่องจากการดัด (Bending) ดังแสดงในรูปที่ 2.11



(อ้างอิงจาก : Dutta and Roy, 2002)

รูปที่ 2.11 ฐานราก Hetenyi

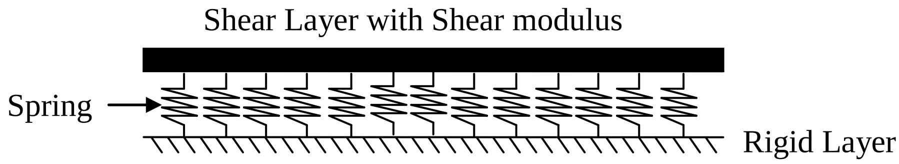
ความสัมพันธ์ระหว่างแรงต้านทานของดินที่กระทำบนฐานราก (Force on the Foundation, Pressure) $p(x)$ กับค่าระยะโก่ง แสดงได้ดังสมการ:

$$p(x)=k_W v_B(x)+D\nabla^4 v_B(x) \quad (2\text{-}105)$$

เมื่อ D คือความแข็งเชิงดัดของแผ่นบางอีลาสติก (Flexural Rigidity of the Elastic Plate) มีค่าเท่ากับ $(E_p h_p^3)/(12(1-\mu_p)^2)$, E_p คือค่ายังโมดูลัส (Young's Modulus) ของวัสดุแผ่นบาง, μ_p คืออัตราส่วนโพซอง (Poisson's Ratio) ของวัสดุแผ่นบาง, h_p คือความหนาของแผ่นบาง และ ∇^4 คือ Laplace Operator $\equiv \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}+\dfrac{\partial^4}{\partial y^4}+2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2 y^2}$

Pasternak Foundation (1954)

Pasternak เสนอผลแรงเฉือนในรูปของสปริง โดยสมมุติส่วนบนและล่างของสปริงเชื่อมต่อกับชั้นที่ต้านทานได้เฉพาะเพียงแรงเฉือนเท่านั้น ดังแสดงในรูปที่ 2.12



(อ้างอิงจาก : Schiel, 1942)

รูปที่ 2.12 ฐานราก Pasternak

แรงต้านทานของดินที่กระทำต่อชิ้นส่วนโครงสร้าง $p(x)$ สามารถเขียนในรูปของสมการคือ

$$p(x) = k_W v_B(x) - k_P \frac{d^2 v_B(x)}{dx^2} \tag{2-106}$$

โดยที่ k_P คือค่าโมดูลัสของชั้นแรงเฉือน (Shear Modulus of the Shear Layer)

Generalized Foundation

เป็นแบบจำลองที่สมมุติจุดที่ต่อของสปริงที่จำลองพฤติกรรมของดินไม่เพียงแต่มีแรงต้านทานแล้ว ยังประกอบไปด้วยโมเมนต์ที่กระทำต่อคาน โดยค่าโมเมนต์เป็นสัดส่วนโดยตรงกับมุมการบิด (Angle of Rotation) หน่วยของแรงต้านทานและโมเมนต์คิดเป็นต่อหน่วยความยาวของคาน

แรงต้านทานของดินที่กระทำต่อชิ้นส่วนโครงสร้าง $p(x)$ และโมเมนต์ดัด $m_n(x)$ สามารถเขียนในรูปสมการคือ

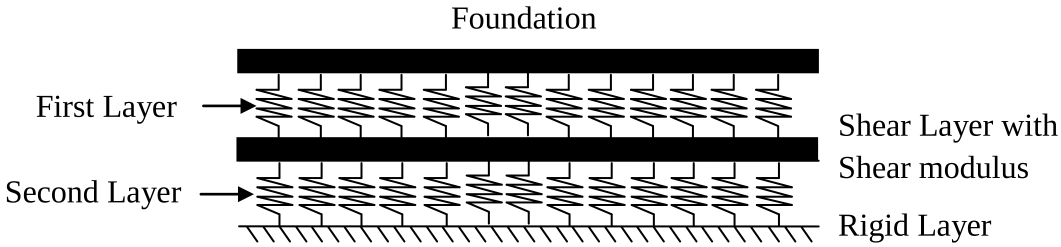
$$p(x) = k_W v_B(x) \tag{2-107}$$

$$m_n(x) = k_1 \frac{dv_B(x)}{dn} \tag{2-108}$$

โดยที่ $m_n(x)$ คือค่าโมเมนต์ดัดในทิศทาง n, n คือทิศทางที่ทุกๆจุดบนระนาบของฐานราก และ k_1 คือ Proportionality Factor

Kerr Foundation

เป็นแบบจำลองที่พัฒนาจากแบบจำลองของ Winkler โดยมีสปริงติดอยู่ทั้งบนและล่างของชั้นแรงเฉือน ดังแสดงในรูปที่ 2.13



(อ้างอิงจาก : Gorbunov และ Posadov, 1949)

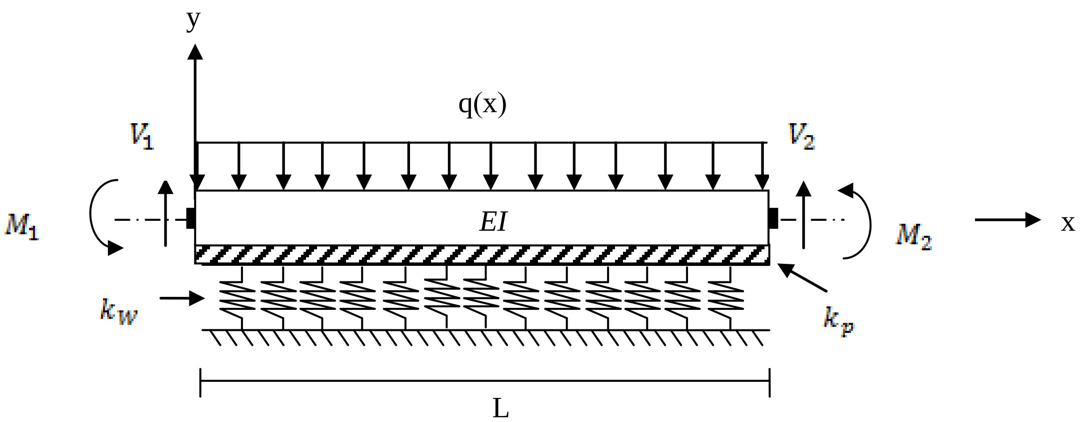
รูปที่ 2.13 ฐานราก Kerr

สมการเชิงอนุพันธ์ของแบบจำลองนี้สามารถเขียนได้คือ

$$\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)p(x)=\frac{G}{k_1}\nabla^2 p(x)+k_2 v_B(x)-G\nabla^2 v_B(x) \qquad (2\text{-}109)$$

เมื่อ k_1 คือค่าคงที่สปริงของชั้นแรงเฉือนที่ 1 (Spring Constant of the First Layer), k_2 คือค่าคงที่สปริงของชั้นแรงเฉือนที่ 2 (Spring Constant of the Second Layer), G คือค่าโมดูลัสของชั้นแรงเฉือน และ $v_B(x)$ คือค่าระยะโก่งที่เกิดขึ้นในชั้นแรงเฉือนชั้นแรก

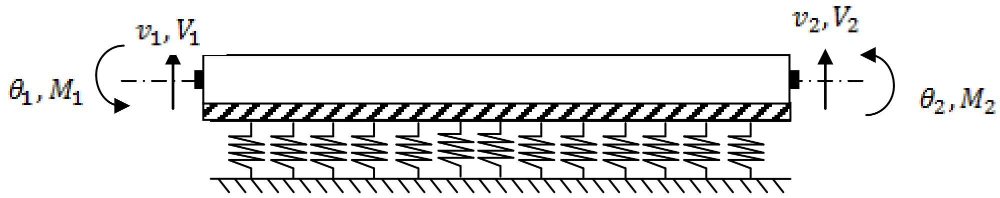
นอกจากนี้ยังมีแบบจำลองที่พัฒนาต่ออีกมากมาย ในงานวิจัยครั้งนี้สนใจเพียงแบบจำลองของ Pasternak เพื่อนำแบบจำลองดังกล่าวไปพัฒนาให้มีประสิทธิภาพและความแม่นยำมากขึ้น จากปัญหาชิ้นส่วนโครงสร้าง เมื่อพิจารณาชิ้นส่วนคานที่วางบนฐานรากอีลาสติกประเภท 2 ตัวแปร ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่กระทำ แสดงได้ดังรูปที่ 2.14



รูปที่ 2.14 ปัญหาคานที่วางบนฐานราก Winkler-Pasternak ภายใต้แรงกระทำสม่ำเสมอ

2.4.1 นิยาม (Definitions)

ในกรณีการศึกษานี้ นำเสนอชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak แสดงได้ดังในรูปที่ 2.15 โดยที่ใน 1 เอเลเมนต์ประกอบไปด้วย 2 โหนด ซึ่งแต่ละโหนดประกอบไปด้วย 2 อันดับอิสรภาพ (Degree of Freedoms) คือ ค่าการกระจัดในแนวดิ่ง (Vertical Displacement) และมุมบิด (Rotation)



รูปที่ 2.15 เอเลเมนต์ของคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak

ค่าการกระจัดที่โหนดสามารถนิยามได้คือ

$$\mathbf{U} = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \tag{2-110}$$

เมื่อ $\mathbf{U}$ คือเวกเตอร์การการกระจัดที่โหนด, v คือการกระจัดในแนวดิ่ง, θ คือค่ามุมบิดและตัวเลขที่ห้อยอยู่ใต้สัญลักษณ์นิยามถึงค่าที่แต่ละโหนดนั้นๆ

จากรูปที่ 2.15 แรงที่กระทำที่โหนดสามารถนิยามได้คือ

$$\mathbf{P} = \{V_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad M_2\}^T \tag{2-111}$$

เมื่อ $\mathbf{P}$ คือเวกเตอร์แรงที่โหนด, V คือค่าแรงเฉือน, M คือค่าโมเมนต์ดัดและตัวเลขที่ห้อยอยู่ใต้สัญลักษณ์นิยามถึงค่าที่แต่ละโหนดนั้นๆ

การกระจัดในแนวดิ่ง $v_B(x)$ ที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคาน สามารถรวมเป็นเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{u}(x) = \{v_B(x)\} \tag{2-112}$$

ความโค้ง $\kappa_B(x)$ ที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคาน สามารถรวมเป็นเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{d}_B(x) = \{\kappa_B(x)\} \tag{2-113}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง $\kappa_B(x)$ และการกระจัดในแนวดิ่ง $v_B(x)$ ที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคานสามารถหาค่าได้โดยตรงผ่านทางสมการความสอดคล้อง (Compatibility Equation) คือ $\kappa_B(x) = \dfrac{d^2 v_B(x)}{dx^2}$ จากทฤษฎีการวิเคราะห์คานของ Euler-Bernoulli การเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนไม่นำมาพิจารณา โดยที่แรงเฉือนที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคานสามารถหาได้จากสมการสมดุลโดยตรง

จากความสัมพันธ์การเปลี่ยนแปลงรูปและฟังก์ชันการกระจัดของคานสามารถเขียนได้ในรูปของเวกเตอร์คือ

$$\mathbf{d}_B(x) = \partial_B \mathbf{u}(x) \tag{2-114}$$

โดยที่ ∂_B คือ Differential Operator สามารถนิยามได้คือ

$$\partial_B = \left[\frac{d^2}{dx^2} \right] \tag{2-115}$$

โมเมนต์ดัด $M(x)$ ที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคาน ถูกนิยามอยู่ในเวกเตอร์ $\mathbf{D}_B(x)$ สามารถเขียนได้คือ

$$\mathbf{D}_B(x) = \{M(x)\} \tag{2-116}$$

การกระจัดของฐานราก Winkler $u_W(x)$ ถูกนิยามอยู่ในเวกเตอร์ $\mathbf{d}_W(x)$ คือ

$$\mathbf{d}_W(x) = \{u_W(x)\} \tag{2-117}$$

จากทฤษฎีฐานรากของ Winkler และสมการความสอดคล้อง สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าการกระจัดในแนวดิ่งของชิ้นส่วนคานและฐานราก Winkler ได้คือ

$$u_W(x) = v_B(x) \tag{2-118}$$

จากสมการที่ (2-118) สามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{d}_W(x) = \partial_W \mathbf{u}(x) \tag{2-119}$$

เมื่อ ∂_W คือ Differential Operator สามารถนิยามได้คือ

$$\partial_W = [1] \tag{2-120}$$

แรงเนื่องจากฐานราก Winkler $D_W(x)$ ที่หน้าตัดใดๆ ถูกนิยามในเวกเตอร์ $\mathbf{D}_W(x)$ สามารถเขียนได้คือ

$$\mathbf{D}_W(x) = \{D_W(x)\} \tag{2-121}$$

การกระจัดของฐานราก Pasternak $u_P(x)$ ถูกนิยามอยู่ในเวกเตอร์ $\mathbf{d}_P(x)$ คือ

$$\mathbf{d}_P(x) = \{u_P(x)\} \tag{2-122}$$

จากสมการความสอดคล้องสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าการกระจัดในแนวดิ่งของชิ้นส่วนคานและฐานรากของ Pasternak ได้คือ

$$u_P(x) = \frac{dv_B(x)}{dx} \tag{2-123}$$

จากสมการที่ (2-123) สามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้คือ

$$\mathbf{d}_P(x) = \partial_P \mathbf{u}(x) \tag{2-124}$$

เมื่อ ∂_P คือ Differential Operator สามารถนิยามได้คือ

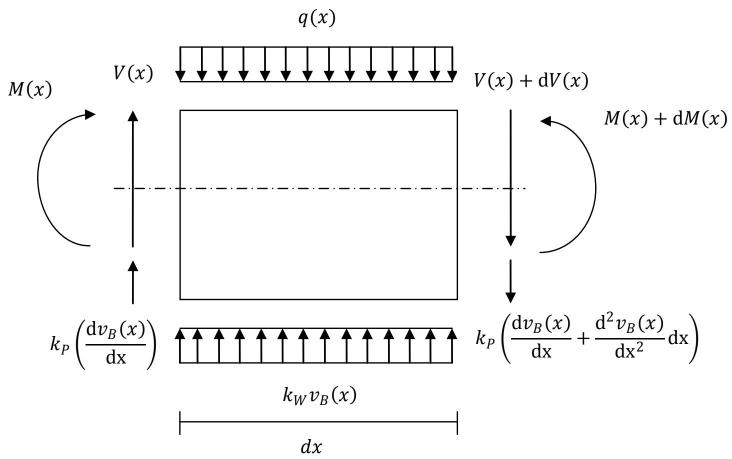
$$\partial_P = \left[\frac{d}{dx}\right] \tag{2-125}$$

แรงเนื่องจากฐานราก Pasternak $D_P(x)$ ที่หน้าตัดใดๆ ถูกนิยามในเวกเตอร์ $\mathbf{D}_P(x)$ สามารถเขียนได้คือ

$$\mathbf{D}_P(x) = \{D_P(x)\} \tag{2-126}$$

2.4.2 สมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานราก Winkler-Pasternak (Governing Differential Equilibrium Equation: Beam Element on Winkler-Pasternak Foundation)

พิจารณาแผนภาพอิสระ (Free Body Diagram) ของชิ้นส่วนคานย่อยๆที่วางอยู่บนชั้นแรงเฉือนและแบบจำลองสปริงของ Winkler ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่กระทำ ดังรูปที่ 2.16 เมื่อทำการพิจารณาสมการสมดุลในแนวดิ่งและโมเมนต์ สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2-127)-(2-128)



(อ้างอิงจาก : Alemdar และ Gülkan, 1997)

รูปที่ 2.16 แผนภาพอิสระชิ้นส่วนย่อยๆของคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak

สมการสมดุลในแนวดิ่ง :

$$\frac{dV(x)}{dx} - k_W v_B(x) + k_P \frac{d^2 v_B(x)}{dx^2} + q(x) = 0 \tag{2-127}$$

สมการสมดุลโมเมนต์ :

$$\frac{dM(x)}{dx} - V(x) = 0 \tag{2-128}$$

เมื่อค่า k_P คือค่าโมดูลัสของชั้นแรงเฉือน

ทำการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับระยะทาง x ในสมการที่ (2-128) จากนั้นนำค่าที่ได้มาแทนค่าในสมการที่ (2-127) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2-129)

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + k_W v_B(x) - k_P \frac{d^2 v_B(x)}{dx^2} - q(x) = 0 \tag{2-129}$$

สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\partial_B^T \mathbf{D}_B(x) + \partial_W^T \mathbf{D}_W(x) - \partial_P^T \mathbf{D}_P(x) - \mathbf{p}(x) = 0 \tag{2-130}$$

เมื่อ $\mathbf{p}(x)=\{q(x)\}^T$ คือ เวกเตอร์แรงภายนอกที่กระทำต่อชิ้นส่วนคานของเอเลเมนต์

จากความสัมพันธ์ความสอดคล้องของวัสดุคาน (Material Constitutive Law) ในสมการที่ (2-62): $M = EI\frac{d^2 v_B(x)}{dx^2} = k_B \frac{d^2 v_B(x)}{dx^2}$ ทำการแทนค่าสมการที่ (2-129) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$k_B \frac{d^4 v_B(x)}{dx^4} - k_P \frac{d^2 v_B(x)}{dx^2} + k_W v_B(x) = q(x) \tag{2-131}$$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการที่ (2-131) พิจารณาในรูปสมการเอกพันธ์เชิงอนุพันธ์ โดยที่แรงภายนอกที่กระทำกับชิ้นส่วนคานมีค่าเท่ากับศูนย์ $q(x) = 0$ ดังแสดงในสมการที่ (2-132) เพื่อทำการหาผลเฉลยของปัญหา โดยที่กำหนดขอบเขตของปัญหาคือ $0 \le x \le L$

$$k_B \frac{d^4 v_B(x)}{dx^4} - k_P \frac{d^2 v_B(x)}{dx^2} + k_W v_B(x) = 0 \tag{2-132}$$

แรงดันดินที่กระทำต่อโครงสร้างชิ้นส่วนคานหาได้จากสมการสมดุลในแนวดิ่งและทฤษฎีฐานราก Pasternak ที่ได้กล่าวไปข้างต้น สามารถนิยามได้ตามสมการที่ (2-106)

2.4.3 การวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัดของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานราก Winkler-Pasternak (Displacement Formulation of Winkler-Pasternak Foundation-Based Beam Element)

ฟังก์ชันการกระจัด $\mathbf{u}(x)$ สามารถอธิบายในรูปของค่าการกระจัดที่โหนด $\mathbf{U}$ ผ่านทางเวกเตอร์ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง $\mathbf{N}_B(x)$ ได้คือ

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}_B(x)\mathbf{U} \tag{2-133}$$

เมื่อ $\mathbf{N}_B(x)$ คือเวกเตอร์ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้รับมาจากการแก้สมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหา

2.4.4 สมการความสอดคล้อง (Compatibility Equation)

การเปลี่ยนแปลงรูปของปัญหาสามารถหาได้จากค่าการกระจัดที่โหนด $\mathbf{U}$ โดยตรงผ่านความสัมพันธ์คือ

$$\mathbf{d}_B(x) = \mathbf{B}_B(x)\mathbf{U} \tag{2-134}$$

$$\mathbf{d}_W(x) = \mathbf{B}_W(x)\mathbf{U} \tag{2-135}$$

$$\mathbf{d}_P(x) = \mathbf{B}_P(x)\mathbf{U} \tag{2-136}$$

เมื่อ $\mathbf{B}_B(x)$, $\mathbf{B}_W(x)$ และ $\mathbf{B}_P(x)$ คือเมทริกซ์ที่ถูกนิยามถึงการแปลงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงรูปกับค่าการกระจัดของคาน ฐานราก Winkler และฐานราก Pasternak ตามลำดับ สามารถนิยามได้คือ

$$\mathbf{B}_B(x) = \partial_B \mathbf{N}_B(x) \tag{2-137}$$

$$\mathbf{B}_W(x) = \partial_W \mathbf{N}_B(x) \tag{2-138}$$

$$\mathbf{B}_P(x) = \partial_P \mathbf{N}_B(x) \tag{2-139}$$

2.4.5 ความสัมพันธ์ของคุณสมบัติวัสดุที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคาน ฐานราก Winkler และฐานราก Pasternak (Material Constitutive Laws: Beam and Foundation Section)

ความสัมพันธ์ของโมเมนต์ดัด $M(x)$ กับค่าความโค้ง $\kappa_B(x)$ ของคาน กำหนดให้มีความสัมพันธ์เป็นสมการไบลิเนียร์ สามารถเขียนได้คือ

$$M(x) = \psi\left[\kappa_B(x)\right] \text{ หรือ } \mathbf{D}_B(x) = \boldsymbol{\psi}\left[\mathbf{d}_B(x)\right] \tag{2-140}$$

ความสัมพันธ์ของแรงเนื่องจากฐานราก Winkler $D_W(x)$ กับค่าการกระจัดของฐานราก Winkler $u_W(x)$ กำหนดให้มีความสัมพันธ์เป็นสมการไบลิเนียร์ สามารถเขียนได้คือ

$$D_W(x) = \Xi\left[u_W(x)\right] \text{ หรือ } \mathbf{D}_W(x) = \boldsymbol{\Xi}\left[\mathbf{d}_W(x)\right] \tag{2-141}$$

ความสัมพันธ์ของแรงเนื่องจากฐานราก Pasternak $D_P(x)$ กับค่าการกระจัดของฐานราก Pasternak $u_P(x)$ กำหนดให้มีความสัมพันธ์เป็นสมการไบลิเนียร์ สามารถเขียนได้คือ

$$D_P(x) = \Theta\left[u_P(x)\right] \text{ หรือ } \mathbf{D}_P(x) = \boldsymbol{\Theta}\left[\mathbf{d}_P(x)\right] \tag{2-142}$$

ความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้นระหว่างค่าแรงและการเปลี่ยนแปลงรูปของชิ้นส่วนคานและฐานรากสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\mathbf{D}_B(x) = \mathbf{D}_B^0(x) + \mathbf{k}_B \Delta \mathbf{d}_B(x) \tag{2-143}$$

$$\mathbf{D}_W(x) = \mathbf{D}_W^0(x) + \mathbf{k}_W \Delta \mathbf{d}_W(x) \tag{2-144}$$

$$\mathbf{D}_P(x) = \mathbf{D}_P^0(x) + \mathbf{k}_P \Delta \mathbf{d}_P(x) \tag{2-145}$$

เมื่อ $\mathbf{D}_B^0(x)$, $\mathbf{D}_W^0(x)$ และ $\mathbf{D}_P^0(x)$ คือค่าแรงเริ่มต้นที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคาน ฐานราก Winkler และฐานราก Pasternak ตามลำดับ นอกจากนี้ $\mathbf{k}_B$, $\mathbf{k}_W$ และ $\mathbf{k}_P$ คือค่าเมทริกซ์สติฟเนสสัมผัสที่หน้าตัดใดๆของชิ้นส่วนคาน ฐานราก Winkler และ ฐานราก Pasternak ตามลำดับ

2.4.6 หลักการงานเสมือน (The Virtual Displacement Principle)

จากการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการกระจัด (Displacement-Based Formulation) ผ่านหลักการของงานเสมือน ทำให้สมการสมดุลในสมการที่ (2-130) ถูกกำหนดอยู่ในรูปของ Weak Sense โดยกำหนดให้ฟังก์ชันการกระจัด $\delta\mathbf{u}(x)$ เป็นตัวแปร Arbitrary ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการ Weak Equilibrium ได้คือ

$$\int_L \delta\mathbf{u}^T(x)(\partial_B^T\mathbf{D}_B(x)+\partial_W^T\mathbf{D}_W(x)+\partial_P^T\mathbf{D}_P(x)-\mathbf{p}(x))dx=0 \qquad (2\text{-}146)$$

แทนค่าสมการที่ (2-143)-(2-145) ลงในสมการที่ (2-146) จากนั้นทำการอินทิเกรตแยกส่วน (Integration by Parts) และทำการแทนค่าสมการที่ (2-133) ลงไป สามารถเขียนได้ในรูปของสมการไฟไนต์เอเลเมนต์คือ

$$(\mathbf{K}_B+\mathbf{K}_W+\mathbf{K}_P)\Delta\mathbf{U}=\mathbf{P}-(\mathbf{P}_B^0+\mathbf{P}_W^0+\mathbf{P}_P^0) \qquad (2\text{-}147)$$

เมื่อ

$\mathbf{K}_B=\int_L \mathbf{B}_B^T(x)\mathbf{D}_B(x)\mathbf{B}_B(x)dx$ คือเอเลเมนต์เมทริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนคาน;

$\mathbf{K}_W=\int_L \mathbf{B}_W^T(x)\mathbf{D}_W(x)\mathbf{B}_W(x)dx$ คือเอเลเมนต์เมทริกซ์สติฟเนสของฐานราก Winkler;

$\mathbf{K}_P=\int_L \mathbf{B}_P^T(x)\mathbf{D}_P(x)\mathbf{B}_P(x)dx$ คือเอเลเมนต์เมทริกซ์สติฟเนสของฐานราก Pasternak;

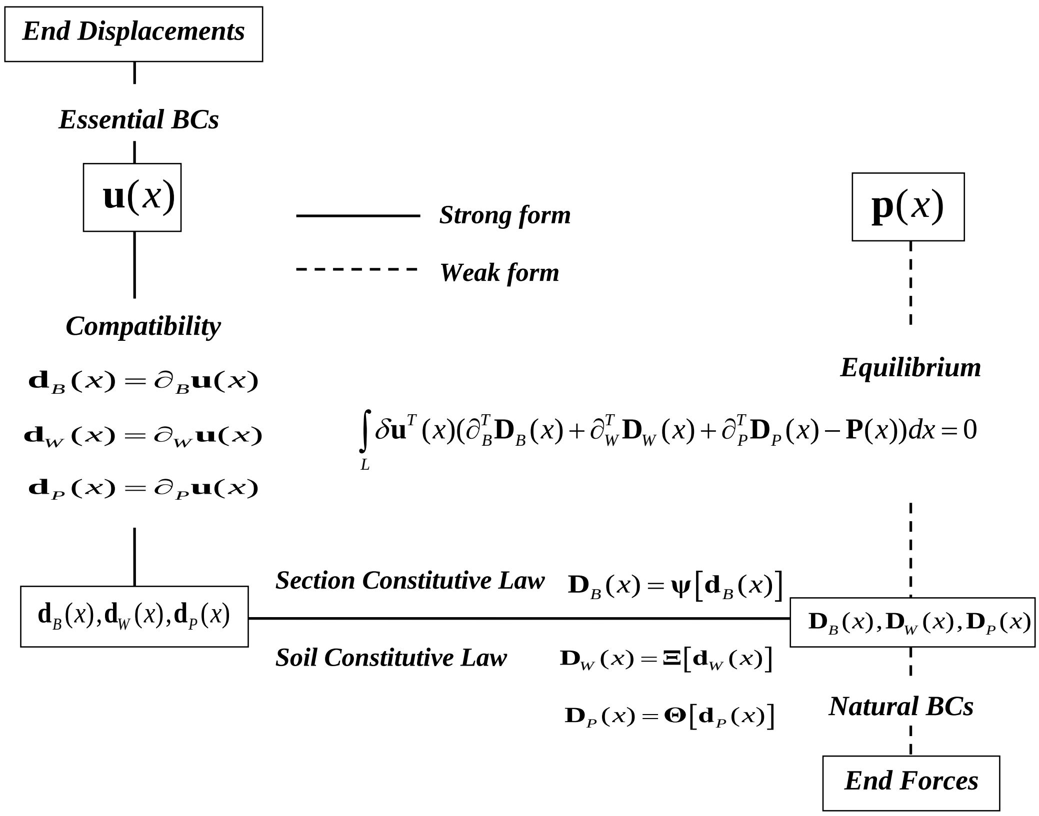
$\mathbf{P}_B^0=\int_L \mathbf{B}_B^T(x)\mathbf{D}_B^0(x)dx$ คือเวกเตอร์เอเลเมนต์แรงต้านทานของชิ้นส่วนคาน;

$\mathbf{P}_W^0=\int_L \mathbf{B}_W^T(x)\mathbf{D}_W^0(x)dx$ คือเวกเตอร์เอเลเมนต์แรงต้านทานของฐานราก Winkler;

และ $\mathbf{P}_P^0=\int_L \mathbf{B}_P^T(x)\mathbf{D}_P^0(x)dx$ คือเวกเตอร์เอเลเมนต์แรงต้านทานของฐานราก Pasternak

จากหลักการการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการกระจัด (Displacement-Based Formulation) ของปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak สามารถสรุปเป็น

แผนภาพ Tonti's Diagram ได้ดังแสดงในรูปที่ 2.17 โดยที่แผนภาพนำเสนอในรูปของ Weak Form เมื่อ $\mathbf{u}(x)$ คือ Primary Variable ของปัญหา ซึ่งสามารถนำไปหาค่าการเปลี่ยนแปลงรูปของปัญหาโดยตรงผ่านสมการความสอดคล้องในสมการที่ (2-134)-(2-136) นอกจากนี้ความสัมพันธ์ระหว่างสมการความสอดคล้องไปยังสมการสมดุลถูกอธิบายในรูปของ Weighted Integral Form หรือ Weak Sense ผ่านหลักการงานเสมือน



รูปที่ 2.17 แผนภาพของ Tonti สำหรับปัญหาคานบนฐานราก Winkler-Pasternak ภายใต้การวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัด

2.4.7 ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ (Improved Displacement Shape Functions)

นิยามตัวแปรสำหรับการแก้ปัญหาหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการที่ (2-132) โดยที่กำหนดให้ $A = k_P / k_B$ และ $B = k_W / k_B$ จากนั้นนำค่าไปแทนในสมการที่ (2-132) สามารถเขียนได้คือ

$$\frac{d^4 v_B(x)}{dx^4} - A\frac{d^2 v_B(x)}{dx^2} + Bv_B(x) = 0 \tag{2-148}$$

กำหนดให้ $\frac{d^n}{dx^n} = D^n$ ดังนั้นจากสมการที่ (2-148) สามารถเขียนได้คือ

$$\left(D^4 + AD^2 + B\right)v_B(x) = 0 \tag{2-149}$$

จากสมการที่ (2-149) ค่ารากของผลเฉลย ได้แก่

$$D_1 = \frac{\sqrt{A + \sqrt{\left(A^2 - 4B\right)}}}{\sqrt{2}} \tag{2-150}$$

$$D_2 = -\frac{\sqrt{A + \sqrt{\left(A^2 - 4B\right)}}}{\sqrt{2}} \tag{2-151}$$

$$D_3 = \frac{\sqrt{A - \sqrt{\left(A^2 - 4B\right)}}}{\sqrt{2}} \tag{2-152}$$

$$D_4 = -\frac{\sqrt{A - \sqrt{\left(A^2 - 4B\right)}}}{\sqrt{2}} \tag{2-153}$$

จากผลเฉลยของปัญหามีความเป็นไปได้ 3 กรณี ในการแก้หาผลเฉลยของปัญหาซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปร A และ B ได้แก่ $A < 2\sqrt{B}$, $A = 2\sqrt{B}$ และ $A > 2\sqrt{B}$ ซึ่งกรณี $A = 2\sqrt{B}$ หรือ $k_P = \sqrt{4k_W k_B}$ เป็นกรณีพิเศษที่มีความเป็นไปได้ในการเกิดน้อยมาก ซึ่งผลเฉลยของปัญหาทั้ง 3 กรณีถูกเสนอโดย Alemdar และ Gülkan (1997)

2.4.7.1 The Shape Functions for the Case $A < 2\sqrt{B}$

สำหรับในกรณี $A < 2\sqrt{B}$ สมการที่ (2-150)-(2-153) สามารถเขียนได้คือ

$$D_1 = \frac{\sqrt{A + i\sqrt{\left(4B - A^2\right)}}}{\sqrt{2}} \tag{2-154}$$

$$D_2 = \frac{\sqrt{-A - i\sqrt{\left(4B - A^2\right)}}}{\sqrt{2}} \tag{2-155}$$

$$D_3 = \frac{\sqrt{A - i\sqrt{\left(4B - A^2\right)}}}{\sqrt{2}} \tag{2-156}$$

$$D_4 = \frac{\sqrt{-A + i\sqrt{\left(4B - A^2\right)}}}{\sqrt{2}} \tag{2-157}$$

กำหนดความสัมพันธ์ตัวแปร k_B, k_W และ k_P ให้อยู่ในรูปของตัวแปร คือ

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{B}{4}} = \sqrt[4]{\frac{k_W}{4k_B}} \tag{2-158}$$

$$\delta = \frac{A}{4} = \frac{k_P}{4k_B} \tag{2-159}$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \delta} \tag{2-160}$$

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \delta} \tag{2-161}$$

ทั้งตัวแปร α และ β มีมิติของหน่วยคือ $1/L$ นำตัวแปรจากสมการที่ (2-158)-(2-161) ไปแทนในค่ารากของผลเฉลยในสมการที่ (2-154)-(2-157) สามารถเขียนได้คือ

$$D_1 = \alpha + i\beta \tag{2-162}$$

$$D_2 = -\alpha - i\beta \tag{2-163}$$

$$D_3 = \alpha - i\beta \tag{2-164}$$

$$D_4 = -\alpha + i\beta \tag{2-165}$$

พิจารณาค่ารากในสมการที่ (2-162)-(2-165) ผลเฉลยของปัญหาในกรณีนี้สามารถแสดงดังสมการที่ (2-166) คือ

$$\begin{aligned} v_B(x) = a_1 e^{\alpha x}\left(\cos[\beta x] + \sin[\beta x]\right) + a_2 e^{-\alpha x}\left(\cos[\beta x] - \sin[\beta x]\right) + \\ a_3 e^{\alpha x}\left(\cos[\beta x] - \sin[\beta x]\right) + a_4 e^{-\alpha x}\left(\cos[\beta x] + \sin[\beta x]\right) \end{aligned} \tag{2-166}$$

ผลเฉลยในสมการที่ (2-166) ไม่พิจารณาผลแรงดึงในแนวแกนของชิ้นส่วนคาน

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก:

$$e^{\alpha x} = \cosh[\alpha x] + \sinh[\alpha x] \tag{2-167}$$

$$e^{-\alpha x} = \cosh[\alpha x] - \sinh[\alpha x] \tag{2-168}$$

ทำการแทนค่าฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกจากสมการที่ (2-167)-(2-168) ในสมการผลเฉลย (2-166) จากนั้นทำการจัดรูปจะได้สมการผลเฉลยในเทอมของไฮเพอร์โบลิกและฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังแสดงในสมการที่ (2-169)

$$\begin{aligned} v_B(x) = c_1 \cos[\beta x]\cosh[\alpha x] + c_2 \cos[\beta x]\sinh[\alpha x] + \\ c_3 \sin[\beta x]\cosh[\alpha x] + c_4 \sin[\beta x]\sinh[\alpha x] \end{aligned} \tag{2-169}$$

จากสมการที่ (2-169) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$v_B(x) = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{C} \tag{2-170}$$

จากเงื่อนไขขอบดังแสดงในรูปที่ 2.15 สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2-171)

$$v_B\big|_{x=0} = v_1 ; \left.\frac{dv_B}{dx}\right|_{x=0} = \theta_1 ; v_B\big|_{x=L} = v_2 \text{ และ } \left.\frac{dv_B}{dx}\right|_{x=L} = \theta_2 \tag{2-171}$$

ทำการแทนค่าฟังก์ชันการกระจัด $v_B(x)$ และอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันการกระจัด $v_B(x)$ จากสมการที่ (2-171) แทนค่าในสมการที่ (2-169) สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ในรูปเมทริกซ์คือ

$$\mathbf{U} = \mathbf{TC} \tag{2-172}$$

จากนั้นทำการแทนค่าสมการ (2-172) ในสมการที่ (2-170) จะได้

$$v_B(x) = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{N}_B(x)\mathbf{U} \tag{2-173}$$

สมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนคาน $\mathbf{N}_B(x)$:

$$N_{B1}(x) = \frac{\phi_1\left(\alpha^2\phi_2 - \phi_3\left(\alpha^2 + \beta^2 - \beta^2\phi_4\right) + \alpha\beta\phi_5\phi_6\right) - \beta\phi_{10}\left(\alpha\phi_7 + \alpha\phi_4\phi_5 + \beta\phi_3\phi_6\right)}{\phi_{61}} \tag{2-174}$$

$$N_{B2}(x)=\frac{2\left(-\beta\phi_5\phi_{11}\phi_{12}+\alpha\phi_{13}\phi_{14}\phi_{10}\right)}{-\phi_{61}} \quad (2\text{-}175)$$

$$N_{B3}(x)=\frac{2\left(-\alpha\phi_1\phi_5\left(\alpha\phi_{15}\phi_{13}+\beta\phi_{16}\phi_{11}\right)+\phi_{10}\left(\alpha\beta\phi_3\phi_{15}\phi_{13}+\phi_{11}\left(\beta^2\phi_{17}+\alpha^2\phi_{13}\phi_5\right)\right)\right)}{\phi_{61}} \quad (2\text{-}176)$$

$$N_{B4}(x)=\frac{2\left(-\alpha\phi_{13}\phi_5\phi_{12}+\beta\phi_{14}\phi_{11}\phi_{10}\right)}{-\phi_{61}} \quad (2\text{-}177)$$

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับระยะทาง x ของสมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนคาน $\mathbf{Y}_B(x)=\dfrac{d\mathbf{N}_B(x)}{dx}$:

$$Y_{B1}(x)=\frac{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\beta\phi_5\phi_{11}\phi_{12}+\alpha\phi_{13}\phi_{14}\phi_{10}\right)}{-\phi_{61}} \quad (2\text{-}178)$$

$$Y_{B2}(x)=\frac{\phi_1\left(2\beta^2\phi_3\phi_{11}^2-\alpha\left(2\alpha\phi_{13}\phi_{14}+\beta\phi_5\phi_6\right)\right)+\beta\phi_{10}\left(2\alpha\phi_{17}\phi_{13}+2\alpha\phi_5\phi_{11}^2-\beta\phi_3\phi_6\right)}{\phi_{61}} \quad (2\text{-}179)$$

$$Y_{B3}(x)=\frac{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha\phi_{13}\phi_5\phi_{12}+\beta\phi_{14}\phi_{11}\phi_{10}\right)}{\phi_{61}} \quad (2\text{-}180)$$

$$Y_{B4}(x)=\frac{2\left(-\alpha\phi_{15}\phi_{13}\left(\alpha\phi_1\phi_5+\beta\phi_3\phi_{10}\right)+\phi_{11}\left(\alpha\beta\phi_{16}\phi_1\phi_5+\phi_{10}\left(\beta^2\phi_{17}+\alpha^2\phi_{13}\phi_5\right)\right)\right)}{\phi_{61}} \quad (2\text{-}181)$$

อนุพันธ์อันดับที่สองเทียบกับระยะทาง x ของสมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนคาน $\mathbf{B}_B(x)=\dfrac{d^2\mathbf{N}_B(x)}{dx^2}=\dfrac{d\mathbf{Y}_B(x)}{dx}$:

$$B_{B1}(x)=\frac{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2\phi_1\phi_{13}\phi_{14}+\beta\phi_{11}\left(-\alpha\phi_{18}\phi_5+\beta\phi_3\phi_{12}\right)-\alpha\beta\phi_{17}\phi_{13}\phi_{10}\right)}{-\phi_{61}} \quad (2\text{-}182)$$

$$B_{B2}(x)=\frac{-2\beta\phi_1\left(\left(-\alpha^2+\beta^2\right)\phi_5\phi_{11}^2+\alpha\left(-2\alpha\phi_{17}\phi_{13}+\beta\phi_3\phi_6\right)\right)}{\phi_{61}} \\ \frac{+\phi_{10}\left(4\alpha\beta^2\phi_3\phi_{11}^2-\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(2\alpha\phi_{13}\phi_{14}+\beta\phi_5\phi_6\right)\right)}{\phi_{61}} \quad (2\text{-}183)$$

$$B_{B3}(x)=\frac{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2\phi_{18}\phi_{13}\phi_5+\beta\left(-\alpha\left(\phi_1\phi_{14}\phi_{11}+\phi_3\phi_{13}\phi_{12}\right)+\beta\phi_{17}\phi_{11}\phi_{10}\right)\right)}{-\phi_{61}} \quad (2\text{-}184)$$

$$B_{B4}(x) = \frac{2\alpha\phi_{15}\phi_{13}\left(-2\alpha\beta\phi_3\phi_1 + \left(-\alpha^2+\beta^2\right)\phi_5\phi_{10}\right)}{\phi_{61}} \\ \frac{+2\phi_{11}\left(\alpha\phi_1\left(2\beta^2\phi_{16}\phi_3 + \left(\alpha^2+\beta^2\right)\phi_{13}\phi_5\right) + \beta\phi_{10}\left(\beta^2\phi_{14} + \alpha^2\phi_{14}\right)\right)}{\phi_{61}} \tag{2-185}$$

2.4.7.2 The Shape Functions for the Case $A > 2\sqrt{B}$

จากสมการที่ (2-150)-(2-153) สามารถเขียนผลเฉลยค่ารากของปัญหาในกรณี $A > 2\sqrt{B}$ ได้คือ

$$D_1 = \alpha + i\beta \tag{2-186}$$

$$D_2 = -\alpha - i\beta \tag{2-187}$$

$$D_3 = \alpha - i\beta \tag{2-188}$$

$$D_4 = -\alpha + i\beta \tag{2-189}$$

เมื่อ $\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \delta}$ และ $\beta = \sqrt{\delta - \lambda^2}$ พิจารณาค่ารากในสมการที่ (2-186)-(2-189) ผลเฉลยของปัญหาในกรณีนี้สามารถแสดงดังสมการที่ (2-190) คือ

$$v_B(x) = a_1 e^{(\alpha+\beta)x} + a_2 e^{-(\alpha+\beta)x} + a_3 e^{(\alpha-\beta)x} + a_4 e^{(-\alpha+\beta)x} \tag{2-190}$$

จากนั้นแทนค่าฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกสมการที่ (2-167)-(2-168) ในสมการผลเฉลยที่ (2-190) จัดรูปจะได้สมการผลเฉลยในเทอมของไฮเพอร์โบลิกและฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังแสดงในสมการที่ (2-191)

$$v_B(x) = c_1 \cosh\beta x \cosh\alpha x + c_2 \sinh\beta x \cosh\alpha x + c_3 \cosh\beta x \sinh\alpha x + c_4 \sinh\beta x \sinh\alpha x \tag{2-191}$$

สมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนคาน $\mathbf{N}_B(x)$:

$$N_{B1}\left(x\right)=\frac{\phi_1\left(\phi_{20}\left(-\alpha^2+\beta^2-\beta^2\phi_4+\alpha^2\phi_{19}\right)-\alpha\phi_{21}\left(\beta\phi_6+\alpha\phi_{22}\right)\right)}{\phi_{62}} \\ \frac{+\beta\phi_{10}\left(\beta\phi_{20}\phi_6+\alpha\left(\phi_{23}+\phi_4\phi_{21}\right)\right)}{\phi_{62}} \tag{2-192}$$

$$N_{B2}\left(x\right)=\frac{2\left(\alpha\phi_{10}\phi_{24}\phi_{25}-\beta\phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}\right)}{\phi_{62}} \tag{2-193}$$

$$N_{B3}\left(x\right)=\frac{2\beta\phi_{26}\phi_{11}\left(-\beta\phi_{20}\phi_{10}+\alpha\phi_1\phi_{21}\right)}{\phi_{62}} \\ \frac{2\phi_{24}\left(\left(-\alpha^2+\beta^2\right)\phi_{11}\phi_{10}\phi_{21}+\alpha\phi_{15}\left(-\beta\phi_{20}\phi_{10}+\alpha\phi_1\phi_{21}\right)\right)}{\phi_{62}} \tag{2-194}$$

$$N_{B4}\left(x\right)=\frac{2\left(\beta\phi_{11}\phi_{10}\phi_{25}-\alpha\phi_{12}\phi_{24}\phi_{21}\right)}{\phi_{62}} \tag{2-195}$$

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับระยะทาง x ของสมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนคาน $\mathbf{Y}_B(x)=\dfrac{d\mathbf{N}_B(x)}{dx}$:

$$Y_{B1}(x)=\frac{-\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(-2\alpha\phi_{19}\phi_{20}\phi_{10}+\left(\alpha-\beta\right)\phi_{27}+2\alpha\phi_{10}\phi_{22}\phi_{21}\right)}{2\phi_{62}} \\ \frac{-\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(+\left(\alpha+\beta\right)\phi_{28}+\beta\left(-\phi_{29}+\phi_{30}\right)\right)}{2\phi_{62}} \tag{2-196}$$

$$Y_{B2}(x)=\frac{\left(-2\beta^2\phi_{20}\phi_{11}\phi_{12}+2\alpha\left(\phi_{24}\left(-\beta\phi_{31}\phi_{10}+\alpha\phi_1\phi_{25}\right)+\beta\phi_{18}\phi_{11}\phi_{21}\right)\right)}{\phi_{62}} \tag{2-197}$$

$$Y_{B3}(x)=\frac{\left(2\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\beta\phi_{11}\phi_{10}\phi_{25}+\alpha\phi_{12}\phi_{24}\phi_{21}\right)\right)}{-\phi_{62}} \tag{2-198}$$

$$Y_{B4}(x)=\frac{\left(2\left(-\beta^2\phi_{31}\phi_{11}\phi_{10}+\alpha\left(-\beta\phi_{20}\phi_{12}\phi_{24}+\beta\phi_1\phi_{11}\phi_{25}+\alpha\phi_{18}\phi_{24}\phi_{21}\right)\right)\right)}{\phi_{62}} \tag{2-199}$$

อนุพันธ์อันดับที่สองเทียบกับระยะทาง x ของสมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนคาน $\mathbf{B}_B(x)=\dfrac{d^2\mathbf{N}_B(x)}{dx^2}=\dfrac{d\mathbf{Y}_B(x)}{dx}$:

$$B_{B1}(x)=\frac{-\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\left(\alpha-\beta\right)^2\phi_{32}-2\alpha^2\phi_1\phi_{33}+\left(\alpha+\beta\right)^2\phi_{34}\right)}{2\phi_{62}}$$
$$\frac{-\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(-\beta\left(\left(-\alpha+\beta\right)\phi_{35}+\left(\alpha+\beta\right)\phi_{36}-2\alpha\phi_{10}\phi_{23}\right)\right)}{2\phi_{62}} \quad (2\text{-}200)$$

$$B_{B2}(x)=\frac{\left(2\left(2\alpha\beta^2\phi_{18}\phi_{20}\phi_{11}-2\alpha^2\beta\phi_1\phi_{31}\phi_{24}+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha\phi_{10}\phi_{24}\phi_{25}-\beta\phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}\right)\right)\right)}{\phi_{62}} \quad (2\text{-}201)$$

$$B_{B3}(x)=\frac{\left(2\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\beta^2\phi_{31}\phi_{11}\phi_{10}+\alpha\left(-\beta\left(\phi_{20}\phi_{12}\phi_{24}+\phi_1\phi_{11}\phi_{25}\right)+\alpha\phi_{18}\phi_{24}\phi_{21}\right)\right)\right)}{\phi_{62}} \quad (2\text{-}202)$$

$$B_{B4}(x)=\frac{2\left(-2\alpha\beta^2\phi_1\phi_{31}\phi_{11}+2\alpha^2\beta\phi_{18}\phi_{20}\phi_{24}-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(-\beta\phi_{11}\phi_{10}\phi_{25}+\alpha\phi_{12}\phi_{24}\phi_{21}\right)\right)}{\phi_{62}} \quad (2\text{-}203)$$

2.4.7.3 The Shape Functions for the Case $A=2\sqrt{B}$

สำหรับกรณีนี้เป็นกรณีพิเศษที่มีความเป็นไปได้ในการเกิดน้อยมาก ผลเฉลยของปัญหาในกรณีนี้สามารถแสดงดังสมการที่ (2-204) คือ

$$v_B(x)=c_1e^{\sqrt[4]{B}x}+c_2xe^{\sqrt[4]{B}x}+c_3e^{-\sqrt[4]{B}x}+c_4xe^{-\sqrt[4]{B}x} \quad (2\text{-}204)$$

เมื่อ $B=k_W\,/\,k_B$

สมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนคาน (Displacement shape functions) $\mathbf{N}_B(x)$:

$$N_{B1}(x)=\frac{\left(\phi_{37}\left(\phi_{38}\phi_{44}-\phi_{39}\phi_{45}+\phi_{40}\left(1+\phi_{47}+\phi_{46}\right)+\phi_{41}\left(1+\phi_{48}+\phi_{46}\right)\right)\right)}{\phi_{42}} \quad (2\text{-}205)$$

$$N_{B2}(x)=\frac{\left(\phi_{37}\left(-\phi_{39}x-\phi_{38}x+\phi_{40}\left(x+\phi_{63}\right)+\phi_{41}\left(x+\phi_{49}\right)\right)\right)}{\phi_{42}} \quad (2\text{-}206)$$

$$N_{B3}(x)=\frac{\left(\phi_{43}\left(-1+\phi_{40}\left(-1+\phi_{50}\right)+\phi_{38}\left(1-\phi_{51}+\phi_{56}\right)+\phi_{41}\left(1+\phi_{51}+\phi_{56}\right)+\phi_{52}\right)\right)}{\phi_{42}} \quad (2\text{-}207)$$

$$N_{B4}(x)=\frac{\left(\phi_{43}\left(-\left(-1+\phi_{41}\right)\left(-1+\phi_{38}\right)x+L\left(1+\phi_{40}+\phi_{38}\left(-1+\phi_{57}\right)-\phi_{41}\left(1+\phi_{57}\right)\right)\right)\right)}{\phi_{42}} \quad (2\text{-}208)$$

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับระยะทาง x ของสมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนคาน $\mathbf{Y}_B(x)=\dfrac{d\mathbf{N}_B(x)}{dx}$:

$$Y_{B1}(x)=\frac{\left(\sqrt{B}\phi_{37}\left(\phi_{39}x+\phi_{38}x-\phi_{41}\left(x+\phi_{63}\right)-\phi_{40}\left(x+\phi_{49}\right)\right)\right)}{\phi_{42}} \qquad (2\text{-}209)$$

$$Y_{B2}(x)=\frac{\left(\phi_{37}\left(\phi_{39}\phi_{44}-\phi_{38}\phi_{45}+\phi_{41}\left(1+\phi_{47}+\phi_{46}\right)+\phi_{40}\left(1+\phi_{48}+\phi_{46}\right)\right)\right)}{\phi_{42}} \qquad (2\text{-}210)$$

$$Y_{B3}(x)=\frac{\left(\sqrt{B}\phi_{43}\left(\left(-1+\phi_{41}\right)\left(-1+\phi_{38}\right)x-L\left(1+\phi_{40}+\phi_{41}\left(-1+\phi_{57}\right)-\phi_{38}\left(1+\phi_{57}\right)\right)\right)\right)}{\phi_{42}} \qquad (2\text{-}211)$$

$$Y_{B4}(x)=\frac{\left(\phi_{43}\left(-1+\phi_{40}\left(-1+\phi_{52}\right)+\phi_{41}\left(1-\phi_{51}+\phi_{56}\right)+\phi_{38}\left(1+\phi_{51}+\phi_{56}\right)+\phi_{50}\right)\right)}{\phi_{42}} \qquad (2\text{-}212)$$

อนุพันธ์อันดับที่สองเทียบกับระยะทาง x ของสมการการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนคาน $\mathbf{B}_B(x)=\dfrac{d^2\mathbf{N}_B(x)}{dx^2}=\dfrac{d\mathbf{Y}_B(x)}{dx}$:

$$B_{B1}(x)=\frac{\left(\phi_{37}\left(\phi_{39}\phi_{53}+\phi_{38}\phi_{54}+\phi_{40}\left(-\sqrt{B}-\phi_{59}+\phi_{55}\right)+\phi_{41}\left(-\sqrt{B}+\phi_{59}+\phi_{55}\right)\right)\right)}{\phi_{42}} \qquad (2\text{-}213)$$

$$B_{B2}(x)=\frac{-\left(B^{1/4}\phi_{37}\left(\phi_{39}\left(-1+\phi_{44}\right)+\phi_{38}\left(1+\phi_{45}\right)+\phi_{41}\left(2+\phi_{60}+\phi_{46}\right)-\phi_{40}\left(2-\phi_{60}+\phi_{46}\right)\right)\right)}{\phi_{42}} \qquad (2\text{-}214)$$

$$B_{B3}(x)=\frac{\left(\sqrt{B}\phi_{43}\left(1+\phi_{40}\left(1+\phi_{50}\right)+\phi_{38}\left(-1+\phi_{58}+\phi_{56}\right)+\phi_{41}\left(-1-\phi_{58}+\phi_{56}\right)+\phi_{52}\right)\right)}{\phi_{42}} \qquad (2\text{-}215)$$

$$B_{B4}(x)=\frac{\left(B^{1/4}\phi_{43}\left(2+\phi_{40}\left(-2+\phi_{52}\right)+\phi_{41}\left(-2+\phi_{58}-\phi_{56}\right)+\phi_{38}\left(2+\phi_{58}+\phi_{56}\right)+\phi_{52}\right)\right)}{\phi_{42}} \qquad (2\text{-}216)$$

จากสมการที่ (2-174)-(2-216) ได้มีการนิยามตัวแปรเพื่อลดรูปสมการในสั้นลงเพื่อสะดวกในการเขียน โดยที่ตัวแปรดังกล่าวสามารถหาได้จาก

$\phi_1=\cosh[x\alpha]$; $\phi_2=\cos[(2L-x)\beta]$; $\phi_3=\cos[x\beta]$; $\phi_4=\cosh[2L\alpha]$; $\phi_5=\sin[x\beta]$;
$\phi_6=\sinh[2L\alpha]$; $\phi_7=\sin[(2L-x)\beta]$; $\phi_8=\sin[x\alpha]$; $\phi_9=\cos[2L\beta]$; $\phi_{10}=\sinh[x\alpha]$;
$\phi_{11}=\sinh[L\alpha]$; $\phi_{12}=\sinh[(L-x)\alpha]$; $\phi_{13}=\sin[L\beta]$; $\phi_{14}=\sin[(L-x)\beta]$; $\phi_{15}=\cosh[L\alpha]$;
$\phi_{16}=\cos[L\beta]$; $\phi_{17}=\cos[(L-x)\beta]$; $\phi_{18}=\cosh[(L-x)\alpha]$; $\phi_{19}=\cosh[2L\beta]$; $\phi_{20}=\cosh[x\beta]$;

$\phi_{21} = \sinh[x\beta]$; $\phi_{22} = \sinh[2L\beta]$; $\phi_{23} = \sinh[(2L-x)\beta]$; $\phi_{24} = \sinh[L\beta]$;
$\phi_{25} = \sinh[(L-x)\beta]$; $\phi_{26} = \cosh[L\beta]$; $\phi_{27} = \sinh[(\alpha-\beta)x]$; $\phi_{28} = \sinh[(\alpha+\beta)x]$;
$\phi_{29} = \sinh[2L\alpha + x(-\alpha+\beta)]$; $\phi_{30} = \sinh[2L\alpha - x(\alpha+\beta)]$; $\phi_{31} = \cosh[(L-x)\beta]$;
$\phi_{32} = \cosh[(\alpha-\beta)x]$; $\phi_{33} = \cosh[(2L-x)\beta]$; $\phi_{34} = \cosh[(\alpha+\beta)x]$;
$\phi_{35} = \cosh[2L\alpha + x(-\alpha+\beta)]$; $\phi_{36} = \cosh[2L\alpha - x(\alpha+\beta)]$; $\phi_{37} = e^{-(2L+x)B^{1/4}}$; $\phi_{38} = e^{2xB^{1/4}}$;
$\phi_{39} = e^{4LB^{1/4}}$; $\phi_{40} = e^{2(L+x)B^{1/4}}$; $\phi_{41} = e^{2LB^{1/4}}$; $\phi_{42} = 2\left(1 + 2L^2\sqrt{B} - \cosh[2LB^{1/4}]\right)$; $\phi_{43} = e^{-(L+x)B^{1/4}}$;
$\phi_{44} = -1 + xB^{1/4}$; $\phi_{45} = 1 + xB^{1/4}$; $\phi_{46} = 2L(L-x)\sqrt{B}$; $\phi_{47} = (2L-x)B^{1/4}$; $\phi_{48} = (-2L+x)B^{1/4}$;
$\phi_{49} = 2L(-L+x)B^{1/4}$; $\phi_{50} = (-L+x)B^{1/4}$; $\phi_{51} = (L+x)B^{1/4}$; $\phi_{52} = (L-x)B^{1/4}$;
$\phi_{53} = \sqrt{B} - xB^{3/4}$; $\phi_{54} = \sqrt{B} + xB^{3/4}$; $\phi_{55} = 2L(L-x)B$; $\phi_{56} = 2Lx\sqrt{B}$; $\phi_{57} = 2xB^{1/4}$;
$\phi_{58} = (3L-x)B^{1/4}$; $\phi_{59} = (2L+x)B^{3/4}$; $\phi_{60} = (4L-x)B^{1/4}$; $\phi_{61} = -\alpha^2 - \beta^2 + \alpha^2\phi_9 + \beta^2\phi_4$;
$\phi_{62} = -\alpha^2 + \beta^2 - \beta^2\phi_4 + \alpha^2\phi_{19}$; $\phi_{63} = 2L(L-x)B^{1/4}$;

ในกรณีที่ค่าตัวแปรเนื่องจากฐานราก k_W และ k_P มีค่าเข้าใกล้ค่า 0 ส่งผลทำให้ตัวแปร $\lambda \to 0$, $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$ และ $\beta \to 0$ รูปแบบฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทางทฤษฎี ทั้งในกรณี $A < 2\sqrt{B}$ และ $A > 2\sqrt{B}$ จะกลายเป็น Hermitian Polynomials Interpolation Functions หรือสมการพหุนามกำลังสาม ซึ่งเขียนได้ดังสมการที่ (2-98)-(2-101) และในกรณีที่ค่าตัวแปรเนื่องจากฐานราก k_P มีค่าเข้าใกล้ค่า 0 รูปแบบฟังก์ชันการเปลี่ยนรูปร่างของปัญหาจะกลายเป็นฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในกรณีปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler ดังแสดงในสมการที่ (2-90)-(2-93)

สำหรับค่า Flexural Rigidity ของชิ้นส่วนคาน k_B, ค่าโมดูลัสต้านทานของฐานราก Winkler k_W และค่าโมดูลัสต้านทานของชั้นแรงเฉือน k_P ในความสัมพันธ์ของคุณสมบัติวัสดุอาจมีค่าไม่คงที่ ตัวแปร λ และ δ สามารถหาได้จากเทคนิคการหาค่าเฉลี่ยจากค่าที่ลู่เข้าในขั้นตอนก่อนหน้านี้เพื่อที่จะไปประมาณค่าฟังก์ชันรูปร่าง $\mathbf{N}_B(x)$ ในกระบวนการรับน้ำหนักบรรทุกนั้นๆ

เทคนิคการประมาณ คือค่าตัวแปร k_B^{AVE}, k_W^{AVE} และ k_P^{AVE} จะถูกหาค่าเฉลี่ยก่อนนำไปหาค่าเฉลี่ยตัวแปร λ^{AVE} และ δ^{AVE} ดังแสดงในสมการที่ (2-217)-(2-218)

$$\lambda^{AVE} = \sqrt{\frac{k_W^{AVE}}{4k_B^{AVE}}} \tag{2-217}$$

$$\delta^{AVE} = \frac{k_P^{AVE}}{4k_B^{AVE}} \tag{2-218}$$

โดยที่ $k_B^{AVE} = \sum_{i=1}^{NIP} \frac{k_{Bi} w_i}{L}$, $k_W^{AVE} = \sum_{i=1}^{NIP} \frac{k_{Wi} w_i}{L}$ และ $k_P^{AVE} = \sum_{i=1}^{NIP} \frac{k_{Pi} w_i}{L}$

เมื่อ w_i คือค่าอัตราส่วนน้ำหนักที่จุดอินทิเกรต i, NIP คือจำนวนจุดในการอินทิเกรต, และ L คือความยาวของชิ้นส่วน i

บทที่ 3
วิธีการดำเนินการวิจัย

3.1 ศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื่องจากงานวิจัยนี้เกี่ยวข้องกับทฤษฎีและงานวิจัยหลายๆงานวิจัย ในช่วงเริ่มต้นของงานวิจัยจึงเป็นการทบทวนทฤษฎีและงานวิจัยต่างที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ทฤษฎีการวิเคราะห์คานของ Euler-Bernoulli เป็นต้น จากนั้นได้ทำการศึกษาบทความวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งรายละเอียดหลักๆของการศึกษา คือศึกษาการจำลองพฤติกรรมดินหรือฐานรากและวิเคราะห์ผลตอบสนองกับของปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนดินหรือฐานราก ดังที่ได้กล่าวไปในทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังได้มีการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการช่วยคำนวณผลตอบสนองของปัญหา

3.2 โปรแกรมที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย

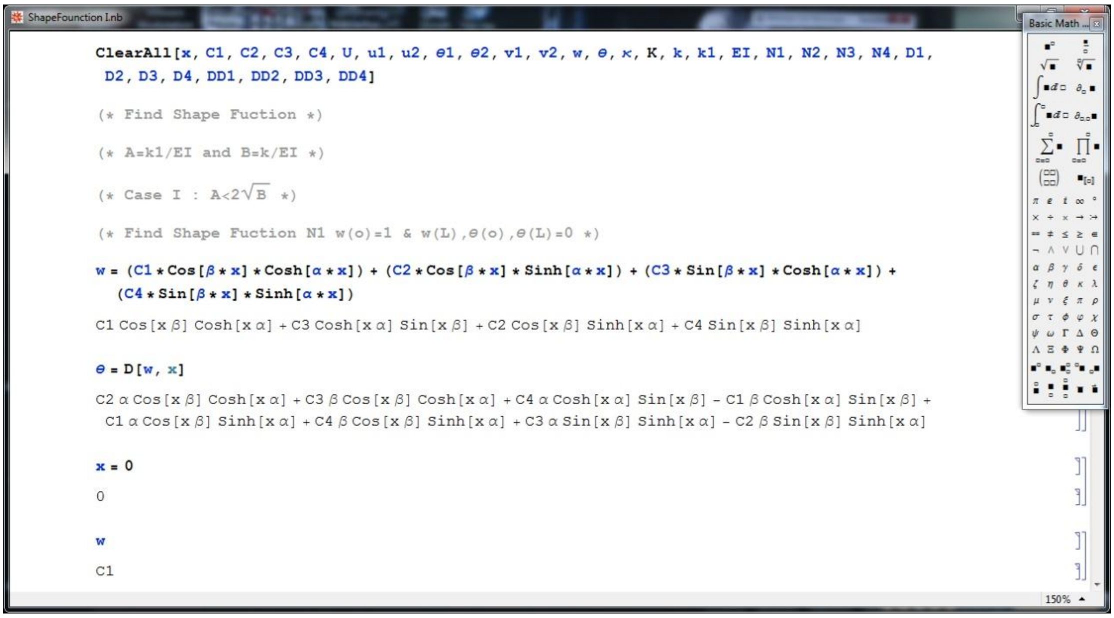
เนื่องมาจากการคำนวณผลตอบสนองของปัญหาในงานวิจัยนี้ค่อยข้างซับซ้อนและมีกระบวนการคำนวณมากมาย การนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการคำนวณจึงเป็นตัวเลือกหนึ่งที่เพิ่มความสะดวกและความรวดเร็วในการได้มาซึ่งผลตอบสนองของปัญหาโปรแกรมที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ ได้แก่

3.2.1 Mathematica (Wolfram, 1992)

Mathematica เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์หนึ่งที่มีคุณภาพที่ใช้สำหรับคำนวณเชิงตัวเลข สัญลักษณ์ ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ และสามารถแสดงผลในรูปของแผนภาพได้ นอกจากนี้ยังเป็นโปรแกรมที่เขียนมาจากภาษาพื้นทางคอมพิวเตอร์ซึ่งได้แก่ ภาษาซี (C/C++) และ

ภาษาจาวา (Java) จากประโยชน์ของโปรแกรมที่กล่าวมาข้างต้นทำให้โปรแกรม Mathematica เป็นที่นิยมในการใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรม คณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และการเงิน เป็นต้น

ในงานวิจัยนี้ได้ใช้โปรแกรม Mathematica สำหรับการคำนวณตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย งานหลักๆคือการสร้างฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแม่นยำหรือฟังก์ชันรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหาของแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากประเภท 2 ตัวแปร ดังแสดงในรูปที่ 3.1 ซึ่งแบบจำลองดังกล่าวสามารถแบ่งฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ 3 กรณี ซึ่งได้กล่าวไว้ในทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย

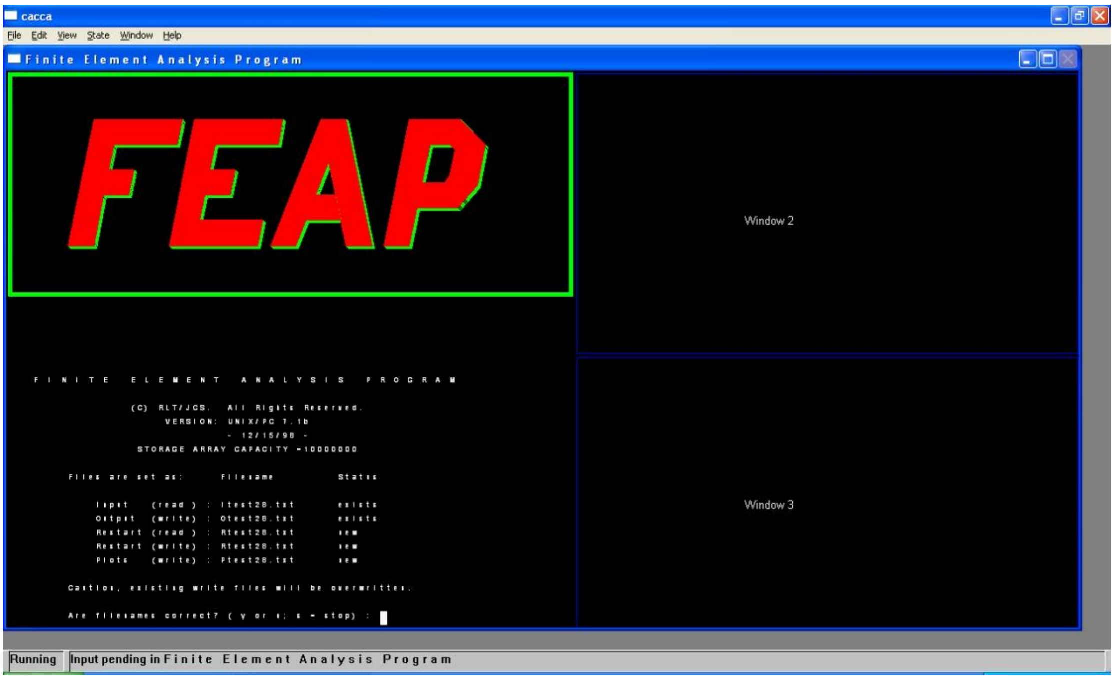


รูปที่ 3.1 โปรแกรม Mathematica

3.2.2 FEAP (Taylor, 2000)

โปรแกรม FEAP เป็นหนึ่งในโปรแกรมทางด้านวิศวกรรม ที่ใช้วิเคราะห์โครงสร้างในงานในระบบ 2 มิติ ซึ่งได้แก่ โครงถัก (Truss) โครงข้อแข็ง (Frame) และโครงสร้างผสม เป็นต้น ภายใต้ปัญหาที่ถูกกระทำด้วยน้ำหนักบรรทุกทางสถิตศาสตร์ (Static Loads) ดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยที่โปรแกรม FEAP พัฒนาขึ้นมาจากหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ และวิธี Direct Stiffness Methods โดยการทำงานของโปรแกรมผ่านตัวแปรที่ป้อนเข้าไป (Input Data)

ซึ่งได้แก่ ข้อมูลของโหนด ข้อมูลเอเลเมนต์ และแรงกระทำต่างๆ เป็นต้น โปรแกรมจะทำการประมวลผลแสดงเป็นผลตอบสนองออกมา (Output Data)

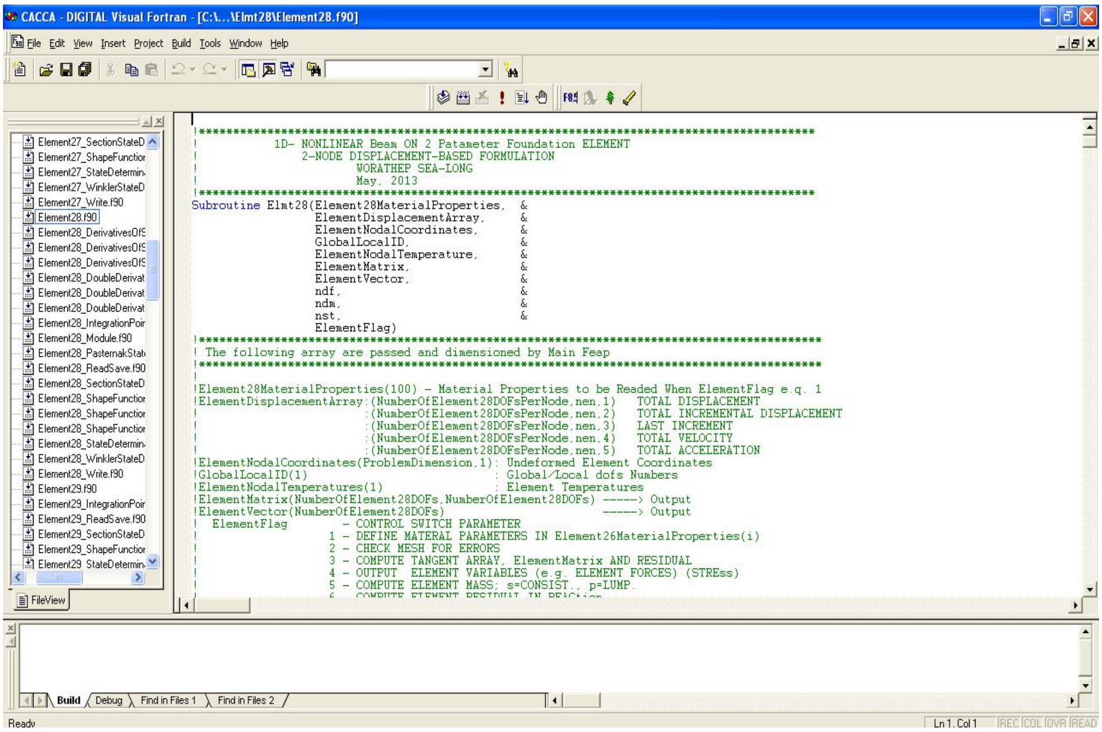


รูปที่ 3.2 โปรแกรม FEAP

3.2.3 Digital Visual Fortran

โปรแกรม Digital Visual Fortran เป็นหนึ่งในภาษาทางคอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพและใช้กันอย่างแพร่หลายตั้งแต่อดีตมาจนถึงปัจจุบัน โดยคำว่า “Fortran” เป็นคำผสมที่มาจากคำว่า “Formula” และ “Translation” ซึ่งพัฒนามาจากเครื่องคอมพิวเตอร์ IBM 704 เนื่องจากมีการพัฒนาระบบซอฟต์แวร์ทางด้านคอมพิวเตอร์มากขึ้น การนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาจึงมีมากขึ้นเรื่อยๆ ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์เป็นหนึ่งในนั้น

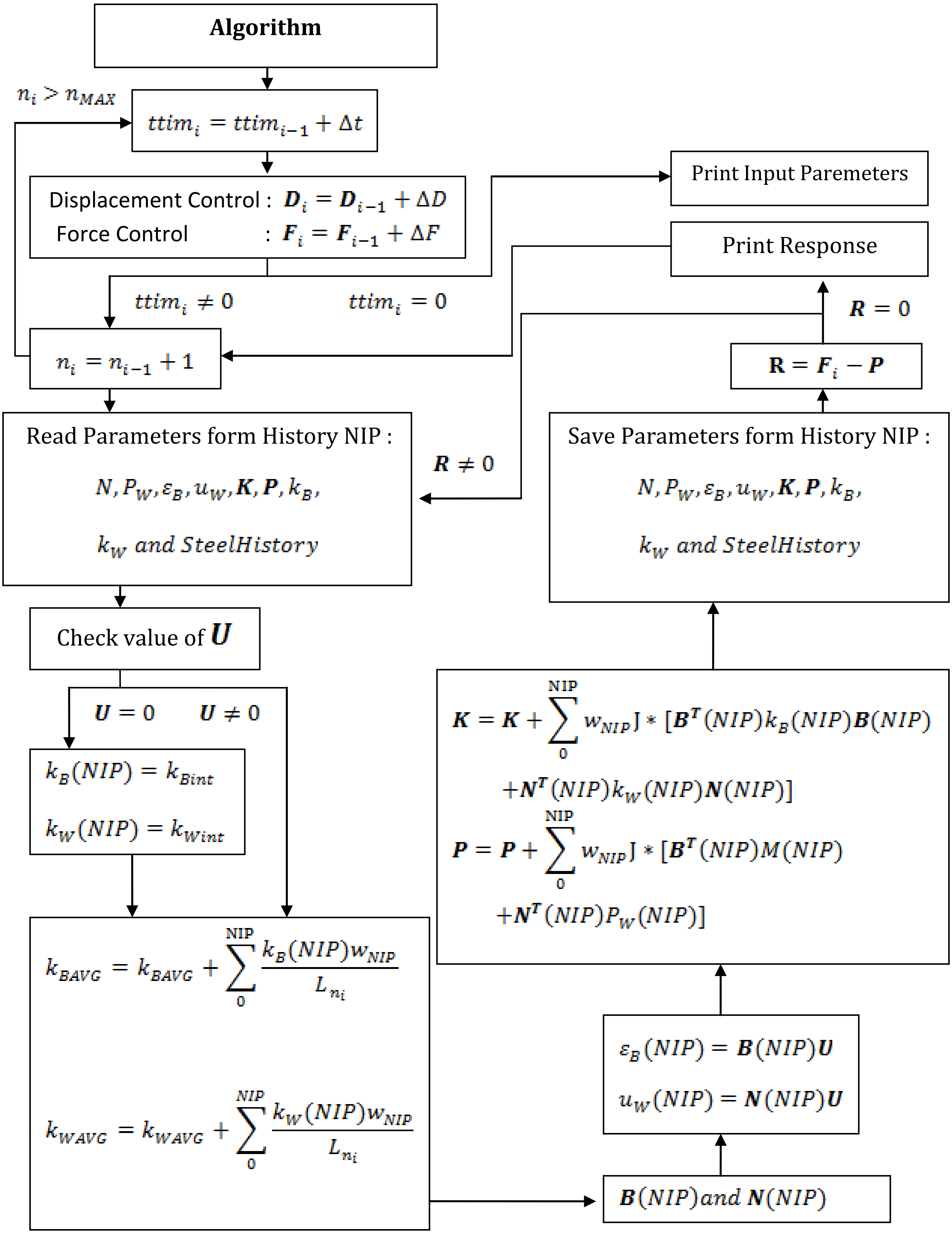
ในงานวิจัยนี้ได้ใช้โปรแกรม Digital Visual Fortran เป็นหลักในการช่วยคำนวณและแสดงผลดังแสดงในรูปที่ 3.3 โดยโปรแกรมจะทำงานร่วมกับโปรแกรม FEAP ผ่านทางตัวแปร



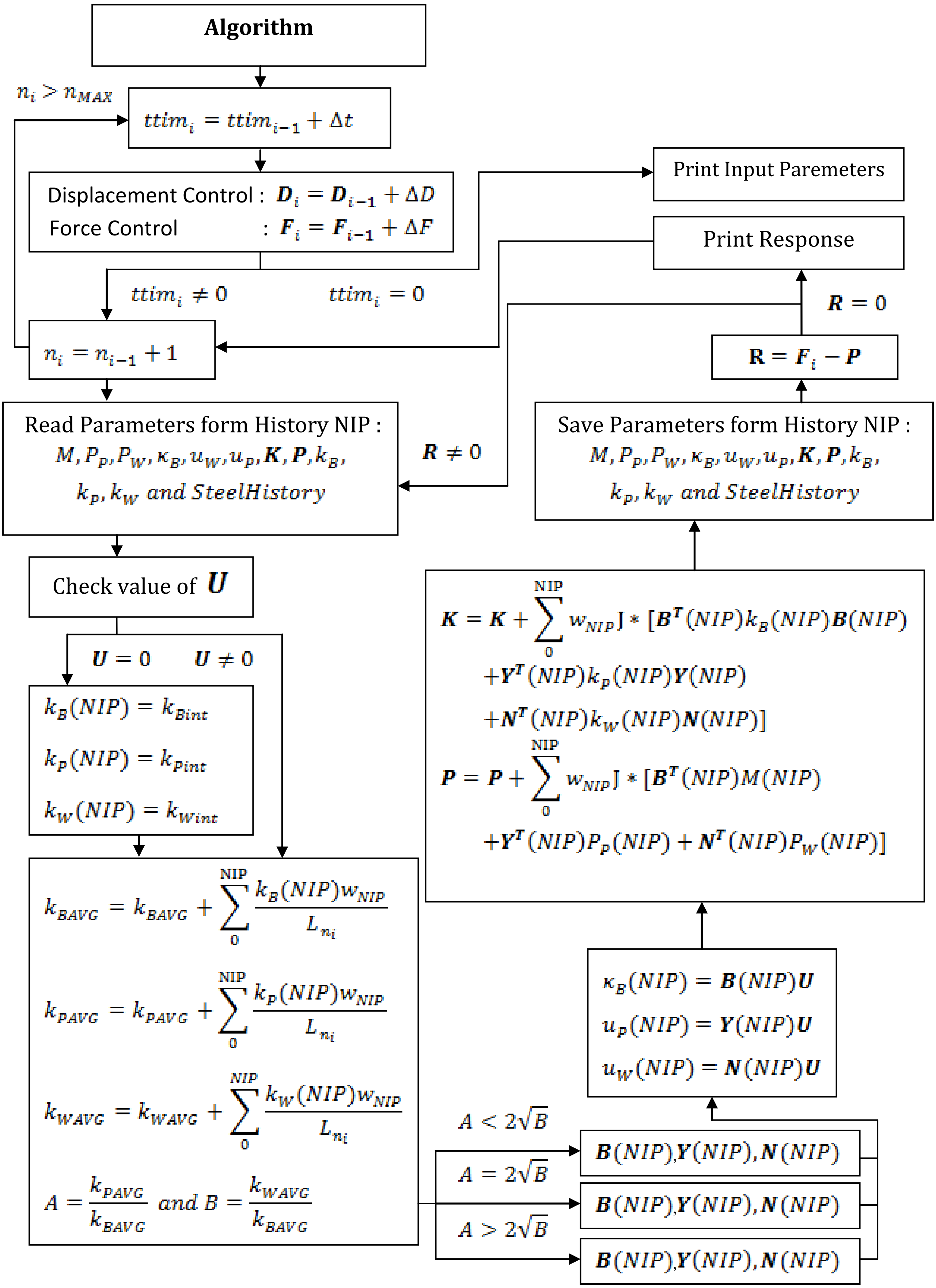
รูปที่ 3.3 โปรแกรม Digital Visual Fortran

3.3 กระบวนการทำงานของโปรแกรม

จากที่กล่าวมาข้างต้นในงานวิจัยนี้ได้ใช้โปรแกรม Digital Visual Fortran ในการเขียนกระบวนการหาผลตอบสนองของปัญหาเป็นหลัก ซึ่งขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมแต่ละขั้นตอนมีการทำงานเป็นระบบๆ เพื่อช่วยให้เข้าใจการทำงานของโปรแกรมมากขึ้น ในงานวิจัยนี้จึงจัดทำแผนภาพกระบวนการทำงานของโปรแกรมดังแสดงในรูปที่ 3.4 และ 3.5 พร้อมคำอธิบาย โดยที่รูปที่ 3.4 คือแผนภาพกระบวนการทำงานของโปรแกรมปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น และรูปที่ 3.5 คือแผนภาพกระบวนการทำงานของโปรแกรมปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร



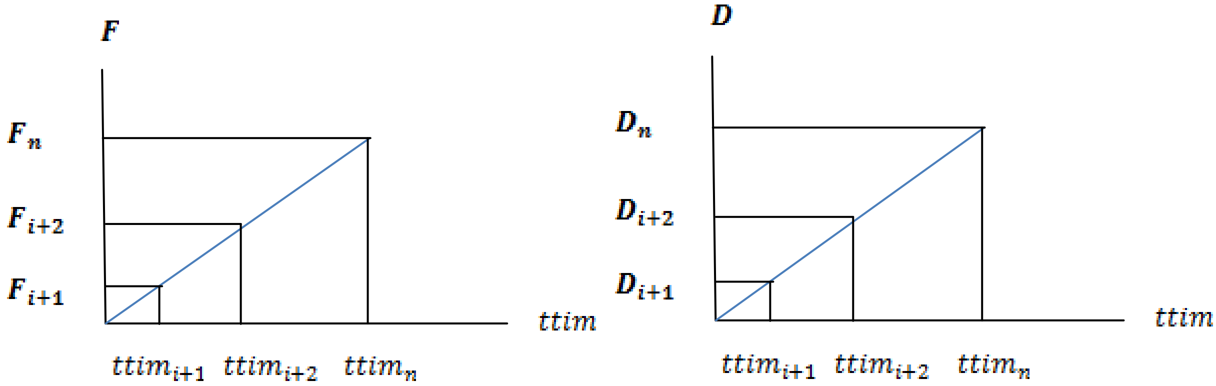
รูปที่ 3.4 กระบวนการทำงานของโปรแกรมปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น



รูปที่ 3.5 กระบวนการทำงานของโปรแกรมปัญหาคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร

ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมสามารถอธิบายได้ดังนี้

1. ทำการแบ่งช่วงเวลา Δt ของน้ำหนักบรรทุก $\boldsymbol{F_i}$ ในกรณีของปัญหาที่ถูกควบคุมด้วยแรง (Force Control) หรือค่าการกระจัด $\boldsymbol{D_i}$ ในกรณีของปัญหาที่ถูกควบคุมด้วยค่าการกระจัด (Displacement Control) ที่ใส่เข้าไปให้กับระบบของโครงสร้างดังแสดงในรูปที่ 3.6 โดยที่แต่ละกระบวนการทำงานแต่ละรอบ จะเพิ่มค่าหนักบรรทุก ΔF หรือค่าการกระจัด ΔD ทำการเพิ่มไปจนถึงครั้งสุดท้าย $\boldsymbol{F_n}$ หรือ $\boldsymbol{D_n}$ ในแต่ละกรณี ซึ่งสอดคล้องกับเวลาในทำงานของแต่ละขั้นตอน $ttim_i$ โดยเริ่มต้นจะกำหนดให้ เวลาเริ่มต้น $ttim_i$ น้ำหนักบรรทุกเริ่มต้น $\boldsymbol{F_i}$ และการกระจัดเริ่มต้น $\boldsymbol{D_i}$ มีค่าเริ่มต้นเท่ากับ 0



(ก) (ข)

รูปที่ 3.6 การแบ่งช่วงเวลา (ก) Force Control และ (ข) Displacement Control

2. พิจารณาค่า $ttim_i$ ในกรณีที่ค่า $ttim_i$ มีค่าเท่ากับ 0 ทำการแสดงผลตัวแปรที่ใส่ให้กับระบบซึ่งได้แก่ ค่าข้อมูลแต่ละโหนด จำนวนเอเลเมนต์ n_{MAX} จำนวนจุดการอินทิเกรต (Integration Points) รูปแบบการอินทิเกรต และวิธีการประมาณค่าฟังก์ชันรูปร่าง เป็นต้น นอกจากนี้ยังแสดงผลของตัวแปรที่ใส่ไว้ในระบบขึ้นกับปัญหาที่จะศึกษาคือ

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น: คุณสมบัติของชิ้นส่วนแนวแกนและคุณสมบัติของฐานราก Winkler เป็นต้น

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร: คุณสมบัติของคาน คุณสมบัติของฐานราก Winkler และคุณสมบัติของฐานราก Pasternak เป็นต้น

และในกรณีที่ค่า $ttim_i$ มีค่าไม่เท่ากับ 0 ทำการอัพเดทค่าเอเลเมนต์ n_i โดยเริ่มต้นกำหนดให้ n_{i-1} มีค่าเท่ากับ 0

3. พิจารณาค่า n_i ในกรณีที่ $n_i > n_{MAX}$ กลับไปทำการอัพเดทค่า $ttim_i$ และในกรณี $n_i \le n_{MAX}$ ไปยังขั้นตอนที่ 4 ขั้นตอนการอ่านค่าตัวแปรที่เก็บไว้ในประวัติการบันทึกตัวแปร (History Variables) โดยค่าเริ่มต้นจะกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0 หมดทุกตัวแปร ในกรณีที่ $ttim_i = 0$

4. อ่านค่าตัวแปรที่เก็บไว้ในประวัติการบันทึกตัวแปร

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น ประกอบไปด้วย ค่าแรงที่โหนด (Nodal Element Forces) $\boldsymbol{P}$ แรงในแนวแกน $N(NIP)$ แรงเนื่องจากฐานราก Winkler $P_W(NIP)$ ค่าประวัติเนื่องจากคุณสมบัติของวัสดุชิ้นส่วนแนวแกน ค่าประวัติเนื่องจากคุณสมบัติของฐานราก Winkler ค่าความแข็งแกร่งของชิ้นส่วนแนวแกน $k_B(NIP)$ ค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler $k_W(NIP)$ เมทริกซ์ความแข็งแกร่งของเอเลเมนต์ $\boldsymbol{K}$ ความเครียดของชิ้นส่วนแนวแกน $\varepsilon_B(NIP)$ และการเปลี่ยนแปลงรูปของฐานราก Winkler $u_W(NIP)$

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร ประกอบไปด้วย ค่าแรงที่โหนด (Nodal Element Forces) $\boldsymbol{P}$ โมเมนต์ดัด $M(NIP)$ แรงเนื่องจากฐานราก Winkler $P_W(NIP)$ แรงเนื่องจากฐานราก Pasternak $P_P(NIP)$ ค่าประวัติเนื่องจากคุณสมบัติของวัสดุคาน ค่าประวัติเนื่องจากคุณสมบัติของฐานราก Winkler ค่าประวัติเนื่องจากคุณสมบัติของฐานราก Pasternak ค่าความแข็งแกร่งของคาน $k_B(NIP)$ ค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler $k_W(NIP)$ ค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Pasternak $k_P(NIP)$ เมทริกซ์ความแข็งแกร่งของเอเลเมนต์ $\boldsymbol{K}$ การเปลี่ยนแปลงรูปของคาน $\kappa_B(NIP)$ การเปลี่ยนแปลงรูปของฐานราก Winkler $u_W(NIP)$ และการเปลี่ยนแปลงรูปของฐานราก Pasternak $u_P(NIP)$

5. ตรวจสอบค่าการกระจัดที่โหนด (Nodal Element Displacements) $\boldsymbol{U}$ โดยเริ่มต้นที่ $ttim_i = 0$ กำหนดให้ค่าการกระจัดที่โหนดมีค่าเท่ากับ 0

ในกรณีที่ $\boldsymbol{U} = 0$

ปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น กำหนดให้ค่าความแข็งแกร่งของชิ้นส่วนแนวแกน $k_B(NIP) = k_{B\text{int}}(NIP)$ และค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler $k_W(NIP) = k_{W\text{int}}(NIP)$ ทุกๆจุดการอินทิเกรต

ปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร กำหนดให้ค่าความแข็งแกร่งของคาน $k_B(NIP) = k_{B\text{int}}(NIP)$ ค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler

$k_W(NIP) = k_{W\text{int}}(NIP)$ และค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Pasternak $k_P(NIP) = k_{P\text{int}}(NIP)$ ทุกๆจุดการอินทิเกรต

โดยที่ค่า $k_{B\text{int}}(NIP)$, $k_{W\text{int}}(NIP)$ และ $k_{P\text{int}}(NIP)$ คือค่าความแข็งแกร่งเริ่มต้นของคาน ฐานราก Winkler และฐานราก Pasternak ตามลำดับ ซึ่งได้มาจากตัวแปรที่ใส่ให้กับระบบ และในกรณีที่ $\boldsymbol{U} \neq 0$ ไปยังขั้นตอนที่ 6 เพื่อทำการหาค่าเฉลี่ยค่าความแข็งแกร่งของคาน ฐานราก Winkler และฐานราก Pasternak เพื่อใช้ในการหาค่าฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างถัดไป

6. ทำการหาค่าเฉลี่ยตัวแปรความแข็งแกร่ง k_{AVG} (Stiffness) โดยทำการวนลูปแต่ละจุดการอินทิเกรต

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น ได้แก่ ค่าความแข็งแกร่งของชิ้นส่วนแนวแกน k_{BAVG} และค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler k_{WAVG}

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร ได้แก่ ค่าความแข็งแกร่งของคาน k_{BAVG} ค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler k_{WAVG} และค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Pasternak k_{PAVG} มีข้อสังเกตพิเศษสำหรับในกรณีนี้ คือค่า A และ B เป็นค่าอัตราส่วนระหว่างค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Pasternak และค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler เทียบกับค่าความแข็งแกร่งของคานตามลำดับ ซึ่งได้กล่าวไว้ในทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย ค่า A และ B เป็นตัวกำหนดในการเลือกฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของปัญหาในขั้นตอนที่ 7

7. หาค่าฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจากการแทนค่าค่าเฉลี่ยตัวแปรความแข็งแกร่ง จากขั้นตอนที่ 6

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น จะได้ค่าฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง $\boldsymbol{N}(NIP)$ และอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง $\boldsymbol{B}(NIP)$

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร จะได้ค่าฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง $\boldsymbol{N}(NIP)$ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง $\boldsymbol{Y}(NIP)$ และอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง $\boldsymbol{B}(NIP)$ แต่ละจุด

การอินทิเกรต ซึ่งแยกเป็น 3 กรณี ได้แก่ $A<2\sqrt{B}$, $A=2\sqrt{B}$ และ $A>2\sqrt{B}$ ซึ่งได้นิยามไว้ในทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

8. หาค่าการเปลี่ยนแปลงรูปของปัญหา (Drformations)

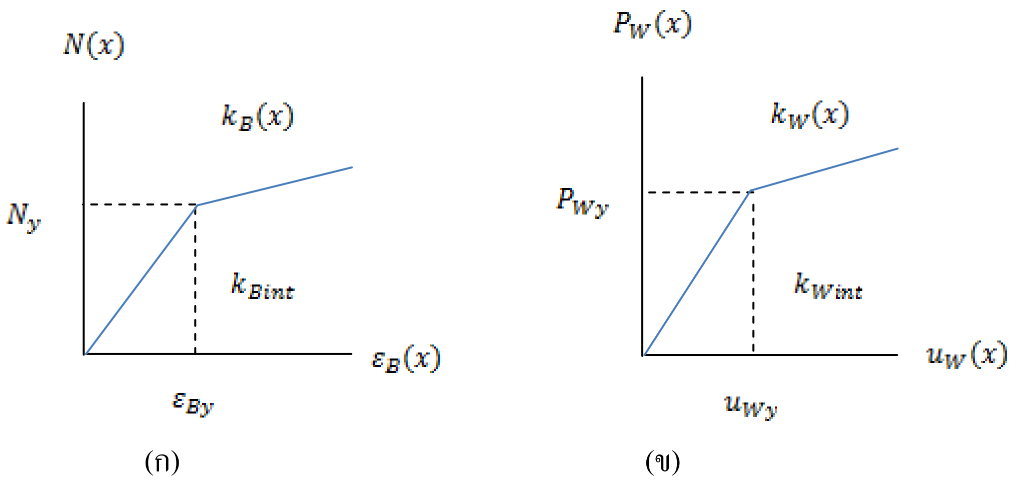
ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น หาค่าการเปลี่ยนแปลงรูปของชิ้นส่วนแนวแกน $\varepsilon_B(NIP)$ และการเปลี่ยนแปลงรูปของฐานราก Winkler $u_W(NIP)$ แต่ละจุดการอินทิเกรต โดยที่ $\varepsilon_B(NIP)=\boldsymbol{B}(NIP)\boldsymbol{U}$ และ $u_W(NIP)=\boldsymbol{N}(NIP)\boldsymbol{U}$ ตามลำดับ

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร หาค่าการเปลี่ยนแปลงรูปของคาน $\kappa_B(NIP)$ การเปลี่ยนแปลงรูปของฐานราก Winkler $u_W(NIP)$ และ การเปลี่ยนแปลงรูปของฐานราก Pasternak $u_P(NIP)$ แต่ละจุดการอินทิเกรต โดยที่ $\kappa_B(NIP)=\boldsymbol{B}(NIP)\boldsymbol{U}$, $u_W(NIP)=\boldsymbol{N}(NIP)\boldsymbol{U}$ และ $u_P(NIP)=\boldsymbol{Y}(NIP)\boldsymbol{U}$ ตามลำดับ

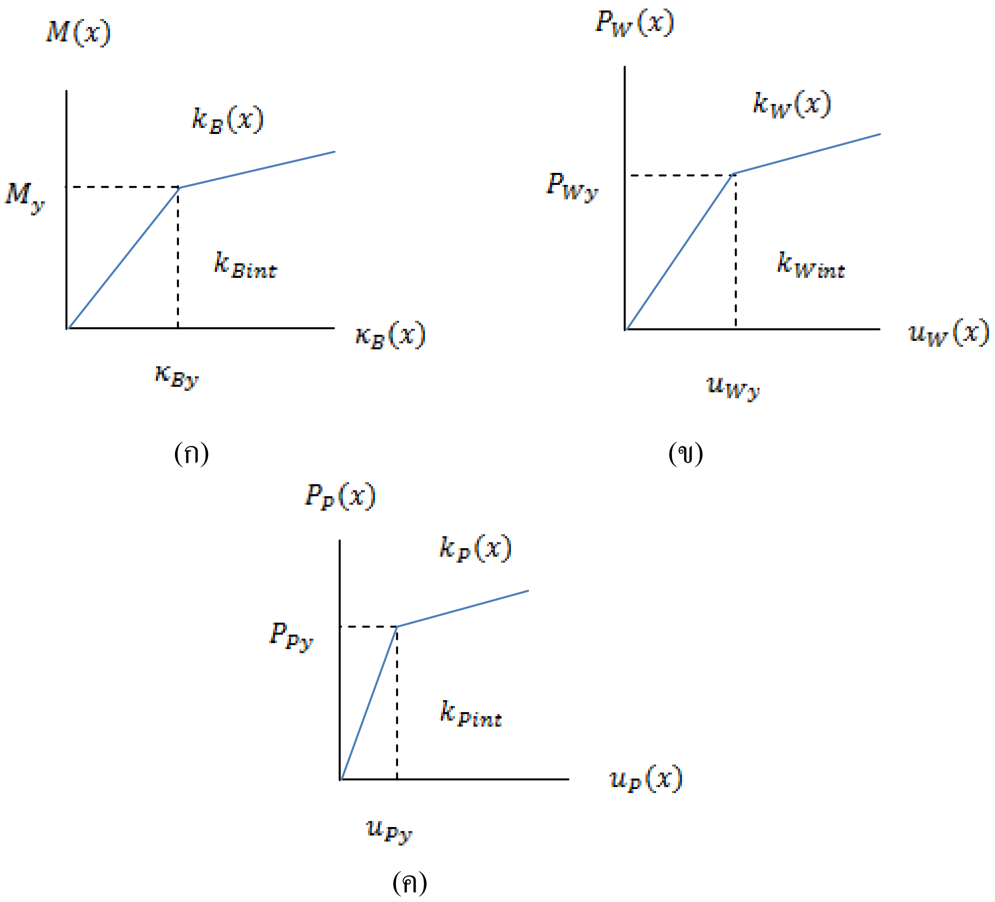
9. หาค่าความแข็งแกร่งของปัญหา แต่ละจุดการอินทิเกรตผ่านความสัมพันธ์ของวัสดุ โดยที่ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการกระจัดในรูปของสมการไบลิเนียร์ (Bilinear Equation) ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้นแสดงดังในรูปที่ 3.7 และในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปรแสดงดังในรูปที่ 3.8 ค่าความชันหลังจากจุดครากหรือยืด (Yield Point) หาได้จากค่าอัตราการอ่อนตัว (Hardening Ratio) ของแต่ละคุณสมบัติวัสดุคานหรือฐานราก ซึ่งได้จากการใส่ข้อมูลเข้าไปให้กับระบบ

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น ทำการหาค่าความแข็งแกร่งของคาน $k_B(NIP)$ และค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler $k_W(NIP)$

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร ทำการหาค่าความแข็งแกร่งของคาน $k_B(NIP)$ ค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler $k_W(NIP)$ และค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Pasternak $k_P(NIP)$



รูปที่ 3.7 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนรูปของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานราก ไร้เชิงเส้น (ก) ชิ้นส่วนแนวแกน และ (ข) ฐานราก Winkler



รูปที่ 3.8 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนรูปของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานราก ไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร (ก) คาน, (ข) ฐานราก Winkler และ (ค) ฐานราก Pasternak

จากนั้นทำการวนลูปแต่ละจุดการอินทิเกรตเพื่อการหาค่าเมทริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบ $\boldsymbol{K}$ และเมทริกซ์แรงของระบบ $\boldsymbol{P}$ จากสมการ

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K} + \sum_{0}^{\mathrm{NIP}} w_{NIP} \mathrm{J}^*[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(NIP) k_B(NIP) \boldsymbol{B}(NIP) + \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{T}}(NIP) k_W(NIP) \boldsymbol{N}(NIP)]$$

และ $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} + \sum_{0}^{\mathrm{NIP}} w_{NIP} \mathrm{J}^*[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(NIP) M(NIP) + \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{T}}(NIP) P_W(NIP)]$

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K} + \sum_{0}^{\mathrm{NIP}} w_{NIP} \mathrm{J}^*[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(NIP) k_B(NIP) \boldsymbol{B}(NIP) + \boldsymbol{Y}^{T}(NIP) k_P(NIP) \boldsymbol{Y}(NIP) + \boldsymbol{N}^{T}(NIP) k_W(NIP) \boldsymbol{N}(NIP)]$$

และ $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} + \sum_{0}^{\mathrm{NIP}} w_{NIP} \mathrm{J}^*[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(NIP) M(NIP) + \boldsymbol{Y}^{T}(NIP) P_P(NIP) + \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{T}}(NIP) P_W(NIP)]$

เมื่อ w_{NIP} คือฟังก์ชันน้ำหนัก (Weight Function) ที่แต่ละจุดการอินทิเกรตนั้นๆ และ J คือค่าสัมประสิทธิ์จาโคเบียน (Jacobean)

10. บันทึกค่าตัวแปรเก็บไว้ในประวัติการบันทึกตัวแปร โดยที่ตัวแปรแต่ละตัวได้ผ่านการคำนวณมาแล้วดังแสดงในขั้นตอนที่กล่าวมา

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น ประกอบไปด้วย ค่าแรงที่โหนด $\boldsymbol{P}$ แรงในแนวแกน $N(NIP)$ แรงเนื่องจากฐานราก Winkler $P_W(NIP)$ ค่าประวัติเนื่องจากคุณสมบัติของวัสดุชิ้นส่วนแนวแกน ค่าประวัติเนื่องจากคุณสมบัติของฐานราก Winkler ค่าความแข็งแกร่งของชิ้นส่วนแนวแกน $k_B(NIP)$ ค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler $k_W(NIP)$ เมทริกซ์ความแข็งแกร่งของเอเลเมนต์ $\boldsymbol{K}$ ความเครียดของชิ้นส่วนแนวแกน $\varepsilon_B(NIP)$ และการเปลี่ยนแปลงรูปของฐานราก Winkler $u_W(NIP)$

ในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร ประกอบไปด้วย ค่าแรงที่โหนด $\boldsymbol{P}$ โมเมนต์ดัด $M(NIP)$ แรงเนื่องจากฐานรากWinkler $P_W(NIP)$ แรงเนื่องจากฐานราก Pasternak $P_P(NIP)$ ค่าประวัติเนื่องจากคุณสมบัติของวัสดุคาน ค่าประวัติเนื่องจากคุณสมบัติของฐานราก Winkler ค่าประวัติเนื่องจากคุณสมบัติของฐานราก Pasternak ค่าความแข็งแกร่งของคาน $k_B(NIP)$ ค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Winkler $k_W(NIP)$ ค่าความแข็งแกร่งของฐานราก Pasternak $k_P(NIP)$ เมทริกซ์ความแข็งแกร่งของเอเลเมนต์ $\boldsymbol{K}$

การเปลี่ยนแปลงรูปของคาน $\kappa_B(NIP)$ การเปลี่ยนแปลงรูปของฐานราก Winkler $u_W(NIP)$ และการเปลี่ยนแปลงรูปของฐานราก Pasternak $u_P(NIP)$

11. โปรแกรม Digital Visual Fortran จะส่งค่าตัวแปรไปให้โปรแกรม FEAP ทำการตรวจสอบสมการสมดุลของแรง $\mathbf{R} = \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{P}$ เมื่อ $\mathbf{R}$ คือแรงที่ยังคงเหลืออยู่ (Residual Force) ในกรณีที่ $\mathbf{R} \neq 0$ จะย้อนกลับไปทำในขั้นตอนที่ 4 และในกรณีที่ $\mathbf{R} = 0$ จะทำการแสดงผลตอบสนอง จากนั้นไปทำการอัพเดทเอเลเมนต์ทำตามขั้นตอนที่ 3 ต่อไป

12. โปรแกรมจะทำงานจนกว่า $ttim_i > ttim_n$ เมื่อ $ttim_n$ คือเวลาสิ้นสุดในการแบ่งน้ำหนักบรรทุกหรือค่าการกระจัดในขั้นตอนที่ 1

บทที่ 4

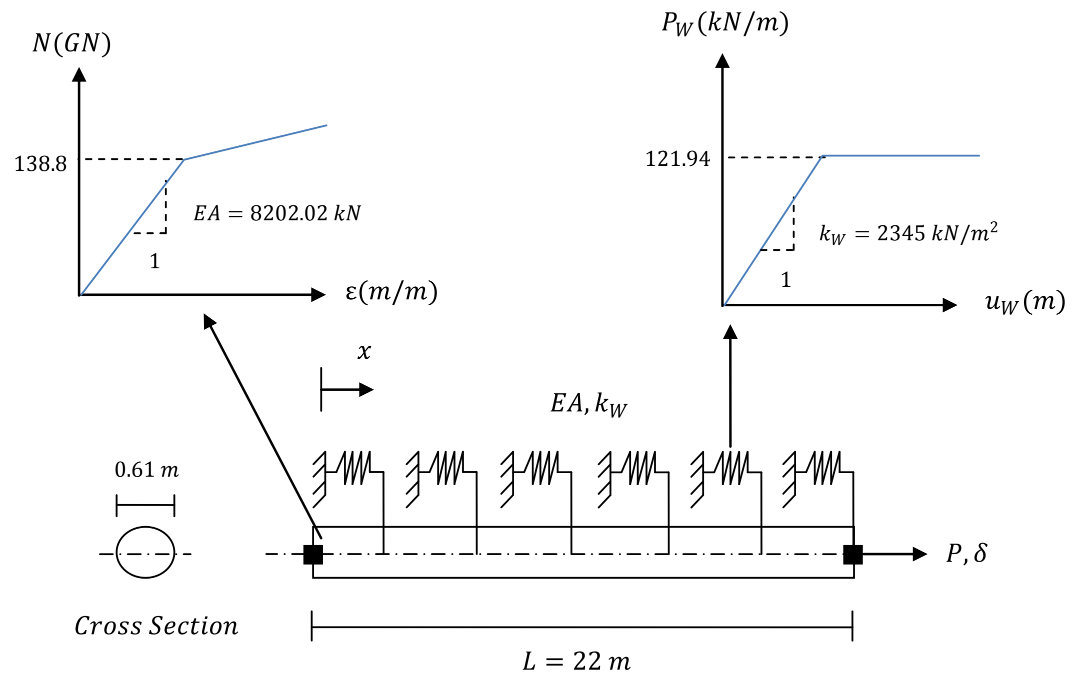
ผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ ได้นำเสนอตัวอย่างในวิเคราะห์ผลตอบสนองของปัญหาเพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพและความแม่นยำของแบบจำลองที่เสนอในงานวิจัยนี้ ซึ่งประกอบด้วย 2 ตัวอย่าง ได้แก่ ปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้นและปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak ซึ่งมีความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้น โดยที่ตัวอย่างแรกเป็นการทำสอบการลู่เข้าสู่ค่าแม่นยำของผลตอบสนองในกรณีปัญหาของชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น และตัวอย่างที่ 2 มีแบ่งการนำเสนอออกเป็น 2 ส่วน ซึ่งได้แก่ การทดสอบการลู่เข้าของผลตอบสนองในกรณีปัญหาชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak ซึ่งมีความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้น และการเปรียบเทียบผลตอบสนองระหว่างการใช้แบบจำลองชิ้นส่วนคานบนฐานราก Winkler-Pasternak กับแบบจำลองชิ้นส่วนคานบนฐานราก Winkler

4.1 ผลตอบสนองของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น (Responses of Inelastic Bar Element Resting on Winkler Foundation Problem)

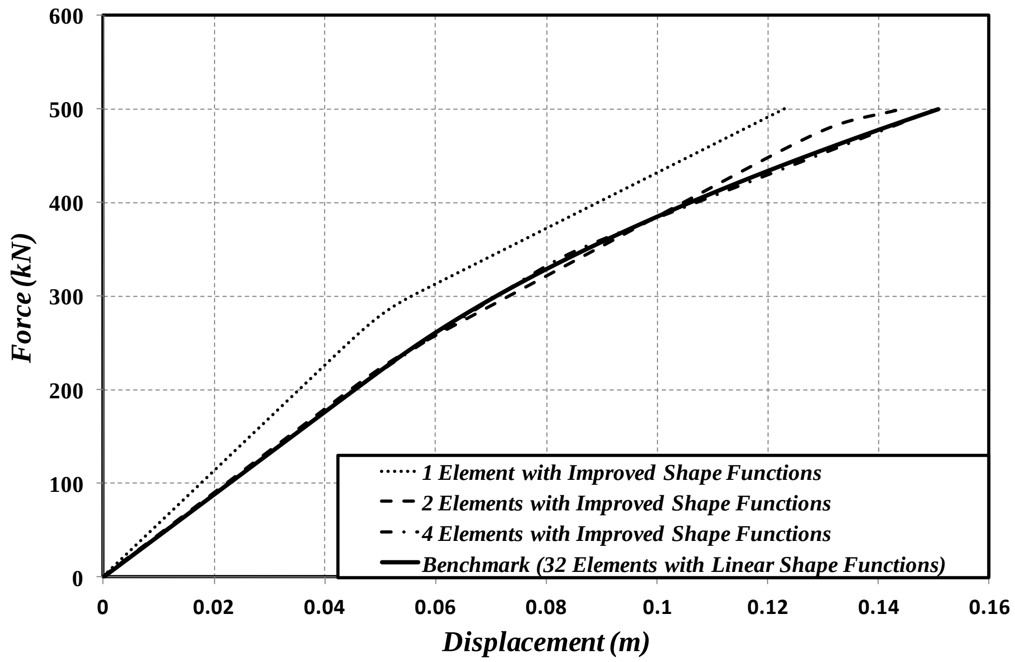
ปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนอิสระที่วางอยู่บนฐานราก Winkler (Free-Free Bar Element on Winkler Foundation) ภายใต้แรงดึงที่กระทำที่ปลายของชิ้นส่วนแนวแกนที่ถูกควบคุมด้วยแรง (Force Control) มีค่าเท่ากับ $P = 500 kN$ ดังแสดงในรูปที่ 4.1 จุดประสงค์หลักของตัวอย่างนี้คือ เปรียบเทียบประสิทธิภาพและความแม่นยำการลู่เข้าสู่ค่าผลตอบสนองแม่นยำของปัญหา โดยใช้เอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหาเปรียบเทียบกับเอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการเส้นตรง

ภายใต้หลักการการวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัด (Displacement-Based) คุณสมบัติของชิ้นส่วนแนวแกนและฐานรากอ้างอิงมาจากบทความวิชาการเรื่อง Limit State Analysis Of Fixed-Head Concrete Piles Under Lateral Loads (Song และคณะ, 2004) โดยกำหนดให้คุณสมบัติของชิ้นส่วนแนวแกน หน้าตัดของชิ้นส่วนแนวแกนมีเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด $D = 0.61m$ ซึ่งมีความยาว $L = 22m$ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (Elastic Modulus) $E = 28{,}068.5$ kPa จุดครากของชิ้นส่วนแนวแกนเนื่องจากแรงดึง (Yield Axial Force) $N_y = 138{,}817{,}161.9$ kN และกำหนดให้อัตราส่วนการอ่อนตัวของชิ้นส่วนแนวแกน (Strain-Hardening Ratio) มีค่าเท่ากับ 0.018 คุณสมบัติของดินหรือฐานรากกำหนดให้เป็นดินเหนียวอ่อน (Soft Clay) ที่มีหน่วยน้ำหนักประสิทธิผล $\gamma' = 17.5 kN/m^3$ ค่าโมดูลัสต้านทานในแนวราบของดินหรือฐานราก (Horizontal Modulus Subgrade Reaction) $k_W = 2{,}345 kN/m^2$ จุดครากของดินหรือฐานราก (Yield Winkler Foundation Force) มีค่าเท่ากับ $P_{Wy} = 121.94 kN/m$ และกำหนดให้ฐานราก Winkler มีพฤติกรรมเป็น Elasto-Plastic ในช่วงพลาสติก

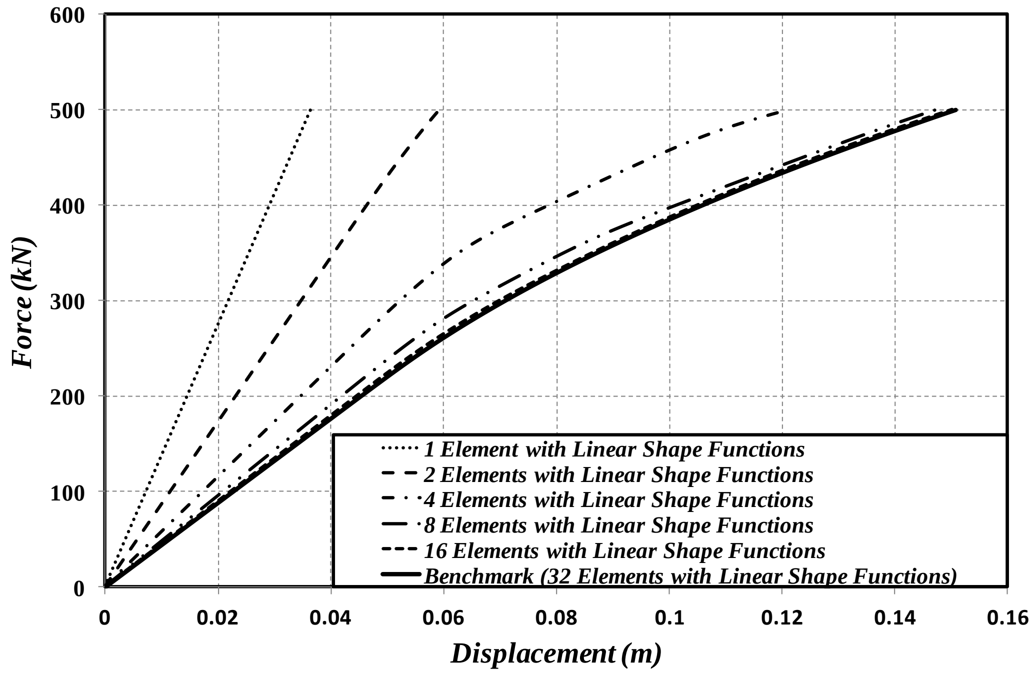


รูปที่ 4.1 ปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนที่วางอยู่บนฐานราก Winkler ภายใต้แรงกระทำที่ปลาย

จากรูปที่ 4.2 และ 4.3 แสดงถึงผลการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบจำนวนเอเลเมนต์ที่ใช้ในการหาค่าผลตอบสนองแม่นยำความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดในแนวแกนที่ปลายของชิ้นส่วนแนวแกน (Global Response) ผลตอบสนองดังกล่าวถูกวิเคราะห์โดยใช้ 5 จุดการอินทิเกรต (Integration Points) โดยชนิดการอินทิเกรตที่ใช้คือ Gauss-Lobatto ซึ่งจำนวนจุดการอินทิเกรตที่ใช้เป็นจำนวนที่เพียงพอต่อการได้มาซึ่งผลตอบสนองที่ไม่เปลี่ยนแปลง ถึงแม้ว่าจะใช้จำนวนจุดการอินทิเกรตมากขึ้น ในรูปที่ 4.2 นำเสนอกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดที่ปลายของชิ้นส่วนแนวแกน โดยใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหา จากผลการทดสอบพบว่าผลตอบสนองที่ลู่เข้าสู่ค่าแม่นยำของปัญหาถูกนำเสนอโดยการใช้จำนวนเอเลเมนต์เพียง 4 เอเลเมนต์ โดยใช้จำนวนเอเลเมนต์ 32 เอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการเส้นตรง หรือเรียกว่า “Benchmark” ในการเปรียบเทียบ จากกราฟพบว่าเกิดการเปลี่ยนแปลงความชัน 1 ครั้ง เนื่องมาจากแบบจำลองสปริงของ Winkler เกิดการครากที่การกระจัดมีค่าเท่ากับ $\delta = 0.052m$ และจากรูปที่ 4.3 นำเสนอกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดในแนวแกนที่ปลายของชิ้นส่วนแนวแกนโดยใช้เอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการเส้นตรง พบว่าจะต้องใช้จำนวนเอเลเมนต์ถึง 16 เอเลเมนต์เพื่อจะได้มาซึ่งผลตอบสนองที่ลู่เข้าสู่ค่าแม่นยำของปัญหา ในกรณีปัญหาอยู่ในช่วงอีลาสติก (ค่าการกระจัดมีค่าไม่เกิน $\delta < 0.052m$) จากผลการทดลองพบว่าจำนวนเอเลเมนต์ในกรณีของเอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหาและเอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการเส้นตรงที่จำนวน 2 และ 16 เอเลเมนต์ ตามลำดับ เพียงพอต่อการได้มาซึ่งค่าที่ลู่เข้าผลตอบสนองแม่นยำที่ระดับความแม่นยำเดียวกัน



รูปที่ 4.2 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดที่ปลายของชิ้นส่วนแนวแกนในกรณีการวิเคราะห์ด้วยเอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี



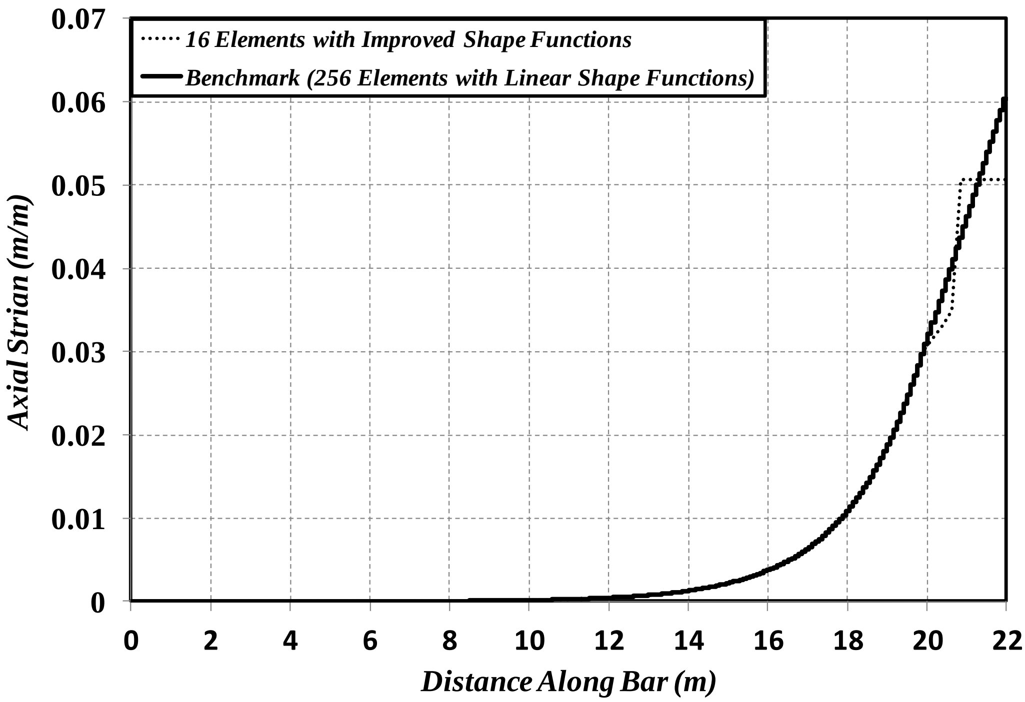
รูปที่ 4.3 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดที่ปลายของชิ้นส่วนแนวแกนในกรณีการวิเคราะห์ด้วยเอเลเมนต์ที่ประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการเส้นตรง

เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพและความแม่นยำของแบบจำลองที่นำเสนอในงานวิจัยนี้มากขึ้น จึงได้มีการนำแสดงผลตอบสนองอื่นๆของปัญหา (Local Responses) ซึ่งได้แก่ ความเครียด (Axial Strain) แรงในแนวแกน (Axial Force) ค่าการกระจัดในแนวแกน (Axial Displacement) และแรงเนื่องจากฐานราก (Foundation Force) โดยถูกนำมาแสดงเป็นกราฟความสัมพันธ์เทียบกับระยะทางตลอดความยาวของชิ้นส่วนแนวแกน โดยใช้ข้อมูลที่จุดการอินทิเกรต ดังแสดงในรูปที่ 4.4-4.7 ตามลำดับ จากตัวอย่างการทดลองพบว่าจำนวนเอเลเมนต์ถูกใช้มากขึ้นในการได้มาซึ่งผลตอบสนองที่มีค่าลู่เข้าสู่ Benchmark ในกรณีของเอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์เพิ่มขึ้นจาก 4 เป็น 16 เอเลเมนต์ ส่วนในกรณีของเอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการเส้นตรงเพิ่มขึ้นจาก 32 เป็น 256 เอเลเมนต์

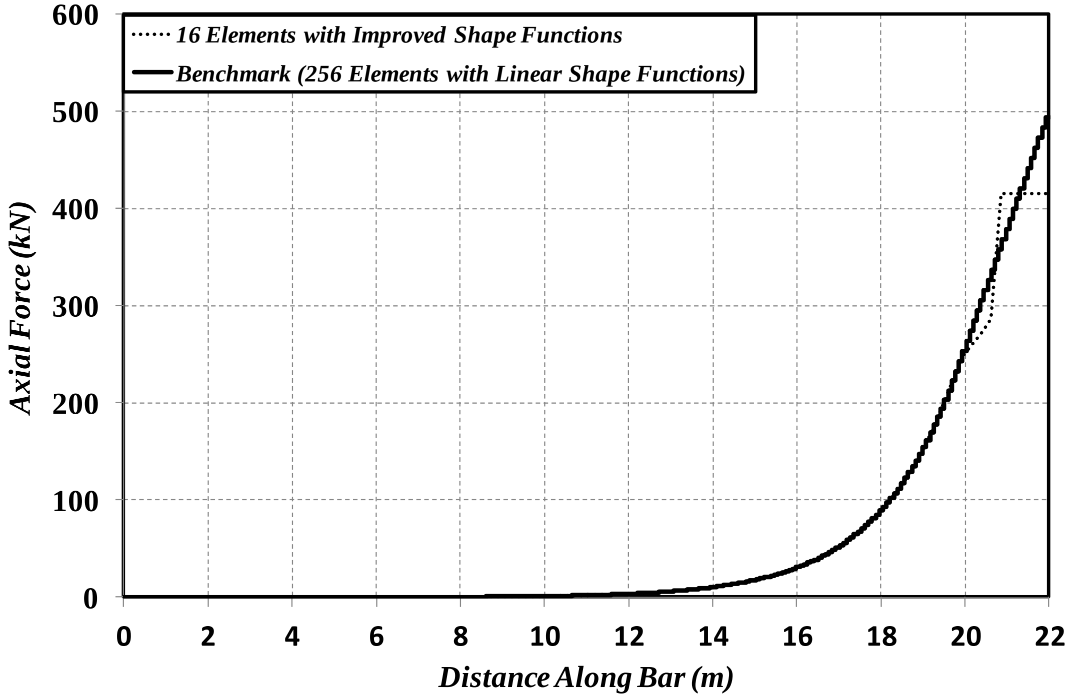
เนื่องจากปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้นนี้จัดเป็นปัญหา C^0 *continuity* ซึ่งหมายความว่าจุดต่อระหว่างเอเลเมนต์ กำหนดให้ค่าการกระจัดในแนวแกนจะต้องมีความต่อเนื่อง และฟังก์ชันแรงเนื่องจากฐานรากซึ่งหาได้จากฟังก์ชันการกระจัดในแนวแกนผ่านสมการความสัมพันธ์ของคุณสมบัติวัสดุ (Material Constitutive Laws) โดยตรงส่งผลไปให้ค่าแรงเนื่องจากฐานรากบริเวณจุดต่อของเอเลเมนต์มีความต่อเนื่องไปด้วยเช่นกัน ส่วนฟังก์ชันความเครียดอาจเกิดปัญหาความไม่ต่อเนื่องของข้อมูลได้ เนื่องมาจากฟังก์ชันความเครียดหาได้จากหาอนุพันธ์เทียบกับระยะทางของฟังก์ชันการกระจัดในแนวแกน นอกจากนี้ยังส่งผลให้ฟังก์ชันแรงในแนวแกนของปัญหาเกิดความไม่ต่อเนื่องของข้อมูลด้วยเช่นกัน เนื่องมาจากฟังก์ชันแรงในแนวแกนของปัญหา หาได้จากฟังก์ชันความเครียดผ่านทางสมการความสัมพันธ์ของคุณสมบัติวัสดุ ข้อเสียของความไม่ต่อเนื่องของข้อมูลทำให้ผลตอบสนองของจุดต่อระหว่างเอเลเมนต์มีค่าไม่ใกล้เคียงค่าแม่นยำ ข้อเสียนี้จะหายไปเมื่อมีการใช้จำนวนเอเลเมนต์ที่มากขึ้น การใช้วิธีการวิเคราะห์ด้วยแรงหรือการใช้วิธีการวิเคราะห์ด้วยวิธีผสม โดยตัวอย่างนี้ในกรณีที่ใช้เอเลเมนต์ที่ประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการเส้นตรงจะเกิดปัญหาดังกล่าวที่อธิบายไปก่อนหน้านี้ ส่งผลทำให้ Benchmark ที่ใช้ในการเปรียบเทียบการลู่เข้าผลตอบสนองของปัญหาจึงต้องใช้จำนวนมาก (256 เอเลเมนต์)

จากรูปที่ 4.4 และ 4.5 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและแรงในแนวแกนเทียบกับระยะทางตลอดความยาวของชิ้นส่วนแนวแกนที่แรงดึงที่ปลายของชิ้นส่วนแนวแกนมีค่าเท่ากับ $P = 500kN$ จากกราฟพบว่าเอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ (16 เอเลเมนต์) ค่อนข้างจะทำนายพฤติกรรมของความเครียดและแรงในแนวแกนของชิ้นส่วนแนวแกนได้ไม่ค่อยดีนัก เป็นผลเนื่องจากค่าโมดูลัสต้านทานของดินเกิดการคราก (k_w ลู่เข้าสู่ค่า 0) ทำให้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในบริเวณนั้นมีค่าการประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเปลี่ยนเป็นการประมาณด้วยสมการเส้นตรงทำให้เกิดการกระโดดของข้อมูล (เริ่มต้นที่ตำแหน่งความยาวของชิ้นส่วนแนวแกน 19.8m จนถึงปลายของชิ้นส่วนแนวแกนที่มีแรงดึงกระทำ) ถึงแม้ว่าคุณสมบัติของชิ้นส่วนแนวแกนยังไม่ถึงจุดครากก็ตาม

ค่าความเครียดที่ปลายของชิ้นส่วนแนวแกนเมื่อนำค่า Benchmark มาเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการใช้เอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปที่ได้จากการวิเคราะห์ (16 เอเลเมนต์) ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้พบว่ามีค่าประมาณ 1.19 เท่า ส่วนค่าแรงในแนวของชิ้นส่วนแนวแกนมีค่าประมาณ 1.19 เท่าเช่นกัน

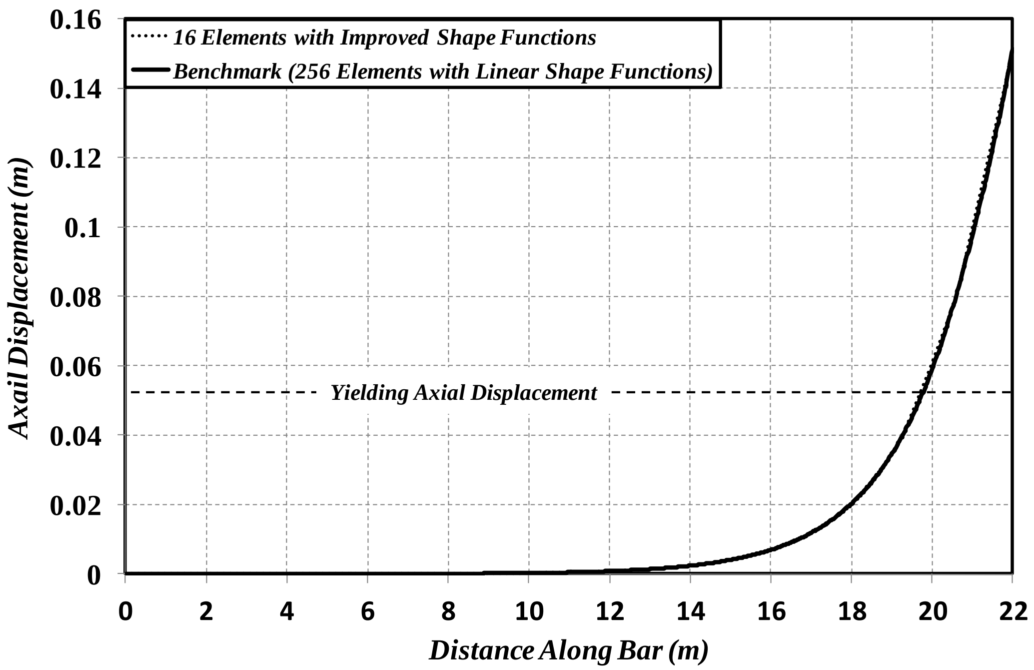


รูปที่ 4.4 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับระยะทางตลอดความยาวของชิ้นส่วนแนวแกน

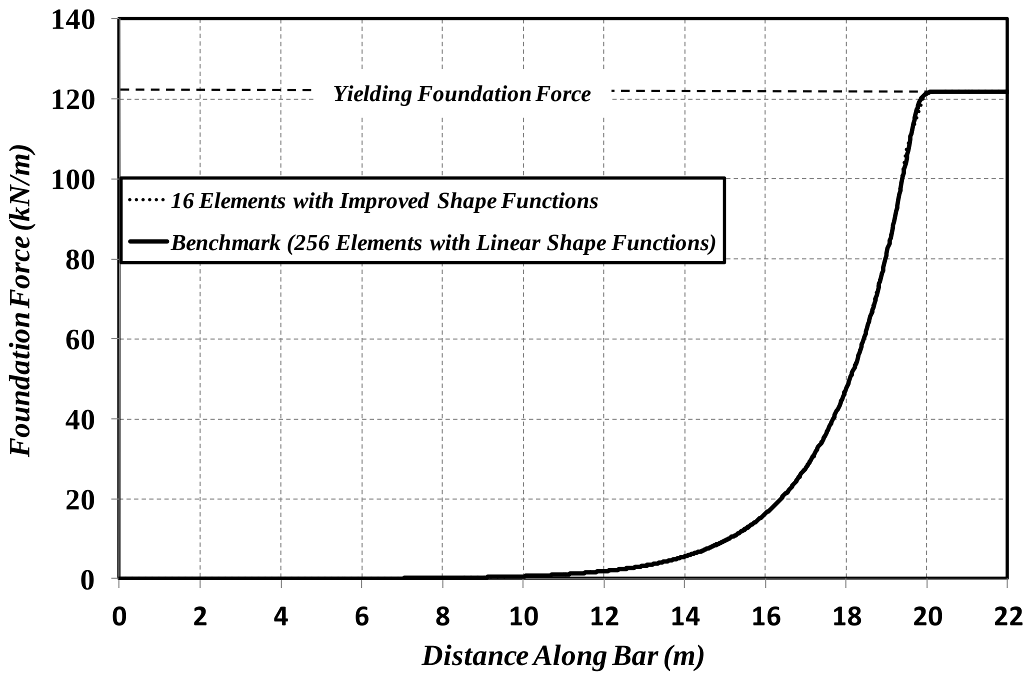


รูปที่ 4.5 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงในแนวแกนกับระยะทางตลอดความยาวของชิ้นส่วนแนวแกน

จากรูปที่ 4.6 และ 4.7 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวแกนและแรงเนื่องจากฐานรากเทียบกับระยะทางตลอดความยาวของชิ้นส่วนแนวแกน เนื่องจากฟังก์ชันการกระจัดในแนวแกนและแรงเนื่องจากฐานรากสอดคล้องในรูปของ Weak Sense ดังที่กล่าวไปข้างต้น ข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์แต่ละจุดการอินทิเกรต จึงมีความต่อเนื่องและมีประสิทธิภาพ แสดงได้ดังในรูปที่ 4.7 จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงเนื่องจากฐานรากเทียบกับระยะทางตลอดความยาวของชิ้นส่วนแนวแกน ที่ตำแหน่งความยาวของชิ้นส่วนแนวแกนเท่ากับ 19.8m แรงเนื่องจากฐานรากเกิดการคราก ทำให้แรงหลังจากจุดครากมีค่าคงที่ไปจนถึงปลายของชิ้นส่วนแนวแกน



รูปที่ 4.6 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวแกนกับระยะทางตลอดความยาวของชิ้นส่วนแนวแกน



รูปที่ 4.7 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงเนื่องจากฐานรากกับระยะทางตลอดความยาวของชิ้นส่วนแนวแกน

4.2 ผลตอบสนองของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร (Responses of Inelastic Beam Element Resting on Two-parameter Foundation Problem)

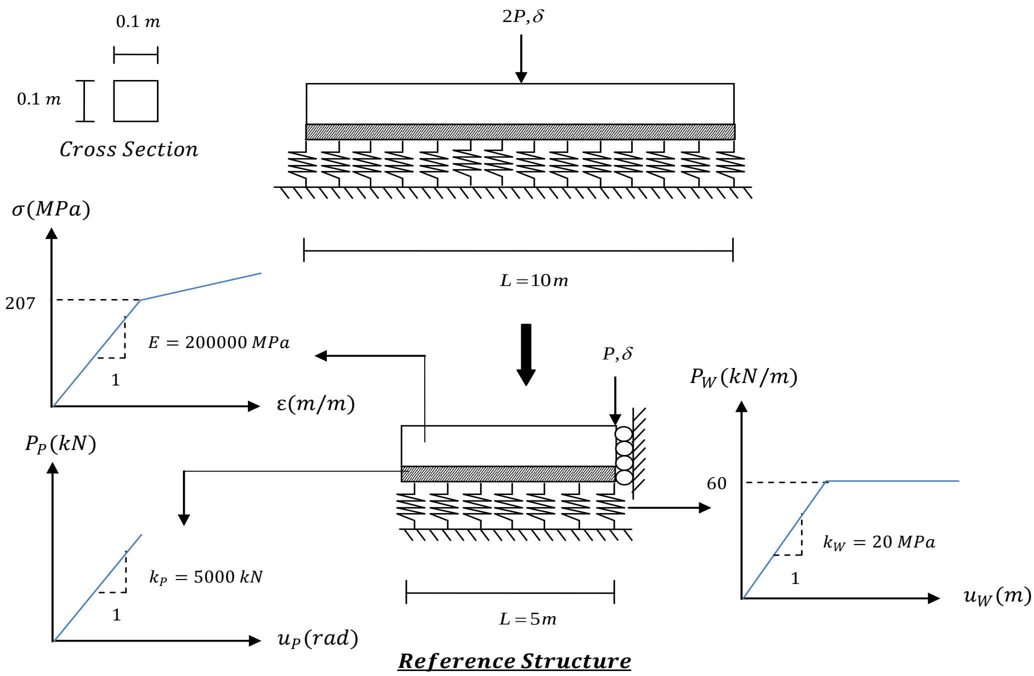
เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพและความแม่นยำของแบบจำลองชิ้นส่วนคานที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร โดยในตัวอย่างนี้นำเสนอโดยใช้แบบจำลองฐานราก Winkler-Pasternak ซึ่งมีความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้นในการวิเคราะห์ ได้มีการแบ่งตัวอย่างออกเป็น 2 ส่วน ซึ่งได้แก่ ส่วนของการศึกษาการลู่เข้าของผลตอบสนองของปัญหาและส่วนของการเปรียบเทียบผลตอบสนองของแบบจำลองคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปรกับแบบจำลองคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นของ Winkler

4.2.1 การลู่เข้าของผลตอบสนองของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานราก Winkler-Pasternak ซึ่งมีความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้น (Responses of Inelastic Beam Element Resting on Winkler-Pasternak Foundation Convergence Studies)

แบบจำลองคานอิสระที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak (Free-Free Beam on Winkler-Pasternak Foundation) รับน้ำหนักบรรทุกที่กระทำอยู่ตรงกึ่งกลางของคานดังแสดงในรูปที่ 4.8 เนื่องจากคุณสมบัติความสมมาตรของแบบจำลอง ทำให้สามารถแบ่งวิเคราะห์เพียงครึ่งหนึ่งของปัญหาได้ โดยที่คุณสมบัติของคานอ้างอิงมาจากบทความวิชาการเรื่อง Nonlinear Finite Element Modeling of Beams on Two-Parameter Foundations (Mullapudi และ Ayoub, 2010 b) เมื่อคานมีความยาว $L = 10m$ หน้าตัดคานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีขนาดความกว้างและสูงเท่ากับ $100mm$ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น $E = 200$ GPa ความเค้นที่จุดครากมีค่าเท่ากับ 207 MPa จุดครากของคานเนื่องจากโมเมนต์ดัด (Yield Bending Moment) $M_y = 34.5$ kN.m และอัตราส่วนการอ่อนตัวของคาน (Curvature-Hardening Ratio) มีค่าเท่ากับ 0.014 นอกจากนี้คุณสมบัติของ

ฐานราก Winkler และ Pasternak อ้างอิงมาจากบทความวิชาการเรื่อง Inelastic Analysis of Beams on Two-Parameter Tensionless Elastoplastic Foundation (Sapountzakis และ Kampitsis, 2013) กำหนดให้ค่าโมดูลัสต้านทานของฐานราก Winkler มีค่าเท่ากับ $k_W = 20 MPa$ โดยที่มีคุณสมบัติเป็น Perfectly Plastic ในช่วงพลาสติก, จุดครากของแรงเนื่องจากฐานราก Winkler (Yield Winkler Foundation Force) มีค่าเท่ากับ $P_{Wy} = 60$ kN/m และค่าโมดูลัสต้านทานของชั้นแรงเฉือนในแบบจำลองของ Pasternak มีค่าเท่ากับ $k_P = 5000 kN$ กำหนดให้มีคุณสมบัติอยู่ในช่วงอีลาสติก

จากคุณสมบัติที่กล่าวไปข้างต้น ผลตอบสนองระหว่างแรงกับค่าการกระจัดในแนวดิ่งของคาน (Global Response) ในกรณีช่วงอีลาสติก ตัวแปรเงื่อนไขเริ่มต้นมีค่าเท่ากับ $A = 3$ m^{-2} และ $B = 12$ m^{-4} ซึ่งจัดอยู่ในกรณี $A < 2\sqrt{B}$

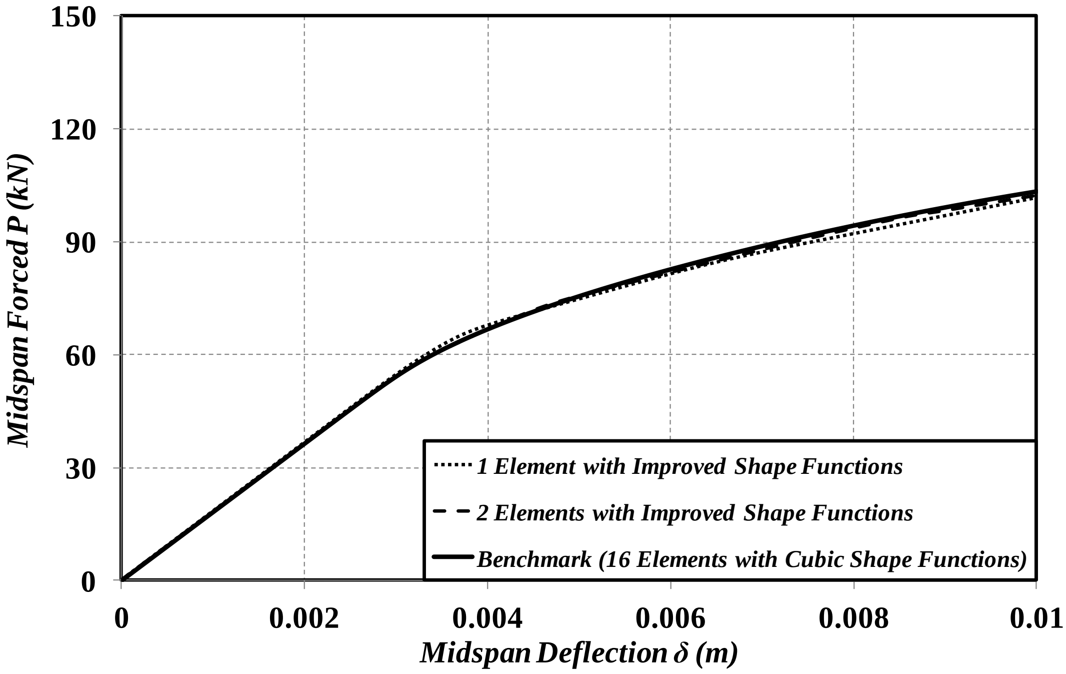


รูปที่ 4.8 ปัญหาคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่กระทำที่กึ่งกลางของคาน

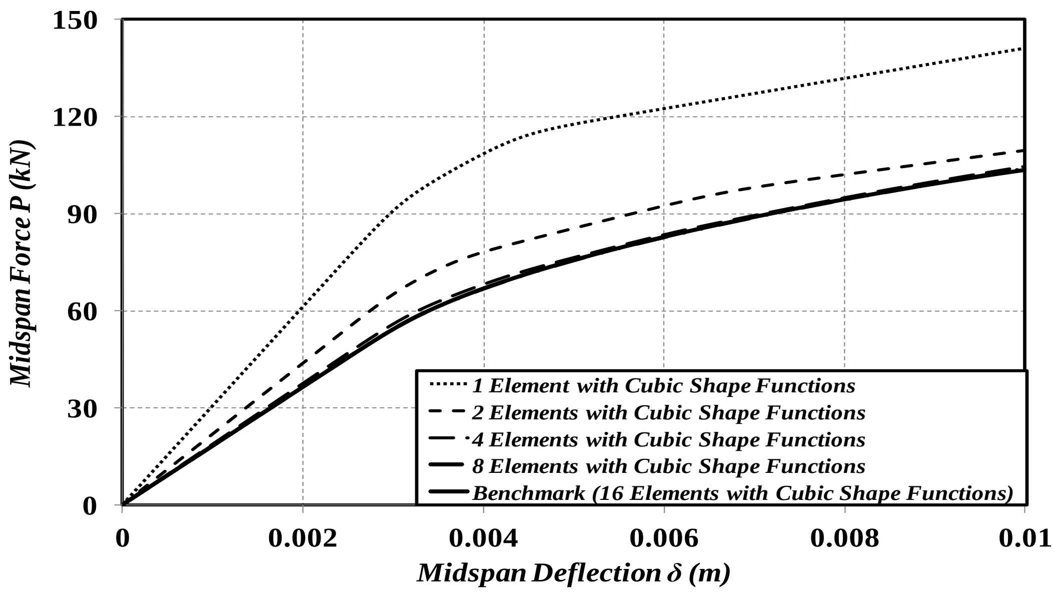
ภายใต้การควบคุมด้วยการกระจัด (Displacement Control) ที่กึ่งกลางของคานซึ่งมีค่าเท่ากับ $\delta = 0.01m$ เพื่อตรวจสอบจำนวนเอเลเมนต์ที่ใช้หาผลตอบสนองของกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัด ($P-\delta$) ที่กึ่งกลางของคาน ที่มีค่าลู่เข้าสู่ค่าแม่นยำ โดยใช้แบบจำลองภายใต้การวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัด ที่เสนอในงานวิจัยนี้และในบทความวิจัยของ Mullapudi และ

Ayoub (2010) โดยบทความดังกล่าว ผลตอบสนองของปัญหาได้จากการวิเคราะห์ด้วยการใช้เอเลเมนต์ที่ประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการพหุนามกำลังสาม หรือ Hermitian Polynomial Interpolation Functions ส่วนฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของงานวิจัยนี้ ได้รับจากการแก้สมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของปัญหาโดยตรง ซึ่งได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง โดยใช้จำนวนเอเลเมนต์ 16 เอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการพหุนามกำลังสามเป็นค่าแม่นยำในการเปรียบเทียบ หรือเรียกว่า “Benchmark” ดังแสดงในรูปที่ 4.9 และ 4.10 ผลตอบสนองดังกล่าวถูกวิเคราะห์โดยใช้ 7 จุดการอินทิเกรต (Integration Points) โดยชนิดการอินทิเกรตที่ใช้คือ Gauss-Lobatto ซึ่งจำนวนจุดการอินทิเกรตที่ใช้ เป็นจำนวนที่เพียงพอต่อการได้มาซึ่งผลตอบสนองที่ไม่เปลี่ยนแปลงถึงแม้ว่าจะใช้จำนวนจุดการอินทิเกรตมากขึ้น จากรูปที่ 4.9 พบว่าจำนวนเอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ เพื่อหาค่าผลตอบสนองของปัญหาซึ่งใช้เพียง 2 เอเลเมนต์ก็ได้ค่าผลตอบสนองที่เทียบเท่ากับ Benchmark โดยที่จำนวนเอเลเมนต์ 1 เอเลเมนต์ก็เกือบจะได้ค่าผลตอบสนองแม่นยำในกรณีที่เกิดการครากของปัญหา ซึ่งจากกราฟพบว่าเกิดการเปลี่ยนแปลงความชันถึง 2 ครั้งเนื่องมาจากเกิดการครากในแบบจำลองสปริงของฐานราก Winkler ที่การกระจัดเท่ากับ $\delta = 0.003m$ และเกิดการครากในชิ้นส่วนคานที่การกระจัดเท่ากับ $\delta = 0.007m$ โดยที่เมื่อเกิดการครากในแบบจำลองสปริงของฐานราก Winkler ทำให้ตัวแปร B มีค่าลู่เข้าใกล้ 0 หลังจากนั้นฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะเปลี่ยนจากกรณี $A < 2\sqrt{B}$ เป็น $A > 2\sqrt{B}$ โดยจะเกิดขึ้นบริเวณใต้จุดที่รับน้ำหนักบรรทุกก่อน และจากรูปที่ 4.10 แสดงถึงจำนวนเอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการพหุนามกำลังสามในการหาค่าผลตอบสนองแม่นยำ โดยที่ต้องใช้ถึง 8 เอเลเมนต์จึงจะได้ค่าผลตอบสนองที่เทียบเท่ากับ Benchmark และจากกราฟพบว่าจำนวนเอเลเมนต์ 4 เอเลเมนต์ก็เกือบจะได้ค่าผลตอบสนองแม่นยำ

จากกราฟของตัวอย่างที่กล่าวไปพบว่า ในกรณีช่วงอีลาสติก ที่การกระจัดตรงกึ่งกลางของคานมีค่าไม่เกิน $\delta < 0.003m$ เอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ใช้เพียง 1 เอเลเมนต์ก็จะมีค่าเทียบเท่ากับ Benchmark ส่วนเอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการพหุนามกำลังสามจะต้องใช้ถึง 4 เอเลเมนต์ โดยตอบสนองที่ได้มีระดับประสิทธิภาพและความแม่นยำที่เท่าเทียมกัน



รูปที่ 4.9 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดที่กึ่งกลางของคานในกรณีการวิเคราะห์ด้วยเอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี

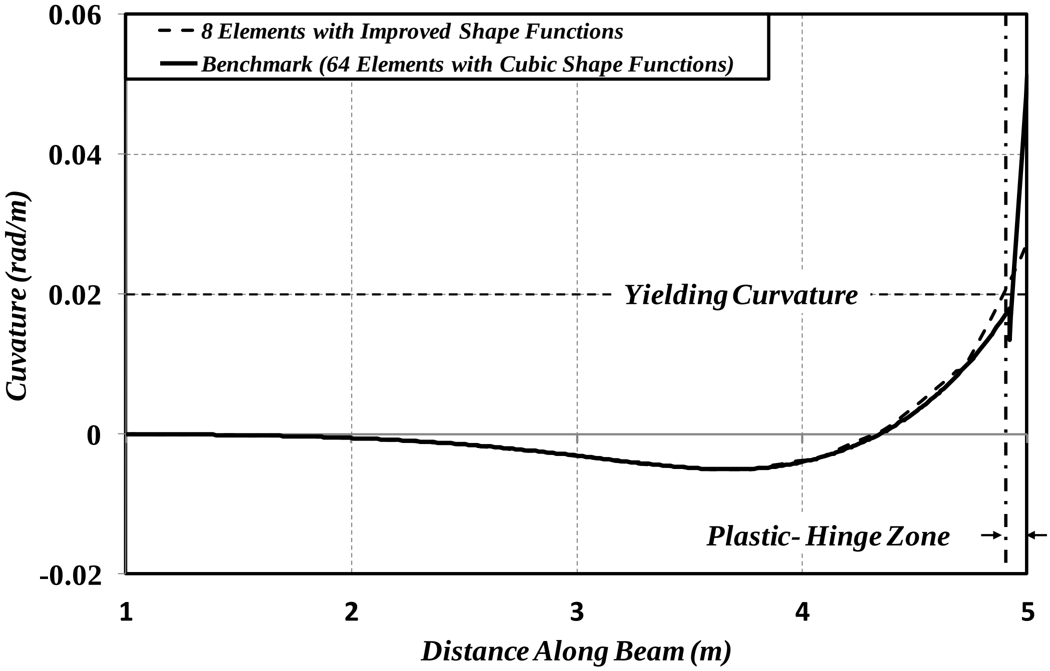


รูปที่ 4.10 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดที่กึ่งกลางของคานในกรณีการวิเคราะห์ด้วยเอเลเมนต์ที่ประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการพหุนามกำลังสาม

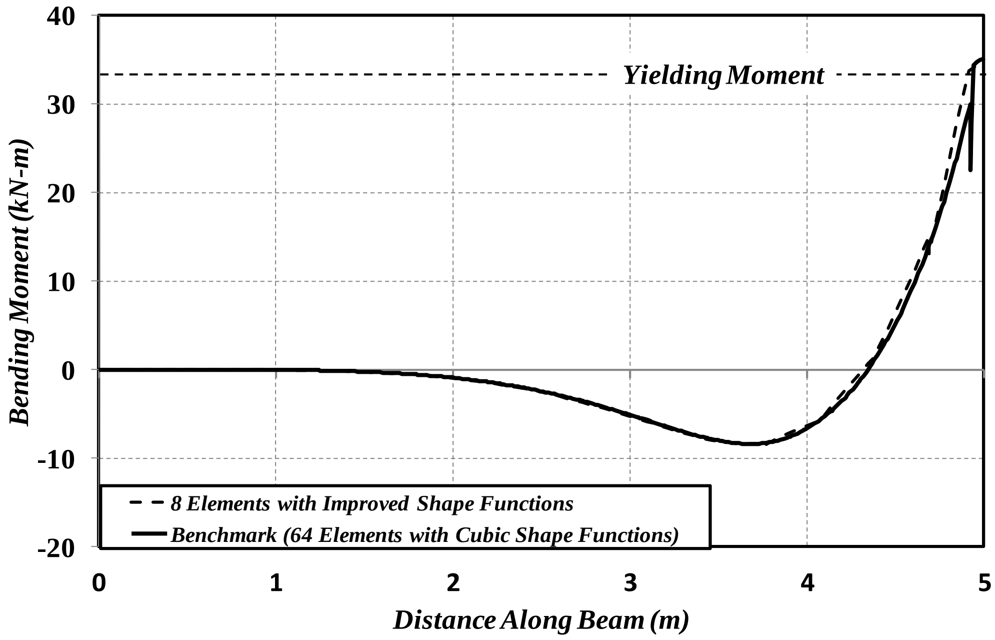
เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพการลู่เข้าของผลตอบสนองอื่นๆของปัญหา (Local Responses) ซึ่งได้แก่ ความโค้งของคาน (Curvature) โมเมนต์ดัดของคาน (Bending Moment) การกระจัดในแนวดิ่งของคาน (Vertical Displacement) หรือการกระจัดเนื่องจากฐานราก (Foundation Deformation) แรงเนื่องจากฐานราก (Foundation Force) มุมบิดของคาน (Beam Rotation) หรือความเครียดที่เกิดขึ้นในชั้นแรงเฉือน (Shear-Layer Sectional Strain) และแรงที่เกิดขึ้นในชั้นแรงเฉือน (Shear-Layer Sectional Force) โดยใช้แบบจำลองที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ จำนวนเอเลเมนต์ถูกใช้มากขึ้นในการได้มาซึ่งผลตอบสนองที่มีค่าลู่เข้าสู่ Benchmark ในกรณีของเอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์เพิ่มขึ้นจาก 2 เป็น 8 เอเลเมนต์ ส่วนในกรณีของเอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการพหุนามกำลังสามเพิ่มขึ้นจาก 16 เป็น 64 เอเลเมนต์

จากรูปที่ 4.11 และ 4.12 แสดงถึงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและโมเมนต์ดัดของคานเทียบกับระยะทางตลอดความยาวของคานที่จุดการอินทิเกรต เมื่อค่าการกระจัดที่กึ่งกลางของคานมีค่าเท่ากับ $\delta = 0.01m$ ในการวิเคราะห์ผลตอบสนองอื่นๆ การใช้เอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ให้ผลตอบสนองที่ดีและแม่นยำ แต่ในกรณีการใช้เอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการพหุนามกำลังสามความโค้งและโมเมนต์ดัดบริเวณที่เกิด Plastic-Hinge หรือเรียกว่า “Plastic-Hinge Zone” จะเกิดการกระโดดของข้อมูล เนื่องจากฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวถูกทำให้อ่อนลง (Weak) จากการหาอนุพันธ์อันดับ 2 เทียบกับระยะทางตลอดความยาวของคาน อย่างไรก็ตามแบบจำลองที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ (8 เอเลเมนต์) ค่อนข้างจะทำนายพฤติกรรมของความโค้งของคานได้ไม่ค่อยดีนัก เนื่องจากเกิด Localization ในบริเวณที่เกิด Plastic-Hinge ดังแสดงในรูปที่ 4.11 จากผลการทดลองพบว่า เมื่อนำค่าความโค้งสูงสุดที่เกิดขึ้นของ Benchmark มาเปรียบเทียบกับกับค่าความโค้งที่ได้จากแบบจำลองที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ พบว่ามีค่าประมาณ 1.89 เท่า ซึ่งไม่เป็นที่น่าแปลกใจเนื่องจากผลของ Localization มีอยู่เป็นปกติในกรณีของการวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัดซึ่งสามารถขจัดไปด้วยการเพิ่มจำนวนเอเลมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ (อ้างอิงจาก Limkatanyu และคณะ, 2009)

หรือการใช้วิธีการวิเคราะห์ด้วยแรง (อ้างอิงจาก Limkatanyu และ Spacone, 2006) หรือใช้วิธีการวิเคราะห์ด้วยวิธีผสม (อ้างอิงจาก Mullapudi และ Ayoub, 2010 b)

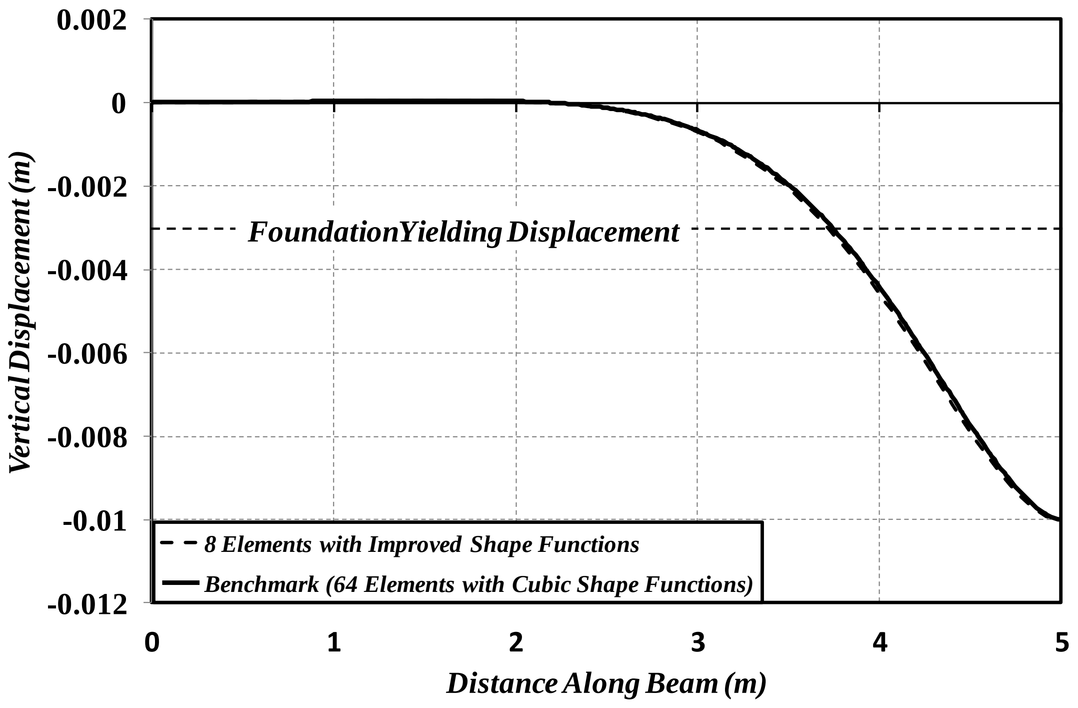


รูปที่ 4.11 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งกับระยะทางตลอดความยาวของคาน

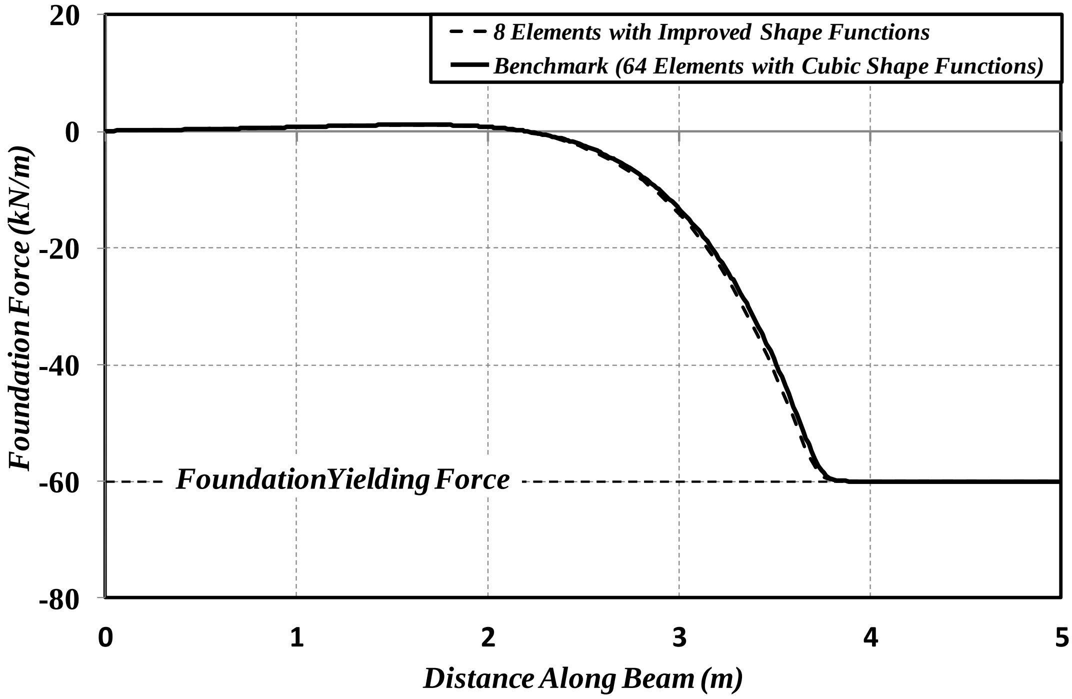


รูปที่ 4.12 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดกับระยะทางตลอดความยาวของคาน

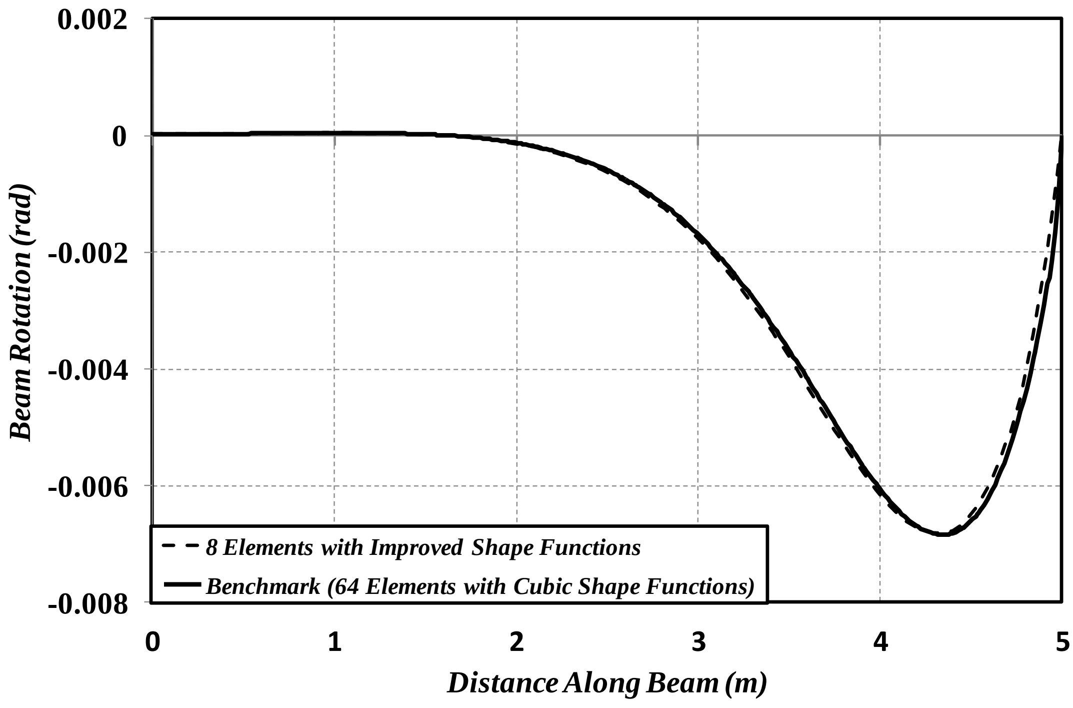
จากรูปที่ 4.13-4.17 แสดงถึงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าการกระจัดในแนวดิ่ง แรงเนื่องจากฐานราก มุมบิด แรงดันเนื่องจากฐานราก (Soil Pressure) และแรงที่เกิดขึ้นในชั้นแรงเฉือน ตามลำดับ เทียบกับระยะทางตลอดความยาวของคาน (โดยใช้ข้อมูลที่จุดการอินทิเกรต) เมื่อค่าการกระจัดที่กึ่งกลางของคานมีค่าเท่ากับ $\delta = 0.01m$ จากรูปที่ 4.13 และ 4.15 พบว่าบริเวณที่ปลายของคานค่าการกระจัดและมุมบิด มีค่าน้อยมากเป็นผลเนื่องมาจากความยาวของระบบคานมีค่ามากเกินไปทำให้ผลที่เกิดขึ้นส่งไปถึงที่บริเวณที่ปลายของคานมีค่าน้อยมาก และจากรูปที่ 4.16 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันดินหรือฐานรากกับระยะทางตลอดความยาวของคาน จะสังเกตว่าเกิดการ Localization เป็นผลเนื่องมาจากเกิด Plastic-Hinge ขึ้นในคานบริเวณที่กึ่งกลางของคาน ส่งผลให้การทำนายพฤติกรรมแรงดันดินหรือฐานรากบริเวณกึ่งกลางคานจึงไม่ค่อยดีนัก เมื่อนำค่าที่ได้จาก Benchmark มาเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากงานวิจัยพบว่ามีค่าประมาณ 1.63 เท่า



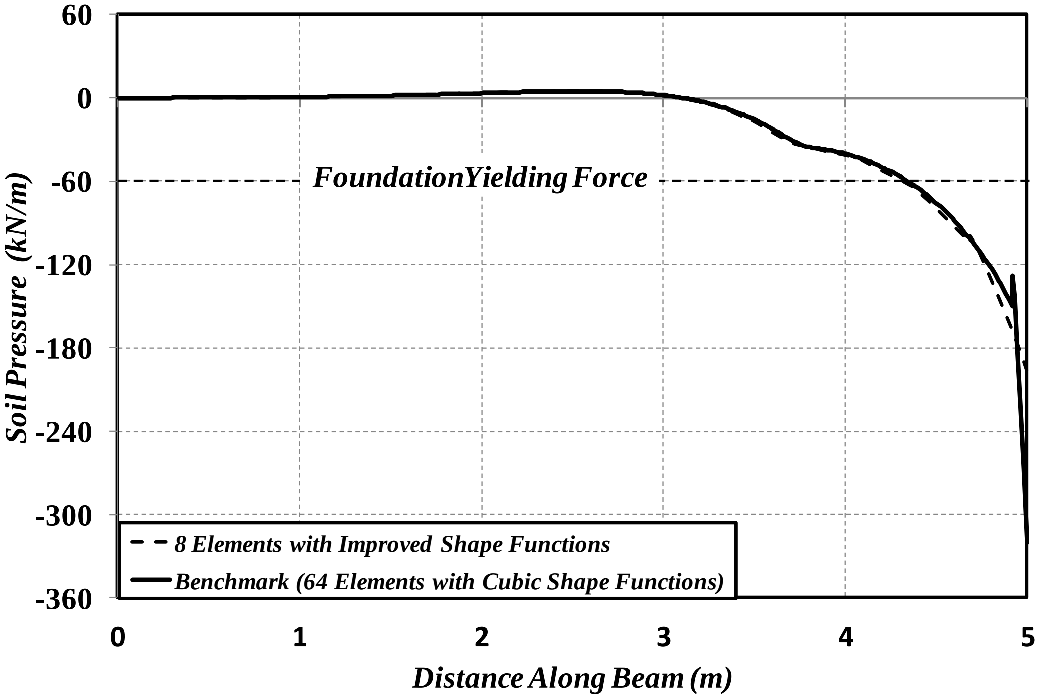
รูปที่ 4.13 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวดิ่งกับระยะทางตลอดความยาวของคาน



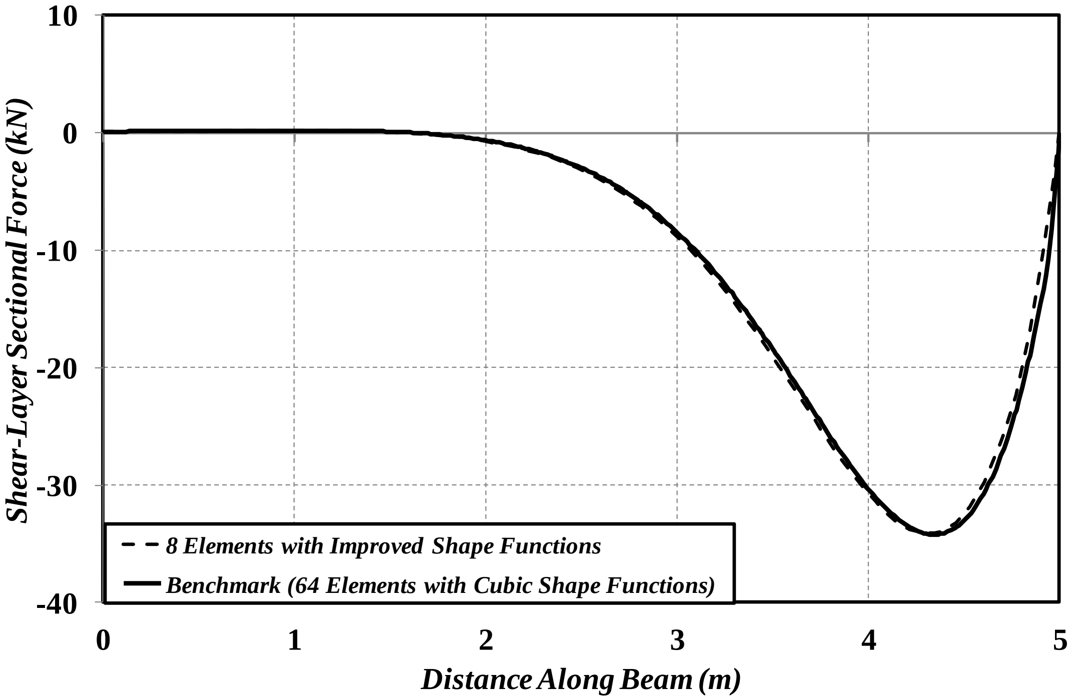
รูปที่ 4.14 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงเนื่องจากฐานรากกับระยะทางตลอดความยาวของคาน



รูปที่ 4.15 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างมุมบิดกับระยะทางตลอดความยาวของคาน



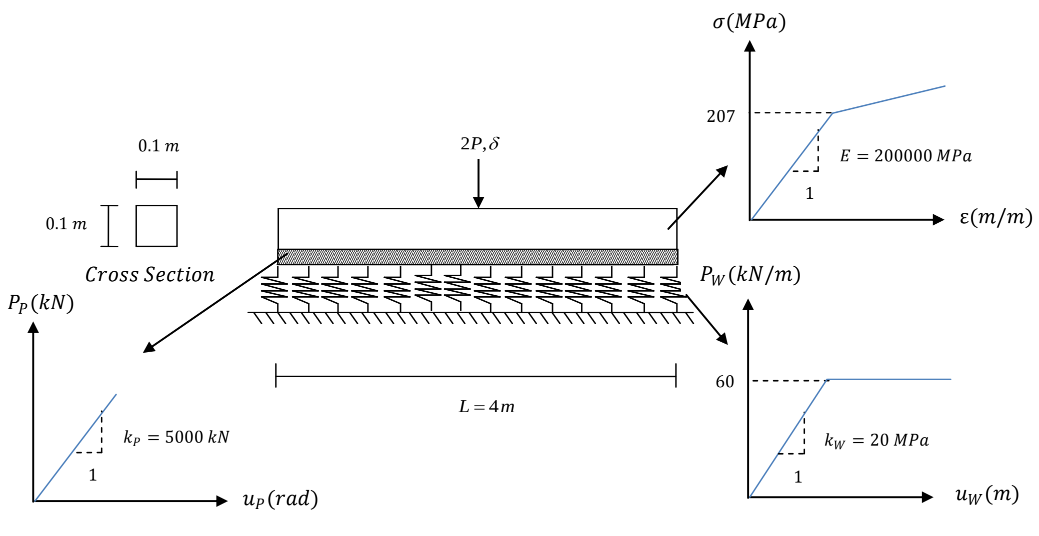
รูปที่ 4.16 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันเนื่องจากฐานรากกับระยะทางตลอดความยาวของคาน



รูปที่ 4.17 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่เกิดขึ้นในชั้นแรงเฉือนกับระยะทางตลอดความยาวของคาน

4.2.2 การเปรียบเทียบผลตอบสนองของปัญหาชิ้นส่วนคานบนฐานราก Winkler-Pasternak กับชิ้นส่วนคานบนฐานราก Winkler (Responses of Inelastic Beam Element Resting on Winkler-Pasternak and Winkler Foundations)

แบบจำลองคานอิสระที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak (Free-Free Beam on Winkler-Pasternak Foundation) รับน้ำหนักบรรทุกที่กระทำอยู่ตรงกึ่งกลางของคานดังแสดงในรูปที่ 4.18 จุดประสงค์หลักของตัวอย่างนี้คือ เปรียบเทียบข้อแตกต่างระหว่างผลตอบสนองที่ได้รับจากแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler-Pasternak กับแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler (Limkatanyu, 2013 b) โดยใช้คุณสมบัติของแบบจำลองเหมือนกับตัวอย่างก่อนหน้านี้ แต่มีการสมมุติความยาวของคานให้สั้นลงเหลือ $L=4m$ ผลตอบสนองของปัญหาได้รับจากการใช้เอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้รับจากการวิเคราะห์ของปัญหาในการวิเคราะห์จำนวน 32 เอเลเมนต์ โดยปัญหาถูกควบคุมด้วยค่าการกระจัดที่กระทำที่กึ่งกลางของคาน

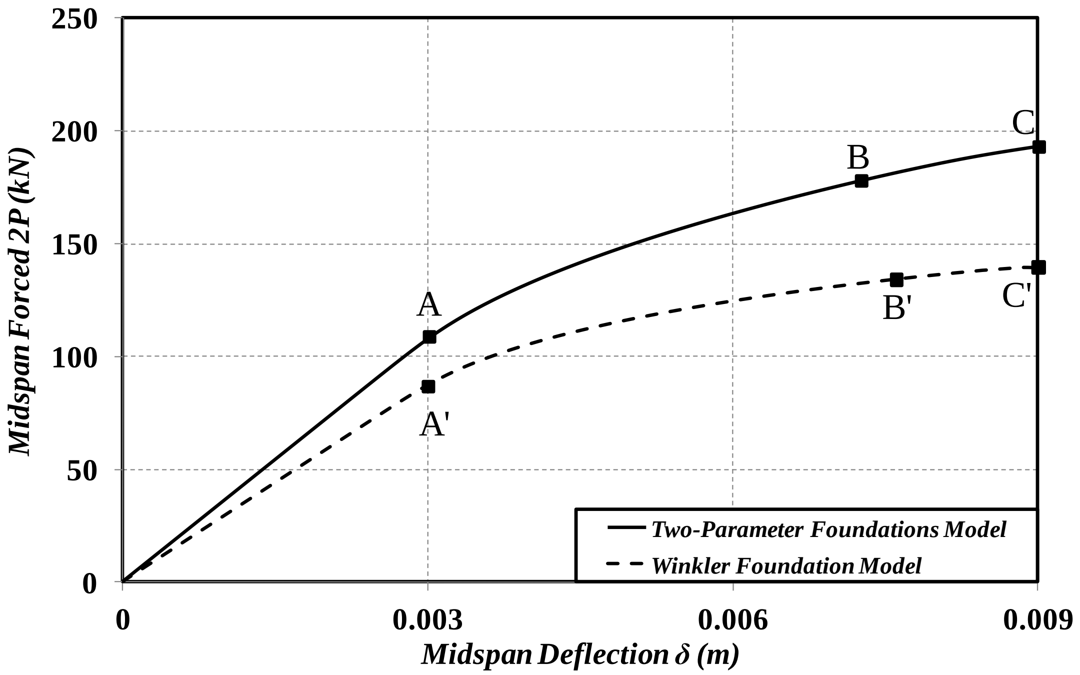


รูปที่ 4.18 คานสั้นวางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่กระทำที่กึ่งกลางของคาน

จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดที่กึ่งกลางของคานซึ่งได้รับจากการวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler-Pasternak และแบบจำลองคานบน

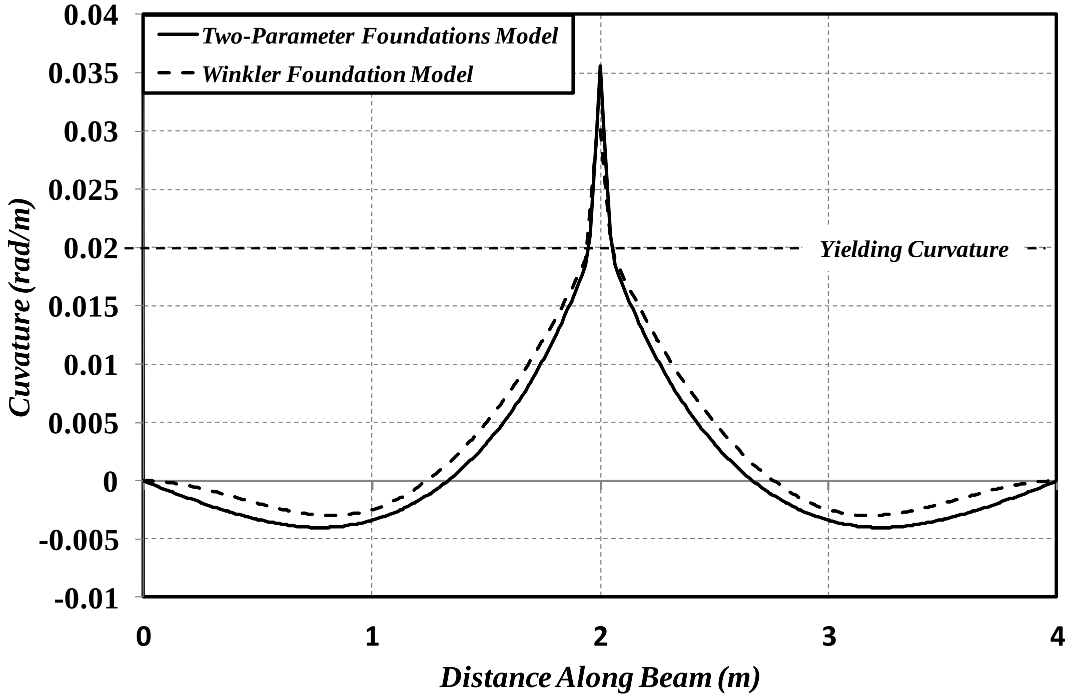
ฐานราก Winkler สามารถแบ่งกรณีการใส่น้ำหนักบรรทุกให้กับระบบออกเป็น 3 กรณี ดังแสดงในรูปที่ 4.19 ได้แก่ จุด A และ A' คือจุดที่เกิดการครากในแบบจำลองสปริงของ Winkler จุด B และ B' คือจุดแรกที่เกิด Plastic Hinge ที่กึ่งกลางของคาน และจุด C และ C' คือจุดที่ค่าการกระจัดในแนวดิ่งที่กึ่งกลางของคานมีค่าเท่ากับ $\delta = 0.009m$ จากกราฟพบว่าที่จุด A และ A' ค่าสตีฟเนสเริ่มต้นของแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler-Pasternak เทียบกับแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler มีค่าประมาณ 1.24 เท่า แรงที่ทำให้เกิด Plastic Hinge (จุด B และ B') ที่กึ่งกลางของคาน เมื่อนำค่ามาเปรียบเทียบมีค่าประมาณ 1.32 เท่า และค่าแรงที่กึ่งกลางของคาน (จุด C และ C') เมื่อนำมาค่าเปรียบเทียบพบว่ามีค่าประมาณ 1.38 เท่า

ผลของชั้นแรงเฉือนหรือตัวแปรที่ 2 ของแบบจำลองคานที่วางอยู่บนฐานรากประเภท 2 ตัวแปร ส่งผลกระทบต่อตำแหน่งที่เกิด Plastic Hinge ในคาน (จุด B และ B') เกิดเร็วขึ้นกว่าเมื่อเทียบกับระยะความยาวของคาน ซึ่งสังเกตได้จากรูปที่ 4.19

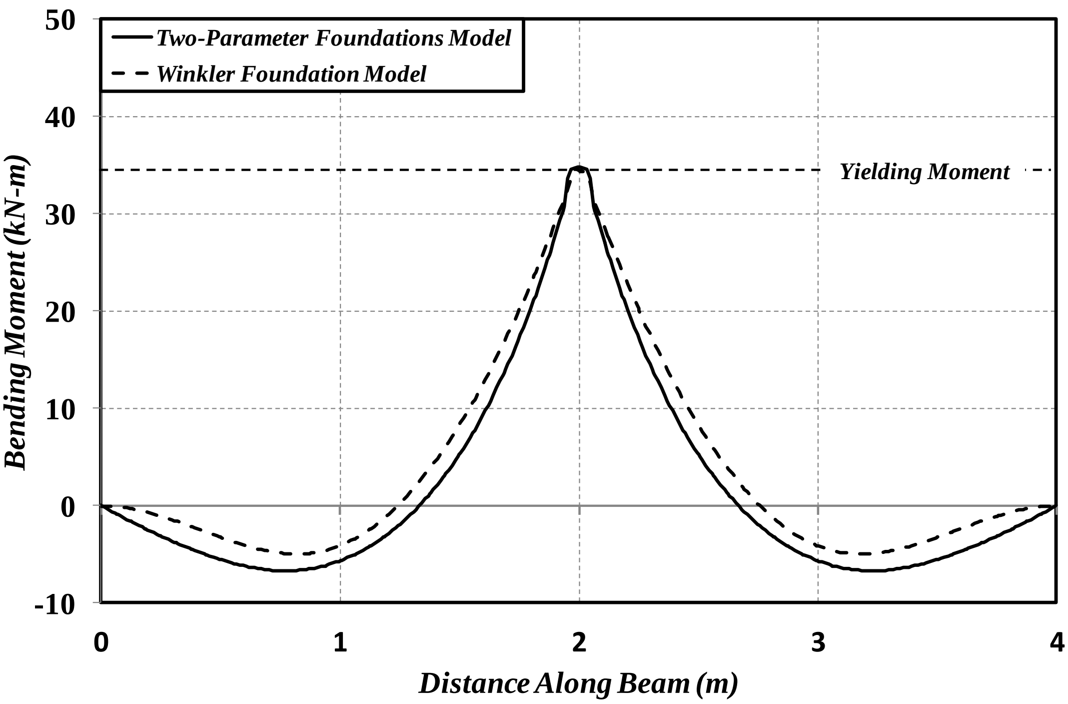


รูปที่ 4.19 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดที่กึ่งกลางของคานเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler-Pasternak กับแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler

จากรูปที่ 4.20 และ 4.21 คือกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและโมเมนต์ดัดของคานเทียบกับระยะทางตลอดความยาวคาน (โดยใช้ข้อมูลที่จุดการอินทิเกรต) ที่จุด C และ C' ($\delta = 0.009m$) จากรูปที่ 4.20 ค่าความโค้งสูงสุดของคานที่ได้รับจากแบบจำลองคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak มีค่าเพิ่มขึ้นประมาณ 17.9% เมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler ในกรณีของโมเมนต์ดัดค่าโมเมนต์ดัดมีค่าเพิ่มขึ้นเล็กน้อยตรงบริเวณที่มีค่าโมเมนต์ดัดมีค่าเป็นลบ (Concave) แต่จะมีค่าลดลงเล็กน้อยบริเวณที่มีค่าโมเมนต์ดัดมีค่าเป็นบวก (Convax) เป็นผลเนื่องจากฟังก์ชั่นมุมบิดที่เกิดขึ้นดังแสดงในรูปที่ 4.23 โดยที่ฟังก์ชันความโค้งของปัญหาได้จากการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันมุมบิดของคานเทียบกับระยะทางตลอดความยาวของคาน

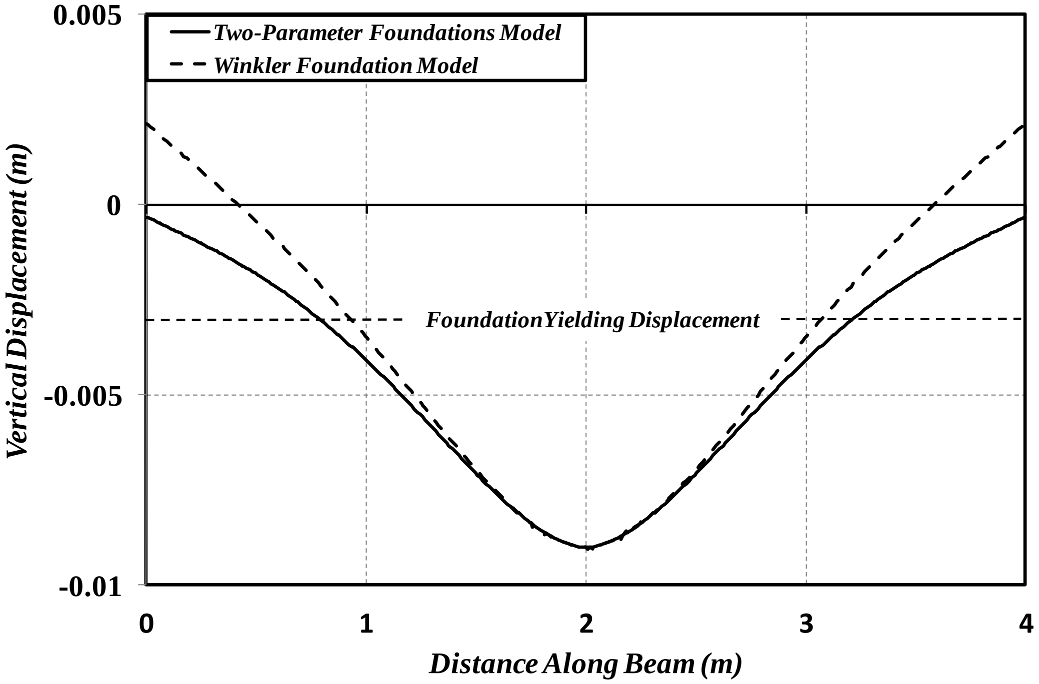


รูปที่ 4.20 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งของคานเทียบกับระยะทางตลอดความยาวคานที่การกระจัดในแนวดิ่งกึ่งกลางคานมีค่าเท่ากับ $0.009m$ ($\delta = 0.009m$)

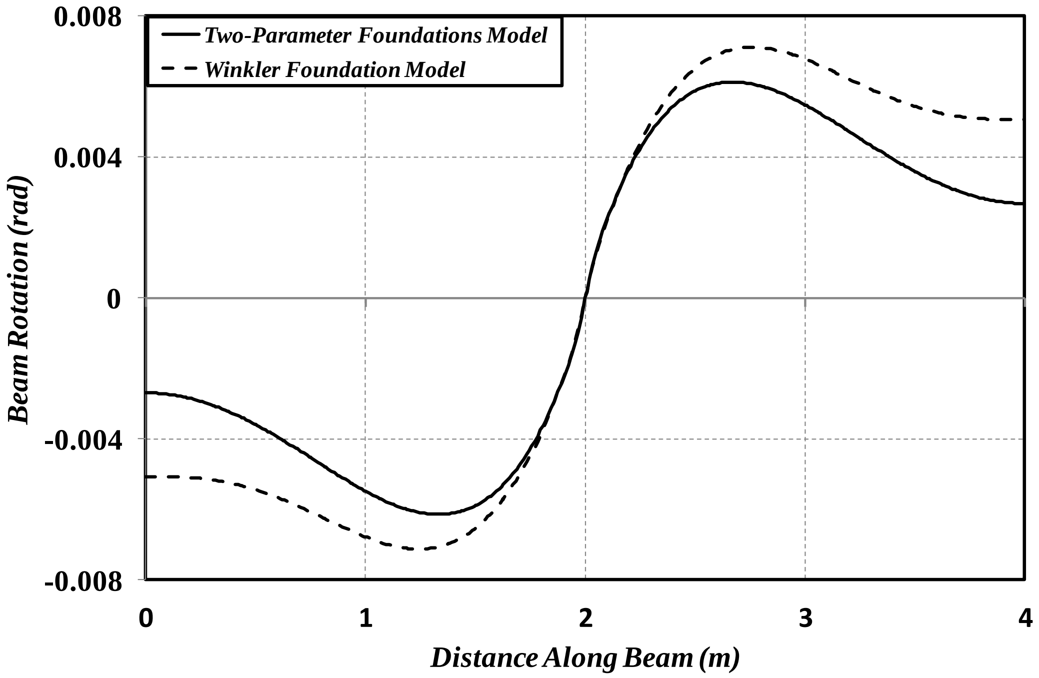


รูปที่ 4.21 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดของคานเทียบกับระยะทางตลอดความยาวคาน ที่การกระจัดในแนวดิ่งกึ่งกลางคานมีค่าเท่ากับ $0.009m$ ($\delta = 0.009m$)

จากรูปที่ 4.22 และ 4.23 คือกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าการกระจัดในแนวดิ่งและมุมบิดของคานเทียบกับระยะทางตลอดความยาวของคาน (โดยใช้ข้อมูลที่จุดการอินทิเกรต) ตำแหน่งที่จุด C และ C' ซึ่งจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าการกระจัดในแนวดิ่งของคาน ผลเนื่องจากชั้นแรงเฉือนมีผลกระทบต่อค่าการกระจัดในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นอย่างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณที่ปลายทั้งสองข้างของคาน สังเกตได้ว่าแบบจำลองคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler เกิดการยกตัวที่ปลายทั้งสองข้างของคาน แบบจำลองคานที่วางอยู่บนฐานราก Winkler-Pasternak กลับทรุดตัวลงอยู่ในดินเล็กน้อย นอกจากนี้ยังมีอีกข้อสังเกตหนึ่งที่พบจากกราฟซึ่งพบว่า บริเวณกึ่งกลางคานที่รับน้ำหนักหนักบรรทุกและเกิด Plastic Hinge ที่การกระจัดเท่ากับ ($\delta = 0.009m$) ในกรณีของแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler เริ่มมีการกระโดดของข้อมูลเล็กน้อย ส่วนในกรณีของแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler-Pasternak ยังคงไม่ปรากฏการกระโดดของข้อมูลซึ่งสังเกตได้จากกราฟความสัมพันธ์ค่าการกระจัดในแนวดิ่งของคาน นอกจากนี้ผลของชั้นแรงเฉือนยังช่วยต้านการบิดที่เกิดขึ้นในคานด้วยเช่นกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.23

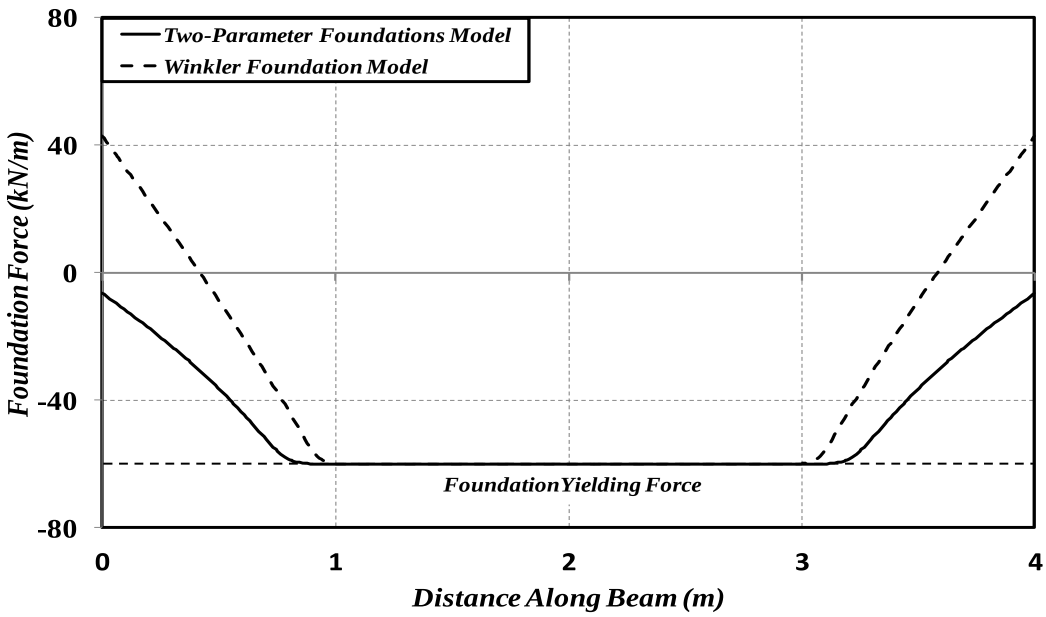


รูปที่ 4.22 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวดิ่งของคานเทียบกับระยะทางตลอดความยาวคานที่การกระจัดในแนวดิ่งกึ่งกลางคานมีค่าเท่ากับ $0.009m$ ($\delta = 0.009m$)

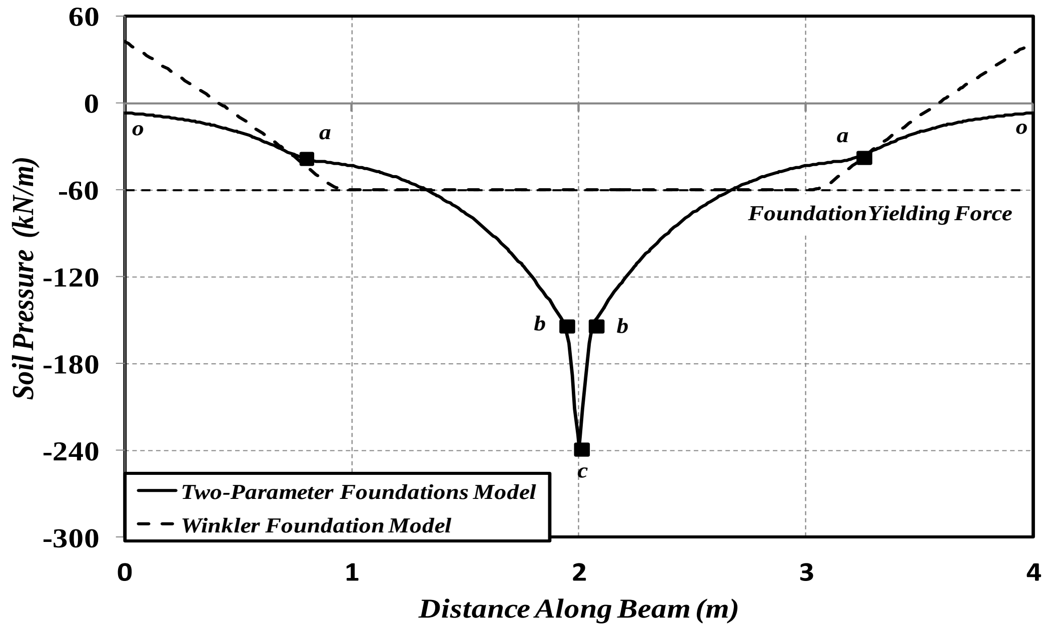


รูปที่ 4.23 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างมุมบิดของคานเทียบกับระยะทางตลอดความยาวคานที่การกระจัดในแนวดิ่งกึ่งกลางคานมีค่าเท่ากับ $0.009m$ ($\delta = 0.009m$)

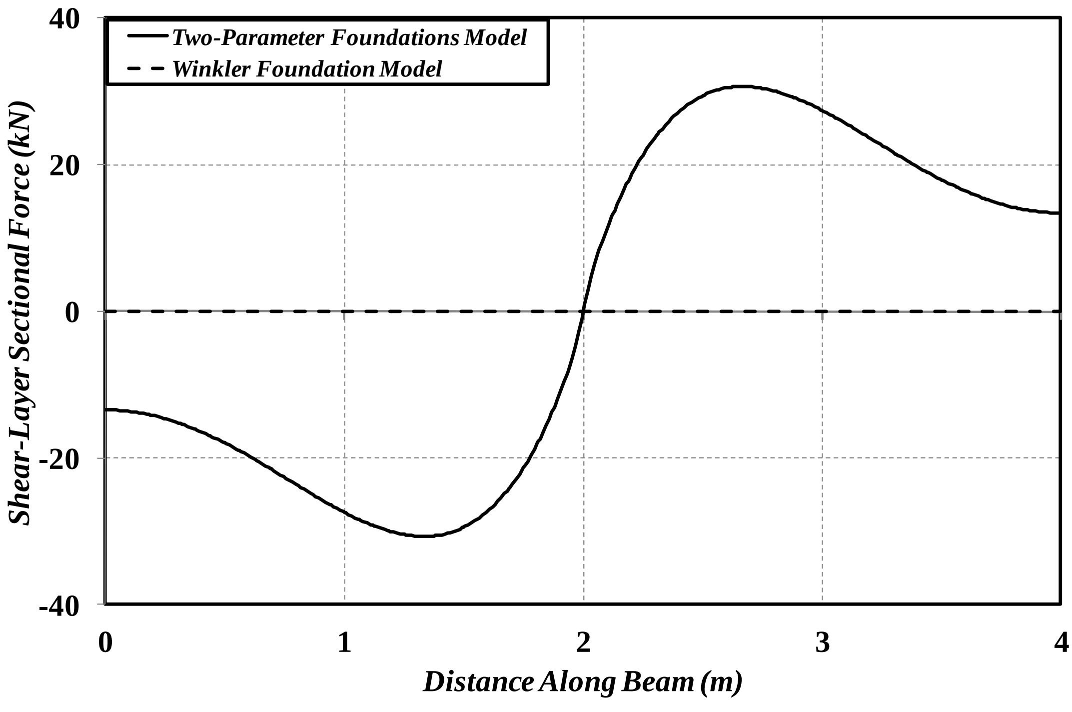
จากรูปที่ 4.24-4.26 แสดงถึงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงเนื่องจากฐานราก แรงดันเนื่องจากฐานรากที่กระทำต่อคาน และแรงที่เกิดขึ้นในชั้นแรงเฉือนเทียบกับระยะทางตลอดความยาวของคาน (โดยใช้ข้อมูลที่จุดการอินทิเกรต) ที่ตำแหน่งจุด C และ C' โดยที่รูปที่ 4.24 เปรียบเทียบแรงเนื่องจากฐานราก ซึ่งได้รับจากการวิเคราะห์แบบจำลองทั้ง 2 กรณี ในกรณีแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler-Pasternak แรงเนื่องจากฐานรากมีการแผ่ออกมากกว่ากรณีแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler ในบริเวณที่เกิดการคราก (Yielding Zone) เป็นผลเนื่องมาจากชั้นแรงเฉือน ส่วนในรูปที่ 4.25 เปรียบเทียบแรงดันเนื่องจากฐานรากที่กระทำต่อคาน จากกราฟจะเห็นว่าผลเนื่องมาจากชั้นแรงเฉือนมีผลต่อแรงดันเนื่องจากฐานรากที่กระทำต่อคานอย่างมาก โดยสามารถแบ่งจุดสำหรับการอธิบายพฤติกรรมที่เกิดขึ้นออกเป็น 3 จุด ซึ่งได้แก่ oa คือจุดที่ฐานรากอยู่ในช่วงอีลาสติก (Linear Elastic) ab คือจุดที่ฐานราก Winkler ไปถึงจุดคราก จะสังเกตได้ว่าในกรณีแบบจำลองคานบนฐานราก Winkler-Pasternak แรงดันเนื่องจากฐานรากมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากผลของชั้นแรงเฉือน และ bc คือจุดที่อยู่ในบริเวณที่เกิด Plastic Hinge แรงดันดินจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วตามลักษณะของค่าความโค้งที่เกิดขึ้นในคาน สุดท้ายในรูปที่ 4.26 แสดงถึงค่าแรงที่เกิดขึ้นในชั้นแรงเฉือนซึ่งอยู่ในกรณีของช่วงอีลาสติก



รูปที่ 4.24 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงเนื่องจากฐานรากเทียบกับระยะทางตลอดความยาวคานที่การกระจัดในแนวดิ่งกึ่งกลางคานมีค่าเท่ากับ $0.009m$ ($\delta = 0.009m$)



รูปที่ 4.25 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันเนื่องจากฐานรากที่กระทำต่อคานเทียบกับระยะทางตลอดความยาวคานที่การกระจัดในแนวดิ่งกึ่งกลางคานมีค่าเท่ากับ $0.009m$ ($\delta = 0.009m$)



รูปที่ 4.26 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่เกิดขึ้นในชั้นแรงเฉือนเทียบกับระยะทางตลอดความยาวคานที่การกระจัดในแนวดิ่งกึ่งกลางคานมีค่าเท่ากับ $0.009m$ ($\delta = 0.009m$)

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย

5.1 สรุปผลที่ได้จากงานวิจัย

งานวิจัยนี้นำเสนอแบบจำลองโครงสร้างที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้น ซึ่งได้แก่ ปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น คานบนฐานรากไร้เชิงเส้น และคานบนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่กระทำ โดยวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัด (Displacement Formulations) ผลตอบสนองของปัญหาได้จากการใช้เอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างซึ่งได้รับจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี โดยการแก้สมการสมดุลเชิงอนุพันธ์ของแต่ละปัญหา เมื่อปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนและคานที่วางอยู่บนฐานรากเป็นสมการเชิงอนุพันธ์กำลัง 2 และ 4 ตามลำดับ

เนื่องจากฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของปัญหาที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ จะต้องใช้ค่าตัวแปรคุณสมบัติวัสดุของชิ้นส่วนแนวแกนหรือคานและฐานราก (Parameters of Bar (or Beam) and Foundation) ในการประมาณค่า ซึ่งอาจมีค่าไม่คงที่ในแต่ละตำแหน่งของความยาวชิ้นส่วนแนวแกนหรือคาน ส่งผลให้เทคนิคในการประมาณค่าตัวแปรเหล่านี้จึงถูกเสนอและใช้งานในงานวิจัยนี้ เพื่อทดสอบประสิทธิภาพและความแม่นยำของผลตอบสนองที่ได้จากการวิเคราะห์แบบจำลอง ในงานวิจัยนี้ได้มีการแสดงตัวอย่างการหาผลตอบสนองของปัญหา ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

1. การทดสอบการลู่เข้าของผลตอบสนองที่มีความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้นของปัญหา ซึ่งได้จากการวิเคราะห์แบบจำลองทั้งในกรณีของปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนและคานบนฐานรากไร้เชิงเส้น พบว่าเอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีมีประสิทธิภาพและความแม่นยำมากกว่าเอเลเมนต์ที่ใช้การประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการเส้นตรงและสมการพหุนามกำลังสาม ตามลำดับ โดยพิจารณาจากจำนวนเอเลเมนต์ที่ใช้

ในการวิเคราะห์เพื่อหาค่าที่ลู่เข้าสู่ค่าผลตอบสนองแม่นยำ นอกจากนี้ในกรณีการวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัด มักจะพบการกระโดดของข้อมูลในกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและแรงในแนวแกนของบาร์ (กรณีปัญหาชิ้นส่วนแนวแกนบนฐานรากไร้เชิงเส้น) เทียบกับระยะทางตลอดความยาวชิ้นส่วนแนวแกน หรือกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและโมเมนต์ดัดของคาน (กรณีปัญหาคานบนฐานรากไร้เชิงเส้น) เทียบกับระยะทางตลอดความยาวคาน ซึ่งพบในกรณีที่ใช้เอเลเมนต์ที่ประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการเส้นตรงและสมการพหุนามกำลังสาม ตามลำดับ แต่ข้อเสียนี้จะถูกขจัดไปในกรณีที่ใช้เอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี เนื่องมาจากคุณสมบัติเฉพาะของฟังก์ชั่นไฮเพอร์โบลิกและตรีโกณมิติในฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี

2. การเปรียบเทียบผลตอบสนองระหว่างกรณีการใช้แบบจำลองคานบนฐานราก Winkler กับแบบจำลองคานบนฐานรากประเภท 2 ตัวแปร จากผลการทดลองในกรณีตัวอย่างคานสั้นที่วางอยู่บนฐานรากไร้เชิงเส้นประเภท 2 ตัวแปร พบว่าค่าการกระจัดในแนวดิ่งและมุมบิดที่เกิดขึ้นในคานมีค่าน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองของ Winkler โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณที่ปลายของคาน ซึ่งทั้งหมดเป็นผลเนื่องมาจากชั้นแรงเฉือนในแบบจำลองคานบนฐานรากประเภท 2 ตัวแปร

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากงานวิจัยที่นำเสนอในตัวอย่างการทดลองในตัวอย่างที่ 2 และ 3 ค่าสติฟเนสของฐานราก Pasternak (ชั้นแรงเฉือน) หรือพารามิเตอร์ตัวที่ 2 ในกรณีแบบจำลองคานที่วางอยู่บนฐานรากประเภท 2 ตัวแปร จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการเปลี่ยนแปลงรูปซึ่งอยู่ในช่วงอีลาสติก ส่งผลทำให้กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการกระจัดที่กึ่งกลางของคานมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ เมื่อเทียบกับแบบจำลองของ Winkler เนื่องจากจากค่าพารามิเตอร์ที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา อ้างอิงจากบทความวิจัยที่นำเสนอพฤติกรรมของฐานรากเป็น Elastoplastic ทำให้ผลการทดลองที่ได้เป็นไปตามที่นำเสนอในตัวอย่างที่ 2 และ 3 ตามลำดับ

ในความเป็นจริงค่าสติฟเนสของปัญหาไม่ว่าจะเป็นของชิ้นส่วนแนวแกน คาน และฐานราก อาจมีพฤติกรรมเป็นเป็นฟังก์ชันอื่นๆ นอกเหนือจากสมการไบลิเนียร์ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ จึงจำเป็นต้องมีการศึกษาและพัฒนาต่อๆไปในอนาคต

นอกจากนี้งานวิจัยนี้สามารถนำไปใช้ประยุกต์ร่วมกับโปรแกรมออกแบบชิ้นส่วนโครงสร้างอาคารที่วางอยู่บนดินหรือฐานรากได้ เช่น ปัญหาท่อส่งน้ำมัน คานคอดิน เป็นต้น และเนื่องจากการพัฒนาระบบการทำงานของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน มีประสิทธิภาพมากกว่าในอดีตหลายเท่าตัว ส่งผลทำให้การประมวลผลการวิเคราะห์ของปัญหา ทั้งในกรณีการใช้เอเลเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีกับเอเลเมนต์ที่ประมาณฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยสมการพหุนาม เวลาที่ใช้ในการประมวลผลหาค่าผลตอบสนองจึงไม่ต่างกันมากนัก

บรรณานุกรม

Alemdar, B. N. and Gülkan, P. (1997). "Beams on generalized foundations: supplementary element matrices." *Engineering Structures*, 19(11), 910-920.

Avramidis, I. E. and Morfidis, K. (2006). "Bending of beams on three-parameter elastic foundation." *International Journal of Solids and Structures*, 43(1), 357-375.

Ayoub, A. (2001). "A two-field mixed variational principle for partially connected composite beams." *Finite Elements in Analysis and Design*, 37(1), 929-959.

Ayoub, A. (2003). "Mixed formulation of nonlinear beam on foundation elements." *Computers and Structures*, 81(1), 411-421.

Ayoub, A. and Filippou, F.C. (2000). "Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam elements." *Journal of Structural Engineering*, 126(3), 371-381.

Beaufait, F. W. and Hoadley, P. W. (1980). "Analysis of elastic beams on non-linear foundations." *Computers and Structures*, 12(1), 669-676.

Celep, Z. and Demir, F. (2005). "Circular rigid beam on a tensionless two-parameter elastic foundation." *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 85(6), 431-439.

Celep, Z. and Demir, F. (2007). "Symmetrically loaded beam on a two-parameter tensionless foundation." *Structural Engineering and Mechanics*, 27(5), 555-574.

Chiwanga, M. and Valsangker, A. J. (1988). "Generalized beam element on two-parameter elastic foundation." *Journal of Structural Engineering*, 114(6), 1414-1427.

Chore, H. S., Ingle, R. K., and Sawant, V. A. (2010). "Building frame-pile foundation-soil interaction analysis: A parametric study." *Interaction and Multiscale Mechanics*, 3(1), 55-79.

Dutta, S. C. and Roy, R. (2002). "A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system." *Computers and Structures*, 80(20-21), 1579-1594.

Eisenberger, M. and Yankelevsky, D. Z. (1985). “Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation.” *Computers and Structures*, 21(6), 1355-1359.

Filonenko and Borodich, M. M. (1940). “Some approximate theories of elastic foundation.” *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo*, 46(1), Moscow, Universiteta Mekhanica, 3-18. [in Russian].

Gendy, A. S. and Saleeb, A. F. (1999). “Effective modeling of beams with shear deformations on elastic foundation.” *Structural Engineering and Mechanics*, 8(6), 607-622.

Gorbunov and Posadov, G. I. (1949). Beams and plates on elastic base [in Russian], Moscow, USSR: Stroizdat.

Gülkan, P. and Alemdar, B. N. (1999). “An exact finite element for a beam on a two-parameter elastic foundation: a revisit.” *Structural Engineering and Mechanics*, 7(3), 259-276.

Hetenyi, M. (1946). Beams on elastic foundation. Scientific Series, vol. XVI. Ann Arbor: The University of Michigan Press, University of Michigan Studies.

Hetenyi, M. (1950). “A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity.” *Journal of Applied Physics*, 21(1), 55-58.

Kaliszky, S. and Logo, J. (1994). Analysis of nonlinear beams on nonlinear foundation by the use of mixed extremum principles. Theocaris PS, Kounadis AN, editors, National Technical University of Athens, 65-80.

Kerr, A. D. (1964). “Elastic and viscoelastic foundation models.” *Journal of Applied Mechanics*, 31(4), 491–498.

Kerr, A. D. (1965). “A study of a new foundation model.” *Acta Mechanica*, 1(2), 135-147.

Kim, S. M. and Chung, W. (2009). “Vibration of simplified prestressed pavement model under moving two-axle harmonic loads.” *KSCE Journal of Civil Engineering*, 13(6), 409-421.

Kim, S. M. and Yang, S. (2010). “Moving two-axle high frequency harmonic loads on axially loaded pavement systems.” *KSCE Journal of Civil Engineering*, 14(4), 513-526.

Lee, B. K., Kim, S. K., Lee, T. E., and Ahn, D. S. (2003). “Free vibrations of tapered beams laterally restrained by elastic springs.” *KSCE Journal of Civil Engineering*, 7(2), 193-199.

Limkatanyu, S. (2008). Matrix structural analysis, Hadyai, Songkla, Thailand, 90110: Faculty of Engineering.

Limkatanyu, S., and Spacone, E. (2006). “Frame element with lateral deformable supports: formulations and numerical validation.” *Computer and Structures*, 84(13-14), 942-954.

Limkatanyu, S., Kuntiyawichai, K., and Spacone, E. (2009). “Response of reinforced concrete piles including soil-pile interaction effects.” *Engineering Structures*, 31(9), 1976-1986.

Limkatanyu, S., Kwon, M., Prachasaree, W., and Chaiviriyawong, P. (2012 a). “Contact-interface fiber-section element: shallow foundation modeling.” *Geomechanics and Engineering*, 4(3), 173-190.

Limkatanyu, S., Kuntiyawichai, K., Spacone, E., and Kwon, M. (2012 b). “Natural stiffness matrix for beams on Winkler foundation: exact force-based derivation.” *Structural Engineering and Mechanics*, 42(1), 39-53.

Limkatanyu, S., Kuntiyawichai, K., Spacone, E., and Kwon, M. (2013 a). “Nonlinear Winkler-based beam element with Improved displacement shape function.” *KSCE Journal of Civil Engineering*, 17(1), 192-201.

Limkatanyu, S., Damrongwiriyanupap, N., Kwon, M., and Ponbunyanon, P. (2013 b). “Force-based derivation of exact stiffness matrix for beams on Winkler-Pasternak Foundation.” Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik doi: 10.1002/zamm.201300030.

Morfidis, K. (2007). “Exact matrices for beams on three-parameter elastic foundation.” *Computers and Structures*, 85(1), 1243-1256.

Mullapudi, R. and Ayoub, A. (2010 a). “Inelastic analysis of semi-infinite foundation elements.” *Mechanics Research Communications*, 37(1), 72-77.

Mullapudi, R. and Ayoub, A. (2010 b). “Nonlinear finite element modeling of beams on two-parameter foundations.” *Computers and Geotechnics*, 37(3), 334-342.

Pasternak, P. L. (1954). On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants (in Russian). Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, Moscow, USSR.

Patil, V. A., Sawant, V. A. and Deb, K. (2010). “Use of finite and infinite elements in static analysis of pavement.” *Interaction and Multiscale Mechanics*, 3(1), 95-110.

Raychowdhury, P. (2011). “Seismic response of low-rise steel moment-resisting frame (SMRF) buildings incorporating nonlinear soil-structure interaction (SSI).” *Engineering Structures*, 33(3), 958-967.

Razaqpur, A. G. and Shah, K. R. (1991). “Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundations.” *International Journal for Solid and Structures*, 27(4), 435-454.

Reissner, E. (1967). “Note on the formulation of the problem of the plate on an elastic foundation.” *Acta Mechanica*, 4(1), 88-91.

Sae-Long, W., Limkatanyu, S., Prachasaree, W., Damrongwiriyanupap, N. and Kuntiyawichai, K. (2013). “Natural stiffness matrix for bar with lateral interfaces: exact force-based derivation.” *Proceedings of the Eighteenth National Convention on Civil Engineering*, Chiangmai, Thailand, STR110-116.

Sapountzakis, E. J. and Kampitsis, A. E. (2010). “Nonlinear dynamic analysis of Timoshenko beam-columns partially supported on tensionless Winkler foundation.” *Computers and Structures*, 88(21-22), 1206-1219.

Sapountzakis, E. J. and Kampitsis, A. E. (2011 a). “Nonlinear analysis of shear deformable beam-columns partially supported on tensionless three-parameter foundation.” *Archive of Applied Mechanics*, 81(12), 1833-1851.

Sapountzakis, E. J. and Kampitsis, A. E. (2011 b). “Nonlinear response of shear deformable beams on tensionless nonlinear viscoelastic foundation under moving loads.” *Journal of Sound and Vibration*, 330(22), 5410-5426.

Sapountzakis, E. J. and Kampitsis, A. E. (2013). "Inelastic analysis of beams on two-parameter tensionless elastoplastic foundation." *Engineering Structures*, 48(1), 389-401.

Schiel, F. (1942). "Der Schwimmende Balken." *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 22(5), 255–262.

Selvadurai, A. P. S. (1979). Elastic analysis of soil-foundation interaction, Elsevier Publishing Company, Inc., New York.

Sharma, S. and DasGupta, S. (1975). "The bending problem of axialiy constrained beams on elastic foundations." *International Journal of Solids and Structures*, 11(1), 853-859.

Silveira, R. A. M., Pereira, W. L. A. and Goncalves, P. B. (2008). "Nonlinear analysis of structural elements under unilateral contact constraints by Ritz type approach." *International Journal of Solids and Structures*, 45(9), 2629-2650.

Song, S. T., Chai, Y. H. and Hale, T. H. (2004). "Limit State Analysis of Fixed-Head Concrete Piles Under Lateral Loads." *13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, B.C., Canada, August 1-6 2004, Paper No. 971

Taciroglu, E., Rha, C. S., and Wallace, J. W. (2006). "A robust macroelement model for soil-pile interaction under cyclic loads." *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 132(10), 1304-1314.

Taylor, R. L. (2000). FEAP: A Finite Element Analysis Program, User manual: version 7.3, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley.

Techavorasinskun, S., Chub-Uppakarn, T (2010). "Influence of segmental joints on tunnel lining." *Tunneling and Underground Space Technology*, 25(4), 490-494.

Terzaghi, K. V. (1955). "Evaluation of coefficients of subgrade reaction." *Geotechnique*, **5**(4), 45-50.

Ting, B. Y. and Mockry, E. F. (1984). "Beam on elastic foundation finite elements." *Journal of Structural Engineering*, 110(10), 2324-2339.

Tonti, E. (1977). "The reason for analogies between physical theories." *Applied Mathematical Modeling*, 1(1), 37-50.

Vallabhan, C. V. G. and Das, Y. C. (1988). “Parametric study of beams on elastic foundations.” *Journal of Engineering Mechanics*, 114(12), 2072-2082.

Vallabhan, C. V. G. and Das, Y. C. (1991). “Modified Vlasov model for beams on elastic foundations.” *Journal of Geotechnical Engineering*, 117(6), 956-966.

Vlasov, V. Z. and Leontiev, N. N. (1966). Beam, plates and shells on an elastic foundation. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem [Translated from Russian].

Winkler, E. (1867). Die lehre von der elastizität und Festigkeit, Prag.

Wolfram, S. (1992). Mathematica Reference Guide, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City.

Yankelevsky, D. Z., Eisenberger, M. and Adin, M. A. (1989). “Analysis of beams on nonlinear Winkler foundations.” *Computers and Structures*, 31(2), 287-292.

Zhang, Y. (2008). “Tensionless contact of a finite beam resting on Reissner foundation.” *International Journal of Mechanical Sciences*, 50(6), 1035-1041.

Zhang, L., Zhao, M., Zou, X. and Zhao, H. (2009). “Deformation analysis of geocell reinforcement using Winkler model.” *Computers and Geotechnics*, 36(6), 977-983.

Zhaohua, F. and Cook, R. D. (1983). “Beams elements on two-parameter elastic foundations.” *Journal of Engineering Mechanics*, 109(6), 1390-1402.

การเผยแพร่ผลงานวิทยานิพนธ์

Natural Stiffness Matrix for Bar with Lateral Interfaces: Exact Force-Based Derivation

Worathep Sae-Long[1] , Suchart Limkatanyu[2] , Woraphot Prachasaree[3] , Nattapong Damrongwiriyanupap[4], and Kittisak Kuntiyawichai[5]
[1]Master Student, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Prince of Songkla University, Thailand
[2]Associate Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Prince of Songkla University, Thailand
[3]Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Prince of Songkla University, Thailand
[4]Lecture, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Phayao, Thailand
[5]Associate Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Ubonratchatani, Thailand
E-mail: [1]NightmareOfPing@hotmail.com, [2]suchart.l@psu.ac.th, [3]pworaphot@eng.psu.ac.th

Abstract

An alternative way to derive the exact element stiffness matrix for a bar with lateral interfaces is presented in this paper. The element formulation starts from the derivation of the exact element flexibility matrix. The virtual force principle is used to obtain the governing differential compatibility of the problem. The exact force interpolation functions are derived based on the analytical solution to the governing differential compatibility of the problem. The matrix virtual force equation is employed to obtain the exact element flexibility matrix using the exact force interpolation functions. The so-called "natural" element stiffness matrix is obtained by inverting the exact element flexibility matrix. A numerical example is used to verify the accuracy and the efficiency of the natural bar element with lateral interfaces.

Keywords: Bar element; force-based formulation; virtual force principle; soil-pile interaction

1. Introduction

Pile-foundation problem is one of several substructure problems in engineering construction. The concept for analysis of piles embedded in elastic foundation is similar to a beam on elastic foundation [1-7]. For analysis, soil interaction or modulus of subgrade reaction [8] is replaced with linear springs modal along the length of bar [9].

In recent decades, several works on the behavior of piles under pure axial load have been reported. (for example [10-12])

The objective of this paper is to alternatively derive the exact bar on Winkler foundation flexibility matrix base on the complementary virtual work or the principle virtual force. The governing differential compatibility equation is solved to obtain the exact axial interpolation functions for analysis the problem of bar on elastic foundation.

This paper has one numerical example, is used to verify the accuracy and efficiency of the problem. It calculates by the computer software Mathematica [13].

2. Formulation

2.1 Governing equation of a bar embedded in Winkler foundation

The governing differential equilibrium equation of a bar embedded in Winkler foundation is derived based on Fig.1. And Fig.2 shows an infinitesimal segment dx. The axial equilibrium equation of the infinitesimal segment can be written as:

$$\frac{dN(x)}{dx} - P_s(x) = 0 \tag{1}$$

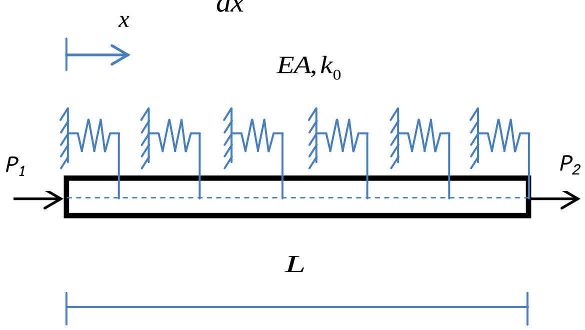


Fig. 1 A bar embedded in Winkler foundation

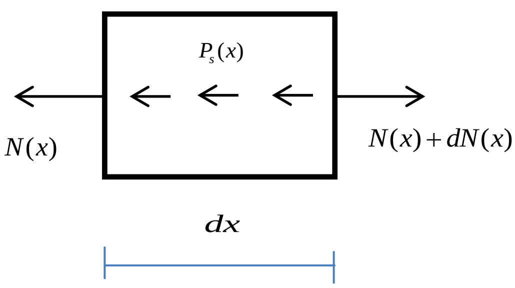


Fig. 2 The segment of bar element

Where $N(x)$ is the bar axial force and $P_s(x)$ is the foundation force.

2.2 Force-deformation relation

The constitutive relations of the bar section and lateral interface are defined as:

$$N(x) = EA\frac{du(x)}{dx} \quad \text{and} \quad P_s(x) = k_0 u_s(x) \tag{2}$$

Where $u(x)$ is the axial displacement of the bar; $u_s(x)$ is the foundation deformation; EA is the bar axial rigidity; and k_0 is the lateral-interface stiffness.

2.3 Differential compatibility equation: the virtual force principle

The virtual force equation is written in the general from as:

$$\delta W^* = \delta W^*_{int} + \delta W^*_{ext} = 0 \tag{3}$$

Where δW^* is the total complementary virtual work of the system; δW^*_{int} is the internal complementary virtual work of the system; δW^*_{ext} is the external complementary virtual work of the system.

$$\delta W^*_{int} = \int_L \delta N(x)u(x)dx + \int_L \delta P_s(x)u_s(x)dx \tag{4}$$

$$\delta W^*_{ext} = -\delta \mathbf{P}^\mathbf{T}\mathbf{U} \tag{5}$$

Where the vector $\mathbf{P} = \{P_1 \ P_2\}^T$ consists of axial forces acting at bar ends while the vector $\mathbf{U} = \{U_1 \ U_2\}^T$ contains conjugate-work axial nodal displacements. Thus, Eq.(3) can be rewritten as:

$$\delta W^* = \int_L \delta N(x)u(x)dx + \int_L \delta P_s(x)u_s(x)dx - \delta \mathbf{P}^\mathbf{T}\mathbf{U} \tag{6}$$

Based the constitutive relations of Eq.(2) and Eq.(6) becomes:

$$\delta W^* = \int_L \delta N(x)\left(\frac{1}{EA}\right)N(x)dx + \int_L \delta P_s(x)\left(\frac{1}{k_0}\right)P_s(x)dx - \delta \mathbf{P}^\mathbf{T}\mathbf{U} \tag{7}$$

Enforcing the axial equilibrium of Eq.(1) and Eq.(7) can be expressed as:

$$\delta W^* = \int_L \delta N(x)\left(\frac{1}{EA}\right)N(x)dx + \int_L \frac{d\delta N(x)}{dx}\left(\frac{1}{k_0}\right)\frac{dN(x)}{dx}dx - \delta \mathbf{P}^\mathbf{T}\mathbf{U} \tag{8}$$

Applying integration by parts, Eq. (8) becomes :

$$\delta W^* = \int_L \delta N(x)\left[\left(\frac{1}{EA}\right)N(x) - \left(\frac{1}{k_0}\right)\frac{d^2N(x)}{dx^2}\right]dx + \left[\delta N(x)\left(\frac{1}{k_0}\right)\frac{dN(x)}{dx}\right]_0^L - \delta \mathbf{P}^\mathbf{T}\mathbf{U} = 0 \tag{9}$$

Enforcing the Cartesian sign convention, Eq.(9) can be written as :

$$\delta W^* = \int_L \delta N(x)\left[\left(\frac{1}{EA}\right)N(x) - \left(\frac{1}{k_0}\right)\frac{d^2N(x)}{dx^2}\right]dx - \delta P_1\left[U_1 - \left(\frac{1}{k_0}\right)\frac{dN(x)}{dx}\right]_{x=0} - \delta P_2\left[U_2 - \left(\frac{1}{k_0}\right)\frac{dN(x)}{dx}\right]_{x=L} = 0 \tag{10}$$

Since $\delta N(x)$ is arbitrary, the governing differential compatibility equation is:

$$\frac{d^2N(x)}{dx^2} - \left(\frac{k_0}{EA}\right)N(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \in (0, L) \tag{11}$$

The end-boundary compatibility conditions are obtained due to the arbitrariness of δP :

$$U_1 = \left(\frac{1}{k_0}\right)\left[\frac{dN(x)}{dx}\right]_{x=0} ; U_2 = \left(\frac{1}{k_0}\right)\left[\frac{dN(x)}{dx}\right]_{x=L} \tag{12}$$

The exact axial interpolation functions are obtained by solving the governing differential compatibility equations of Eq. (11). The homogeneous solution of Eq. (11) is:

$$N(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} \tag{13}$$

Where $\lambda = \sqrt{\frac{k_0}{EA}}$; c_1 and c_2 are the constants and can be determined by imposing force boundary conditions. The boundary conditions can be written as :

$$N(0) = -P_1 \ ; \ N(L) = P_2 \tag{14}$$

Imposing force boundary conditions, the axial interpolation functions can be written in teams of $\mathbf{P}$ as :

$$N(x) = \mathbf{N_{BB}(x)P} \tag{15}$$

Where $\mathbf{N_{BB}(x)} = \left[N_{BB1}(x) \ N_{BB2}(x)\right]$ is an array containing the axial force interpolation functions.

Based on Eq. (1), the foundation force $P_s(x)$ can be expressed in terms of $\mathbf{P}$ as:

$$P_s(x) = \mathbf{N_{SB}(x)P} \tag{16}$$

here $\mathbf{N_{SB}(x)} = \left[N_{SB1}(x) \ N_{SB2}(x)\right]$ is an array containing the foundation-force interpolation functions.

Substituting Eq. (15) and Eq. (16) into Eq. (7), leading to:

$$\delta W^* = \int_L \delta \mathbf{P}^{\mathbf{T}} \mathbf{N}_{\mathbf{BB}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{EA} \right) \mathbf{N}_{\mathbf{BB}}(\mathbf{x}) \mathbf{P} dx$$

$$+ \int_L \delta \mathbf{P}^{\mathbf{T}} \mathbf{N}_{\mathbf{SB}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{k_0} \right) \mathbf{N}_{\mathbf{SB}}(\mathbf{x}) \mathbf{P} dx - \delta \mathbf{P}^{\mathbf{T}} \mathbf{U} = 0 \quad (17)$$

Due to the arbitrariness $\delta \mathbf{P}$, obtain the element flexibility equation as:

$$\mathbf{FP} = \mathbf{U} \quad (18)$$

Where $\mathbf{F}$ is the element flexibility matrix and can be expressed as:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathbf{BB}} + \mathbf{F}_{\mathbf{SS}} \quad (19)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{BB}} = \int_L \mathbf{N}_{\mathbf{BB}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{EA} \right) \mathbf{N}_{\mathbf{BB}}(\mathbf{x}) dx \quad \text{(20a)}$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{SS}} = \int_L \mathbf{N}_{\mathbf{SB}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{k_0} \right) \mathbf{N}_{\mathbf{SB}}(\mathbf{x}) dx \quad \text{(20b)}$$

Where $\mathbf{F}_{\mathbf{BB}}$ and $\mathbf{F}_{\mathbf{SS}}$ are bar and foundation contributions to the element flexibility matrix, respectively.

3. Numerical example

One numerical example is used to verify the accuracy and the efficiency of the natural bar element with lateral interfaces.

3.1 Example I

An elastic bar embedded in Winkler foundation and subjected to the load P is shown in Fig. 3. Given data are: bar length $L = 55\ m$, diameter of bar $D = 1\ m$, elastic modulus $E = 30{,}000\ MPa$, foundation stiffness $k_0 = 100\ kPa$ and load $P = 2{,}400\ kN$ [14]

The axial displacement and axial force diagrams obtained with the proposed model are shown Fig. 4 and Fig. 5. Stress and stain diagrams are shown Fig. 6 and Fig. 7.

In all diagrams, the responses obtained with 1 bar element with linear interpolation function and 1 bar element quadratic interpolation function are compared with the proposed model. The results of one natural bar element (Exact Solution) are accurate and effective when compare a bar element with linear and quadratic interpolation functions.

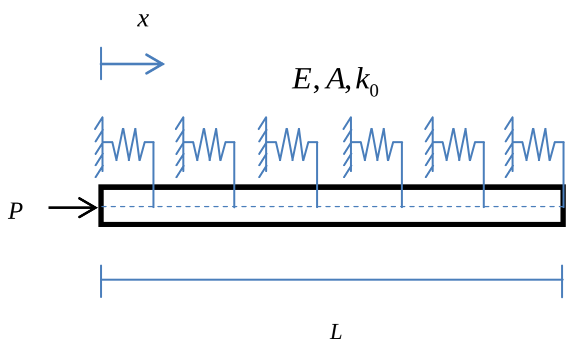


Fig. 3 Example I: a bar embedded in Winkler foundation and subjected to load P

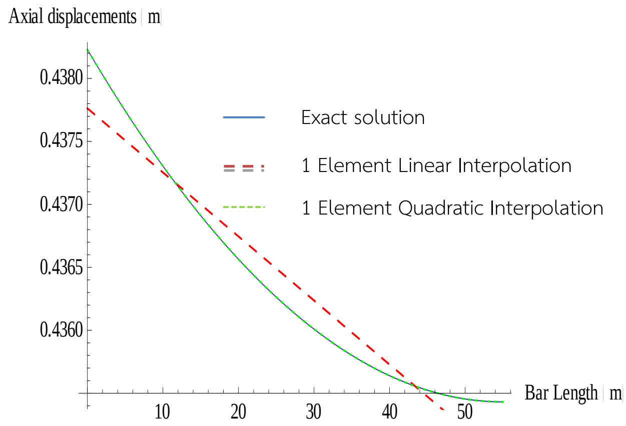


Fig. 4 Diagram for axial displacement for example I

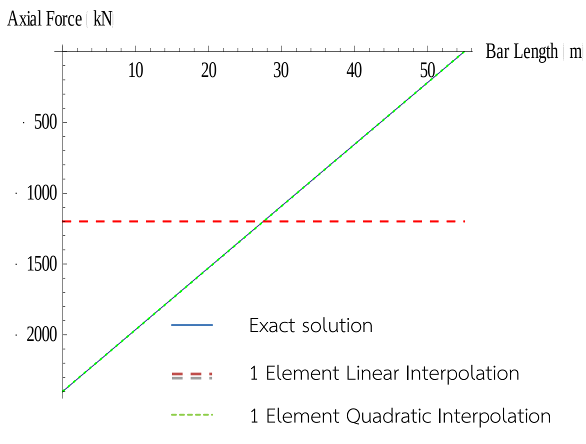


Fig. 5 Diagram for axial force for example I

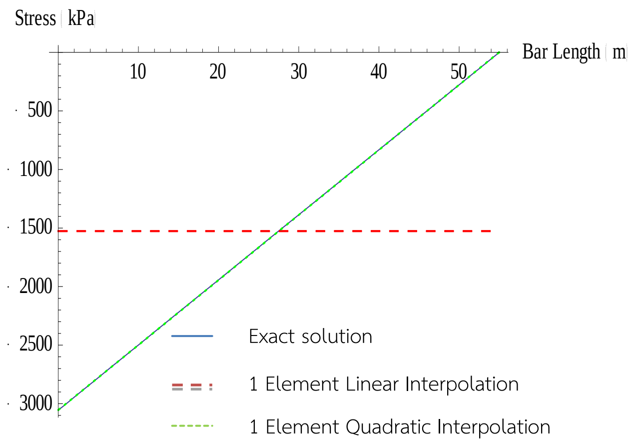


Fig. 6 Diagram for stress for example I

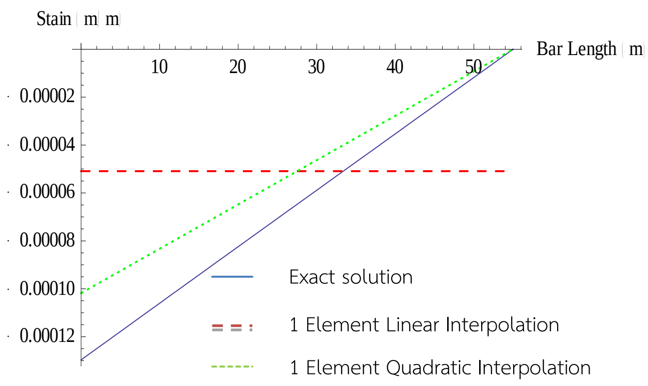


Fig. 7 Diagram for stain for example I

4. Conclusion

The complementary virtual work or the virtual force principle is an alternative method to obtain the exact flexibility matrix. The so-called "natural" element stiffness matrix is obtained by inverting the exact element flexibility matrix. The problem of a bar embedded in Winkler foundation is considered in this paper. The axial-force and interface force interpolation functions are obtained by solving the governing differential compatibility equations of the system. The respones, are shown in a numerical example compare with linear and quadratic interpolation functions**.** The results of one natural bar element (Exact Solution) are accurate and effective when compare a bar element with linear and quadratic interpolation functions**.**

References

[1] Hetényi, M. (1946), "Beams on Elastic Foundation: Theory with Applications in the Fields of Civil and Mechanical Engineering" University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, ISBN: 0472084453.

[2] Kerr, A. D. (1964), "Elastic and Viscoelastic Foundation Models", *J. Appl. Mech.*, **31**(4): 491–498.

[3] Nogami, T., and O'Neill, M. W. (1985), "Beam on generalized two-parameter foundation.", *J. Engrg. Mech. ASCE.*, **111**(5), 664–679.

[4] Scott, R. F. (1981), *Foundation analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.

[5] Selvadurai A. P. S (1979), *Elastic Analysis of Soil Foundation Interaction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Inc., NewYork

[6] Yang, TY. (1972), "A finite element analysis of plates on a two parameter foundationmodel", *Compututer Structure.*, **2**(4), 593–614.

[7] Zhaohua, F. and D. R. Cook (1983), "Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundation", *J.Eng. Mech.*, **109**(3), 1390-1401.

[8] Terzaghi K. (1955), "Evaluation of coefficient of subgrade reaction", *Geotechnique*, **5**(4), 297-326.

[9] Winkler, E. (1967), *Die lehre von der elastizität und Festigkeit*, Prag.

[10] Coyle, H. M., and Reese, L. C. (1966), "Load transfer for axially loaded piles in clay", *J. Soil Mech. and Found.* Div., **92**(2), 1–26.

[11] Kraft Jr., L. M., Ray, R. P., and Kagawa, T. (1981), "Theoretical t-z curves", *J. Geotech. Engrg.* Div., **107**(11), 1543–1562.

[12] Zhu, H., and Chang, M. F. (2002), "Load transfer curves along bored piles considering modulus degradation", *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, **128**(9), 764–774.

[13] Wolfram, S. (1992), *Mathematica Reference Guide*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City.

[14] Jingpei, L., Yongwei, T., and Fayun, L. (2011), "A Modified Analysis Method for the Nonlinear Load Transfer Behaviour of Axially Loaded Piles", *KSCE Journal of Civil Engineering.*, **16**(3), 325-333.

Appendix A : Force interpolation function, Foundation-Force interpolation function

The Force interpolation function may be written as :

$$N_{BB1} = \frac{1}{2}(-e^{\sqrt{\frac{k_0}{EA}}(2L-x)} + e^{\sqrt{\frac{k_0}{EA}}x})(-1 + Coth[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L])$$

$$N_{BB2} = Csch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]Sinh[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}x]$$

The Foundation-Force interpolation function may be written as :

$$N_{SB1} = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{\frac{k_0}{EA}}(2L-x)} + e^{\sqrt{\frac{k_0}{EA}}x})\sqrt{\frac{k_0}{EA}}(-1 + Coth[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L])$$

$$N_{SB2} = \sqrt{\frac{k_0}{EA}}Cosh[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}x]Csch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]$$

Appendix B : Beam on Winkler foundation flexibility matrix

The beam contribution to the element flexibility matrix may be written as :

$$\mathbf{F_{BB}} = \begin{pmatrix} F_{11}^{BB} & F_{12}^{BB} \\ F_{21}^{BB} & F_{22}^{BB} \end{pmatrix}$$

$$F_{11}^{BB} = \frac{Csch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]^2(-2\sqrt{k_0}L + \sqrt{EA}Sinh[\frac{2\sqrt{k_0}L}{\sqrt{EA}}])}{4EA\sqrt{k_0}}$$

$$F_{12}^{BB} = \frac{(EA\sqrt{\frac{k_0}{EA}} - k_0 L Coth[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L])Csch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]}{2EAk_0}$$

$$F_{21}^{BB} = F_{12}^{BB}$$

$$F_{22}^{BB} = \frac{Csch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]^2(-2L + \frac{Sinh[2\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]}{\sqrt{\frac{k_0}{EA}}})}{4EA}$$

The foundation contribution to the element flexibility matrix may be written as :

$$\mathbf{F_{SS}} = \begin{pmatrix} F_{11}^{SS} & F_{12}^{SS} \\ F_{21}^{SS} & F_{22}^{SS} \end{pmatrix}$$

$$F_{11}^{SS} = \frac{Csch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]^2(2k_0L + \sqrt{EA}\sqrt{k_0}Sinh[\frac{2\sqrt{k_0}L}{\sqrt{EA}}])}{4EAk_0}$$

$$F_{12}^{SS} = \frac{(EA\sqrt{\frac{k_0}{EA}} + k_0LCoth[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L])Csch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]}{2EAk_0}$$

$$F_{21}^{SS} = F_{12}^{SS}$$

$$F_{22}^{SS} = \frac{EA\sqrt{\frac{k_0}{EA}}Coth[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L] + k_0LCsch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]^2}{2EAk_0}$$

The element stiffness matrix : $\mathbf{F} = \mathbf{F_{BB}} + \mathbf{F_{SS}}$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$$

$$F_{11} = \frac{Csch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]^2 Sinh[\frac{2\sqrt{k_0}L}{\sqrt{EA}}]}{2\sqrt{EA}\sqrt{k_0}}$$

$$F_{12} = \frac{Csch[\frac{\sqrt{k_0}L}{\sqrt{EA}}]}{\sqrt{EA}\sqrt{k_0}}$$

$$F_{21} = F_{12}$$

$$F_{22} = \frac{Coth[\frac{\sqrt{k_0}L}{\sqrt{EA}}]}{\sqrt{EA}\sqrt{k_0}}$$

Appendix C : Beam on Winkler foundation stiffness matrix

The bar contribution to the element stiffness matrix may be written as :

$$\mathbf{K_{BB}} = \begin{pmatrix} K_{11}^{BB} & K_{12}^{BB} \\ K_{21}^{BB} & K_{22}^{BB} \end{pmatrix}$$

$$K_{11}^{BB} = \frac{1}{2}(EA\sqrt{\frac{k_0}{EA}}Coth[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L] + k_0 LCsch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]^2)$$

$$K_{12}^{BB} = -\frac{1}{2}(EA\sqrt{\frac{k_0}{EA}} + k_0 LCoth[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L])Csch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]$$

$$K_{21}^{BB} = K_{12}^{BB}$$

$$K_{22}^{BB} = \frac{1}{2}(EA\sqrt{\frac{k_0}{EA}}Coth[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L] + k_0 LCsch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]^2)$$

The foundation contribution to the element stiffness matrix may be written as :

$$\mathbf{K_{SS}} = \begin{pmatrix} K_{11}^{SS} & K_{12}^{SS} \\ K_{21}^{SS} & K_{22}^{SS} \end{pmatrix}$$

$$K_{11}^{SS} = \frac{1}{2}(\sqrt{EA}\sqrt{k_0}Coth[\frac{\sqrt{k_0}L}{\sqrt{EA}}] - k_0 LCsch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]^2)$$

$$K_{12}^{SS} = \frac{1}{2}(-EA\sqrt{\frac{k_0}{EA}} + k_0 LCoth[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L])Csch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]$$

$$K_{21}^{SS} = K_{12}^{SS}$$

$$K_{22}^{SS} = \frac{1}{2}(\sqrt{EA}\sqrt{k_0}Coth[\frac{\sqrt{k_0}L}{\sqrt{EA}}] - k_0 LCsch[\sqrt{\frac{k_0}{EA}}L]^2)$$

The element stiffness matrix : $\mathbf{K} = \mathbf{K_{BB}} + \mathbf{K_{SS}}$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

$$K_{11} = \sqrt{EA}\sqrt{k_0}Coth[\frac{\sqrt{k_0}L}{\sqrt{EA}}]$$

$$K_{12} = -\sqrt{EA}\sqrt{k_0}Csch[\frac{\sqrt{k_0}L}{\sqrt{EA}}]$$

$$K_{21} = K_{12}$$

$$K_{22} = \sqrt{EA}\sqrt{k_0}Coth[\frac{\sqrt{k_0}L}{\sqrt{EA}}]$$

FINITE BEAM ELEMENT ON NONLINEAR WINKLER-PASTERNAK FOUNDATION MODEL

Worathep Sae-Long[1]

([1]Master Student, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Prince of Songkla University, Thailand, Tel. 083-659-1987, E-mail: NightmareOfPing@hotmail.com)

Abstract

This paper presents an inelastic beam element resting on Winkler-Pasternak foundation. It is based on Euler-Bernouli beam theory and an assumption of plane strain for soil or foundation. The element is derived from a displacement-based formulation. The nonlinear responses of the problem are obtained from the analysis with the improved displacement shape functions elements. The improved displacement shape functions are derived from homogeneous solution of the governing differential equilibrium equation. It can be divided to three cases for the homogeneous solution. The foundation parameters are first computed with average technique for the improved displacement shape functions approximation. A numerical example is used to verify the accuracy and the efficiency of the beam element model.

Keywords: beam element, two-parameter foundation, virtual displacement principle, Pasternak foundation, nonlinear analysis, Winkler-Pasternak foundation

Introduction

The responses analysis of the substructures on foundation is the problems in engineering construction. It have been studied until the past into the present and used in several other applications (e.g. railroad tracks, highway, geotechnical and mechanical engineering). The beam on foundation is one of these problems. The behavior of soil is significantly complex due to many parameters for modeling. First, the basic model is Winkler foundation model [1]. It presents interaction between soil and substructure with a single layer of linear independent and discrete spring model along length of the substructures. Winkler model or Winkler foundation assumes the soil or foundation reaction at a paricular point is proportional to the soil or foundation displacement. The constant of these spring model is known as subgrade reaction coefficient [2]. In reality, these spring model should not be independent. To overcome the drawback of Winkler model, two-parameter elastic foundation models have been proposed by Filonenko-Borodich foundation [3], Pasternak foundation [4], Generalized foundation [5], Hetenyi foundation [6], Vlasov and Leontiev model [7] where a second parameter is introduced to account for interaction among the Winkler springs model. The concept of Pasternak foundation model assumes the shear interaction among Winkler springs.

The solutions of the beam element on two-parameter foundation have been proposed by several researchers. For example; Zhaohue and Cook [8] presented general form for model analysis included Winkler, Filonenko-Borodich, Pasternak, generalized and Vlasov foundations. The element was based on the exact and cubic displacement shape functions. Alemder and Gülkan [9] represented a general solution for the displacement shape functions of a beam element on two-parameter foundations. It was not limit with a range of magnitudes of foundation parameters.

In the reality, the behaviors of foundation aren't only in elastic case. Inelastic analysis of beam on foundations has been proposed in recent years by several researchers. For example; Ravi Mullapudi and Ashraf Ayoub [10] presented an inelastic element for analysis of beams resting on two-parameter foundations. The element was derived from a two field mixed formulation. Sapountzakis and Kampitsis [11] presented a boundary element method for the inelastic beam element resting on two-parameter tensionless elastoplastic foundation analysis.

The main objective of the paper proposes inelastic beam element resting on Winkler-Pasternak foundation model. The element is derived from displacement-based formulation. It is accurately responses when compare with cubic displacement shape functions or Hermitian interpolation. The improved shape functions obtain form the analytically deriving based on the homogeneous solution of the governing differential equilibrium equation. An iterative technique [12] is used to determine the parameters for evaluating the displacement shape functions. All symbolic calculations in this paper are performed using the computer software Mathematica [13] and the responses of the problem are calculated by FEAP [14].

1. Definitions

In the present study, a beam element on Winkler-Pasternak foundation modal is shown in figure 1. It can assemble two nodes in an element. A node is composed of two degrees of freedom as vertical displacement and rotation.

The nodal displacements are defined as:

$$\mathbf{U} = \{v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2\}^T \tag{1}$$

Where $\mathbf{U}$ is a nodal displacements array, v is vertical displacement, and θ is rotation. Subscription number refers to a number node.

The nodal forces are defined as:

$$\mathbf{P} = \{P_1 \ M_1 \ P_2 \ M_2\}^T \tag{2}$$

Where $\mathbf{P}$ is a nodal forces array, P is shear force, and M is bending moment. Subscription number refers to a number node.

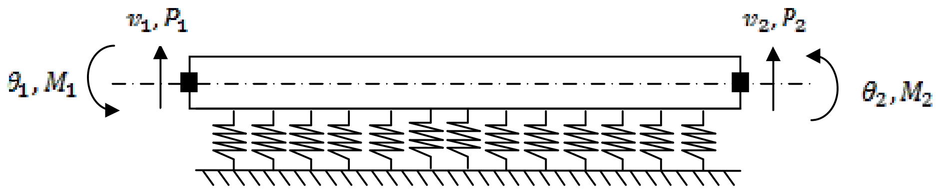


Figure 1. A 2-Node Beam Element on Winkler-Pasternak Foundation

The vertical displacement $v_B(x)$ of beam section is grouped in the array.

$$\mathbf{u}(x) = \{v_B(x)\} \tag{3}$$

The sectional curvature $\kappa_B(x)$ of beam section is grouped in the array.

$$\mathbf{d}_B(x) = \{\kappa_B(x)\} \tag{4}$$

In this paper, the sectional shear deformation vanishes because of the kinematics of beam section is based on Euler-Bernoulli beam theory. The sectional shear force can be determined from equilibrium equation. The relation between sectional curvature and vertical displacement can be determined through compatibility relation $\kappa_B(x) = \dfrac{d^2 v_B(x)}{dx^2}$.

It can be written in matrix form as:

$$\mathbf{d}_B(x) = \partial_B \mathbf{u}(x) \tag{5}$$

Where ∂_B is a differential operator. It is defined as:

$$\partial_B = \left[\frac{d^2}{dx^2} \right] \tag{6}$$

The sectional moment $M_B(x)$ and conjugate work pair $\kappa_B(x)$ are contained in the array $\mathbf{D}_B(x)$. It can be written as:

$$\mathbf{D}_B(x) = \{M_B(x)\} \tag{7}$$

The Winkler deformation $u_W(x)$ is contained in the array $\mathbf{d}_W(x)$. It can be written as:

$$\mathbf{d}_W(x) = \{u_W(x)\} \tag{8}$$

From Winkler foundation theory and compatibility equation show the relation between beam and Winkler deformations. It can be assigned as:

$$u_W(x) = v_B(x) \tag{9}$$

From Eq. (9), it can be written in matrix form as:

$$\mathbf{d}_W(x) = \partial_W \mathbf{u}(x) \tag{10}$$

Where ∂_W is a differential operator. It is defined as:

$$\partial_W = [1] \tag{11}$$

The sectional Winkler force $D_W(x)$ and conjugate work pair $u_W(x)$ are contained in the array $\mathbf{D}_W(x)$. It can be written in matrix form as:

$$\mathbf{D}_W(x) = \{D_W(x)\} \tag{12}$$

The Pasternak deformation $u_P(x)$ is contained in the array $\mathbf{d}_W(x)$ as:

$$\mathbf{d}_P(x) = \{u_P(x)\} \tag{13}$$

From compatibility equation shows relation between beam and Pasternak deformations. It can be assigned as:

$$u_P(x) = \frac{dv_B(x)}{dx} \tag{14}$$

From Eq. (14), it can be written in matrix form as:

$$\mathbf{d}_P(x) = \partial_P \mathbf{u}(x) \tag{15}$$

Where ∂_P is a differential operator. It is defined as:

$$\partial_P = \left[\frac{d}{dx}\right] \tag{16}$$

Finally, sectional Pasternak force $D_P(x)$ and conjugate work pair $u_P(x)$ are contained in the array $\mathbf{D}_P(x)$. It can be written in matrix form as:

$$\mathbf{D}_P(x) = \{D_P(x)\} \tag{17}$$

2. Governing Differential Equilibrium Equations: Beam Element on Winkler-Pasternak Foundation

The free body diagram of an infinitesimal segment dx of beam element resting on Winkler-Pasternak foundation is shown in figure 2. The equilibrium equations are considered in the undeformed configuration. It is shown in Eqs. (18)-(19).

Vertical equilibrium equation:

$$\frac{dV(x)}{dx} - k_W v_B(x) + k_P \frac{d^2 v_B(x)}{dx^2} + q(x) = 0 \tag{18}$$

Moment equilibrium equation:

$$\frac{dM(x)}{dx} - V(x) = 0 \tag{19}$$

Where $V(x)$ is shear force, $M(x)$ is bending moment, k_W is the Winkler stiffness, k_P is the Pasternak stiffness and $q(x)$ is the applied external distributed load.

From Eqs. (18)-(19), it can be written:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} + k_W v_B(x) - k_P \frac{d^2 v_B(x)}{dx^2} - q(x) = 0 \tag{20}$$

Parameters k_W and k_P are depended on the soil characteristics. This paper presents the foundation parameters in the nonlinear behavior. It is described in material constitutive laws later.

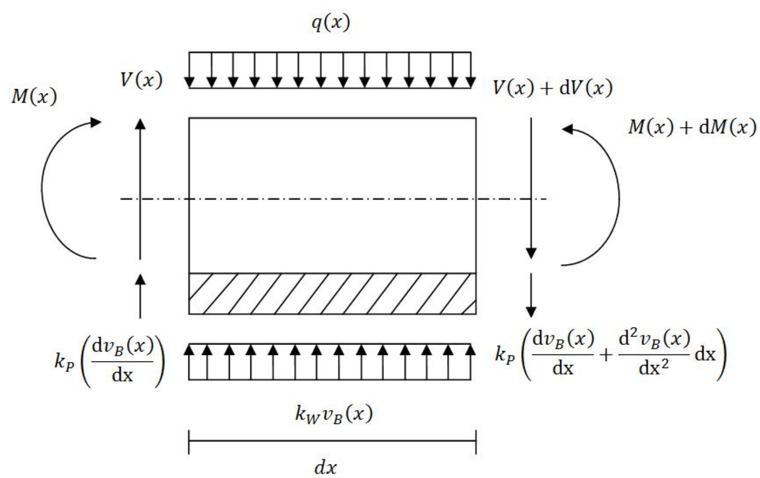


Figure 2. Infinitesimal segment of beam element resting on Winkler-Pasternak foundation [9]

3. Displacement Formulation of Beam Element on Winkler-Pasternak Foundation

In the displacement-based formulation, the element displacement $\mathbf{u}(x)$ can be expressed as functions of the element nodal displacements $\mathbf{U}$ through the displacement shape functions matrix $\mathbf{N}_B(x)$.

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}_B(x)\mathbf{U} \tag{21}$$

Where $\mathbf{N}_B(x)$ are the displacement shape functions matrix.

4. Compatibility

The deformations of problem are directly determined through the element nodal displacements $\mathbf{U}$ by compatibility conditions.

$$\mathbf{d}_B(x) = \mathbf{B}_B(x)\mathbf{U} \tag{22}$$

$$\mathbf{d}_W(x) = \mathbf{B}_W(x)\mathbf{U} \tag{23}$$

$$\mathbf{d}_P(x) = \mathbf{B}_P(x)\mathbf{U} \tag{24}$$

Where $\mathbf{B}_B(x)$ is the beam deformations-displacements matrix, $\mathbf{B}_W(x)$ is the Winkler deformations-displacements matrix, and $\mathbf{B}_P(x)$ is the Pasternak deformations-displacements matrix.

It can be defined in matrix form as:

$$\mathbf{B}_B(x) = \partial_B \mathbf{N}_B(x) \tag{25}$$

$$\mathbf{B}_W(x) = \partial_W \mathbf{N}_B(x) \tag{26}$$

$$\mathbf{B}_P(x) = \partial_P \mathbf{N}_B(x) \tag{27}$$

5. Material Constitutive Laws: Beam, Winkler and Pasternak Section

The sectional moment $M(x)$ and curvature $\kappa(x)$ are related by a nonlinear constitutive relation.

$$M(x) = \psi\left[\kappa(x)\right] or\, \mathbf{D}_B(x) = \boldsymbol{\psi}\left[\mathbf{d}_B(x)\right] \tag{28}$$

The Winkler force $D_W(x)$ and deformation $u_W(x)$ are related by a nonlinear constitutive relation.

$$D_W(x) = \Xi\left[u_W(x)\right] \text{ or } \mathbf{D}_W(x) = \boldsymbol{\Xi}\left[\mathbf{d}_W(x)\right] \tag{29}$$

The Pasternak force $D_P(x)$ and deformation $u_P(x)$ are related by a nonlinear constitutive relation.

$$D_P(x) = \Theta\left[u_P(x)\right] \text{ or } \mathbf{D}_P(x) = \boldsymbol{\Theta}\left[\mathbf{d}_P(x)\right] \tag{30}$$

In this study the nonlinear relation in Eqs. (28)-(30) are defined in the bilinear relation.

The consistent linearization of the nonlinear relation between force and deformation of beam, Winkler and Pasternak foundations can be written in matrix from as:

$$\mathbf{D}_B(x) = \mathbf{D}_B^0(x) + \mathbf{k}_B \Delta \mathbf{d}_B(x) \tag{31}$$

$$\mathbf{D}_W(x) = \mathbf{D}_W^0(x) + \mathbf{k}_W \Delta \mathbf{d}_W(x) \tag{32}$$

$$\mathbf{D}_P(x) = \mathbf{D}_P^0(x) + \mathbf{k}_P \Delta \mathbf{d}_P(x) \tag{33}$$

Where $\mathbf{D}_B^0(x)$, $\mathbf{D}_W^0(x)$ and $\mathbf{D}_P^0(x)$ are initial beam, Winkler and Pasternak section forces respectively. $\mathbf{k}_B$, $\mathbf{k}_W$ and $\mathbf{k}_P$ are beam, Winkler and Pasternak section tangent stiffness matrix respectively.

6. Equilibrium: The Virtual Displacement Principle

In the displacement-based formulation, the result in weak equilibrium is obtained for applying the virtual displacement principle, substitution Eqs. (22)-(24) and subsequently imposing the arbitrariness of the virtual nodal displacements $\delta\mathbf{U}$. The equilibrium equation in integral form can be written as:

$$\int_L \mathbf{B}_B^T(x)\mathbf{D}_B(x)dx + \int_L \mathbf{B}_W^T(x)\mathbf{D}_W(x)dx + \int_L \mathbf{B}_P^T(x)\mathbf{D}_P(x)dx = \mathbf{P} \tag{34}$$

Substitution of Eqs. (31)-(33) into Eqs. (34) can be written in the finite element equation as:

$$(\mathbf{K}_B + \mathbf{K}_W + \mathbf{K}_P)\Delta\mathbf{U} = \mathbf{P} - (\mathbf{P}_B^0 + \mathbf{P}_W^0 + \mathbf{P}_P^0) \tag{35}$$

Where

$\mathbf{K}_B = \int_L \mathbf{B}_B^T(x)\mathbf{D}_B(x)\mathbf{B}_B(x)dx$ is the beam element stiffness matrix.

$\mathbf{K}_W = \int_L \mathbf{B}_W^T(x)\mathbf{D}_W(x)\mathbf{B}_W(x)dx$ is the Winkler foundation element stiffness matrix.

$\mathbf{K}_P = \int_L \mathbf{B}_P^T(x)\mathbf{D}_P(x)\mathbf{B}_P(x)dx$ is the Pasternak foundation element stiffness matrix.

$\mathbf{P}_B^0 = \int_L \mathbf{B}_B^T(x)\mathbf{D}_B^0(x)dx$ is the beam element resistant force vector.

$\mathbf{P}_W^0 = \int_L \mathbf{B}_W^T(x)\mathbf{D}_W^0(x)dx$ is the Winkler foundation element resistant force vector.

$\mathbf{P}_P^0 = \int_L \mathbf{B}_P^T(x)\mathbf{D}_P^0(x)dx$ is the Pasternak foundation element resistant force vector.

7. Improved Displacement Shape Functions

The governing differential equation of beam element on Winkler-Pasternak foundation problem in figure 1 can be written as:

$$k_B \frac{d^4 v_B(x)}{dx^4} - k_P \frac{d^2 v_B(x)}{dx^2} + k_W v_B(x) = q(x) \tag{36}$$

Where k_B is the flexural rigidity of the beam section, k_W is the Winkler stiffness, k_P is the Pasternak stiffness, and $q(x)$ is the applied external distributed load.

The parameters $A = k_P / k_B$ and $B = k_W / k_B$ are defined for homogeneous solution solving when external distributed load is equal to zero $q(x) = 0$. The solutions are depended on beam and soil characteristic conditions. Alemder and Gülkan [9] represented the solutions of the problem into three cases.

The homogeneous solutions:

Case: $A < 2\sqrt{B}$ [8,15,16]

$$v_B(x) = c_1 \cos\beta x \cosh\alpha x + c_2 \cos\beta x \sinh\alpha x + c_3 \sin\beta x \cosh\alpha x + c_4 \sin\beta x \sinh\alpha x \quad (37)$$

Case: $A = 2\sqrt{B}$

$$v_B(x) = c_1 e^{\sqrt[4]{B}x} + c_2 x e^{\sqrt[4]{B}x} + c_3 e^{-\sqrt[4]{B}x} + c_4 x e^{-\sqrt[4]{B}x} \quad (38)$$

Case: $A > 2\sqrt{B}$

$$v_B(x) = c_1 \cosh\beta x \cosh\alpha x + c_2 \sinh\beta x \cosh\alpha x + c_3 \cosh\beta x \sinh\alpha x + c_4 \sinh\beta x \sinh\alpha x \quad (39)$$

The variable are defined by

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_W}{4k_B}} \quad (40)$$

$$\delta = \frac{k_P}{4k_B} \quad (41)$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \delta} \quad (42)$$

In case $A < 2\sqrt{B}$, it always calculates parameter β by Eq. (43).

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \delta} \quad (43)$$

In case $A > 2\sqrt{B}$, it always calculates parameter β by Eq. (44).

$$\beta = \sqrt{\delta - \lambda^2} \quad (44)$$

The solutions of the problem can be written in the general matrix form as:

$$v_B(x) = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{C} \quad (45)$$

Where $\mathbf{\Gamma}$ is column vector containing base functions for each solution case and $\mathbf{C}$ is column vector containing the four constants of integration.

The four geometric boundary conditions are related to element nodal displacements as:

$$v_B\big|_{x=0} = v_1;\left.\frac{dv_B}{dx}\right|_{x=0} = \theta_1; v_B\big|_{x=L} = v_2; and \left.\frac{dv_B}{dx}\right|_{x=L} = \theta_2 \tag{46}$$

Substituting for $v_B(x)$ and its derivatives from Eq. (45) into Eq. (46) yields the following algebraic relation:

$$\mathbf{U} = \mathbf{TC} \tag{47}$$

Where $\mathbf{T}$ is the mapping matrix between the generalized coordinates and the element nodal displacements. Substituting Eq. (47) into Eq. (45), it can be written as:

$$v_B(x) = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{N}_B(x)\mathbf{U} \tag{48}$$

Where $\mathbf{N}_B(x) = \left[N_{B1}(x)\ N_{B2}(x)\ N_{B3}(x)\ N_{B4}(x)\right]$ is the row vector containing the improved displacement shape functions.

In cases $A < 2\sqrt{B}$ and $A > 2\sqrt{B}$, when the parameters k_W and k_P tend to zero, the parameters λ, δ, α and β also tend to zero as well. The improved displacement shape functions also reduce to cubic polynomial displacement shape functions or Hermitian functions. Similarly, when the parameter of Pasternak k_P tends to zero, the improved displacement shape functions also reduce to Winkler type foundation shape functions.

The flexural rigidity of the beam section k_B, Winkler stiffness k_W and Pasternak stiffness k_P in material constitutive laws may not be constant. The parameters λ and δ can be varied with loading magnitudes and local beam. Average technique is used to find the parameters λ and δ needed in evaluating the displacement shape functions $\mathbf{N}_B(x)$ at each loading step.

In the first scheme, the average parameters λ^{AVE} and δ^{AVE} are first computed as:

$$\lambda^{AVE} = \sum_{i=1}^{NIP} \frac{\lambda_i w_i}{L} \tag{49}$$

$$\delta^{AVE} = \sum_{i=1}^{NIP} \frac{\delta_i w_i}{L} \tag{50}$$

Where w_i is the weight of integration point i, NIP is the number of integration point and L is the length of beam element.

In the second scheme, the average parameters k_B^{AVE}, k_W^{AVE} and k_P^{AVE} are first computed as:

$$\lambda^{AVE} = \sqrt[4]{\frac{k_W^{AVE}}{4k_B^{AVE}}} \tag{51}$$

$$\delta^{AVE} = \frac{k_P^{AVE}}{4k_B^{AVE}} \tag{52}$$

Where $k_B^{AVE} = \sum_{i=1}^{NIP} \frac{k_{Bi} w_i}{L}$; $k_W^{AVE} = \sum_{i=1}^{NIP} \frac{k_{Wi} w_i}{L}$ and $k_P^{AVE} = \sum_{i=1}^{NIP} \frac{k_{Pi} w_i}{L}$

8. Numerical Examples

A numerical example is used to verify the accuracy and the efficiency of the improved element model in this paper. In this example, the displacement is applied incrementally under displacement control at the tip of free-free beam on Winkler-Pasternak foundation. The deflection at the tip of beam is equal to $0.1\,m$. It is shown in figure 3. Given data are [10]: the length of beam $L = 10\,m$; flexural rigidity $EI = 1{,}666.667\,kN - m^2$; the yielding moment $M_y = 34.5\,kN - m$; hardening ratio of beam is equal to 0.014; Winkler foundation stiffness $k_W = 621.227\,kN/m^2$; the yielding foundation force $P_{Wy} = 200\,kN/m$; Pasternak foundation stiffness $k_P = 4004.01\,kN$. In this paper assumes the yielding foundation moment, hardening ratio of Winkler and Pasternak foundations for analysis. Given data are: the yielding foundation moment $P_{Py} = 50\,kN - m/m$, hardening ratio of Winkler and Pasternak foundations are equal to 0.01.

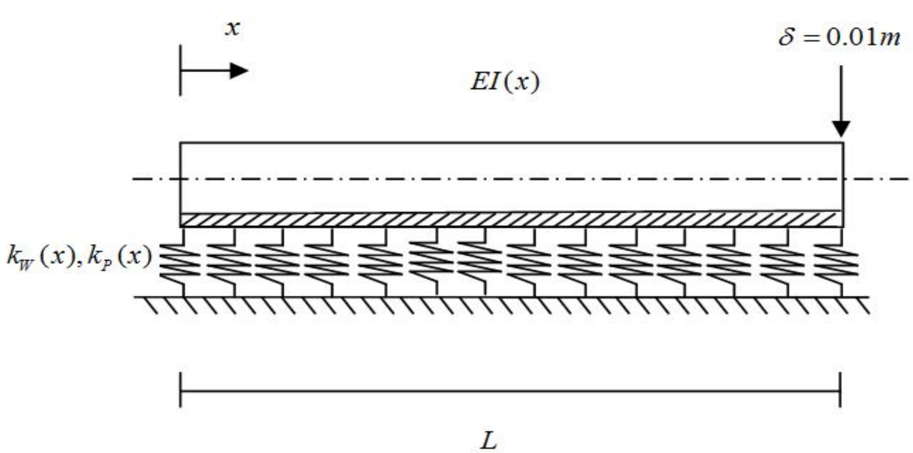
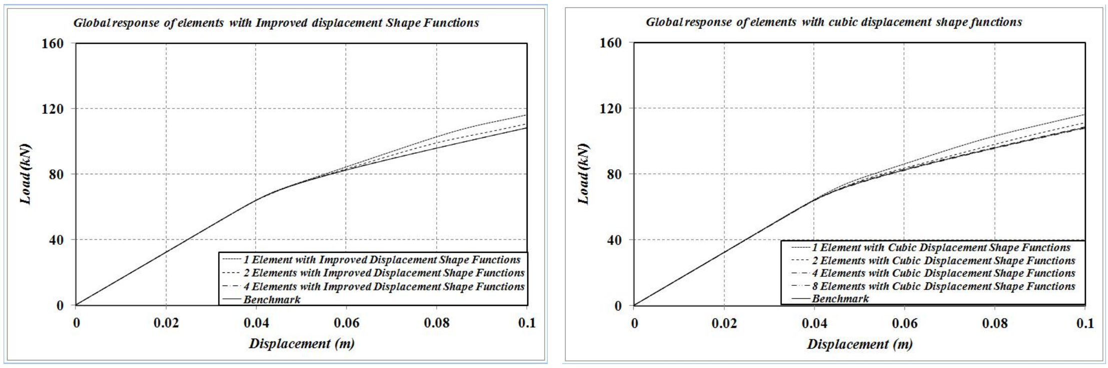


Figure 3. Example I: beam element resting on Winkler-Pasternak foundation applied a static load at the tip of beam

The global response of the numerical example is compared between the model with improved displacement shape functions and the model with cubic displacement shape functions. It is shown in figure 4. The convergence solution relation between load and displacement at the tip on the beam are presented with 4 elements with improved displacement shape functions and 8 elements with cubic displacement shape functions.

In the present work, the convergent responses or 64 displacement-based elements with cubic displacement shape functions are used for comparison. It is called “banchmark”.



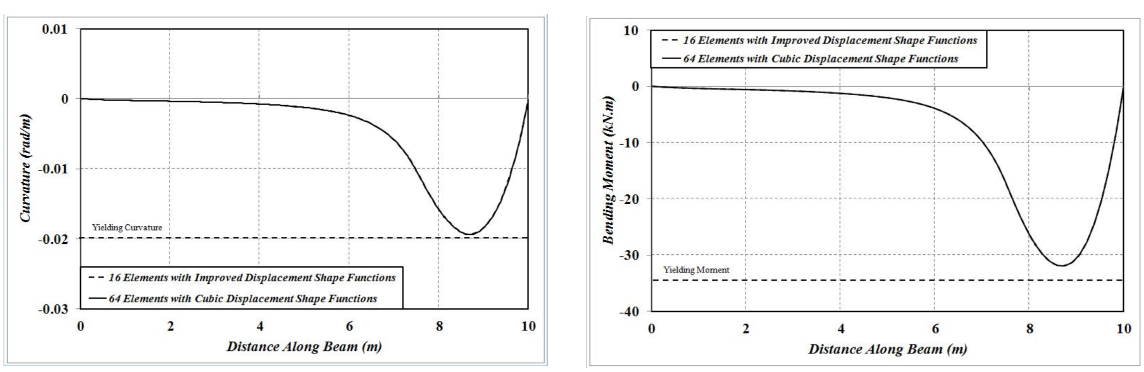
(a) (b)

Figure 4. Global response: force and displacement at the tip on beam of Example I

(a) Model with Improved Displacement Shape Functions; (b) Model with Cubic Displacement Shape Functions

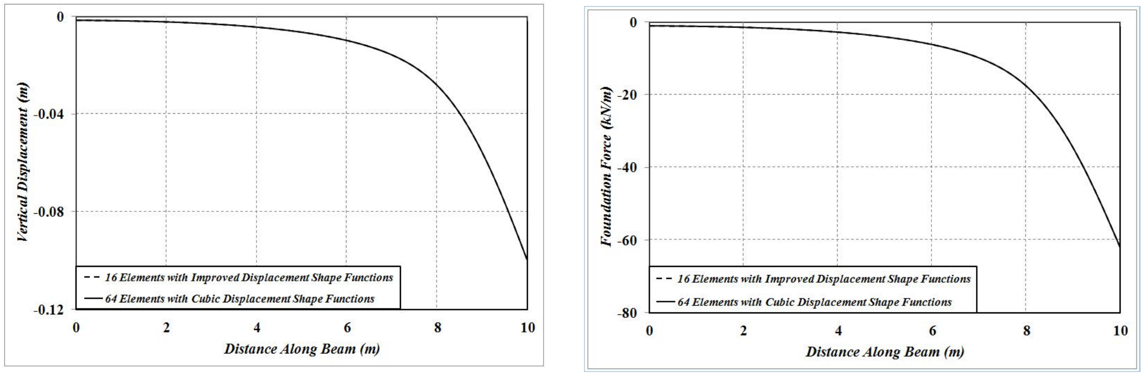
The local responses of the numerical example such as the vertical displacement, rotation, curvature, foundation force, bending moment, and foundation moment are presented by graph with distance along beam. Seven Gauss-Lobatto integration points are assumed for this paper. It's sufficient to obtain the convergent solutions. This problem is kind of C^1 *continuity* problem. The vertical displacement and rotation must be continued at the joint between elements. The curvature and moment distributions between adjacent elements may be apparent discontinuities where plastic hinges are formed. In the present numerical example, plastic hinges aren't formed because of beam is in elastic state. The curvature and moment distributions along beam in this example are also smooth. It is shown in figure 5.

From example, the convergent responses are presented by 16 elements with improved displacement shape functions and 64 elements with cubic displacement shape functions. It is shown in figure 5-7.



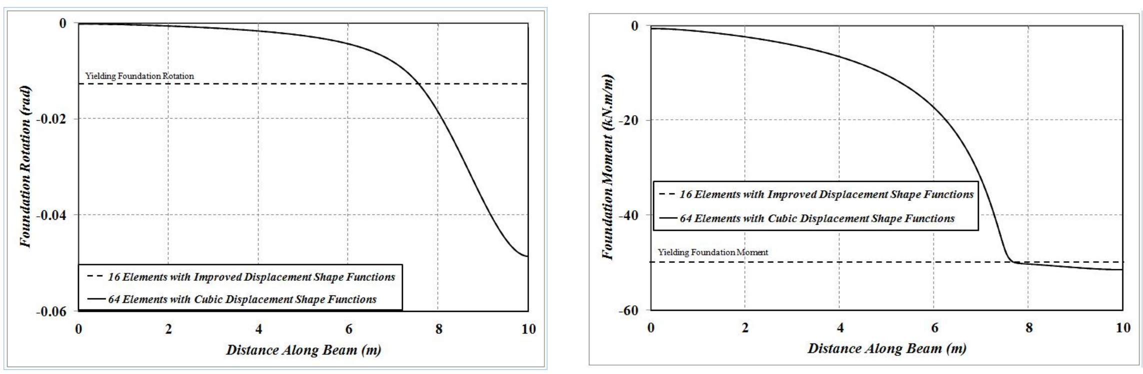
(a) (b)

Figure 5. Local responses: diagrams for curvature and moment for Example I



(a) (b)

Figure 6. Local responses: diagrams for vertical displacement and foundation force for Example I



(a) (b)

Figure 7. Local responses: diagrams for foundation rotation and moment for Example I

9. Conclusions

This paper presents inelastic beam element on Winkler-Pasternak foundation for the responses analysis of the substructures in engineering problems. The element is derived from a displacement-based formulation. The nonlinear responses of beam resting on Winkler-Pasternak foundation are obtained from the analysis with improved displacement shape functions elements. The improved displacement shape functions are derived from homogeneous solution of the governing differential equilibrium equation. The Average technique is used to estimating the values of the two parameters of the foundations. In the present study, a numerical example to compare the global and local responses between elements with improved displacement shape functions and elements with cubic polynomial interpolation was presented to confirm the accuracy and the efficiency of the beam element model for the nonlinear responses analysis. From the responses analysis of numerical example, elements with improved displacement shape functions are more accuracy and efficiency when compare with elements with cubic polynomial interpolation.

10. References

[1] Winkler, E., *Die lehre von der elastizität und Festigkeit*, Prag., 1867.

[2] Terzaghi, K., "Evaluation of coefficient of subgrade reaction." *Geotechnique*, Vol. 5, No.4, pp. 297-326, 1955.

[3] Filonenko-Borodich, M. M., "Some approximate theories of elastic foundation", Uchenyie Zapiski, Moskovskogo, Gosudarstvennogo Universiteta [in Russian] Mekhanica, 46:3-18, 1940.

[4] Pasternak, P. L., *On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants* (in Russian), Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, Moscow, U.S.S.R., 1954.

[5] Kerr, A. D., "Elastic and Viscoelastic Foundation Models", *J. Appl. Mech.*, Vol. 31, No.4, pp. 491–498, 1964.

[6] Hetényi, M., "Beams on Elastic Foundation: Theory with Applications in the Fields of Civil and Mechanical Engineering" University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, ISBN: 0472084453, 1946.

[7] Vlasov, V. Z., and Leontiev, U. N., "Beam, Plates and Shells on Elastic Foundations (Translated from Russian)", *Isreal Program for Scientific Translation*, Jerusalem, Isreal, 1966.

[8] Zhaohua, F. and Cook, R. D., "Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundation", *J.Eng. Mech.*, Vol. 109, No. 3, pp. 1390-1401, 1983.

[9] Alemdar, B. N. and Gülkan, P., "Beams on generalized foundations: supplementary element matrices", *Engineering Structures*, Vol. 19, No. 11, pp. 910-920, 1996.

[10] Mullapudi, R. and Ayoub, A., "Nonlinear finite element modeling of beams on two parameter foundations", *Computers and Geotechnics*, Vol. 37, No. 1, pp. 334-342, 2009.

[11] Sapountzakis, E. J. and Kampitsis, A. E., "Inelastic analysis of beams on two-parameter tensionless elastoplastic foundation", *Engineering Structures*, Vol. 48, No. 1, pp. 389-401, 2013.

[12] Limkatanyu, S., Kuntiyawichai, K., Spacone, E., and Kwon, M., "Nonlinear Winkler-based Beam Element with Improved Displacement Shape Functions", *KSCE Journal of Civil Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 192–201, 2012.

[13] Wolfram, S., *Mathematica Reference Guide*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1992.

[14] Taylor, R.L., *FEAP: A Finite Element Analysis Program. User manual: version 7.3*, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2000.

[15] Scott, R. F., *Foundation analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1981.

[16] Chiwanga, M. and Valsangker, A. J., "Generalized beam element on two-parameter elastic foundation", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 114, No. 6, pp. 1414-1427, 1988.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ สกุล นายวรเทพ แซ่ล่อง

รหัสประจำตัวนักศึกษา 5510120023

วุฒิการศึกษา

วุฒิ	ชื่อสถาบัน	ปีที่สำเร็จการศึกษา
วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์	2555

ทุนการศึกษา

ทุนบัณฑิตศึกษาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ปีการศึกษา 2555-2556

ทุนอุดหนุนการวิจัยเพื่อวิทยานิพนธ์ ปีงบประมาณ 2556

การตีพิมพ์เผยแพร่ผลงาน

Worathep Sae-Long, Suchart Limkatanyu, Woraphot Prachasaree, Nattapong Damrongwiriyanupap, and Kittisak Kuntiyawichai, (2013). Natural Stiffness Matrix for Bar with Lateral Interfaces: Exact Force-Based Derivation. 18th National Convention on Civil Engineering (NCCE 18), The Empress Hotel, Chiang Mai, Thailand, May 8-10, 2013.

Worathep Sae-Long (2013). Finite Beam Element on Nonlinear Winkler-Pasternak Foundation Model. The 6th ASEAN Civil Engineering Conference and The 6th ASEAN Environmental Engineering Conference. Pathumwan Princess Hotel, Bangkok, Thailand, November 21-22, 2013.