



ต้นแบบจำลองภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า แบบ 3 มิติ สำหรับเต้านม  
**Three Dimensional Electrical Impedance Tomography Model for Breast**

นิตา ดุกลอง  
**Nida Duklong**

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญา  
วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า  
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of  
Master of Engineering in Electrical Engineering  
Prince of Songkla University**

2553

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

ชื่อวิทยานิพนธ์ ต้นแบบจำลองภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าแบบ 3 มิติ สำหรับเต้านม  
ผู้เขียน นางนิตา คุณถ่อง  
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า

---

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

คณะกรรมการสอบ

.....  
(รองศาสตราจารย์บุญเจริญ วงศ์กิตติศึกษา)

.....ประธานกรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.มนตรี กาญจนะเดชะ)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

.....กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.ชูศักดิ์ ลิ้มสกุล)

.....  
(รองศาสตราจารย์ ดร.ชูศักดิ์ ลิ้มสกุล)

.....กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์บุญเจริญ วงศ์กิตติศึกษา)

.....กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พรชัย พลฤกษ์ภัทรานนท์)

.....กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.โกสินทร์ จำนงไทย)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็น  
ส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

.....  
(รองศาสตราจารย์ ดร.เกริกชัย ทองหนู)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

ชื่อวิทยานิพนธ์ ต้นแบบจำลองภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าแบบ 3 มิติ สำหรับเต้านม  
ผู้เขียน นางนิตา ดุก่อง  
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า  
ปีการศึกษา 2552

### บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทำการศึกษาการจำลองการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าซึ่งเป็นเทคนิคการสร้างภาพจากค่าการกระจายสภาพความนำไฟฟ้าของอวัยวะภายในร่างกายแล้วแสดงออกมาเป็นภาพ ระบบของการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าประกอบด้วย การเก็บข้อมูลแรงดันไฟฟ้าจากอิเล็กโทรดและการสร้างภาพ การสร้างภาพแบ่งออกเป็นสองขั้นตอน การแก้ปัญหาสองขั้นตอนได้แก่ การแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด (forward) เพื่อการคำนวณค่าการกระจายของแรงดันภายในโมเดลโดยใช้ค่าแรงดันที่วัดได้บนอิเล็กโทรด และการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส (inverse) เพื่อการคำนวณค่าการกระจายของอิมพีแดนซ์ภายในโมเดล ในส่วนของการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ดจะใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ และการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์สโดยใช้วิธีเรกูลาไรเซชันร่วมกับการประมาณค่าด้วยอัลกอริทึมของเกาส์-นิวตันแบบรอบเดียว จากการทดลองพบว่าภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่ได้จากวิธีเรกูลาไรเซชันแบบ tikhonov ให้ผลดีกว่า เมื่อวัตถุวางใกล้กัน แต่ถ้าวัตถุวางห่างกัน วิธีเรกูลาไรเซชันแบบ laplacian จะให้ผลดีกว่า เนื่องจากแบบจำลองที่ใช้สามารถกำหนดจำนวนเอลิเมนต์ได้น้อยทำให้วัตถุมีขนาดใหญ่ จึงทำให้เกิดการทดลองในกรณีที่สอง ซึ่งเป็นการปรับปรุงเอลิเมนต์ด้วยวิธีการ dual model พบว่าสามารถตรวจจับวัตถุที่มีขนาดประมาณ 1 เซนติเมตร จากนั้นทำการทดลองโดยเปรียบเทียบผลการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าระหว่างโมเดลแบบ 8 อิเล็กโทรดและ 16 อิเล็กโทรดต่อระยะทางจำนวนสองระยะทาง โดยมีขนาดของวัตถุเป็นตัวแปรคงที่ ปรากฏว่าระยะห่างน้อยสุดระหว่างวัตถุมีค่าประมาณ 0.9 เซนติเมตร และภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าแบบ 16 อิเล็กโทรด ให้ผลดีกว่าแบบ 8 อิเล็กโทรด เนื่องจากข้อมูลที่จำลองการวัดแรงดันบนอิเล็กโทรดมีมากกว่าทำให้การประมาณค่าแรงดันภายในโมเดลมีความถูกต้องมากกว่า อย่างไรก็ตามเวลาในการคำนวณก็มากตามเช่นกัน นอกจากนี้พบว่าระยะห่างระหว่างระยะทางของอิเล็กโทรดที่เหมาะสม ทำให้ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่สร้างมีความถูกต้องยิ่งขึ้น

คำสำคัญ การสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด (forward) ปัญหาแบบอินเวอร์ส (inverse), วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์, วิธีเรกูลาไรเซชัน

<b>Thesis Title</b>	Three Dimensional Electrical Impedance Tomography Model for Breast
<b>Author</b>	Mrs. Nida Duklong
<b>Major Program</b>	Electrical Engineering
<b>Academic Year</b>	2009

## **ABSTRACT**

This dissertation studies the simulation of Electrical Impedance Tomography (EIT) which is an imaging technique from the conductivity distribution of internal organs. The EIT system consists of two processes. The former process is data collection of voltages on the electrodes, while the latter process is the reconstructions. The image reconstruction consists of two processes: forward problem and inverse problem. In the forward problem, the electric field in the interior of the volume is calculated when we know current patterns driven from its boundaries. In the inverse problem, the resistivity distribution is calculated when we know voltage and current density distribution in the interior. The finite element method can be use to address the forward problem. The inverse problem is solved by the regularization scheme and the approximation of single-step of Gauss-Newton algorithm. To study the effectiveness of the different regularization methods (Tikhonov and Laplacian), two objects are placed in finite element model. The simulation results show that EIT performance with the Tikhonov regularization method is better than the Laplacian regularization method, when the distance between two objects is nearest. On the other hand, the Laplacian regularization method is better when the objects are large. Because the number of finite elements are limited in our model, the objects are large size. As a result, we present the second technique which improves the limit of the number of finite element by using the dual model. We found that, this model can detect the objects which are the smallest size about 1 cm. In the second experiment, we compare EIT performance using two planes of electrodes with 8 and 16 electrodes per plane. Size of objects is constant variable. The results show that, the minimum distance between these objects is approximate 0.9 cm. and EIT performance with 16 electrodes is better than 8 electrodes. Because the simulated voltage data is higher, the voltage approximation of interior model is more correct. However, the calculated time

is higher. Moreover, the suitable distance between planes of electrode gives the more accuracy of EIT.

Keywords: Electrical Impedance Tomography (EIT), forward problem, inverse problem, finite element method, regularization method

## กิตติกรรมประกาศ

ขอแสดงคำขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ บุญเจริญ วงศ์กิตติศึกษา ประธานกรรมการที่ปรึกษางานวิจัย ที่กรุณาอุทิศเวลาให้คำปรึกษา แนะนำความรู้ในด้านการทำวิจัย เอกสาร ข้อมูลต่างๆเป็นอย่างดี รวมทั้งจัดเวลากระบวนการคิดและให้กำลังใจในการแก้ปัญหาตลอดจนตรวจทานแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้ดำเนินไปอย่างสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ พรชัย พุทธิภัทรานนต์ กรรมการวิทยานิพนธ์ที่ได้กรุณาอุทิศเวลาและให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการทำงานวิจัยเสมอมา รวมทั้งจัดเวลากระบวนการคิดและให้กำลังใจในการแก้ปัญหาตลอดจนตรวจทานแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้ดำเนินไปอย่างสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ชูศักดิ์ ลิ่มสกุล กรรมการสอบโครงร่างและกรรมการสอบความก้าวหน้างานวิจัยที่ได้กรุณาให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการทำงานวิจัยเสมอมา และตรวจทานวิทยานิพนธ์ให้ดำเนินไปอย่างสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. มนตรี กาญจนเดชะ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาอุทิศเวลาให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการทำงานวิจัย และตรวจทานวิทยานิพนธ์ให้ดำเนินไปอย่างสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.โกสินทร์ จันทน์ไทย (ผู้ทรงคุณวุฒิ) ที่ได้กรุณาอุทิศเวลาเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ให้คำแนะนำที่มีประโยชน์ วิจารณ์ผลงาน และตรวจทานวิทยานิพนธ์ให้ดำเนินไปอย่างสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ที่กรุณาให้ทุนการศึกษาแก่ข้าพเจ้าระหว่างการศึกษา

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์และบุคลากรในภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าทุกท่าน ที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆมาโดยตลอด จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วง

ขอขอบพระคุณ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ที่ให้ความช่วยเหลือด้านการประสานงานต่าง ๆ

ขอขอบคุณ พี่ๆ และเพื่อน ๆ รวมทั้งน้องๆ นักศึกษามหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ทุกท่านที่ได้ให้คำแนะนำ คำปรึกษา และกำลังใจที่ดีมาโดยตลอด

สุดท้ายนี้ ข้าพเจ้าขอโน้มรำลึกถึงพระคุณของบิดามารดาและครอบครัว ที่ส่งเสริมสนับสนุน ให้คำแนะนำ ให้คำปรึกษา ให้กำลังใจที่ดีเยี่ยม และทุนทรัพย์แก่ข้าพเจ้าตลอดมา จนกระทั่งทำให้ข้าพเจ้าประสบความสำเร็จ

## สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(7)
รายการตาราง	(8)
รายการภาพประกอบ	(9)
บทที่	
1. บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของการวิจัย.....	1
1.2 การตรวจเอกสาร บทความ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	2
1.3 วัตถุประสงค์.....	23
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	23
1.5 วิธีการดำเนินงานวิจัย.....	23
1.6 ขอบเขตการวิจัย.....	23
2. ทฤษฎีและหลักการ.....	24
2.1 บทนำ.....	25
2.2 ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด.....	27
2.2.1 แบบจำลองการกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในตัวกลาง.....	27
2.2.2 วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์	22
2.3 การสร้างภาพ (reconstruction).....	42
2.3.1 การสร้างภาพแบบต่างกัน.....	43
2.3.2 วิธีเรกูลาไรเซชัน.....	46
2.3.3 อัลกอริทึมแบบเกาส์-นิวตัน ( Gauss – Newton algorithm ) .....	47
2.4 EIDORS (Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software )	48
2.4.1 สถาปัตยกรรมของซอฟต์แวร์ (software architecture).....	48
3. วิธีดำเนินงานวิจัย.....	53
3.1การสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าด้วย EIDORS เวอร์ชัน 3.3..	53
3.2 การสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าโดยใช้เรกูลาไรเซชันแบบ Tikhonov และ Laplacian .....	60

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.3 การปรับปรุงจำนวนเอลิเมนต์โดยใช้ dual model .....	62
4. ผลการวิจัย .....	65
4.1 ผลการเปรียบเทียบภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าโดยใช้เรกูลาไรเซชันแบบ tikhonov และ laplacian .....	65
4.2 การปรับปรุงจำนวนเอลิเมนต์โดยใช้ dual model เปรียบเทียบการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าระหว่างโมเดลแบบ 8 อิเล็กโทรด และ 16 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวน 2 ระนาบ .....	67
4.3 ผลการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า อันเนื่องมาจากระยะห่างระหว่างระนาบของอิเล็กโทรด .....	71
5. สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ .....	73
5.1 สรุปผลการวิจัย .....	73
5.2 ปัญหาและข้อเสนอแนะ .....	74
5.2.1 ปัญหา .....	74
5.2.2 ข้อเสนอแนะ .....	75
บรรณานุกรม .....	76
ประวัติผู้เขียน .....	77



## รายการตาราง

ตาราง	หน้า
1-1 ภาพรวมของผลงานของอัลกอริทึมที่ใช้สร้างภาพที่ใช้การจัดวางวัตถุหลายแบบ	15

## รายการภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1-1 งานของกลุ่มวิทยาลัย Dartmouth	4
1-2 การทดลองของ TCI	5
1-3 การวางตำแหน่งของวัตถุ	7
1-4 ภาพตัดขวางที่สร้างได้จากถึงน้ำเกลือบรรจุทั้งแท่งฉนวนและแท่งตัวนำ	7
1-5 ภาพความผิดพลาดแบบ happy transform .....	10
1-6 ภาพตัดขวางของแท่งปริซึมสามแท่งในโมเดล .....	10
1-7 โมเดลขนาดสามมิติที่สร้างโดย Netgen .....	12
1-8 ตำแหน่งของวัตถุใน โมเดลรูปทรงกระบอก .....	13
1-9 แสดงภาพการแพร่กระจายค่าความนำไฟฟ้าภายในโมเดล.....	14
1-10 ตัวอย่างการสร้างโค้งตัว “L” (L-curves) จากข้อมูลของ โมเดลแบบสองมิติ .....	16
1-11 เปรียบเทียบค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ที่เลือกจากวิธีต่างๆ.....	18
1-12 ค่าความละเอียดและตำแหน่งตามแนวรัศมีของ $R_{Tik}$ , $R_{diag}$ และ $R_{Lap}$	20
1-13 คุณลักษณะที่วัดได้สำหรับการสร้างภาพแบบสามมิติ ของชุดข้อมูลที่ได้จากการ จำลองข้อมูลสองชุด	22
2-1 ระบบเก็บข้อมูลแบบ 16 อีเล็กโทรด	25
2-2 การฉายกระแสแบบขั้วข้างเคียง.....	26
2-3 ตัวอย่างการสร้างภาพแบบสองมิติด้วยวิธี Difference imaging.....	27
2-4 การหาค่าจากโครงข่ายตัวต้านทาน.....	30
2-5 เมชของ 2 เอลิเมนต์.....	32
2-6 การเชื่อมต่อของ 2 เอลิเมนต์.....	32
2-7 ตัวอย่างสำหรับการหาฟังก์ชันการประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้น.....	34
2-8 โครงสร้างของ fwd_model.....	49
2-9 โครงสร้างของ data object.....	51
2-10 โครงสร้างของ inv_model .....	52
2-11 โครงสร้างของ image object .....	52
3-1 กระบวนการในการสร้างภาพ.....	55
3-2 บล็อกไดอะแกรมการสร้างต้นแบบโมเดลด้วยฟังก์ชัน mk_common_model.....	56

## รายการภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
3-3 ขั้นตอนการสร้างต้นแบบโมเดลด้วยฟังก์ชัน create_tank_mesh_ng .....	56
3-4 พารามิเตอร์ของอินพุท	57
3-5 รูปแบบของการจ่ายกระแสและวัดแรงดัน.....	58
3-6 ตัวอย่างการสร้างฟังก์ชันของ inverse.....	59
3-7 โมเดลของ FEM.....	60
3-8 รายละเอียดของ fmdl .....	61
3-9 จำลองวัตถุสองรูปแบบ.....	61
3-10 กระบวนการสร้างภาพด้วยวิธี dual model.....	62
3-11 ขนาดของวัตถุที่เล็กที่สุดที่ยังคงสร้างภาพได้	63
4-1 ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าเมื่อวางวัตถุที่ระยะห่างประมาณ 1.7 เซนติเมตร.....	66
4-2 ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าเมื่อวางวัตถุที่ระยะห่างใกล้สุดที่ยังคงสร้างภาพได้.....	67
4-3 FEM ของโมเดลที่มี 8 อิเล็กโทรด จำนวน 2 ระบาย.....	68
4-4 FEM ของ coarse model.....	69
4-5 FEM ของโมเดลที่มี 16 อิเล็กโทรด จำนวน 2 ระบาย	69
4-6 การจำลองวัตถุขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ 2.5 เซนติเมตร ภายในโมเดล.....	70
4-7 ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าตามแนวแกน z ของวัตถุขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ 2.5 เซนติเมตร	70
4-8 ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าตามแนวแกน z ของวัตถุขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ 3 เซนติเมตร	71
4-9 ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่มีระยะห่างระหว่างระบายต่างกัน	72

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย

มะเร็งเต้านมเป็นหนึ่งในเนื้องอกที่พบบ่อยในผู้หญิง การตรวจพบในระยะแรกและการวินิจฉัยโรคเป็นกุญแจสำคัญที่จะช่วยลดอัตราการเสียชีวิตจากมะเร็งเต้านมได้ ปัจจุบันการตรวจด้วยเครื่องแมมโมแกรม (mammogram) เป็นวิธีมาตรฐานที่ใช้สำหรับตรวจมะเร็งเต้านม แม้ว่าจะมีข้อจำกัดพื้นฐานหลายประการ เช่น การแสดงผลไม่ดีสำหรับ soft tissue (หมายถึงเนื้อเยื่อที่เชื่อมต่อ, รongรับหรืออยู่รอบๆ โครงสร้างอื่นและอวัยวะของร่างกาย) ที่ต่างกันและประสิทธิภาพจะลดลงสำหรับเต้านมที่มีความหนาแน่นมากเนื่องจากการกระจายของรังสี (radiation exposure) นอกจากนี้ยังทำให้ได้รับความเจ็บปวดจากการบีบอัดเต้านม เพื่อที่จะแก้ไขข้อจำกัดเหล่านี้ ได้มีการนำอัลตราซาวด์ (echo ultrasound) มาใช้แยกเนื้อเยื่อว่าเป็นเป็นซิสต์ (cyst) หรือถุงน้ำจากเนื้อเยื่อทั่วไป ถ้าลักษณะของซิสต์มีแนวโน้มที่จะเป็นมะเร็ง ก็จะมีการตัดชิ้นเนื้อเพื่อส่งตรวจทางพยาธิ (Biopsy) เพื่อให้การวินิจฉัยโรคมีความถูกต้องเพิ่มขึ้น ได้มีการพัฒนาวิธีการสร้างภาพแบบใหม่ๆ เช่น การสร้างภาพตัดขวางทางแสง (optical tomography) แต่เนื่องจากมีค่า spatial resolution ต่ำ นอกจากนี้ยังมี Breast MRI ซึ่งมีข้อดีคือมีความไวสูงต่อสิ่งผิดปกติที่มีขนาดเล็ก, มีประสิทธิภาพสำหรับเต้านมที่มีความหนาแน่น และไม่ทำให้เกิดความเจ็บปวดจากการบีบอัดเต้านมอีกด้วย อย่างไรก็ตาม Breast MRI มีข้อจำกัดคือในการตรวจ เนื่องจากไม่ได้เจาะจงเฉพาะเนื้องอกที่เป็นมะเร็ง บ่อยครั้งที่ไม่สามารถแยกเนื้องอกที่เป็นมะเร็งจากเนื้อเยื่อดีได้, ไม่สามารถตรวจอวัยวะที่มีหินปูน รวมทั้งมีราคาแพงทั้งทางด้านราคาเครื่อง, การติดตั้งและการดำเนินการ

เมื่อเร็วๆ นี้ มีหลักฐานพบว่าเนื้องอกที่เป็นมะเร็งมีสภาพความต้านทานแตกต่างจากเนื้อเยื่อทั่วไป ดังนั้นจึงใช้ค่าความต้านทานไฟฟ้าสำหรับตรวจจับมะเร็งเต้านม คือเทคนิคที่เรียกว่าการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า (Electrical Impedance Tomography : EIT) เป็นเทคโนโลยีการสร้างภาพทางชีวการแพทย์ที่กำลังพัฒนา และเนื่องจากราคาไม่แพงเมื่อเทียบกับเทคโนโลยีตัวอื่น นอกจากนี้ยังมีขนาดเล็กและสะดวกต่อการเคลื่อนย้าย อย่างไรก็ตามการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้ายังมีข้อจำกัด คือมีค่า spatial resolution ต่ำ, ไวต่อสัญญาณรบกวน, ความผิดพลาดที่เกิดเนื่องจากอิเล็กโทรด และความผันแปรของภาพระหว่างวัตถุ

ระบบการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าแบ่งเป็นสองส่วนคือ ส่วนของระบบเก็บข้อมูลและส่วนของการสร้างภาพ ซึ่งปัญหาสำคัญของการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าอยู่ในส่วนของการสร้างภาพ เนื่องจากขั้นตอนการคำนวณค่าอิมพีแดนซ์ที่นำมาสร้างเป็นภาพซึ่งแสดง

ถึงการกระจายของอิมพีแดนซ์ภายในวัตถุมีความซับซ้อนจากทิศทางเคลื่อนที่ของสนามไฟฟ้า หรือการกระจายหรือลดทอนของสนามไฟฟ้าในตัวกลางไม่เอกพันธ์ (non-homogeneous) แบบไม่เป็นเชิงเส้น

การสร้างภาพประกอบด้วยสองส่วนหลักๆคือปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด (forward problem) และปัญหาแบบอินเวอร์ส (inverse problem) โดยปัญหาแบบฟอร์เวิร์ดเป็นการคำนวณค่าสนามไฟฟ้าภายในโมเดลเมื่อรู้ค่าของกระแสที่จ่ายและแรงดันที่วัดได้บริเวณอิเล็กโทรดที่สัมผัสกับผิวหนัง หรือภายในผิวของโมเดล ส่วนปัญหาแบบอินเวอร์สเป็นการคำนวณค่าการกระจายของความต้านทานไฟฟ้า เมื่อรู้การกระจายตัวของแรงดันและความหนาแน่นของกระแสภายในโมเดล

ในงานวิจัยที่ค้นคว้าส่วนใหญ่ ใช้วิธีของไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method : FEM) ในการคำนวณค่าการกระจายของศักดาไฟฟ้า ภายใต้ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตของนอยมันน์ (Neumann) และดีริคเลต (Dirichlet) สำหรับวัตถุที่มีรูปร่างไม่แน่นอนและมีองค์ประกอบไม่เป็นเอกพันธ์ จากนั้นใช้วิธีการประเมินค่าเชิงเลขคำนวณค่าอิมพีแดนซ์ ยกตัวอย่างเช่น อัลกอริทึมแบบแบค-โพรเจกชัน (back-projection), นิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) และเกาส์-นิวตัน (Gauss-Newton) เป็นต้น

วิทยานิพนธ์นี้จะเน้นในส่วนของการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าของโมเดลแบบสามมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์ EIDORS (Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software) ซึ่งเป็นฟรีซอฟต์แวร์ (free software) ที่ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ แก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด สำหรับการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส จะใช้วิธีเรกูลาไรเซชันร่วมกับการประมาณค่าแบบเกาส์-นิวตันแบบรอบเดียว กระบวนการในการสร้างภาพประกอบด้วยสามขั้นตอนหลักๆ คือเริ่มจากสร้างโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้โปรแกรม NETGEN และกำหนดรูปแบบของการกระตุ้นสำหรับการจ่ายกระแสและวัดแรงดัน ต่อมาคำนวณค่าแรงดันภายในของตัวกลางทั้งแบบเอกพันธ์ (homogeneous) และไม่เอกพันธ์ (inhomogeneous) สุดท้ายสร้างโมเดลของอินเวอร์ส และแก้สมการหาอิมพีแดนซ์โดยใช้วิธีจำลองข้อมูลจากโมเดลสามมิติ และจำลองวัตถุที่ตำแหน่งต่างๆ ภายในโมเดล

## 1.2 การตรวจเอกสาร บทความและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

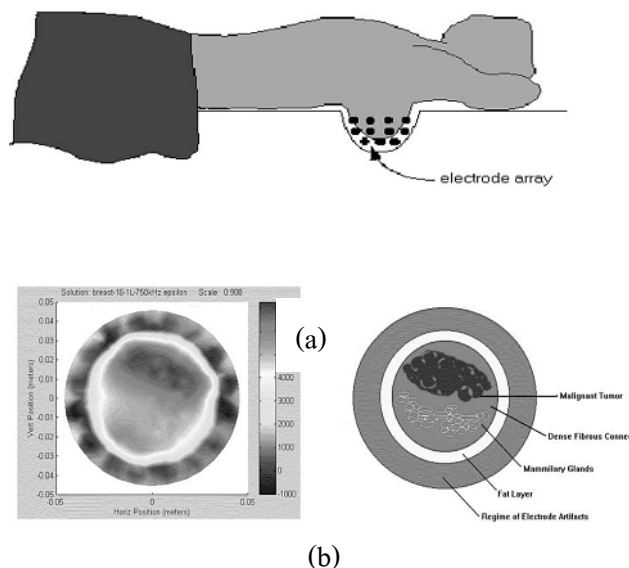
**1.2.1 Y. Zou and Z. Guo, “A review of electrical impedance techniques for breast cancer detection,” Medical Engineering & Physics, no. 25, pp. 79-90, 2003. [1]**

เนื่องจากพบหลักฐานว่าก้อนเนื้อที่เป็นมะเร็งมีความต้านทานไฟฟ้าต่ำกว่าเนื้อเยื่อปกติที่อยู่รอบๆ บทความนี้นำเสนอการตรวจจับมะเร็งเต้านมด้วยเทคนิคของความต้านทานไฟฟ้าที่มีอยู่

โดยจะเน้นเทคนิคการสร้างภาพจากค่าความต้านทานไฟฟ้าแบบไม่เจาะ (noninvasive) เช่นการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า (Electrical Impedance Tomography) ซึ่งประกอบด้วยการสร้างภาพแบบคงที่ (static) และแบบต่างกัน (difference) โดยการสร้างภาพแบบคงที่เกี่ยวกับการสร้างภาพของการกระจายสภาพความนำไฟฟ้าหรือสภาพความต้านทานไฟฟ้าแบบสมบูรณ์ ขณะที่การสร้างภาพแบบต่างกันเป็นการสร้างภาพการเปลี่ยนแปลงของสภาพความนำไฟฟ้าเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงแรงดันบนอิเล็กโทรด ระบบการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าจะสำเร็จได้ขึ้นอยู่กับข้อมูลที่วัดได้และการสร้างภาพ ในส่วนของข้อมูลที่เก็บได้ เทคนิคที่ต่างกันหลักๆคือ จำนวนและการจัดการอิเล็กโทรด, โหมดของการกระตุ้น เช่นการจ่ายด้วยกระแสหรือแรงดัน, รูปแบบของสัญญาณที่กระตุ้น และช่วงความถี่ของการทำงาน ส่วนของการสร้างภาพนิยมใช้โมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับสมการปัวซอง (Poisson's equation) ในการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด โดยความถี่ที่ใช้ต้องน้อยกว่า 1 เมกะเฮิร์ตซ์ นอกจากนี้อัลกอริทึมของการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าอาจจะแยกได้เป็นแบบขั้นตอนเดียวหรือแบบไม่ทำซ้ำ (single-step or non-iterative) เช่นแบค-โปรเจกชัน (back-projection) และแบบทำซ้ำ (iterative) เช่นวิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) เป็นต้น การตรวจจับมะเร็งเต้านม โดยวิธีการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้ายังมีกลุ่มที่ค่อนข้างไม่มากนัก ยกตัวอย่างเช่น

1.2.1.1 งานของกลุ่มวิทยาลัย Dartmouth (Dartmouth College) สร้างและทดสอบระบบการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าแบบ 2 มิติ โดยระบบเก็บข้อมูลประกอบด้วย 32 อิเล็กโทรด, ความถี่ที่ใช้ตั้งแต่ดีซีจนถึง 1 เมกะเฮิร์ตซ์, ตัวแปลงสัญญาณอนาล็อกเป็นสัญญาณดิจิทัล (A/D converter) ขนาด 16 บิต ที่มีความถี่ของการแซมปลิง (sampling) เท่ากับ 200 กิโลเฮิร์ตซ์ และอิเล็กโทรดเป็นแบบ Ag/AgCl โดยมีการจ่ายแรงดันและวัดกระแสบนอิเล็กโทรดทุกตัว และใช้วิธีของนิวตันในการสร้างภาพ สำหรับโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ใช้วิธีของเมชคู่ (dual mesh) โดยการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ดใช้โมเดลที่มีจำนวนเมชมาก (fine mesh) จำนวนแรงดันไฟฟ้าภายใน และโมเดลแบบเมชน้อย (coarse mesh) จำนวนสภาพความนำไฟฟ้าสำหรับการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส จากนั้นได้มีการปรับปรุงให้ยืดหยุ่นสำหรับการตรวจเต้านมแบบซ้ำๆ โดยใช้ 16 อิเล็กโทรดสัมผัสกับเต้านมโดยตรง ดังภาพประกอบ 1-1(a) ซึ่งมีหน้าสัมผัสออกจากจุดศูนย์กลาง (radially translating interface) แรงดันไฟฟ้ากระแสสลับที่จ่ายบนอิเล็กโทรดมีความถี่ตั้งแต่ 10 กิโลเฮิร์ตซ์ ถึง 1 เมกะเฮิร์ตซ์ ในการวัดจะใช้ความถี่เพียง 10 ค่าเท่านั้นสำหรับเต้านมทั้งสองข้าง และใช้เวลาข้างละ 10 นาที ผลแสดงให้เห็นว่าลักษณะโครงสร้างของภาพสัมพันธ์กับข้อมูลทางการรักษาที่มีอย่างจำกัดของผู้ป่วย อย่างไรก็ตามภาพของวัตถุที่อยู่ใกล้ผิวสัมผัสของอิเล็กโทรดจะมีความชัดเจนดังภาพประกอบ 1-1(b) สรุปได้ว่าระบบมีความไว แต่ยังไม่ดีพอในการวินิจฉัยก้อนเนื้อ ข้อจำกัด

หลักๆของระบบ คือการวัดค่าความต้านทานแบบ 2 มิติ แม้ว่าระบบจะมีการวางอิเล็กโทรดทั้งในแนวตั้งและตามรัศมีวงกลม แนวทางในการพัฒนาคือการเพิ่มระดับการวางอิเล็กโทรด เพื่อที่จะให้ควบคุมได้ดีควรจะวางอิเล็กโทรดห่างกันมากกว่า 1 เซนติเมตร

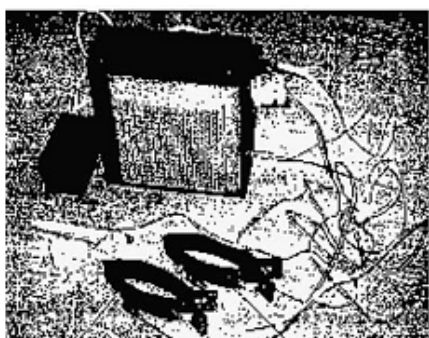


ภาพประกอบ 1-1 งานของกลุ่มวิทยาลัย Dartmouth (a) การติดตั้งอิเล็กโทรด (b) ภาพของสภาพยอมรับได้แบบสมบูรณ ที่ได้จาการวัดที่ความถี่ 750 กิโลเฮิร์ตซ์ [1]

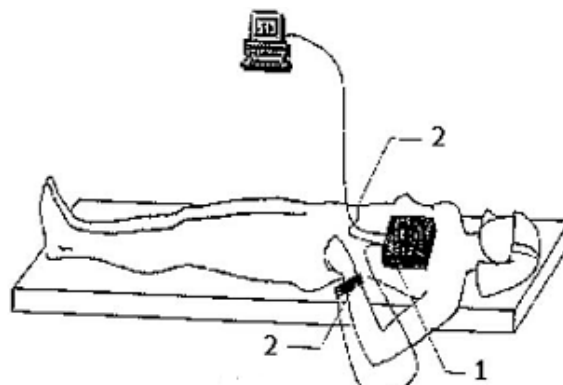
1.2.1.2 แมมโมกราฟของควมต้านทานไฟฟ้าที่ถูกพัฒนาโดย Technical University of Gdańsk มีการทดลองสร้างภาพตัดขวางควมต้านทานไฟฟ้าแบบ 3 มิติ ที่ประกอบด้วยหัววัด (sensing head), ตัวประมวลสัญญาณดิจิทัล (digital signal processor) และคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล โดยที่หัววัดประกอบด้วย hemisphere chamber ที่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 16 เซนติเมตรและมีการวางตัวของ 64 อิเล็กโทรด แบบหลายชั้น มีการจ่ายกระแสหรือแรงดันที่อิเล็กโทรดด้านนอก และวัดแรงดันหรือกระแสบริเวณอิเล็กโทรดด้านใน จากนั้นสร้างภาพด้วยวิธี perturbation ข้อดีก็คือรูปทรงที่จำกัดของ chamber ช่วยทำให้ปัญหาที่มีน้อยลงจากความไม่แน่นอนของรูปทรงของวัตถุ นอกจากนั้นสารละลายของเกลือ (saline solution) ระหว่างวัตถุที่พิจารณากับอิเล็กโทรดจะมีค่าความต้านทานสัมผัส (contact impedance) คงที่ระหว่างการวัด ข้อจำกัดคือ resolution ต่ำ เนื่องจากการวางตัวของ hemisphere ที่จำกัด ทำให้การสัมผัสระหว่างผิวหนังกับอิเล็กโทรดถูกจำกัดด้วยสำหรับขนาดของเต้านมที่แน่นอน

1.2.1.3 แมมโมกราฟทางไฟฟ้าของ TCI (Technology Commercialization International Inc.) ระบบการสร้างภาพตัดขวางควมต้านทานไฟฟ้าแบบ 3 มิติ แสดงดังภาพประกอบ 1.2 ประกอบด้วยอาร์เรย์ของอิเล็กโทรดที่ยื่นออกมาซึ่งทำจากเหล็กที่ไม่เป็นสนิม (stainless steel) ที่ถูก

จัดวางในชั้นของไดอิเล็กทริก ดังภาพประกอบ 1-2(a) มีอิเล็กโทรดทั้งหมด 256 ชั้น นอกจากนี้ยังมีอิเล็กโทรดที่ใช้จ่ายกระแสและใช้เป็นแรงดันอ้างอิงอยู่ที่ขั้วมือ ระหว่างการทดลองชั้นของอิเล็กโทรดจะถูกกดลงบริเวณด้านมให้แบนที่สุด จากนั้นจ่ายกระแสขนาด 1 มิลลิแอมป์ ที่มีความถี่ 10 กิโลเฮิร์ตซ์ เชื่อมต่อระหว่างอิเล็กโทรดกระแสบริเวณขั้วมือกับส่วนหนึ่งของอิเล็กโทรดในระนาบต่อมาวัดแรงดันระหว่างอิเล็กโทรดที่เหลือในระนาบกับอิเล็กโทรดที่เป็นแรงดันอ้างอิง ข้อมูลที่วัดได้ทั้งหมด 65,280 (256×255) ข้อมูล และสร้างภาพด้วยวิธีของแบค-โปรเจกชันที่มีการปรับปรุง (modified back-projection) การที่กดชั้นของอิเล็กโทรดจะช่วยเพิ่มจำนวนของอิเล็กโทรดที่สัมผัสด้านมและลดความหนาของชั้นของเนื้อเยื่อที่วัด เนื่องจากระยะทางที่ยาวระหว่างอิเล็กโทรดที่เป็นแรงดันอ้างอิงกับชั้นของอิเล็กโทรดทำให้สมมติพื้นผิวศักย์เท่า (equipotential surface) ของสนามไฟฟ้าได้ง่าย ทำให้การสร้างภาพง่ายขึ้น แต่ระหว่างการสร้างภาพค่าแรงดันที่วัดได้ไม่เพียงพอจึงถูกแทนด้วยค่าที่คำนวณได้จากสมมติฐานของการกระจายสภาพความนำไฟฟ้าของตัวกลางเอกพันธ์



(a)



(b)

ภาพประกอบ 1-2 การทดลองของ TCI (a) แผ่นที่ใช้วัด (sensing plates) และอิเล็กโทรดอ้างอิง (b) การใช้งานของอุปกรณ์ หมายเลข 1 คือชั้นของ 256 อิเล็กโทรด หมายเลข 2 คืออิเล็กโทรดที่อยู่ห่างไกล (remote electrode) [1]

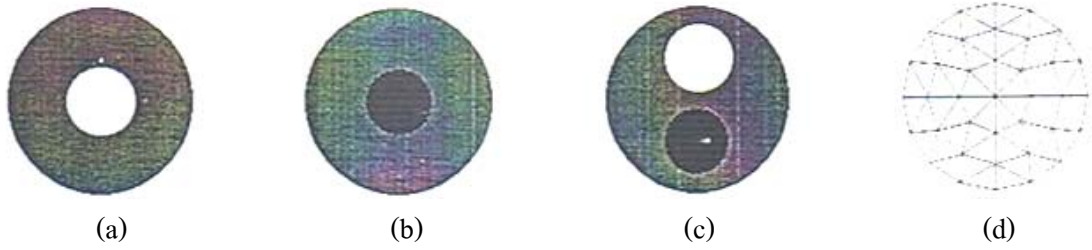
1.2.1.4 ระบบการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่นำเสนอโดย Resselaer Polytechnic Institute (RPI) ทำการจำลองโดยใช้แท่งรูปสี่เหลี่ยมและมีอิเล็กโทรดแบบทองแดง ขนาด 5×7 มิลลิเมตร จำนวน 16 แผ่น นอกจากนี้ยังบรรจุน้ำเกลือที่มีสภาพความนำไฟฟ้าเท่ากับ 300 มิลลิซีเมนส์ต่อเมตร แทนเนื้อเยื่อดีและก้อนมะเร็งแทนด้วยวัสดุที่ทำจากสาหร่ายซึ่งมีสภาพความนำไฟฟ้าเท่ากับ 900 มิลลิซีเมนส์ต่อเมตร โดยมีการเลื่อนตำแหน่งของก้อนมะเร็ง ผลปรากฏว่าในชั้นของอิเล็กโทรด การสร้างภาพของก้อนมะเร็งที่ตำแหน่งต่างๆมีคุณลักษณะที่ดี แต่ resolution ของความเข้ม (depth resolution) ของสีดำ และได้แนะนำให้เพิ่มจำนวนของอิเล็กโทรดในอาร์เรย์, โมเดล



อิเล็กทรอนิกส์แบบ shunting ให้ดีกว่านี้และผลกระทบของความต้านทานสัมผัส สุดท้ายปรับปรุง อัลกอริทึมของการสร้างภาพ

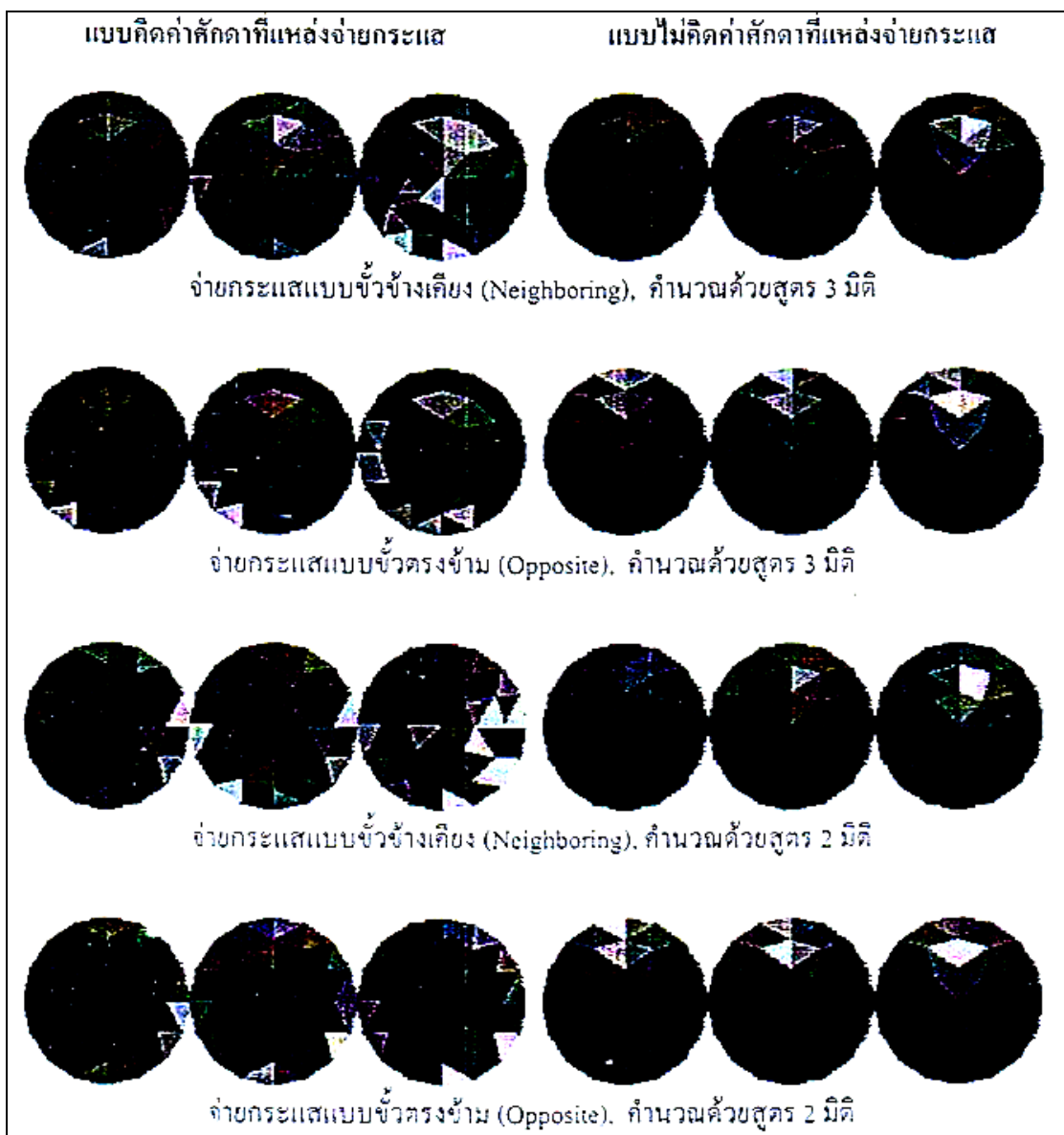
### 1.2.2 T. Thanetwarodom, “An Electrical Impedance Tomographic Image Reconstruction,” Master Thesis, King Mongkut’s Institute of Technology Ladkrabang, 2002.[2]

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอวิธีการสร้างภาพตัดขวางทางไฟฟ้าโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่โหนดต่างๆ และวิธีการประมาณค่าแบบนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) หาค่าความต้านทานภายในเอลิเมนต์ของวัตถุ การทดลองแบ่งเป็น 2 แบบคือการจำลองข้อมูล และการทดลองจริง ส่วนของการจำลองข้อมูลแยกย่อยเป็น 2 หัวข้อคือ หัวข้อแรกเป็นการเปรียบเทียบผลการสร้างภาพจากรูปแบบของการจ่ายกระแสมี 2 รูปแบบคือแบบข้างเคียง (adjacent) และข้างตรงข้าม (opposite) ผลปรากฏว่าการจ่ายกระแสแบบข้างเคียงให้ผลที่ดีกว่าแบบข้างตรงข้าม หัวข้อที่สองเป็นการปรับปรุงการกำหนดขนาดของเอลิเมนต์มี 2 แบบ คือแบบที่แต่ละเอลิเมนต์มีขนาดเท่ากัน และแบบที่เอลิเมนต์ข้างในมีขนาดใหญ่กว่าเอลิเมนต์ด้านนอก เปรียบเทียบกับแบบเดิมที่เอลิเมนต์ด้านในเล็กกว่าด้านนอก จากการจำลองข้อมูลพบว่า ลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์ของระบบที่นำเสนอให้ผลที่ชัดเจนดีกว่าแบบเดิม นอกจากนี้ยังได้พัฒนาอัลกอริทึมสำหรับระบบ 3 มิติขึ้นใหม่โดยการลดขั้นตอนในการคำนวณ ในส่วนของการทดลองจริงได้ทำการวัดข้อมูลจากถังน้ำเกลือที่มีขั้วอิเล็กทรอนิกส์ 16 ขั้ว เปรียบเทียบผลของการคำนวณแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ และเปรียบเทียบรูปแบบการจ่ายกระแส 2 แบบ โดยวัตถุที่ใช้ในการทดลองมีทั้งตัวนำและฉนวนไฟฟ้าและมีการจัดวางวัตถุ 3 รูปแบบ คือ วางฉนวนที่จุดศูนย์กลาง, วางตัวนำที่จุดศูนย์กลาง และวางทั้งฉนวนและตัวนำพร้อมกัน ดังภาพประกอบ 1.3 วัตถุทั้งสองเป็นรูปทรงกระบอกโดยฉนวนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 5.5 เซนติเมตร และตัวนำมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 เซนติเมตร นอกจากนี้ยังเปรียบเทียบผลการคำนวณแบบคิดค่าศักดาที่แหล่งจ่ายกระแสกับการคำนวณที่ตัดค่าดังกล่าวออกไป ผลปรากฏว่าการคำนวณแบบคิดค่าศักดาที่แหล่งจ่ายกระแส พบว่าการคำนวณด้วยสูตร 2 มิติ ไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้เนื่องจากระบบที่ใช้ในการทดลองเป็นแบบ 3 มิติ ลักษณะของข้อมูลที่วัดได้จึงต่างจากที่คำนวณได้ด้วยสูตร 2 มิติมาก ส่วนการคำนวณด้วยสูตร 3 มิติหาผลลัพธ์ได้แต่ไม่แม่นยำ เปรียบเทียบกับการคำนวณที่ไม่คิดค่าศักดาที่แหล่งจ่ายกระแส พบว่าวิธีนี้ให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าทั้งการคำนวณด้วยสูตร 2 มิติ และ 3 มิติ แต่สูตร 3 มิติ ให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าแบบ 2 มิติ ซึ่งสังเกตเห็นได้ว่าให้ผลลัพธ์ที่ไม่ดีนัก บริเวณขอบ สาเหตุที่เมื่อไม่นำค่าศักดาที่แหล่งจ่ายมาคำนวณแล้วได้ผลลัพธ์ที่ขึ้นเพราะว่า ค่าศักดาที่แหล่งจ่ายมีกระแสมาก จึงมีผลอย่างมากต่อการปรับค่าความต้านทาน ซึ่งอาจทำให้ความต้านทานของบางเอลิเมนต์มีการปรับค่ามากเกินไป และเกิดการลู่ออกของคำตอบได้ ดังภาพประกอบ 1-4



ภาพประกอบ 1.3 (a) แท่งจนวนที่จุดศูนย์กลางของถ้ง, (b) แท่งโลหะที่จุดศูนย์กลางของถ้ง, (c) ทั้งแท่งจนวนและแท่งโลหะ และ (d) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการจำลองและประมวลผล

[2]



ภาพประกอบ 1-4 ภาพตัดขวางที่สร้างได้จากถ้งน้ำเกลือบรรจุทั้งแท่งจนวนและแท่งตัวนำ โดยแสดงผลการกำนวนในการทำซ้ารอบที่ 8, 16 และ 32 [2]

**1.2.3 N. Polydorides and W.R.B. Lionheart, “A Matlab toolkit for three-dimensional electrical impedance tomography : a contribution to the Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software project,” *Physiol. Meas.*, no. 13, pp. 1871–1883, 2002. [3]**

วัตถุประสงค์ของโครงการ Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software (EIDORS) คือพัฒนาซอฟต์แวร์อิสระที่สามารถสร้างภาพจากคุณสมบัติทางไฟฟ้า หรือทางแสง จากการวัดที่ขอบของตัวกลาง เนื่องจากภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าและภาพตัดขวางทางแสง (optical tomography) เป็นปัญหาแบบไม่เป็นเชิงเส้นและ ill-posed ดังนั้นสามารถแก้ได้ด้วยการใช้โมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element model) สำหรับการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด และวิธีเรกูลาไรเซชันแบบไม่เป็นเชิงเส้น (regularized nonlinear) สำหรับการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส เพื่อให้ระบบแก้ได้ด้วยรูปแบบเดียวกัน (unique) และมีเสถียรภาพ (stability) โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ส่วนใหญ่ที่มีขายไม่เหมาะสำหรับแก้ปัญหานี้เพราะว่าด้อยประสิทธิภาพในการคำนวณจาโคเบียนเมทริกซ์ (jacobian matrix) และมีความบกพร่องทางด้านความถูกต้องของโมเดลเล็กโทรดในครั้งแรก Vauhkonen ได้ปล่อยแพคเกจสมบูรณ์แบบสำหรับปัญหาการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าแบบ 2 มิติออกมา อย่างไรก็ตามภาพที่ใช้ในทางอุตสาหกรรมหรือทางการแพทย์ส่วนใหญ่เป็นแบบ 3 มิติ ดังนั้นบทความนี้จึงนำเสนอเครื่องมือ (toolkit) ที่ใช้บนแพลตฟอร์ม (MATLAB) ซึ่งสามารถแก้ปัญหารีการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าแบบ 3 มิติทั้งแบบฟอร์เวิร์ด และอินเวอร์ส ที่อยู่บนพื้นฐานของโมเดลเล็กโทรดแบบสมบูรณ์ (complete electrode model) รวมทั้งแสดงการหาค่าอนุพันธ์ (derivation) ของจาโคเบียนเมทริกซ์บนพื้นฐานของโมเดลเล็กโทรดแบบสมบูรณ์

ในการทดลอง จะใช้โมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด และวิธีเรกูลาไรเซชันร่วมกับอัลกอริทึมของนิวตัน (regularized Newton's method) สำหรับการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส ข้อจำกัดของซอฟต์แวร์ในการสร้างเมชคือในแต่ละชั้นของอิเล็กโทรดจะต้องมีจำนวนอิเล็กโทรดที่เท่ากันและมีคุณลักษณะของความสมมาตร (ในที่นี้หมายถึงรูปร่างและพื้นที่สัมผัสของอิเล็กโทรดจะต้องเท่ากัน) สำหรับส่วนของการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด มีฟังก์ชันหลักที่เกี่ยวข้องในการประมวลผลคือเมทริกซ์ระบบ (system matrix หรือ jacobian matrix) ซึ่งใช้ในการคำนวณค่าสนามไฟฟ้าภายในโมเดล และมีฟังก์ชันต่างๆที่ใช้ในการแก้สมการเช่น `bld_master` และ `bld_master_full` ใช้หาค่าเมทริกซ์ระบบ, `fem_master_full` เป็นตัวกระทำแบบฟอร์เวิร์ด (forward operator) นอกจากนี้ยังมีฟังก์ชันอื่นๆที่เกี่ยวข้องเช่น `set_3d_current` ใช้กำหนดรูปแบบของกระแสที่จ่ายบนอิเล็กโทรดในชั้นเดียวกัน แต่ `set_multi_current` ใช้สำหรับทุกชั้นของอิเล็กโทรด ฟังก์ชัน `forward_solver` ใช้ในการคำนวณแบบฟอร์เวิร์ด ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าสภาพความนำ

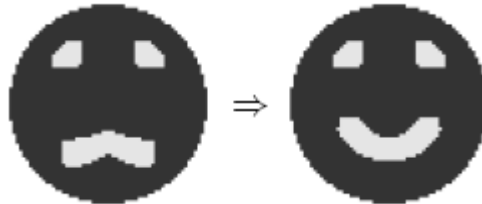
ไฟฟ้า และ jacobian\_3d ใช้คำนวณหาค่าจาโคเบียนเมตริกซ์ที่มีค่าความนำไฟฟ้าเป็นจำนวนจริง เป็นต้น เพื่อที่จะแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส วิธีหนึ่งคือขจัดเทอมของอนุพันธ์อันดับสองที่เกิดจากการขยายตัวของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor expansion), สร้างจาโคเบียนของปัญหาแบบอินเวอร์สอย่างมีประสิทธิภาพและใช้อัลกอริทึมของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Rapson) แปลงกลับเป็นปัญหาแบบ well-posed อีกวิธีหนึ่งคืออาจจะพิจารณาความเป็นเชิงเส้นของการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส และนำเอาเรกูลาไรเซชันแบบ Tikhonov (Tikhonov regularization) มาแก้ปัญหาร่วมกับอัลกอริทึมแบบ นิวตัน-ราฟสัน หลักสำคัญสำหรับการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส คือความมีเสถียรภาพ (ค่าความผิดพลาดเศษตกค้างน้อยที่สุด)

จุดประสงค์ของผู้จัดทำเพื่อให้สามารถใช้ประโยชน์จากซอฟต์แวร์ในการสร้างภาพการกระจายของสภาพความนำหรือความต้านทานไฟฟ้าแบบสามมิติ แม้ว่าการใช้งานจริงจะต้องมีการปรับค่าพารามิเตอร์หลายตัวเช่น ค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้สำหรับตัวแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด และพารามิเตอร์ของเรกูลาไรเซชัน (regularization parameter) เป็นต้น นอกจากนี้ซอฟต์แวร์ยังทำความเข้าใจง่ายสำหรับคนที่มีความรู้พื้นฐานทางแมทแลป แต่มีข้อจำกัดคือต้องใช้ทรัพยากรในการคำนวณมากขึ้นอยู่กับระบบ และเวลาในการแก้ปัญหานั้น

#### 1.2.4 A. Adler and W.R.B. Lionheart, “ Uses and abuses of EIDORS: an extensible software base for EIT ,” *Physiol. Meas.*, no. 27, pp. 25–42, 2006. [4]

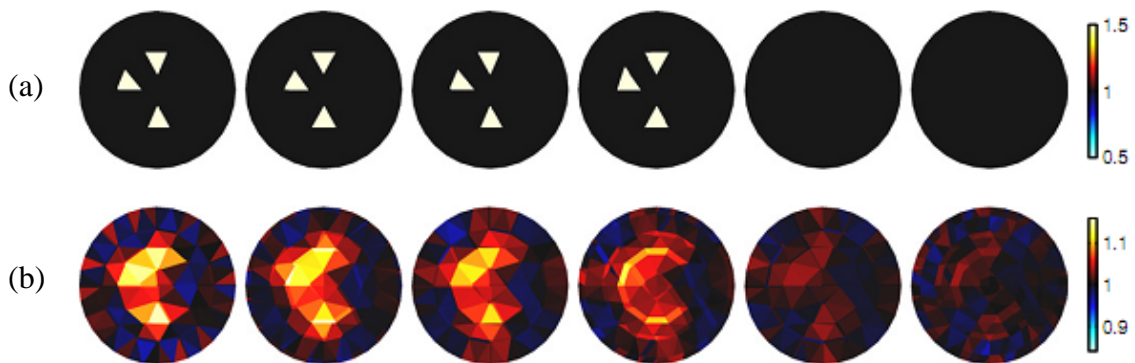
บทความนี้กล่าวถึงสถาปัตยกรรมของซอฟต์แวร์ EIDORS (Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software) และความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นได้จากการใช้ซอฟต์แวร์สถาปัตยกรรมของซอฟต์แวร์ EIDORS ประกอบด้วย fwd\_model (forward model), data, inv\_model (inverse model) และ image โดยส่วนที่ซับซ้อนที่สุดคือ fwd\_model ซึ่งถูกออกแบบให้แทนโมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์, ตำแหน่งและคุณสมบัติของอิเล็กโทรด และรูปแบบของการกระตุ้น (จ่ายกระแสและวัดแรงดัน) พร้อมด้วยฟังก์ชันที่ใช้แก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด (การคำนวณหาค่าการกระจายของศักดาไฟฟ้าภายในโมเดลจากค่าแรงดันที่วัดได้บริเวณอิเล็กโทรด) สำหรับ data แทนจำนวนของข้อมูลที่วัดหรือจำลองได้ ส่วน inv\_model ประกอบด้วยข้อมูลที่จำเป็นในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าโดยแบ่งออกเป็นสองชนิดคือแบบต่างกันเป็นสร้างภาพจากข้อมูลที่แตกต่างกัน 2 ข้อมูล และ แบบคงที่เป็นสร้างภาพจากข้อมูลเดี่ยว ส่วน image ใช้แสดงภาพของค่าอิมพีแดนซ์ที่เปลี่ยนแปลงไป

ความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นได้จากการใช้ซอฟต์แวร์ EIDORS ยกตัวอย่างเช่นการเปลี่ยนรูปเป็นแบบหน้ายิ้มดี (happy transform) ดังภาพประกอบ 1-5 สมมติให้ข้อมูลการวัดที่ได้จากการจำลองโมเดลขนาด 2 มิติ ได้ภาพคล้ายคลึงหน้าเศร้า แต่ภาพที่สร้างขึ้นกลายเป็นหน้ายิ้มดี



ภาพประกอบ 1-5 แสดงภาพความผิดพลาดแบบ happy transform [4]

วิธีที่จะหลีกเลี่ยงความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้น คือ 1) ระวังการเลือกขนาดของสัญญาณรบกวน 2) ระวังการเลือกค่าข้อมูลก่อนหน้า (prior information) ซึ่งเกี่ยวข้องกับเมตริกซ์ของเรกูลาไรเซชัน 3) การเลือกค่า prior ของขอบ (edge-based priors) โดยใช้ฟิลเตอร์ที่ไวต่อขอบ หรือที่เรียกว่าฟิลเตอร์แบบลาปลาเซียน (laplacian) และ 4) ความผิดพลาดของการสร้างภาพจากแท่งปริซึมจำนวนสามแท่ง (reconstruction of three fingers) ดังภาพประกอบ 1-6 แสดงภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าเปรียบเทียบกับภาพอ้างอิงที่ความสูงต่างกัน



ภาพประกอบ 1-6 (a) ภาพตัดขวางของแท่งปริซึมสามแท่งใน โมเดล (b) การสร้างภาพของแท่งปริซึมสามแท่ง จากซ้ายไปขวา ภาพตัดขวางบนแกน z ที่ 0.1, 0.83, 1.1, 1.72, 2.1, และ 2.63 เซนติเมตร[4]

**1.2.5 A. Adler, A. Borsic, N. Polydorides and W.R.B Lionheart, (2008, June). Simple FEMs aren't as good as we thought: experiences developing EIDORS v3.3, The University of Manchester. Manchester, England. [Online]. Available: [http://eprints.ma.man.ac.uk/1114/01/covered/MIMS\\_ep2008\\_64.pdf](http://eprints.ma.man.ac.uk/1114/01/covered/MIMS_ep2008_64.pdf) [5]**

บทความนำเสนอหัวข้อหลัก 3 หัวข้อ ดังนี้

#### 1.2.5.1) คุณลักษณะใหม่ที่มีเพิ่มมาใน EIDORS เวอร์ชัน 3.3

- อินเตอร์เฟซ (interface) ของตัวสร้าง โมเดล ไฟไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งได้แก่ dismesh และ Netgen

- รองรับการแก้ปัญหาแบบ โมเดลคู่ (dual model solver) โดยในส่วนของ การแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ดจะสร้างโมเดลที่มีจำนวนไฟไฟไนต์เอลิเมนต์หนาแน่นมาก (fine model) เพื่อความถูกต้องของขนาดและตำแหน่งของวัตถุที่ต้องการตรวจจับ (inhomogenous object) และส่วนของการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์สจะสร้างโมเดลที่มีจำนวนเมช (mesh) หนาแน่นน้อย (coarse model) เพื่อให้การแก้สมการมีความซับซ้อนน้อยลง ระหว่างการแก้สมการจะมีการแมปโมเดลโดยมีสมการดังนี้

$$\sigma_f = P\sigma_c \quad (1.1)$$

$\sigma_f$  คือ เวกเตอร์เอลิเมนต์ของค่าสภาพความนำไฟฟ้า (conductivity) ของ fine model

$\sigma_c$  คือ เวกเตอร์เอลิเมนต์ของ coarse model

$P$  คือ โพรเจกชันเมทริกซ์ (projection matrix) จาก coarse ไปยัง fine model

- อัลกอริทึมใหม่ ได้แก่ total variation, ตัวแก้ปัญหาที่เกิดจากการเคลื่อนไหวของอิเล็กโทรด (electrode movement solver) และ temporal solver

- ข้อมูลที่เก็บได้จากโมเดลต่างๆจากคลินิกและการทดลอง (Data repository with several contributed models)

- อัลกอริทึมที่เร็วขึ้น (Faster algorithms) สำหรับการคำนวณของ Total Variation PDIPM, สำหรับจาโคเบียนมีการแคลคูลัสขึ้น และตัวแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ดซึ่งช่วยประหยัดหน่วยความจำถ้าต้องการ

- กราฟฟิกที่พัฒนาขึ้นและหน่วยความรู้ (tutorials) ที่ครอบคลุมมากขึ้น

#### 1.2.5.2) การพิจารณาการใช้ dual model ในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า และสถาปัตยกรรมที่รองรับ

- เมชที่สัมพันธ์กัน (corresponding meshes) หมายถึงโมเดลที่มีจำนวนเมชน้อยบรรจุลงในโมเดลที่มีจำนวนเมชมากอย่างสมบูรณ์ โดยไม่ก่ายกัน

- Nodal Solvers ซึ่งหมายถึงพารามิเตอร์การสร้างภาพความนำไฟฟ้าในแต่ละจุดต่อ (nodes)

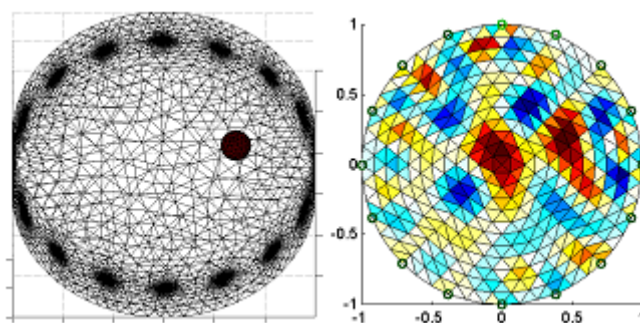
- $2^{1/2}$  2D Solvers วิธีการคือฉายโมเดลแบบสามมิติที่มีจำนวนเมชมากตาม

แกน z ลงบนโมเดลการสร้างภาพขนาด 2 มิติ เทคนิคนี้ใช้กันอย่างแพร่หลายในการประยุกต์ใช้ทางกายภาพ (geophysical)

- Constraining Reconstruction Parameters ใช้ในกรณีที่มีพารามิเตอร์อยู่นอกชั้นของความนำไฟฟ้า (บริเวณที่มีความไวต่ำ)

- การแก้ปัญหของกริดที่มีพิกเซลแบบสี่เหลี่ยม (Solving to a Square Pixel Grid)

1.2.5.3) ความถูกต้องของโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยทั่วไปจะพิจารณาความผิดพลาดของแรงดันระหว่างโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ และหุ่น (phantom) วิธีง่ายที่สุดคือการจำลองเป้าหมายที่เคลื่อนที่ (moving target) ในตัวกลาง วิธีที่เหมาะสมที่สุดในการจำลองเป้าหมายที่เคลื่อนที่คือการสร้างขอบของเป้าหมายภายในโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ และสร้างเมชใหม่รอบๆซึ่งหมายถึงการเปลี่ยนแปลงระหว่างตำแหน่งของแต่ละเป้าหมาย ไม่เพียงแต่เมชที่อยู่ใกล้เป้าหมาย แต่ยังรวมถึงโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากการกระจายของการเปลี่ยนแปลงในเอลิเมนต์ โดยมีข้อเสนอว่าถ้าเป็นโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติควรมีเอลิเมนต์อย่างน้อย  $10^4$  เอลิเมนต์ และโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติควรมีเอลิเมนต์อย่างน้อย  $10^6$  เอลิเมนต์ ดังภาพประกอบ 1-7 ด้านซ้ายมือคือโมเดลขนาดสามมิติที่สร้างโดย Netgen ของการเคลื่อนที่ของลูกบอลในแท่งที่มี 16 อิเล็กโทรด 131,640 เอลิเมนต์ ขวามือคือภาพที่สร้างขึ้น เห็นได้ชัดว่าเกิดความผิดพลาดเนื่องจากจำนวนของเอลิเมนต์ที่ไม่เพียงพอ



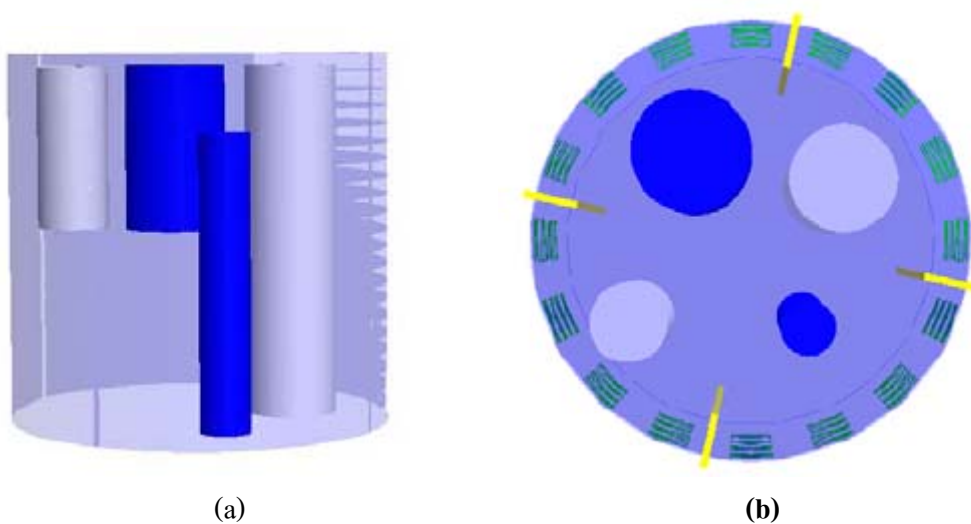
ภาพประกอบ 1-7 ด้านซ้ายมือคือโมเดลขนาดสามมิติที่สร้างโดย Netgen ขวามือคือภาพที่สร้างขึ้น

[5]

1.2.6 D.R. Stephenson, J.L. Davidson, W.R.B. Lionheart, B.D. Grieve and T.A. York, “Comparison of 3D Image Reconstruction Techniques using Real Electrical Impedance Measurement Data,” In Proc: 4<sup>th</sup> World Congress on Industrial Process Tomography, Japan, 2005. [6]

บทความได้นำเสนอการเปรียบเทียบผลของภาพความต้านทานไฟฟ้าขนาดสามมิติที่ใช้ข้อมูลจากการวัดค่าแรงดันโดยการนำอัลกอริทึมที่นิยมใช้ในการสร้างภาพมาเปรียบเทียบกันดังนี้ วิธีแบค-โปรเจกชันแบบเชิงเส้น (Linear Back-Projection), วิธีแลนด์เวเบอร์แบบเชิงเส้น (Linear Landweber), วิธีคอนจูเกตเกรเดียนต์แบบเชิงเส้น (Linear Conjugate Gradient), วิธีเรกูลาไรเซชันร่วมกับเกาส์-นิวตันแบบเชิงเส้น (Linear Regularised Gauss-Newton) และ วิธีเรกูลาไรเซชันร่วมกับเกาส์-นิวตันแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Non-Linear Regularised Gauss-Newton) โมเดลที่ใช้เป็นแท็งก์รูปทรงกระบอกเส้นผ่าศูนย์กลาง 61 เซนติเมตร สารละลายมีความนำไฟฟ้าประมาณ 0.1 ซีเมนส์ต่อเมตร ประกอบด้วยอิเล็กโทรด 4 ชั้น ชั้นละ 16 อิเล็กโทรด และอิเล็กโทรดเป็นแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 6 ตารางเซนติเมตร แต่ละชั้นของอิเล็กโทรดห่างกัน 4 เซนติเมตร และเก็บข้อมูลโดยใช้เครื่อง LCT2 (the University of Manchester/ Syngenta) ซึ่งสามารถจ่ายกระแสและวัดแอมพลิจูด (amplitude) และมุมเฟส (phase angle) ของแรงดันบนอิเล็กโทรดได้สูงสุดถึง 64 อิเล็กโทรด โดยจ่ายกระแสแบบขั้วข้างเคียงในชั้นเดียวกันและวัดข้อมูลได้ 3,904 ข้อมูล การคำนวณในส่วนปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด และจาโคเบียนใช้เครื่องมือ (toolkit) ของซอฟต์แวร์ EIDORS-3D การสุ่มโดเมน (สำหรับ โมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งฟอร์เวิร์ดและอินเวอร์ส) โดยใช้โปรแกรม Netgen เป็นตัวสร้างเมชแบบอัตโนมัติ และแสดงผลใน MayaVi ซึ่งเป็นแพคเกจที่แสดงผลทางวิทยาศาสตร์แบบเปิดกว้าง (open source)

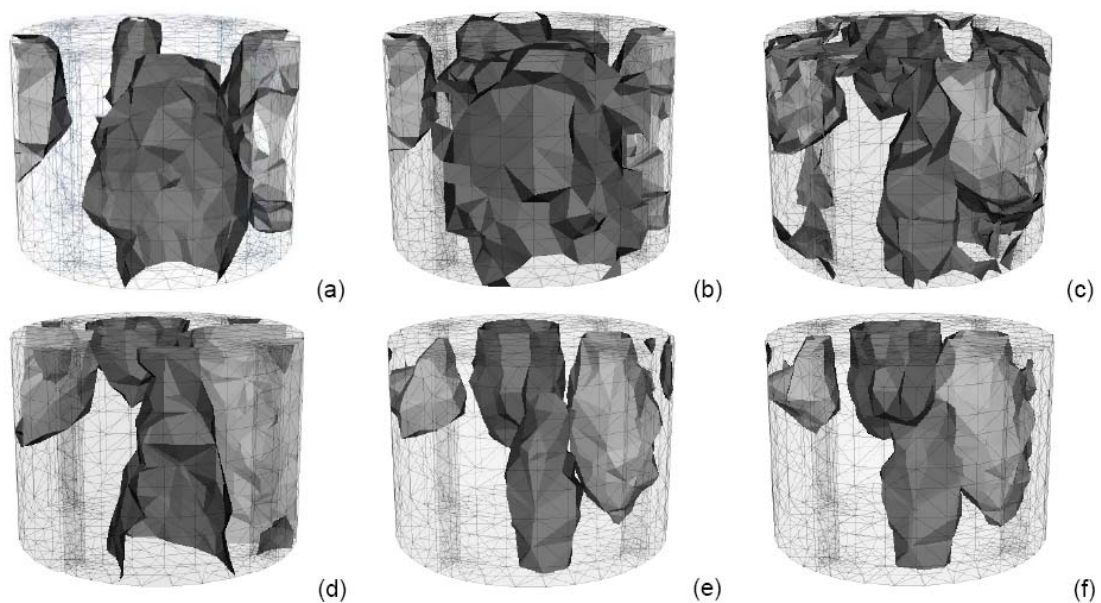
ในการทดลอง วางวัตถุที่เป็นแท่งทั้งแบบโลหะ (สว่าง) และพลาสติก (มืด) ดังภาพประกอบ 1-8



ภาพประกอบ 1-8 ตำแหน่งของวัตถุในโมเดลรูปทรงกระบอก (a) ภาพสามมิติมองจากด้านหน้า, (b) มองจากด้านบน[6]



ผลการทดลองแสดงดังภาพประกอบ 1-9(a) พบว่าวิธีแบค-โปรเจกชันแบบเชิงเส้นไม่สามารถระบุขอบของวัตถุและทำให้ตำแหน่งของวัตถุเลื่อนไปยังขอบของโมเดล แม้ว่าจะยังคงใช้กันอย่างแพร่หลาย ภาพประกอบ 1-9(b) แสดงผลการสร้างภาพจากวิธีแลนด์เวเบอร์รอบที่ 5 ซึ่งมีค่าการผ่อนคลาย (relaxation) อยู่ที่  $1 \times 10^{-6}$  จะเห็นว่าผลที่ได้คล้ายกับวิธีแบค-โปรเจกชันแบบเชิงเส้น แต่เส้นผ่าศูนย์กลางของพลาสติกมีค่ามากขึ้นไปเมื่อเปรียบเทียบกับอัลกอริทึมตัวอื่น สำหรับวิธีเรกูลาไรเซชันร่วมกับเกาส์-นิวตันแบบเชิงเส้นที่มีค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์เท่ากับ  $1 \times 10^{-6}$  และเมทริกซ์ของเรกูลาไรเซชันเป็นตัวกระทำอันดับหนึ่งบนจุดต่อของเมฆในไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อให้ภาพเรียบขึ้น จากภาพประกอบ 1-9(c) พบว่าการกระจายของตัวนำไฟฟ้าที่ถูกสร้างขึ้นมีความชัดเจนกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับสองวิธีแรก แต่ยังคงเกินกว่าความเป็นจริง ภาพประกอบ 1-9(d) พบว่าสามารถลดจำนวนวัตถุที่ถูกสร้างขึ้นจากวิธีเรกูลาไรเซชันร่วมกับเกาส์-นิวตันแบบไม่เป็นเชิงเส้น อย่างไรก็ตามเมื่อเปรียบเทียบกับภาพประกอบ 1-9(e) ข้อจำกัดก็คือความคมชัดของการสร้างภาพการกระจายของสภาพความนำไฟฟ้าพร้อมการใช้ค่าเงื่อนไขก่อนหน้า ความสำเร็จของอัลกอริทึมคอนจูเกตเกรเดียนต์แบบเชิงเส้นในการสร้างภาพคือ ผลของวิธีเรกูลาไรเซชันร่วมกับการทำซ้ำ และไม่ได้ใช้ค่าเงื่อนไขก่อนหน้ากับการกระจายตัวของเป้าหมายที่ไม่ราบเรียบ ผลที่น่าสนใจดังแสดงดังภาพประกอบ 1-9(f) ซึ่งเป็นการสร้างภาพจากคอนจูเกตเกรเดียนต์แบบเชิงเส้นที่ถูกประยุกต์ใช้กับวิธีวัดแบบสองมิติ (2D measurement strategy) การจ่ายกระแสและวัดแรงดันถูกจำกัดให้ทำกับอิเล็กโทรดในชั้นเดียวกัน ทำให้วัดแรงดันได้ทั้งหมด 416 ค่า



ภาพประกอบ 1-9 แสดงภาพการแพร่กระจายค่าความนำไฟฟ้าภายใน โมเดลสำหรับ (a) Linear Back-Projection, (b) Linear Landweber, (c) Linear Regularised Gauss-Newton, (d) Non-Linear Regularised Gauss-Newton, (e) Linear Conjugate Gradient และ (f) linear conjugate gradients ใช้การวัดแบบสองมิติ [6]

ผลที่นำเสนอในบทความนี้เป็นทางเลือกผลจากการเปรียบเทียบอัลกอริทึมกับการจัดวางวัตถุที่แตกต่างกันและกลยุทธ์ในการวัด ตารางที่ 1-1 แสดงภาพรวมของงานที่มีการเปรียบเทียบอัลกอริทึม โดยความสามารถในการสร้างภาพการแพร่กระจายของเป้าหมาย หมายเลข 1 แสดงว่าผลดีที่สุดและ หมายเลข 5 แสดงว่าผลไม่ดีที่สุด พบว่าทั้ง วิธีเรกูลาไรเซชันร่วมกับเกาส์-นิวตันแบบไม่เป็นเชิงเส้น และวิธีคอนจูเกตเกรเดียนต์แบบเชิงเส้นยังคงให้ผลที่ดี อย่างไรก็ตาม วิธีคอนจูเกตเกรเดียนต์แบบเชิงเส้นยังคงให้ผลที่ดีกว่าในกรณีที่มีวัตถุหลายตัว โดยดูจากความคมชัดของการกระจายของค่าความนำไฟฟ้า

Phantom Arrangement	Linear Back Projection	Landweber	Linear Conjugate Gradients	Linear Tikhonov Regularised Gauss-Newton	Non-Linear Tikhonov Regularised Gauss-Newton
Single cylinder	5	4	2	3	1
Multiple cylinders	4	5	1	3	2
Suspended cylinder	4	5	1	3	2

ตารางที่ 1-1 ภาพรวมของผลงานของอัลกอริทึมที่ใช้สร้างภาพโดยการจัดวางวัตถุหลายแบบ [6]

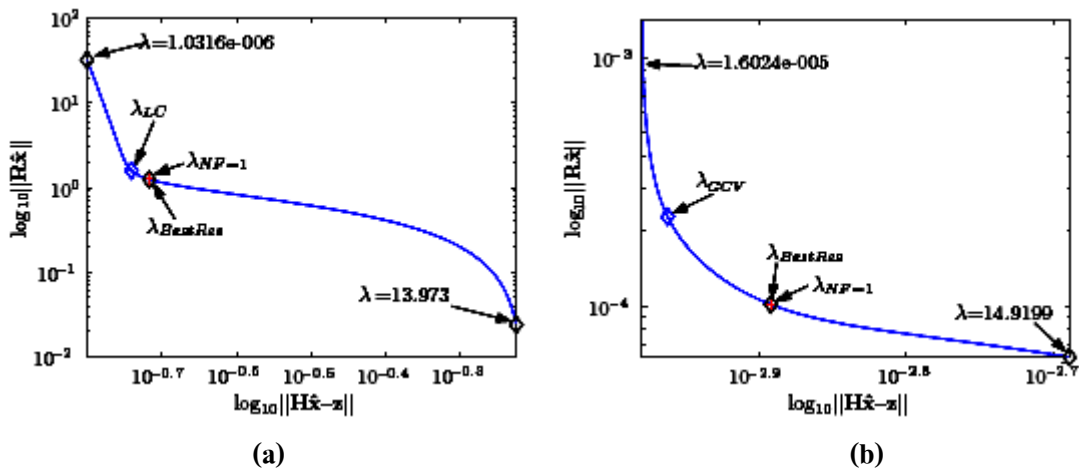
นอกจากนี้ยังได้นำเสนอวิธีการวัด ในการทดลองก่อนหน้านี้เป็นการวัดแบบข้างข้างเคียง (adjacent strategy) และวัดแรงดันในแนวนอนเท่านั้น โดยมีข้อแนะนำที่สำคัญว่าควรวัดทั้งแนวนอนและแนวตั้ง

### 1.2.7 B.M. Graham and A. Adler, “ Objective selection of hyperparameter for EIT ,” *Physiol. Meas.*, no. 27, pp. 65–79, 2006. [7]

บทความกล่าวถึงการเลือกค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ (hyperparameter) สำหรับขั้นตอนวิธี (algorithm) ที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่เป็นเชิงเส้นแบบไม่ทำซ้ำ โดยไฮเปอร์พารามิเตอร์เป็นตัวควบคุมการแลกเปลี่ยนระหว่างการแก้ปัญหาที่สอดคล้องกับข้อมูลจากการวัดและข้อมูลก่อนหน้า แทนด้วยสัญลักษณ์  $\lambda$  บทความนี้นำเสนอการหาค่าและเปรียบเทียบวิธีเลือกค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ที่แตกต่างกัน 5 วิธี โดยวิธีที่นำเสนอเรียกว่า ‘BestRes’ (Best Resolution) และเปรียบเทียบผลกับวิธีที่มีอยู่แล้ว ได้แก่ 1) การเลือกโดยแปรผันค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ (heuristic selection), 2) L-curve, 3) generalized cross-validation (GCV) และ 4) Fixed noise figure (NF)

1.2.5.1 การเลือกโดยแปรผันค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ เป็นการสร้างภาพโดยแปรผันค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์เป็นช่วงกว้าง จากนั้นเลือกภาพที่ดีที่สุด ซึ่งมีข้อเสียตรงที่การตัดสินใจของแต่ละคนอาจไม่ตรงกัน และเมื่อผ่านไปนานๆ เมื่อนำกลับมาทำใหม่ค่าที่เลือกอาจไม่ใช่ค่าเดิม

1.2.5.2 L-curve ทำโดยพล็อตค่า semi-norm ของการแก้ปัญหาด้วยวิธีเรกูลาไรเซชันซึ่งมีค่าเท่ากับ  $\log_{10} \|R\hat{x}\|$  เทียบกับนอร์ม (norm) ของเวกเตอร์เศษตกค้างที่สัมพันธ์กัน (corresponding residual) มีค่าเท่ากับ  $\log_{10} \|H\hat{x} - z\|$  โดย  $R$  คือ เมตริกซ์ของเรกูลาไรเซชัน  $\hat{x}$  คือค่าประมาณของการเปลี่ยนแปลงสภาพความนำไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจริง  $H$  คือจาโคเบียนเมตริกซ์ และ  $z$  คือความเปลี่ยนแปลงของสัญญาณที่วัดได้ในช่วงเวลาหนึ่ง มีค่าเท่ากับ  $(v_2 - v_1)/v_1$  โดย  $v_1$  คือสัญญาณที่วัดได้ที่เวลา  $t_1$  มักใช้เป็นกรอบอ้างอิง (reference frame) และ  $v_2$  คือสัญญาณที่วัดได้ที่เวลา  $t_2$  ใช้เป็นกรอบข้อมูล (data frame) ผลของการพล็อตแสดงดังภาพประกอบ 1-10(a) ซึ่งมีรูปร่างเป็นรูปตัว “L” และค่าที่ดีที่สุดของไฮเปอร์พารามิเตอร์อยู่ที่จุดบนส่วนที่โค้งที่สุด ซึ่งเรียกว่า  $\lambda_{LC}$  ข้อเสียของวิธีนี้คือในบางกรณีอาจจะไม่เกิดโค้งตัว “L” ดังภาพประกอบ 1-10(b)



ภาพประกอบ 1-10 ตัวอย่างการสร้างโค้งตัว “L” (L-curves) จากข้อมูลของโมเดลแบบสองมิติ โดยมีเมฆจำนวน 576 เอลิเมนต์ (a) ใช้เรกูลาไรเซชันเมตริกซ์แบบ tikhonov ( $R_{\text{Tik}}$  prior), (b) ใช้เรกูลาไรเซชันเมตริกซ์ที่มีค่าเท่ากับ  $\text{diag}(H)$  แทนด้วยสัญลักษณ์  $R_{\text{diag}}$  ปรากฏว่าไม่สามารถชี้ค่าที่มุม [7]

1.2.5.3 generalized cross-validation (GCV) มีหลักสำคัญคือถ้าข้อมูลของเอลิเมนต์บางตัวถูกกำจัดออกไปแล้ว การแก้ปัญหาด้วยวิธีเรกูลาไรเซชันควรจะทำนายข้อมูลของเอลิเมนต์ที่หายไป ข้อดีก็คือไม่ต้องมีข้อมูลก่อนหน้าที่เกี่ยวกับความผิดพลาดของนอร์ม ดังสมการที่ (1.2) อย่างไรก็ตามวิธีการนี้ก็มีข้อเสียคือสามารถทำได้การแก้ปัญหาด้วยวิธีเรกูลาไรเซชันเท่านั้น

$$GCV(\lambda) = \frac{\|H\hat{x} - z\|^2}{\text{trace}(I - HB)^2} \quad (1.2)$$

$H$  คือจาโคเบียนเมตริกซ์,  $\hat{x}$  คือค่าประมาณของการกระจายของความนำไฟฟ้าตามจริง,  $z$  คือค่าแรงดันที่เปลี่ยนไป,  $I$  คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) และ  $B = (H^T W H + \lambda R)^{-1} H^T W$  โดย  $W$  คือสัญญาณรบกวนของระบบ,  $\lambda$  คือค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์และ  $R$  คือเรกูลาไรเซชันเมตริกซ์

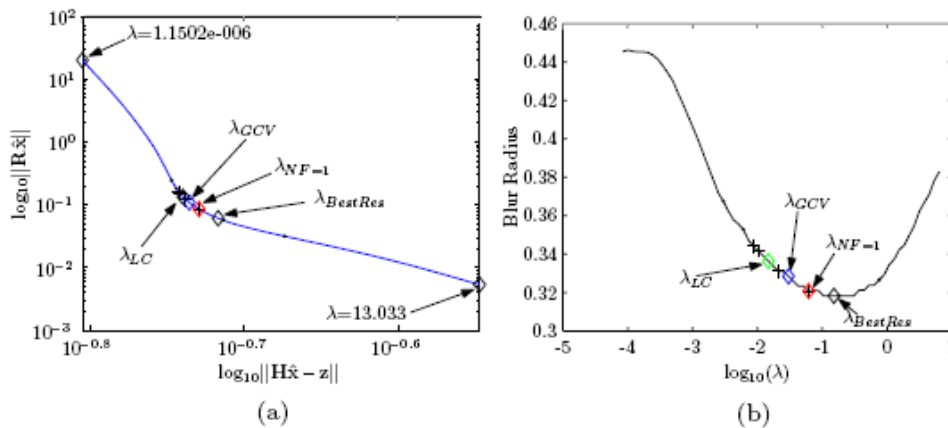
1.2.5.4 วิธี Fixed noise figure (NF) เป็นการคำนวณรูปร่างของสัญญาณรบกวน (noise figure) โดย NF คืออัตราส่วนของอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (signal-to-noise ratio: SNR) ในการวัดต่อ SNR ในภาพ

$$NF = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} = \left( \frac{\text{mean}[z_c]}{\sqrt{\text{var}[n]}} \right) \bigg/ \left( \frac{\text{mean}[Bz_c]}{\sqrt{\text{var}[Bn]}} \right) \quad (1.3)$$

สัญญาณที่ใช้คือ  $z_c = Hx_c$  โดย  $x_c$  คือความคมชัดต่ำบริเวณตรงกลางของตัวกลาง ผู้ใช้สามารถเลือกค่า  $NF$  และ  $\lambda$  ที่สัมพันธ์กันโดยใช้เทคนิคการแบ่งครึ่งช่วง (bisection) ปกติจะมีค่า  $NF = 1$  แทนด้วยสัญลักษณ์  $\lambda_{NF=1}$  ถ้ากราฟของ  $\log(NF)$  เทียบกับ  $\log(\lambda)$  มีรูปร่างคล้ายเส้นตรงแสดงว่าการแก้ปัญหาคิดด้วย

1.2.5.5 วิธีการของ *BestRes* ดังภาพประกอบ 1-11 เป็นการแนะนำแผนการเลือกค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ ดังนี้

- ภาพที่มีการเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด (Image an impulse contrast) สามารถแยกออกได้ 2 วิธีคือ
  - 1) การเก็บข้อมูลจริงโดยเก็บข้อมูลจากตัวกลางที่เป็นเอกพันธ์ (homogeneous) จากนั้นเก็บข้อมูลโดยวางหุ่นทางกายภาพ (physical phantom) บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดศูนย์กลางกับขอบของตัวกลาง ( $r/2$ )
  - 2) โดยการจำลองข้อมูล จากตัวกลางที่เป็นเอกพันธ์ จากนั้นเก็บข้อมูลโดยเปลี่ยนค่าความนำไฟฟ้าของเอลิเมนต์เดียวที่ตำแหน่ง  $r/2$
- การสร้างภาพด้วยฟังก์ชันของค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์และพล็อตโค้งความละเอียด (resolution curve) ที่สัมพันธ์กัน
- หาค่า  $\lambda_{BestRes}$  โดยดูจากจุดที่มีค่าความละเอียด (resolution) สูงที่สุด และค่า BR (blur radius) ต่ำที่สุด



ภาพประกอบ 1-11 เปรียบเทียบค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ที่เลือกจากวิธีต่างๆ (a) L-curve และ (b) โค้งความละเอียดโดยจุดที่ไม่ได้ระบุคือการเลือกแบบ heuristic [7]

การทดลองแบ่งออกเป็น 3 กรณี โดยการจำลองขึ้นมา และการทดลองวัดจริง และเปรียบเทียบผลจากค่า blur radius (BR) สรุปได้ดังนี้

1) การเลือกโดยแปรผันค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ เนื่องจากเกิดความขัดแย้งระหว่างผู้เชี่ยวชาญกับการไม่ทำซ้ำ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่ผู้เชี่ยวชาญจะเลือกไฮเปอร์พารามิเตอร์ที่ชอบมากกว่าเพียงค่าเดียว ในทางตรงข้ามอาจเลือกจากขอบเขตของไฮเปอร์พารามิเตอร์ซึ่งการสร้างภาพอาจมองเห็นความแตกต่างได้ยาก

2) วิธี GCV ไม่น่าเชื่อถือสำหรับอัลกอริทึมที่ใช้ในการทดลอง

3) L-curve จะดีเมื่อค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ต่ำกว่าวิธี Fixed NF และ *BestRes* แต่โดยทั่วไปยังไม่ดีพอสำหรับการประยุกต์ใช้ทางด้านภาพตัดขวางความดันทานไฟฟ้า

4) สำหรับ  $NF = 1$  วิธี Fixed NF จำนวนไฮเปอร์พารามิเตอร์อยู่ที่จุดต่ำสุดของโค้งความละเอียด ถ้าสัญญาณรบกวนมีค่าน้อย ไฮเปอร์พารามิเตอร์จะมีค่าใกล้เคียงกับ *BestRes* มาก แต่ถ้าเพิ่ม AWGN (additive white Gaussian noise) ลงไปในการจำลองข้อมูล พบว่า  $\lambda_{BestRes}$  มีค่าเพิ่มขึ้น แต่  $\lambda_{NF=1}$  มีค่าเท่าเดิม

5)  $\lambda_{BestRes}$  ให้ค่าที่ดีที่สุด ในเทอมของ BR

**1.2.8 B.M. Graham and A.Adler, “A Nodal Jacobian Inverse solver for Reduced Complexity EIT Reconstruction,” International Journal for Information & Systems Sciences, Special Issue on Computational Aspect of Soft Field Tomography, Volume 2, Number 4 , 2006. [8]**

อัลกอริทึมส่วนใหญ่ในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าใช้โมเดลที่มีสภาพความนำไฟฟ้าคงที่ซึ่งพิจารณาค่าคงที่บนเอลิเมนต์ เนื่องจากต้องการจำนวนของเอลิเมนต์และการวัดข้อมูลปริมาณมากเพื่อใช้สร้างภาพสามมิติ ทำให้เกิดปัญหาหลายประการ ยกตัวอย่างเช่น ความไม่เพียงพอของทรัพยากรที่มีอยู่ (computation resource) นอกจากนี้การสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้ายังมีความซับซ้อนด้านความถูกต้องของรูปทรงเลขาคณิต, โครงสร้างของเงื่อนไขก่อนหน้า และ ความต้องการในการพัฒนาความละเอียด (resolution) บทความนี้แนะนำเสนออัลกอริทึมแบบ Nodal Jacobian และวิธีแก้สมการซึ่งช่วยลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณในการสร้างภาพ เพื่อที่จะให้การสร้างภาพมีประสิทธิภาพ การดึงและแสดงผลข้อมูลที่ถูกเก็บในรูปแบบของจุดต่อ (nodes) เร็วกว่าข้อมูลที่ถูกเก็บในรูปแบบของเอลิเมนต์ นอกจากนี้การแก้ปัญหาแบบจุดต่อยังเป็นกระบวนการที่ง่ายเพราะใช้พิกเซลที่มีอัลกอริทึมแบบพิลเดอรัลคล้ายกับการประมวลผลภาพ (image processing)

โครงสร้างของ Nodal Jacobian ถูกพัฒนาจากโมเดลไฟฟ้าในเอลิเมนต์ (nodal finite element) สำหรับ EIDORS3D คำนวณค่า Elemental Jacobian โดยใช้อัลกอริทึม NSHI (nullspace scaled hybrid isotropic) และต้องอาศัยองค์ประกอบที่คำนวณได้จากเมตริกซ์ระบบของเอลิเมนต์ เพื่อที่จะคงความเร็วในการคำนวณ เราสามารถดัดแปลงอัลกอริทึมด้านโครงสร้างของเมตริกซ์ระบบแบบ nodal ใน EIDORS2D ไปเป็นโครงสร้างของ Nodal Jacobian ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $H^N$ , จาก Elemental Jacobian แทนด้วยสัญลักษณ์  $H^E$  ดังนี้

a)  $d = 3$  สำหรับสามเหลี่ยม (triangles) หรือ  $d = 4$  สำหรับทรงสามเหลี่ยม (tetrahedrons)

b) สำหรับแต่ละโหนด (n) ในเมช

c) elems เป็นรายละเอียดของเอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วยโหนด n

d)  $H_{:,n}^N = \sum_{i \in \text{elems}} \frac{1}{d} H_{:,i}^E$  โดย  $H_{:,i}^E$  หมายถึงคอลัมน์ที่ i ของเมตริกซ์  $H$

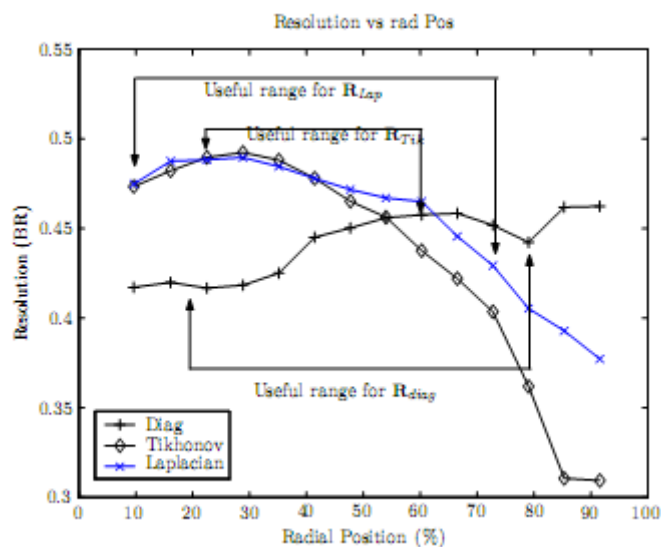
e) เสร็จสิ้นสำหรับแต่ละโหนด

ปริมาณที่ใช้ตรวจสอบความถูกต้องของภาพที่สร้างได้แก่ ความละเอียด (resolution) โดยกำหนดในรูปแบบของค่า BR, พลังงานของภาพ (image energy), อัตราส่วนของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (SNR) เพื่อจะทดสอบประสิทธิภาพของอัลกอริทึม ได้ทำการทดลองดังนี้

1) ตรวจสอบประสิทธิภาพของอัลกอริทึมใหม่ (Nodal Jacobian) โดยเปรียบเทียบอัลกอริทึมเดิม (Elemental Jacobian) สำหรับการสร้างภาพแบบ 2 มิติ ซึ่งใช้ข้อมูลที่เก็บได้จากกระนาบเดี่ยวของอิเล็กโตรดที่อยู่ตรงกลางแท่งกึ่ง โดยแท่งกึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 29 เซนติเมตรและสูง 29 เซนติเมตร และวางฉนวนทรงกลมขนาด 2 เซนติเมตรที่ตำแหน่ง  $r/2$  เก็บข้อมูลโดยใช้เครื่อง

Goe-MF II ซึ่งจ่ายกระแสและวัตต์แรงดันแบบชั่วข้างเคียง จากนั้นสร้างภาพโดยใช้เรกูลาไรเซชันเมตริกซ์ดังนี้  $R_{Tik}$  (Tikhonov Regularization matrix),  $R_{diag}$  ( $R_{diag} = H^T H$ ),  $R_{HPF}$  (Gaussian highpass filter) และ  $R_{Lap}$  (Laplacian mask filter) พบว่าอัลกอริทึมแบบ nodal ผลิตสัญญาณที่จุดยอดสูงกว่าแบบ elemental และ  $R_{diag}$  ให้ค่าความละเอียด (resolution) และ อัตราส่วนของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (SNR) ดีที่สุดทั้งอัลกอริทึมเดิมและอัลกอริทึมใหม่ สรุปได้ว่าอัลกอริทึมแบบใหม่สร้างภาพได้ดีพอๆกับแบบเดิม ในเทอมของความละเอียดและอัตราส่วนของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน แต่ดีกว่าในเรื่องของการลดหน่วยความจำและความเร็วในการแก้ปัญหา

2) ตรวจสอบวิธีเลือกค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์แบบ 2 มิติ ที่เรียกว่า  $BestRes$  สำหรับการสร้างภาพแบบ 3 มิติ โดยหาค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ตามของตำแหน่งตามแนวรัศมีบริเวณกึ่งกลางระนาบ จากภาพประกอบ 1-12 พบว่าโค้งของ  $R_{diag}$  จะเสถียรเมื่อ impulse contrast อยู่ในช่วง 20-75% ของรัศมีจากจุดศูนย์กลาง,  $R_{Tik}$  มีช่วงใช้งานระหว่าง 30-65% จากขอบ และ  $R_{Lap}$  จะเสถียรในช่วง 10-75% นอกจากนี้ Graham และ Adler ยังได้แนะนำให้คำนวณค่า  $\lambda_{BestRes}$  สำหรับ contrast ที่ตำแหน่ง  $r/2$  ในกรณี 2 มิติ สำหรับกรณี 3 มิติ ให้ contrast อยู่ระหว่างระนาบของอิเล็กทรอนิกส์ ส่วนของ  $R_{HPF}$  จะมีลักษณะคล้ายกับ  $R_{Tik}$



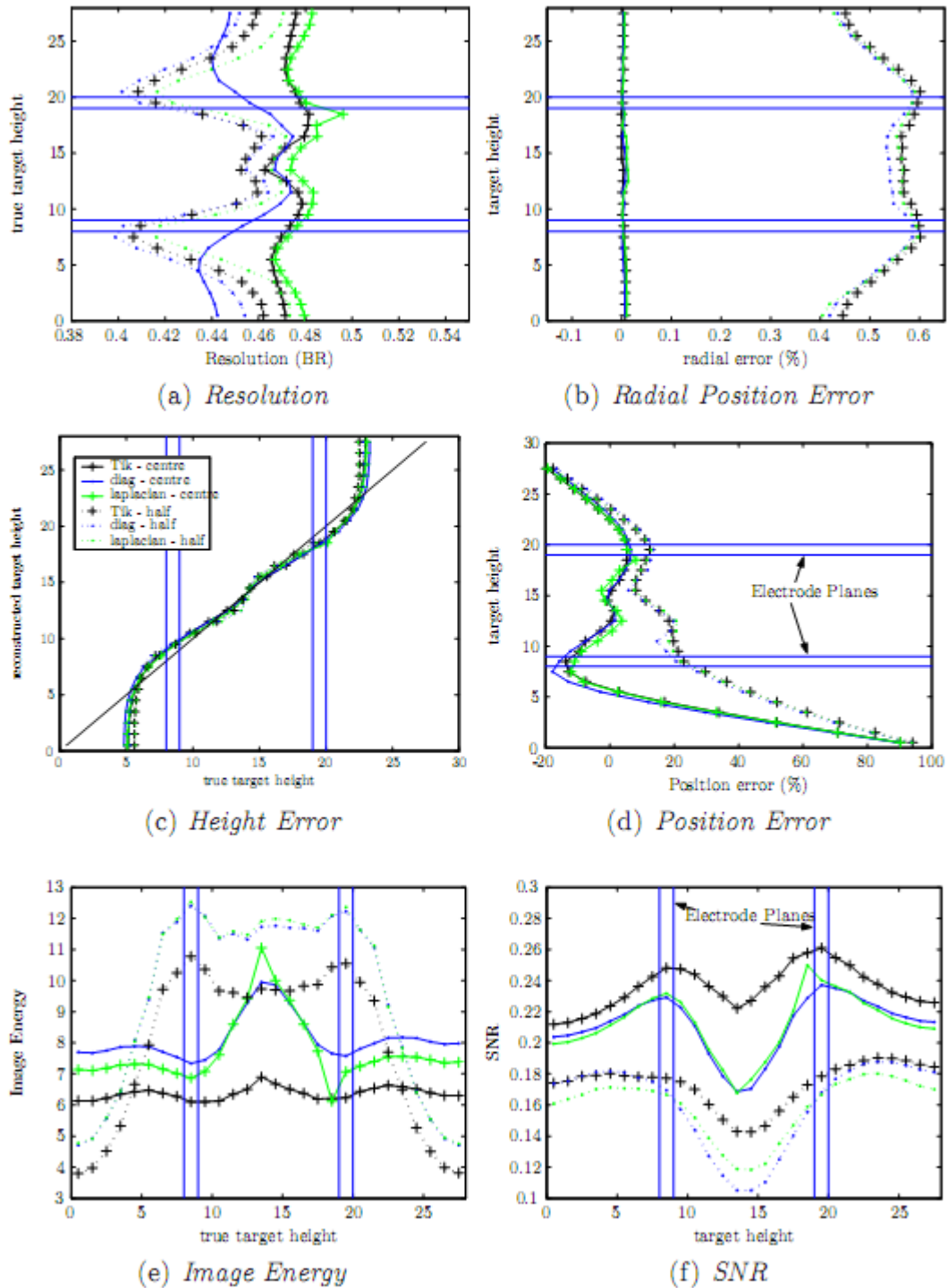
ภาพประกอบ 1-12 ค่าความละเอียดและตำแหน่งตามแนวรัศมีของ  $R_{Tik}$ ,  $R_{diag}$  และ  $R_{Lap}$  [8]

3) กำหนดปริมาณที่ใช้วัดประสิทธิภาพของอัลกอริทึมของ nodal แบบ 3 มิติ โดยใช้  $R_{Tik}$ ,  $R_{diag}$ ,  $R_{HPF}$  และ  $R_{Lap}$  กับการจำลองข้อมูลจำนวน 2 ชุด ที่สร้างจากการเคลื่อนที่ของ impulse contrast ตามแนวแกนตั้ง 28 จุดบนแต่ละชั้นของเอลิเมนต์ และ โมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วย 21504 เอลิเมนต์ และ 4205 โหนด ข้อมูลชุดที่หนึ่ง impulse contrast ตั้งอยู่ที่จุด

ศูนย์กลาง ( $r = 0$ ) ข้อมูลชุดที่สอง impulse contrast ตั้งอยู่ระหว่างจุดศูนย์กลางและขอบของวัตถุ ( $r/2$ ) จากภาพประกอบ 1-13 พบว่า ภาพที่สร้างด้วย  $R_{Tik}$  มีคุณภาพดีน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบในด้านพลังงานของภาพ ขณะที่  $R_{diag}$  ให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดในด้านความละเอียด ภาพประกอบ 1-13(a) แสดงให้เห็นว่าความละเอียดที่ดีที่สุดสำหรับแต่ละ  $R$  เกิดขึ้นเมื่อวัตถุวางใกล้กับระนาบของอิเล็กโทโรด และแย่งที่สุด เมื่อวัตถุอยู่ระหว่างระนาบอิเล็กโทโรด คาดว่าเป็นเพราะความละเอียดและความไวจะลดลงตามตำแหน่งที่ไกลจากอิเล็กโทโรดตัวจ่ายกระแสหรือวัดแรงดัน ความผิดพลาดของตำแหน่งในแนวรัศมี (radial position error) ภาพประกอบ 1-13(b) มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ contrast วางที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของแท่งกึ่ง ใดๆก็ตามความผิดพลาดของตำแหน่งก็ยังถือว่าเล็กน้อย ความผิดพลาดด้านความสูงเป็นเรื่องปกติสำหรับทุก  $R$  ดังภาพประกอบ 1-13(c) ความผิดพลาดของตำแหน่ง (position error) หมายถึงความผิดพลาดทั้งในแนวรัศมีและแนวตั้ง รวมทั้งยังบ่งบอกถึงความไม่สมมาตรในแนวตั้ง ตามภาพประกอบ 1-13(d) จากภาพประกอบ 1-13(e) แสดงความเปลี่ยนแปลงพลังงานของภาพตามฟังก์ชันของความสูงของเป้าหมาย พบว่า  $R_{diag}$  และ  $R_{Lap}$  ให้ค่าพลังงานของภาพมากที่สุด แต่ความเปลี่ยนแปลงส่วนใหญ่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งทางแนวตั้งของเป้าหมาย ภาพประกอบ 1-13(f) แสดงอัตราส่วนของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนของภาพ

อย่างไรก็ตามไม่สามารถเปรียบเทียบผลระหว่างอัลกอริทึมแบบเดิมกับแบบใหม่ได้ เนื่องจากเอลิเมนต์มีจำนวนมาก ไม่สามารถแก้ปัญหาคด้วยอัลกอริทึมแบบเดิม ประโยชน์ของอัลกอริทึมแบบใหม่คือช่วยลดขนาดของระบบสมการเชิงเส้นที่ใช้แก้ปัญหา และช่วยพัฒนาในการดึงข้อมูลและความเร็วทำให้สามารถแสดงภาพตัดขวางหลายๆภาพในเวลาจริงได้ (real time) นอกจากนี้จากปริมาณที่ใช้วัดประสิทธิภาพของอัลกอริทึมทั้งหมด  $R_{diag}$  ให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ส่วน  $R_{Lap}$  ให้ผลลัพธ์ที่แย่งที่สุด และไม่มีการที่สมบูรณ์แบบสำหรับบทความนี้ที่เกี่ยวกับผลกระทบระหว่างระนาบของอิเล็กโทโรด ในด้านประสิทธิภาพของภาพที่สร้าง





ภาพประกอบ 1-13 คุณลักษณะที่วัดได้สำหรับการสร้างภาพแบบ 3 มิติ ของชุดข้อมูลที่ได้จากการจำลองข้อมูลสองชุด โดยระนาบของอิเล็กโทรดวางที่ตำแหน่ง 8.5 และ 19.5 เซนติเมตร [8]

### 1.3 วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาและพัฒนาอัลกอริทึมที่ใช้สร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า ( Electrical Impedance Tomography ) สำหรับเต้านม

### 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้อัลกอริทึมที่สามารถสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าได้และสามารถนำไปพัฒนาต่อเพื่อให้มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้น

### 1.5 วิธีดำเนินการวิจัย

1.5.1 ศึกษาผลงานวิจัยที่ผ่านมา

1.5.2 ศึกษาและค้นคว้ารายละเอียดที่เกี่ยวข้องกับ โครงการวิจัย

1.5.2.1 ศึกษาพื้นฐานของ bioimpedance

1.5.2.2 ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาแบบ forward

1.5.2.3 ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาแบบ inverse

1.5.2.4 ศึกษาอัลกอริทึมที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า

1.5.3 ศึกษาการสร้างภาพจากซอฟต์แวร์ EIDORS ( Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software )

1.5.3.1 ศึกษาอัลกอริทึมที่เกี่ยวข้องจาก <http://eidors3d.sourceforge.net/tutorial/tutorial.shtml>

1.5.3.2 ศึกษาตัวอย่างที่มีในซอฟต์แวร์ EIDORS

1.5.3.3 การจำลองโมเดลทั้งแบบเอกพันธ์ (homogeneous) และไม่เอกพันธ์ (inhomogeneous)

1.5.3.4 สร้างภาพการกระจายสภาพความนำไฟฟ้าด้วยวิธีเรกูลาไรเซชัน

1.5.3.5 สร้างภาพโดยการใช้อัลกอริทึมหลายชนิด และเลือกใช้ชนิดที่ดีที่สุด

1.5.4 จัดทำรายงานฉบับสมบูรณ์

### 1.6 ขอบเขตของการวิจัย

1.6.1 สร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าจากการจำลองโมเดล

1.6.2 โมเดลมีอิเล็กโทรด (electrode) ไม่น้อยกว่า 16 อิเล็กโทรด

1.6.3 สามารถตรวจจับวัตถุที่มีขนาด 2.5– 5 เซนติเมตรได้

## บทที่ 2

### ทฤษฎีและหลักการ

การสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าเป็นเทคนิคการสร้างภาพซึ่งคำนวณการกระจายสภาพความนำไฟฟ้าภายในโมเดล จากการวัดแรงดันไฟฟ้าบริเวณอิเล็กโทรดที่สัมผัสกับผิวหนังหรือกับสารละลายไอออนภายในโมเดล ระบบการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าประกอบด้วย การเก็บข้อมูลและการสร้างภาพ การเก็บข้อมูลหมายถึงการจ่ายกระแสบนอิเล็กโทรดคู่หนึ่งแล้วทำการวัดแรงดันบนอิเล็กโทรดคู่ที่เหลือ กระบวนการจะทำซ้ำจนกว่าจะจ่ายกระแสครบทุกคู่ของอิเล็กโทรด แล้วนำข้อมูลนั้นมาเก็บในคอมพิวเตอร์ จากนั้นนำค่าที่ได้ไปคำนวณหาค่าการกระจายแรงดันไฟฟ้าภายในโมเดลเรียกกระบวนการนี้ว่าการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด โดยทดลองภายใต้โมเดลอิเล็กโทรดแบบสมบูรณ์ (complete electrode model) ซึ่งหมายถึงมีความต้านทานสัมผัสเกิดขึ้นระหว่างผิวหนังหรือสารละลายกับอิเล็กโทรด วิธีที่นิยมใช้คือระเบียบวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากมีความยืดหยุ่นกับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อน ดังนั้นค่าผลเฉลยโดยประมาณที่จะคำนวณออกมาได้จะมีความแม่นยำมากขึ้น ต่อมาหาค่าแรงดันไฟฟ้าภายในที่คำนวณได้มาแก้หาค่าการกระจายของอิมพีแดนซ์ภายในโมเดล เรียกขั้นตอนนี้ว่าการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส เนื่องจากสมการที่ใช้ในการคำนวณค่าการกระจายของอิมพีแดนซ์ภายในตัวกลางเป็นสมการเชิงเส้นที่มีโมเดลทางคณิตศาสตร์คือ  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  โดยปกติถ้าต้องการแก้หาค่า  $x$  ทำได้โดยการอินเวอร์สเมตริกซ์  $\mathbf{A}$  แต่เนื่องจาก  $\mathbf{A}$  เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ (singular matrix) จึงไม่สามารถหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ได้ ดังนั้นจึงใช้วิธีเรกูลาไรเซชัน (regularization) เพื่อให้  $\mathbf{A}$  เป็นนอน-ซิงกูลาร์เมตริกซ์ (non-singular matrix) และสามารถหาค่า  $x$  ได้ สุดท้ายประมาณค่าอิมพีแดนซ์ด้วยอัลกอริทึมของเกาส์-นิวตันแบบรอบเดียว

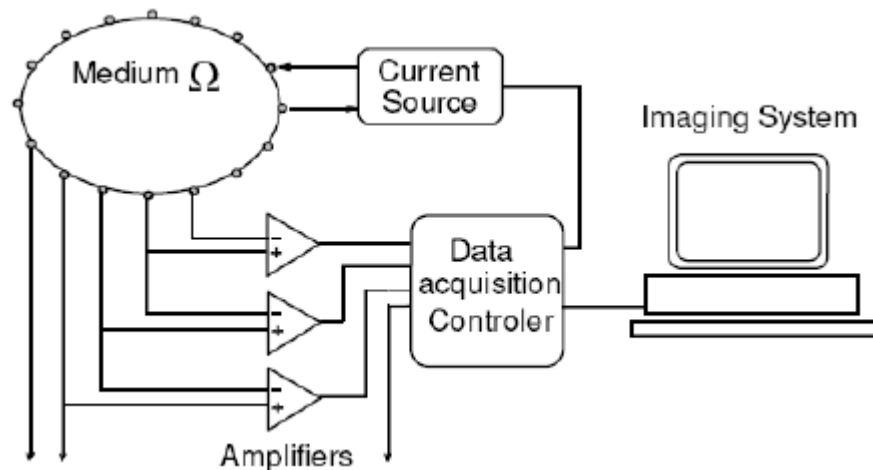
ในบทนี้กล่าวถึงหัวข้อหลักๆ 4 หัวข้อคือ 1) พื้นฐานของระบบการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า 2) การแก้ปัญหาแบบ forward โดยใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ เริ่มจากการสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ จากนั้นรวมสมการของทุกๆเอลิเมนต์เรียกว่าระบบสมการ (system equation) และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ต่อมาหาฟังก์ชันการประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้น (linear interpolation function) แล้วสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง สุดท้ายแก้สมการหาค่าการกระจายของแรงดันไฟฟ้าภายในโมเดล 3) การแก้ปัญหาแบบ inverse โดยกล่าวถึงวิธีหาค่าจาโคเบียนเมตริกซ์ (jacobian matrix), วิธีเรกูลาไรเซชันแบบ tikhonov และ laplacian รวมทั้งหลักการประมาณค่าด้วยอัลกอริทึมของเกาส์-นิวตัน 4) อธิบายโครงสร้างของซอฟต์แวร์ที่ใช้งานรวมทั้งซอฟต์แวร์ที่เกี่ยวข้อง

## 2.1 บทนำ[9]

พื้นฐานของระบบการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า ประกอบด้วย การเก็บข้อมูล (data collection) และการสร้างภาพ (reconstruction) มีรายละเอียดดังนี้

### 2.1.1 การเก็บข้อมูล

โดยทั่วไประบบการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าจะวางอิเล็กโทรดให้สัมผัสกับผิวหนังหรือภายในขอบของตัวกลาง (medium) ที่จะสร้างภาพ โดยลักษณะการวางอิเล็กโทรดเป็นแบบอาร์เรย์ (array) ดังภาพประกอบ 2-1 คือจุ่มรอบๆตัวกลาง จากนั้นจ่ายกระแสที่อิเล็กโทรดคู่หนึ่ง และวัดแรงดันบนอิเล็กโทรดคู่ที่เหลือ ทำอย่างนี้เรื่อยๆไปจนจะกระแสครบทุกคู่อิเล็กโทรด นำข้อมูลที่วัดได้ผ่านวงจรขยาย (amplifier) เพื่อขยายสัญญาณ ไปยังตัวควบคุมของข้อมูลที่วัดได้ สุดท้ายนำข้อมูลที่ได้ออกไปเก็บไว้ในคอมพิวเตอร์เพื่อประมวลผลหาค่าอิมพีแดนซ์ต่อไป

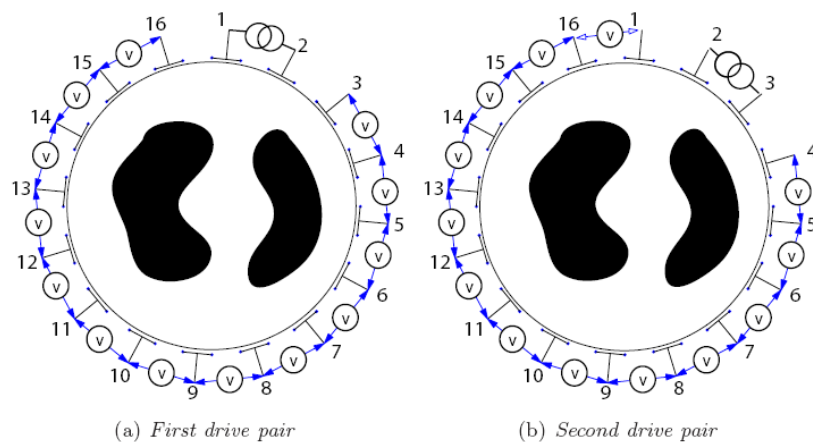


ภาพประกอบที่ 2-1 ระบบเก็บข้อมูลแบบ 16 อิเล็กโทรด โดยจ่ายกระแสและวัดแรงดัน[9]

สำหรับการจ่ายกระแสและวัดแรงดันมีหลายวิธี ยกตัวอย่างเช่น การจ่ายกระแสแบบข้างเคียง (adjacent drive pattern) โดยจ่ายกระแสที่อิเล็กโทรดคู่หนึ่งที่อยู่ข้างกัน และวัดแรงดันบนอิเล็กโทรดคู่ที่เหลือ ดังภาพประกอบที่ 2-2(a) จ่ายกระแสบนอิเล็กโทรด (1,2) และวัดความต่างของแรงดันบนอิเล็กโทรด (3,4), (4,5) จนถึง (15,16) จะไม่วัดแรงดันบนอิเล็กโทรด (16,1), (1,2) หรือ (2,3) จากนั้นเลื่อนการจ่ายกระแสไปที่อิเล็กโทรด (2,3) และวัดความต่างของแรงดันบนอิเล็กโทรด (4,5), (5,6) จนถึง (16,1) ดังภาพประกอบที่ 2-2(b) กระบวนการนี้จะทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนกระทั่งกระแสถูกจ่ายครบทุกคู่อิเล็กโทรดรวม 16 คู่ แรงดันที่วัดได้ทั้งหมดเรียกว่าเฟรมของ

ข้อมูล (frame of data) และมีจำนวนเท่ากับ 208 ( $16 \times 13$ ) ข้อมูล โดยทั่วไปข้อมูลจะถูกจัดเรียงตามคอลัมน์ของเวกเตอร์ (column vector) ที่มีความยาวเท่ากับ 208

นอกจากนี้ยังต้องใช้วิธีการประมาณค่าเชิงเลขหาค่าสนามแรงดันไฟฟ้าภายในตัวกลางที่มีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เขียนในรูปของสมการ  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = F(\sigma, \mathbf{I})$  โดย  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  คือสนามแรงดันไฟฟ้าภายในตัวกลาง,  $F$  คือตัวดำเนินการแบบฟอร์เวิร์ด (forward operator),  $\sigma$  คือสภาพความนำไฟฟ้า และ  $\mathbf{I}$  คือค่ากระแสที่จ่ายบนอิเล็กโทรด

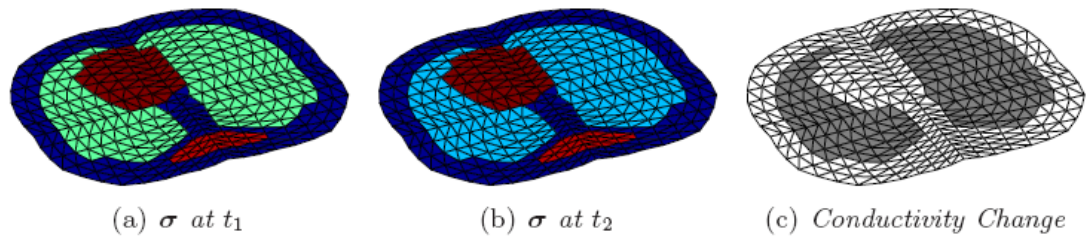


ภาพประกอบที่ 2-2 การจ่ายกระแสแบบขั้วข้างเคียง[9]

สำหรับการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด จะใช้การประมาณค่าเชิงเลขที่เรียกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method : FEM) ซึ่งมีสมการพีชคณิตดังนี้  $\mathbf{V} = \mathbf{Y}(\sigma)^{-1} \mathbf{I}$  โดย  $\mathbf{Y}$  คือเมตริกซ์ระบบ (system matrix หรือ jacobian matrix) ของโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์,  $\mathbf{V}$  คือเมตริกซ์ของแรงดันไฟฟ้าภายในโมเดล และ  $\mathbf{I}$  คือเมตริกซ์ของกระแสที่จ่ายเข้าไปที่แต่ละจุดต่อ (nodes)

### 2.1.2 การสร้างภาพ (reconstruction)

อัลกอริทึมของการสร้างภาพมีด้วยกันสองชนิดหลักๆ คือ การสร้างภาพแบบสถิต (static imaging) เป็นการประมาณค่าสภาพความนำไฟฟ้าของตัวกลางจากข้อมูลที่ขอบของโมเดล และการสร้างภาพแบบต่างกัน (difference imaging) เป็นการประมาณค่าความเปลี่ยนแปลงของสภาพความนำไฟฟ้าในตัวกลางจากข้อมูลที่วัดในช่วงเวลาหนึ่ง  $(t_1, t_2)$  ดังภาพประกอบ 2-3 สำหรับอิมพีแดนซ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงน้อยในช่วงเวลาหนึ่ง สามารถคำนวณโดยใช้อัลกอริทึมแบบเป็นเชิงเส้น (linearized algorithm) ในขั้นตอนเดียว แต่ถ้าอิมพีแดนซ์มีการเปลี่ยนแปลงมากอาจจะต้องแก้ปัญหาด้วยอัลกอริทึมแบบไม่เป็นเชิงเส้นร่วมกับการทำซ้ำ



ภาพประกอบ 2-3 ตัวอย่างการสร้างภาพแบบ 2 มิติด้วยวิธี difference imaging[9]

กำหนดให้สัญญาณ  $\mathbf{z} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  โดย  $\mathbf{v}_1$  คือเวกเตอร์ของแรงดันที่วัดได้ที่เวลา  $t_1$  และ  $\mathbf{v}_2$  คือเวกเตอร์ของแรงดันที่วัดได้ที่เวลา  $t_2$  การประมาณค่าของภาพที่ต่างกัน สามารถคำนวณจากสมการ

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{z} \quad (2.1)$$

ซึ่ง  $\hat{\mathbf{x}} = \Delta\sigma$  คือการเปลี่ยนแปลงสภาพความนำไฟฟ้าในช่วงเวลา  $t_1$  และ  $t_2$  ส่วน  $\mathbf{B}$  คือตัวดำเนินการของการสร้างภาพแบบเชิงเส้นด้วยวิธีเรกูลาไรซ์ (regularized linearized reconstruction operator)

การคำนวณค่าอิมพีแดนซ์หรือการเปลี่ยนแปลงของอิมพีแดนซ์อยู่บนพื้นฐานของข้อมูลที่ได้จากการวัดแรงดันบริเวณขอบของโมเดลซึ่งเป็นปัญหาแบบอินเวอร์สที่เป็น ill-conditioned นั้นหมายความว่าเมื่ออินพุตเปลี่ยนแปลงน้อย ส่งผลให้อเอาต์พุตเปลี่ยนแปลงมากทำให้ระบบไม่เสถียร ดังนั้นจึงต้องการวิธีที่จะพัฒนาเงื่อนไข ซึ่งส่วนใหญ่ใช้วิธีเรกูลาไรเซชัน (regularization) โดยเกี่ยวข้องกับการได้มาของข้อมูลที่มีลักษณะตรงกับความเป็นจริงแลกกับการสูญเสียเงื่อนไขก่อนหน้า (prior condition) ในการแก้ปัญหา

## 2.2 ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด

อุปกรณ์ส่วนใหญ่ที่ใช้ในระบบของการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าเป็นไฟฟ้ากระแสสลับ ในการประยุกต์ใช้งานทางการแพทย์จะพิจารณาทั้งองค์ประกอบที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพของแรงดันที่วัดได้ แต่สำหรับความถี่ที่ใช้งาน ถ้าน้อยกว่า 10 กิโลเฮิร์ตซ์ องค์ประกอบรีแอกแตนซ์ (reactance) สามารถเพิกเฉยได้

### 2.2.1 แบบจำลองการกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในตัวกลาง

เมื่อมีการกระตุ้นทางไฟฟ้าไปที่ตัวกลางซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $\Omega$  จะทำให้เกิดคุณสมบัติทางไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลา คุณสมบัติเหล่านี้ถูกแทนด้วยค่าอิมพีแดนซ์ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $\sigma(\vec{\mathbf{x}}, t) + j\omega(\vec{\mathbf{x}}, t)$  และสัมพันธ์กับค่าสภาพยอมรับได้

(permittivity) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $\varepsilon(\vec{x}, t)$  โดย  $\vec{x}$  หมายถึงเวกเตอร์ตำแหน่ง สำหรับโมเดลแบบสองมิติ จะได้  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  และโมเดลแบบสามมิติจะได้  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  ถ้ากระแสไฟฟ้าที่จ่ายให้ตัวกลางมีค่าต่ำ (ไม่เกิน 5 มิลลิแอมป์) สามารถเพิกเฉยต่อผลกระทบที่เกิดจากสนามแม่เหล็กได้ด้วยเงื่อนไขนี้จะพิจารณาเฉพาะสภาพความนำไฟฟ้า (conductivity) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $\sigma(\vec{x})$

โมเดลทางคณิตศาสตร์ของปัญหาแก้ได้ด้วยสมการของแมกซ์เวล (Maxwell's equation) แต่เนื่องจากไม่มีกระแสไหลภายนอกตัวกลาง เพราะมีสภาพความนำไฟฟ้าเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงแก้ปัญหาคด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเอลลิปติก (elliptic partial differential equation) หรือที่รู้จักในชื่อลาปลาเซียน (Laplacian)

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{ในตัวกลาง} \quad (2.2)$$

โดย  $u(\vec{x})$  คือการกระจายของแรงดันภายในตัวกลาง สมการของลาปลาซสามารถเริ่มพิสูจน์ได้จากกฎของโอห์ม

$$J = \sigma E \quad (2.3)$$

โดย  $J(\vec{x})$  คือรูปแบบการไหลของกระแส และ  $E$  คือเวกเตอร์ของสนามไฟฟ้า ซึ่งหาค่าได้จาก

$$E = -\nabla u \quad (2.4)$$

$u$  คือฟังก์ชันของแรงดันที่เป็นสเกลาร์ จากนั้นประยุกต์ใช้กฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchoff's current law) คือกระแสรวมที่จุดต่อใดๆมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังสมการ

$$\nabla J = 0 \quad (2.5)$$

แทนสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.3) จากนั้นใส่ไดเวอร์เจนซ์ทั้งสองข้างของสมการ แล้วแทนเงื่อนไขด้วยสมการที่ (2.5) จะได้สมการลาปลาเซียนตามสมการที่ (2.2)

เงื่อนไขขอบเขตของโมเดลขึ้นกับการกำหนดกระแสแทนด้วยสัญลักษณ์  $J_n$  ที่ทุกๆจุดบนขอบของโมเดล ดังสมการ

$$J_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \quad (2.6)$$

$\hat{n}$  คือเวกเตอร์แนวฉาก (normal vector) ที่ตั้งฉากกับขอบของโมเดล สมการ (2.2) และ (2.5) เป็นสมการของปัญหาแบบฟอร์เวิร์ดที่ใช้หาค่าการกระจายของแรงดันภายในตัวกลาง วิธีวิเคราะห์การประมาณค่าเชิงเลขในการแก้ปัญหแบบนี้คือวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method)

### 2.2.2 วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นเทคนิคการวิเคราะห์เชิงเลขด้วยการประมาณค่า ถูกใช้อย่างกว้างขวางในทางวิศวกรรม เริ่มจากการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่จะทำการคำนวณ

ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งเอลิเมนต์ย่อยๆเหล่านี้อาจมีลักษณะและขนาดที่แตกต่างกันออกไป แล้วทำการสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ โดยสมการที่สร้างขึ้นมานั้นจำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่พิจารณาอยู่ จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาประกอบกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการชุดใหญ่ ต่อมาทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดลงในระบบสมการชุดใหญ่ แล้วจึงทำการแก้ระบบสมการทั้งหมด

ความแม่นยำของค่าเฉลยโดยประมาณที่คำนวณออกมาได้นั้นจะขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ยังขึ้นอยู่กับการสมมติรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณค่าภายใน (interpolation function) ของแต่ละเอลิเมนต์ กล่าวคือฟังก์ชันการประมาณค่าภายในที่สมมติขึ้นมานั้นมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหานั้นมากน้อยเพียงไร ลักษณะการกระจายของฟังก์ชันการประมาณค่าภายในของเอลิเมนต์อาจสมมติให้อยู่ในหลายรูปแบบ อาทิเช่น รูปแบบของการกระจายเชิงเส้นตรง (linear distribution) เป็นต้น ส่วนขนาด (magnitude) ของฟังก์ชันการประมาณค่าภายในจะขึ้นอยู่กับค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์

จากลำดับขั้นตอนคร่าวๆ ดังกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่าหัวใจที่สำคัญของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์คือ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ขึ้นมาเพื่อให้สามารถจำลองแบบหรือปัญหาได้อย่างถูกต้อง การสร้างสมการของเอลิเมนต์ สามารถทำได้ 3 วิธี ดังนี้

a) วิธีการโดยตรง (direct approach) เป็นวิธีที่ง่ายที่สุดโดยเฉพาะในการเริ่มต้นเรียนรู้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ จุดเริ่มต้นคือการใช้วิธีของความแข็งตึงโดยตรง (direct stiffness method) ในการวิเคราะห์โครงสร้าง แต่วิธีนี้ยังมีข้อจำกัดอยู่

b) วิธีการแปรผัน (variation approach) วิธีนี้จำเป็นสำหรับการแยกชั้นปัญหาของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งไม่สามารถทำได้โดยใช้วิธีการโดยตรง เช่น ปัญหาค่าไม่คงที่ (non-constant) ของสภาพความนำไฟฟ้า, ปัญหาการใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงอันดับสูง และรูปร่างของเอลิเมนต์ที่ไม่ใช่สามเหลี่ยม (triangles) และ ทรงสี่หน้า (tetrahedrons)

c) วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals ; MWR) เป็นวิธีที่นิยมใช้สืบหาคุณสมบัติของเอลิเมนต์ โดยเริ่มจากสมการควบคุมของปัญหา จากนั้นดำเนินการโดยการสุ่มสถานะที่แปรผัน

การแก้ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีขั้นตอนดังนี้

- แบ่งตัวกลางออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ
- เลือกฟังก์ชันการประมาณค่าภายในเอลิเมนต์ (element interpolation function)
- สร้างสมการของเอลิเมนต์โดยคำนวณหาโลคอลเมตริกซ์ (local matrix)



ของแต่ละเอลิเมนต์ และใช้สัญลักษณ์  $Y$  แทนองค์ประกอบของโลคอลเมตริกซ์

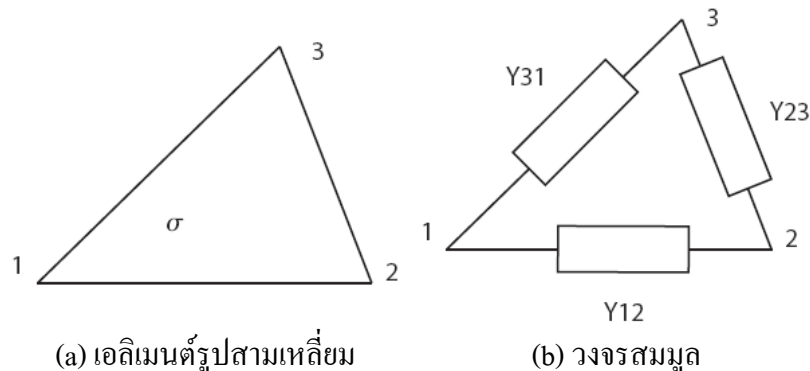
- นำสมการที่ได้จากทุกๆเอลิเมนต์มาประกอบรวมกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการ (system equation) นั้นหมายความว่าต้องรวมโลคอลเมตริกซ์เข้าไปในโอบอด (global matrix) และใช้สัญลักษณ์  $Y$  หรือ  $A$

- กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ของระบบ โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตของดิริคเลต (Dirichlet) เป็นเงื่อนไขขอบเขตที่จำเป็น และ นอยมันน์ (Neumann) เป็นเงื่อนไขขอบเขตตามธรรมชาติ

- แก้สมการของระบบ  $YV=I$  โดยใช้ซอฟต์แวร์ในการคำนวณพีชคณิตเชิงเส้นเช่น แมทแลป (MATLAB)

### 2.2.2.1 วิธีการโดยตรง

วิธีการโดยตรงใช้สำหรับปัญหาทั่วไปหรือรูปร่างของเอลิเมนต์แบบง่ายๆ นั้นหมายความว่าในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าจะใช้กับไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีสภาพความนำไฟฟ้าคงที่ร่วมกับ shape function แบบเชิงเส้น ในกรณีนี้โมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์มีวงจรสมมูลเหมือนโครงข่ายไฟฟ้าเชิงเส้น (linear electric network) ที่ต่อกันระหว่างจุดต่อสำหรับโมเดลแบบ 2 มิติ เอลิเมนต์มีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมดังภาพประกอบ 2-4(a) และมีโครงข่ายทางไฟฟ้างดภาพประกอบ 2-4(b) แต่ละด้านของสามเหลี่ยมถูกแทนที่ด้วยความต้านทานซึ่งมีค่าความนำไฟฟ้าเท่ากับ  $\sigma \cot \theta_j$  โดยที่ตัวต้านทาน  $j$  คือตัวต้านทานที่ตรงข้ามกับมุมลำดับที่  $j$  ( $j^{\text{th}}$  angle) กรณีโมเดลแบบสามมิติก็คล้ายๆกัน



ภาพประกอบ 2-4 การหาค่าจากโครงข่ายตัวต้านทาน

$\theta_j$  คือมุมระหว่างสองเอลิเมนต์ที่มีด้าน  $j$  ร่วมกัน ในเทอมของพิกัดของจุดต่อ (nodal coordinates) ค่าความนำ  $Y_{ij}$  ระหว่างจุดต่อ  $i$  และ จุดต่อ  $j$  หาได้จากสมการ

$$Y_{ij} = \frac{\sigma_e}{2A_e} (b_i b_j + c_i c_j) , (i \neq j) \quad (2.7)$$

โดยที่  $b_1 = y_2 - y_3$ ,  $b_2 = y_3 - y_1$ ,  $b_3 = y_1 - y_2$  และ  $c_1 = x_3 - x_2$ ,  $c_2 = x_1 - x_3$ ,  $c_3 = x_2 - x_1$  ที่  $(x_i, y_i)$  โดย  $i = 1, 2, 3$  แทนพิกัด (coordinate) ของแต่ละจุดต่อ,  $A_e$  คือพื้นที่ของเอลิเมนต์,  $\sigma_e$  แทนสภาพความนำไฟฟ้าของเอลิเมนต์ซึ่งสมมติว่ามีค่าคงที่ตลอดทั้งเอลิเมนต์ และตัวห้อย  $e$  อ้างถึงเอลิเมนต์ที่  $e$  กฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับวงจรเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{Y}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{I}^e$$

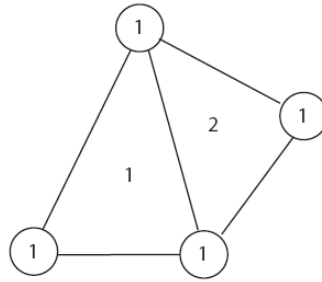
โดย  $Y_{11} = -Y_{12} - Y_{13}$ ,  $Y_{22} = -Y_{21} - Y_{23}$ ,  $Y_{33} = -Y_{31} - Y_{32}$ ,  $Y_{ij} = Y_{ji}$  เมื่อ  $i, j = 1, 2, 3$  และ  $u_i$  คือแรงดันที่จุดต่อ และ  $i_i$  คือกระแสที่ไหลในจุดต่อที่  $i$

- การรวมคุณสมบัติของเอลิเมนต์เพื่อให้ได้ระบบสมการ (system equation)

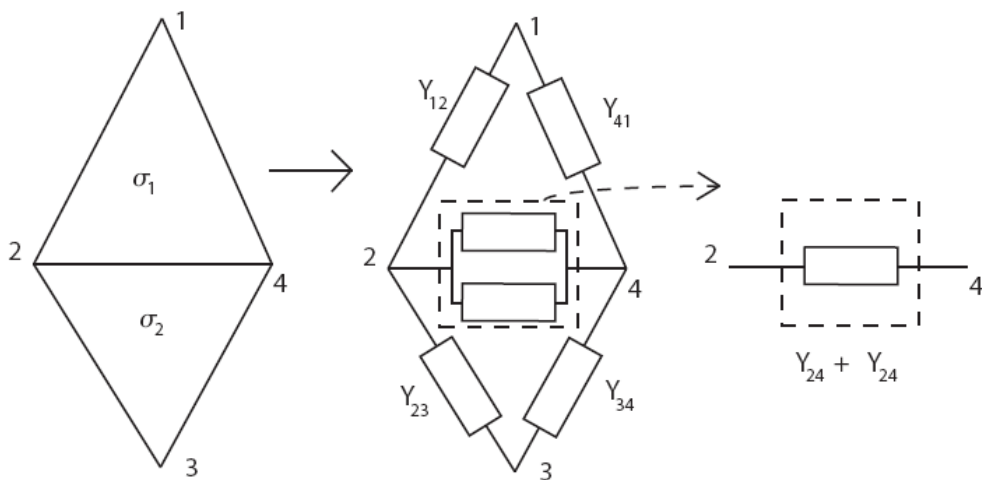
จากภาพประกอบ 2-5 แสดงเมช (mesh) ของ 2 เอลิเมนต์ ซึ่งใช้ในการหาค่าโกลบอลเมตริกซ์ของแอดมิตแตนซ์ (global admittance matrix) โดยเมตริกซ์หลัก (master matrix) ถูกคำนวณจากสภาพความนำไฟฟ้าระหว่างเอลิเมนต์ข้างเคียง โกลบอลเมตริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์เขียนได้ดังนี้

$$Y_{i,j}^{(1)} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad i, j \in [1, 2, 3] \quad \text{คือ global node ของเอลิเมนต์ 1}$$

$$Y_{i,j}^{(2)} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{24} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{44} \end{bmatrix} \quad i, j \in [1, 2, 4] \quad \text{คือ global node ของเอลิเมนต์ 2}$$



ภาพประกอบ 2-5 เมฆของ 2 เอลิเมนต์



ภาพประกอบ 2-6 การเชื่อมต่อของ 2 เอลิเมนต์

เมื่อนำมารวมกันจะได้

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} + Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} + Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \quad i, j \in [1:4]$$

- การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับโมเดลอิเล็กโทรดในภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่รู้จักมีอยู่ 4 แบบ คือ โมเดลแบบความต่อเนื่อง (continuum), แบบช่องว่าง (gap), แบบขนาน (shunt) และแบบอิเล็กโทรดสมบูรณ์ (complete electrode) ในที่นี้จะอธิบายโดยใช้โมเดลแบบช่อง

วางซึ่งเป็นโมเดลที่ง่ายที่สุดในการประมวลผลเชิงเลข อิเล็กโทรดจะถูกเชื่อมต่อโดยตรงกับจุดต่อที่ถูกเลือกบริเวณขอบของโมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์ เมื่อจ่ายกระแสระหว่างอิเล็กโทรดคู่ข้างเคียงและวัดแรงดันโดยใช้โมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์ กำหนดเงื่อนไขขอบเขตของโมเดลแบบช่องว่างดังสมการ

$$\mathbf{YV} = \mathbf{I} \quad (2.8)$$

โดย  $\mathbf{Y}$  คือ โกลบอลเมตริกซ์ (global matrix) ของสภาพความนำไฟฟ้า,  $\mathbf{V}$  คือเวกเตอร์ของแรงดันที่จุดต่อ

$$\mathbf{V} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T \quad (2.9)$$

$$\mathbf{I} = [0, 0, \dots, -1, 1, 0]^T \quad (2.10)$$

ค่าที่ไม่เป็นศูนย์แทนการจ่ายกระแสระหว่างอิเล็กโทรด ขณะที่ค่าที่เป็นศูนย์แทนกระแสที่แต่ละจุดต่อซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ตามกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchoff's current law) แรงดันที่จุดต่อแก้โดยใช้สมการ  $\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I}$  จะได้ระบบพีชคณิตดังนี้

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1M} \\ \vdots & \ddots & u_{ij} & \vdots \\ \vdots & u_{ij} & \ddots & \vdots \\ u_{1M} & \cdots & \cdots & u_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{11} & \cdots & \cdots & i_{1M} \\ \vdots & \ddots & i_{ij} & \vdots \\ \vdots & i_{ij} & \ddots & \vdots \\ i_{1M} & \cdots & \cdots & i_{NM} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$u_{ij}$  คือแรงดันที่จุดต่อ  $i$  เนื่องจากการจ่ายกระแสลำดับที่  $j$  ขณะที่  $i_{ij}$  คือกระแสที่จุดต่อ  $i$  ระหว่างการจ่ายกระแสลำดับที่  $j$  จากสมการ (2.10) แต่ละคอลัมน์ของ  $\mathbf{I}$  มีค่าไม่เท่ากับ 0 เพียงสองค่าเท่านั้นและ เป็นการสลับลำดับกันของ  $\mathbf{I} = [0, 0, \dots, -1, 1, 0]^T$  เนื่องจากการจ่ายกระแสในแต่ละครั้งเริ่มตั้งแต่อิเล็กโทรดในโมเดลแบบช่องว่างแมปไปยังจุดต่อเดี่ยว (single node) แรงดันที่วัดได้ระหว่างคู่ของอิเล็กโทรดในแต่ละครั้งหมายถึงความแตกต่างของแรงดันระหว่างจุดต่อสองจุด ซึ่งเป็นจุดต่อเฉพาะที่สัมพันธ์กับอิเล็กโทรด แรงดันที่วัดได้ระหว่างอิเล็กโทรดคู่ข้างเคียงจะถูกเก็บในคอลัมน์ของเวกเตอร์ ตลอดจนการใช้ตัวดำเนินการ  $T[]$  ซึ่งหมายถึงลำดับของการวัด ยกตัวอย่าง  $v_9$  เป็นแรงดันที่วัดได้ระหว่างอิเล็กโทรด 4 และ 5 เมื่อจ่ายกระแสครั้งที่สอง ดังนั้นตัวดำเนินการ  $T$  จะได้ว่า  $T[\mathbf{V}]_9 = \mathbf{V}_{42} - \mathbf{V}_{52}$  เป็นต้น

การแก้สมการ (2.8) เพื่อหา  $\mathbf{V}$  ต้องทำการแปลงกลับ (inverse)  $\mathbf{Y}$  แต่เนื่องจาก  $\mathbf{Y}$  เป็นเวกเตอร์สี่เหลี่ยมที่มีลักษณะของข้อมูลเป็นแถบบางเบาเรียกว่า sparse ทำให้เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ (singular matrix) ซึ่งไม่สามารถแปลงกลับได้ ในการที่จะทำให้  $\mathbf{Y}$  เป็นนอน-ซิงกูลาร์เมตริกซ์ (non-singular matrix) นั้นจะต้องเลือกจุดต่ออ้างอิง (reference node) คล้ายๆกับการเลือก

กราวด์เสมือน เพื่อความสะดวกควรเลือกจุดต่อหนึ่งเป็นจุดต่ออ้างอิง ในการประมวลผลสมการเชิงเส้นดังสมการ (2.8) นั้น ทุกๆ แถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 1 ของเมตริกซ์แอดมิตแดนซ์ให้เซตค่าเป็นศูนย์ และเอลิเมนต์ในแนวทแยงเซตค่าเป็น 1 เพื่อให้แน่ใจว่าแรงดันจะมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดต่อ ระหว่างการจ่ายกระแสแต่ละครั้ง เอลิเมนต์ที่ตรงกับเวกเตอร์ของกระแสใน  $\mathbf{I}$  เซตค่าเป็น 0

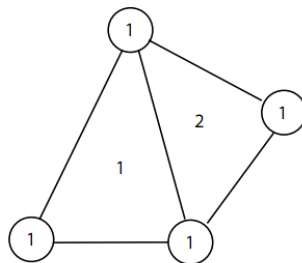
ในการแก้สมการ (2.11) เพื่อหาค่าแรงดันที่จุดต่อ ทำได้โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง คำนวณแรงดันภายในแต่ละเอลิเมนต์ หัวข้อที่จะอธิบายต่อไปเป็นการหาค่าฟังก์ชันการประมาณค่าแบบเชิงเส้นของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม สำหรับเอลิเมนต์แบบทรงสี่เหลี่ยมมีวิธีคล้ายกัน

- การหาฟังก์ชันการประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้น ( $\phi_i$ )  
แรงดันภายในโอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมถูกประมาณค่าโดยฟังก์ชันแบบเชิงเส้น

แสดงดังสมการ

$$U = a + bx + cy \quad (2.12)$$

โดย  $U$  แทนการจำลองการกระจายแรงดันอย่างต่อเนื่องทั่วทั้งระนาบ  $x - y$  ด้วยฟังก์ชัน piecewise planar และสัมประสิทธิ์  $a, b, c$  ในสมการ (2.12) หาได้จากการสมมติค่าแรงดัน  $U_1, U_2, U_3$  ที่จุดต่อทั้งสาม



ภาพประกอบ 2-7 ตัวอย่างสำหรับการหาฟังก์ชันการประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้น

จากสมการ (2.12) จะได้แรงดันที่จุดต่อทั้งสามของเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

และหาค่าสัมประสิทธิ์  $a, b, c$  ได้จาก

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

แทนกลับในสมการ (2.11) ฟังก์ชันของแรงดันภายในแต่ละเอลิเมนต์ เท่ากับ

$$U = U(x, y) = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

ภายหลังแปลงกลับเมตริกซ์ ดังสมการ (2.14) สามารถจัดรูปสมการใหม่ด้วยการคูณดังสมการ

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i \phi_i(x, y) \quad (2.15)$$

เมื่อฟังก์ชันการประมาณค่าภายใน ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $\phi_i$  หาค่าจาก

$$\phi_i = \frac{1}{2A} \{ (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \} \quad (2.16)$$

$\phi_1, \phi_2, \phi_3$  เป็นการแลกเปลี่ยนภายในแบบวงกลม (cyclic interchange) ของตัวห้อย ซึ่งเป็นวิธีใหม่ในการกำหนดฟังก์ชันการประมาณค่าบนจุดตัดของสามเหลี่ยม โดย ค่า  $\phi_i$  จะเท่ากับ 0 ทุกจุดต่อ ยกเว้นที่จุดต่อ  $i=j$  จะมีค่าเท่ากับ 1 ดังสมการ

$$\begin{aligned} \phi_i(x_j, y_j) &= 0 \quad i \neq j \\ &= 1 \quad i = j \end{aligned}$$

$A$  คือพื้นที่ของสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ในสมการ (2.13)

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \rightarrow 2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

สมการ (2.15) เป็นการหาแรงดันภายในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมที่สมบูรณ์แล้วด้วยฟังก์ชันของแรงดันที่จุดต่อทั้งสามของเอลิเมนต์ สำหรับการหาฟังก์ชันการประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้นของโมเดลแบบสามมิติคล้าย ๆ กับสมการ (2.15) แต่ค่า  $i$  จะรันถึง 4 แทนที่จะเป็น 3 โดยเอลิเมนต์ของโมเดลแบบสามมิติจะเป็นรูปทรงสี่หน้า แรงดันภายในเอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าถูกประมาณค่าโดยฟังก์ชันแบบเชิงเส้นแสดงดังสมการ

$$U = a + bx + cy + dz \quad (2.17)$$

#### 2.2.2.2 วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals)

การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมีหลายวิธี เช่นวิธีการจัดกลุ่ม (Collocation), วิธี

กำลังสองน้อยสุด (Least Squares) และ วิธีของกาเลอร์คิน (Galerkin) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้มากที่สุด การพัฒนาวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค้ำงเริ่มด้วยการแบ่งสนามต่าง ๆ ด้วยผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของฟังก์ชันการประมาณค่าภายในแบบพหุนาม (polynomial interpolation) ดังสมการ

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(\vec{x}) \quad \text{โดย} \quad \phi_i = \begin{cases} 1 & \text{บน โหนด } i \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases} \quad (2.18)$$

โดย  $\phi_i$  คือฟังก์ชันการประมาณค่าภายใน และ  $N$  คือจำนวนจุดต่อในโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ อย่างไรก็ตามในกรณีของฟังก์ชันการประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้นสำหรับโมเดลแบบ 2 มิติ ปรากฏว่าค่า  $\phi$  จะแผ่ขยายเหมือนกับสมการ (2.16) และ  $\tilde{u}$  แทนการประมาณค่าของแรงดันภายในเอลิเมนต์ด้วยการประมาณค่าของสมการลาปลาซเขียนจะได้

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{u}) \neq 0 \quad \text{ในตัวกลาง} \quad (2.19)$$

โดยทั่วไปสมการ (2.19) ควรจะมีค่าเท่ากับศูนย์ แต่เนื่องจากความผิดพลาดจากการใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าจึงมีค่าเท่ากับเศษตค้ำง ดังนั้นวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค้ำงเป็นการพยายามทำให้เศษตค้ำงที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยที่สุด ซึ่งประกอบด้วยการคูณฟังก์ชันทดสอบ  $v$  และอินทิเกรตตลอดตัวกลาง นั่นคือ

$$\int v [\nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{u})] d\Omega = 0 \quad (2.20)$$

ในที่นี้  $v$  คือฟังก์ชันที่ใช้ทดสอบค่าถ่วงน้ำหนักเศษตค้ำงอาจจะมีค่าเท่ากับศูนย์ในบางค่าของน้ำหนักหรือเท่ากับค่าเฉลี่ย วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตค้ำงของกาเลอร์คินจะแตกต่างจากวิธีอื่นในเรื่องของฟังก์ชันการถ่วงน้ำหนัก โดยฟังก์ชันทดสอบ  $v$  จะคล้ายกับฟังก์ชันการลองผิดลองถูกแบบของ  $\tilde{u}$  และใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าภายใน ( $\phi_i$ ) เหมือนกัน ดังสมการ

$$v(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N w_i \phi_i(\vec{x}) \quad (2.21)$$

โดยที่  $w_i$  คือ สัมประสิทธิ์ถ่วงน้ำหนักของฟังก์ชันการประมาณค่าภายใน ปัญหาก็คือการหาค่า  $w_i$  เพื่อจะแก้สมการ (2.18)

จากเอกลักษณ์ของอนุพันธ์ของเวกเตอร์ (สูตรสำหรับเวกเตอร์) คือ

$$\nabla \cdot (fA) = f(\nabla \cdot A) + \nabla f \cdot A \quad (2.22)$$

ในเทอมของตัวแปรในสมการ (2.20) เอกลักษ์ณ์ของอนุพันธ์ของเวกเตอร์ คือ

$$[\nabla \cdot (v\sigma\nabla\tilde{u})] = \sigma\nabla\tilde{u} \cdot \nabla v + v\nabla \cdot (\sigma\nabla\tilde{u}) \quad (2.23)$$

แทนสมการ (2.23) ลงในสมการ (2.20) จะได้

$$\int [\nabla \cdot (v\sigma\nabla\tilde{u}) - \sigma\nabla\tilde{u} \cdot \nabla v] d\Omega = 0 \quad (2.24)$$

จัดรูปใหม่ได้

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v\sigma\nabla\tilde{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma\nabla\tilde{u} \cdot \nabla v d\Omega \quad (2.25)$$

แบบ 2 มิติ กฎของเกาส์กล่าวว่า  $\int_V (\nabla \cdot F) dV = \int_{\partial V} F ds$  จากทฤษฎีของไดเวอร์เจนต์ยอมให้ใช้เงื่อนไข

ไขขอบเขตในสมการ (2.25)

$$\int_{\partial\Omega} v\sigma\nabla\tilde{u} \cdot \hat{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma\nabla\tilde{u} \cdot \nabla v d\Omega \quad (2.26)$$

โดยที่  $\nabla\phi \cdot \hat{n} = \frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}}$  ดังนั้นสมการ 2.26 สามารถเขียนได้ว่า

$$\int_{\Omega} \sigma\nabla\tilde{u} \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\partial\Omega} v\sigma \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\hat{n}} d\Gamma \quad (2.27)$$

การอินทิเกรตค่าขอบเพื่อต้องการทำให้สมบูรณ์ สำหรับเอลิเมนต์ที่อยู่ภายใต้ไอเล็กโทรด ด้านซ้ายของสมการ (2.27) สำหรับเมชทั้งหมด เมื่อพิจารณาเอลิเมนต์ลำดับที่  $k$  จะได้สมการคือ

$$\int_{E_k} \sigma_k \nabla\tilde{u} \cdot \nabla v d\Omega \quad (2.28)$$

นิยามของการประมาณค่าภายในของ  $v$  และ  $u$  จะได้สมการ

$$\int_{E_k} \sigma_k \sum_{i=1}^3 u_i \phi_i \cdot \nabla \sum_{j=1}^3 w_j \phi_j d\Omega \quad (2.29)$$



ถ้าสภาพนำไฟฟ้า ( $\sigma_k$ ) มีค่าคงที่ตลอดทั้งเอลิเมนต์แล้วผลรวมของแรงดันที่จุดต่อ ( $u_i$ ) และ สัม –  
ประสิทธิ์ของฟังก์ชันการถ่วงน้ำหนักสามารถดึงออกนอกอินทิเกรตได้ดังสมการ (2.30)

$$\sigma_k \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 w_j \int_{E_k} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega \quad (2.30)$$

ผลลัพธ์ที่ได้เป็นเมตริกซ์ขนาด  $3 \times 3$  สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ จากนั้นดึงส่วนของอินทิเกรตออกมา  
ดังสมการ

$$S_{ij}^k = \int_{E_k} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega \quad (2.31)$$

จากสมการ (2.30) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\sigma_k \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 w_j S_{ij}^k \quad (2.32)$$

ทางด้านขวาของสมการ (2.27) แทนด้วยเงื่อนไขขอบเขต ในเทอมของฟังก์ชันการประมาณค่าภายใน  
ได้สมการดังนี้

$$\int_{\partial\Omega} v \sigma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \hat{n}} d\Gamma = \sigma_k \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 w_j \int_{\partial\Omega} \phi_i \nabla \phi_j \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (2.33)$$

ความสามารถในการแก้ปัญหาสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ก่อนที่จะวางมันกลับไปแทนปัญหาทั้งหมด  
คือข้อดีของไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับเอลิเมนต์เดี่ยวของโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการ (2.26)  
จะได้เป็น

$$\sigma_k \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 w_j S_{ij}^k = \sigma_k \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 w_j \int_{\partial\Omega} \phi_i \nabla \phi_j \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (2.34)$$

นำผลรวมของค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักหารทั้งสองด้านของสมการ จะได้

$$\sigma_k \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 S_{ij}^k = \sigma_k \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega} \phi_i \nabla \phi_j \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (2.35)$$

ในเทอมของโดเมนทั้งหมด ด้านซ้ายของสมการ (2.27) จะได้

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \phi dV = \sum_{E=1}^K \sigma_k \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_i S_{ij}^k \quad i, j = 1, \dots, N \quad (2.36)$$

- การคำนวณโลคอลเมตริกซ์  
เกรเดียนท์ของแรงดันภายในเอลิเมนต์อาจจะพบจากสมการประมาณค่าเชิง

เส้น ดังสมการ (2.15)

$$\nabla U = \sum_{i=1}^3 U_i \nabla \phi_i \quad (2.37)$$

ใส่ไดเวอร์เจนทลงในสมการ (2.37) จะได้

$$\nabla \cdot \nabla U = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 U_i \int \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Gamma U_j$$

เพื่อความสะดวกในการหาเมตริกซ์ของอีลิเมนต์ (local stiffness matrix) กำหนดให้

$$S_{ij}^{(e)} = \int \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Gamma \quad (2.38)$$

ตัวแสดงถึงอีลิเมนต์ สมการ (2.38) เป็นการจำแนกสมการ (2.31) และอาจเขียนในรูปแบบกำลังสองของเมตริกซ์

$$\dots\dots\dots \nabla \cdot \nabla U = S^{(e)} U$$

เกรเดียนท์ของฟังก์ชันการประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้น ดังสมการ (2.16) กลายเป็นเวกเตอร์

$$\nabla \phi_i = \frac{1}{2A} (y_2 - y_3, x_3 - x_2) \quad (2.39)$$

ซึ่งในเทอมของโลคอลเมตริกซ์สำหรับอีลิเมนต์คล้ายกับ เมตริกซ์ที่พิสูจน์จากวิธีโดยตรง นั่นคือ  $S_{ij} = Y_{ij}$  เหมือน  $\mathbf{Y}$  ในสมการ (2.7)

- กำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต

ถ้าเป็น โมเดลแบบช่องว่าง ระบบพีชคณิตของสมการจะเหมือนกับวิธีโดยตรง ในเทอมของวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่าง เงื่อนไขค่าขอบเขตของ โมเดลแบบช่องว่างวิเคราะห์จากด้านขวาของสมการ (2.27) ดังนี้

$$\int_{\Gamma} u \sigma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.40)$$

เมื่อไม่มีกระแสไหลบริเวณที่ห่างจากอิเล็กโทรด ดังนั้น  $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$  และกระแสลัพธ์ (resulting currents) คือ  $I = \int_{E_i} \sigma \partial u / \partial n$  เนื่องจากโมเดลแบบช่องว่าง กระแสถูกจ่ายระหว่างจุดต่อของโมเดลของไฟไนต์อีลิเมนต์ เงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\int_{\Gamma} u \sigma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = u_a I_a + u_b I_b \quad (2.41)$$

โดย  $I_a$  และ  $I_b$  คือปริมาณของกระแสที่จ่าย และ  $u_a$  และ  $u_b$  แรงดันของอิเล็กโทรดตัวที่จ่ายกระแส

#### 2.2.2.4 โมเดลอิเล็กโทรดแบบสมบูรณ์ (complete electrode model)

ในการประยุกต์ใช้ทางการแพทย์ อิเล็กโทรดที่สัมผัสบริเวณผิวหนังหรือในแท่ง (หุ่นจำลอง) ที่มีสารละลายไอออนจะเกิดขึ้นของความต้านทานสัมผัส (contact impedance) ระหว่างสารละลายหรือผิวหนังกับอิเล็กโทรด จึงก่อให้เกิดผลกระทบทางอ้อมเป็นผลให้แรงดันภายใต้อิเล็กโทรดมีค่าคงที่ได้ไม่นาน อย่างไรก็ตามแรงดันบนอิเล็กโทรดก็ยังมีค่าคงที่ ในความเป็นจริงค่าความต้านทานสัมผัส ( $z_\ell$ ) จะเปลี่ยนแปลงตลอดทั้งอิเล็กโทรดแต่จะสมมติให้มีค่าคงที่สำหรับความถี่ที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าจะทำให้ความต้านทานสัมผัสมีค่าสูง ดังนั้นแรงดันตกคร่อมจึงมีค่ามาก การเพิกเฉยต่อค่าความต้านทานสัมผัสจะทำให้ภาพของสภาพความนำไฟฟ้าที่สร้างขึ้นเกิดความผิดพลาด ดังนั้นโมเดลอิเล็กโทรดแบบสมบูรณ์จึงได้รวมผลกระทบของความต้านทานสัมผัส นอกจากนี้โมเดลอิเล็กโทรดแบบสมบูรณ์ยังถูกกำหนดโดยสมการลาปลาซเขียนดังสมการ (2.1) และเงื่อนไขขอบเขต แสดงดังนี้

$$u + z_\ell \sigma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = U_\ell, \quad \text{บน } E_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, L \quad (2.42)$$

$$\int_{E_\ell} \sigma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = I_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, L \quad (2.43)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{บน } d\Gamma \setminus \bigcup_{\ell=1}^L E_\ell \quad (2.44)$$

ในสมการเหล่านี้  $I_\ell$  คือ กระแสที่จ่ายให้อิเล็กโทรดลำดับที่  $\ell$ ,  $E_\ell$  แสดงถึงเอลิเมนต์ที่ส่วนของขอบ ( $\Gamma$ ) ซึ่งสัมผัสกับอิเล็กโทรดลำดับที่  $\ell$  และ  $U_\ell$  คือแรงดันคงที่บนอิเล็กโทรด  $\ell$  พิจารณาสมการ (2.42) หมายถึงแรงดันที่วัดได้บนอิเล็กโทรดประกอบด้วย แรงดันบนขอบรวมกับแรงดันที่ตกคร่อมความต้านทานของอิเล็กโทรด และ  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  หมายถึงความต้านทานสัมผัสซึ่งเป็นเพียงแฟล็กเตอร์ของกระแสที่ตกคร่อมระหว่างอิเล็กโทรดกับผิวหนัง จากสมการ (2.43) หมายถึงการอินทิเกรตความหนาแน่นของกระแสตลอดอิเล็กโทรดเท่ากับผลรวมของกระแสที่ไหลผ่านอิเล็กโทรดนั้น สุดท้ายสมการ (2.44) หมายถึงไม่มีกระแสไหลเข้าหรือออกจากวัตถุในบริเวณที่ไม่มีอิเล็กโทรด เช่น ช่องว่างระหว่างอิเล็กโทรด สรุปได้ว่าโมเดลอิเล็กโทรดแบบสมบูรณ์ประกอบด้วยสมการ (2.1) และ (2.42) ถึง (2.44) ร่วมกับเงื่อนไขสำหรับการอนุรักษ์ประจุดังนี้

$$\sum_{\ell=1}^L I_{\ell} = 0$$

และการเลือกกราวด์เสมือน

$$\sum_{\ell=1}^L V_{\ell} = 0$$

- การประมวลผลเชิงเลขของโมเดลอิเล็กโทรดแบบสมบูรณ์  
โมเดลอิเล็กโทรดแบบสมบูรณ์ดังสมการ (2.42) ถึง (2.44) สามารถเขียนในรูปเชิงเลข ดังนี้

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_C = \mathbf{I}_C \quad (2.45)$$

โดย  $\mathbf{A}$  คือ โกลบอลเมตริกซ์ของสภาพความนำไฟฟ้า (global conductance matrix) บางครั้งเรียกว่าเมตริกซ์ของ stiffness,  $\mathbf{I}_C$  คือ กระแสที่จ่าย และ  $\mathbf{V}_C$  คือ เวกเตอร์ของแรงดันที่จุดต่อของโมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์ และอิเล็กโทรดดังนี้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{c1} + \mathbf{A}_{c2} & \mathbf{A}_e \\ \mathbf{A}_e^T & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$\mathbf{V}_C = \begin{bmatrix} v \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}$   $v \in N$ ,  $\mathbf{U} \in L$  เป็นแรงดันบนอิเล็กโทรด  $L$  และ

$$\mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad 0 \in N, \quad \mathbf{I} \in L$$

ในสมการ (2.46)  $\mathbf{A}_{c1}$  คือ

$$\mathbf{A}_{c1}(i, j) = \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_i \nabla \phi_j dA \quad (2.47)$$

แทนลงในสมการ (2.1) และอินทิเกรตทั่วทั้งพื้นที่หรือปริมาตรของแต่ละเอลิเมนต์ วิธีการเชิงเลขคล้ายกับเมตริกซ์  $\mathbf{Y}$  ซึ่งพิสูจน์โดยวิธีการโดยตรง ส่วน  $\mathbf{A}_{c2}$  เป็นการเพิ่มผลกระทบของความต้านทานสัมผัสที่จุดต่อภายใต้อิเล็กโทรด ดังสมการ

$$\mathbf{A}_{c2}(i, j) = \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_j} \int_{e_l} \phi_i \phi_j d\Gamma \quad (2.48)$$

ในสมการ (2.46) องค์ประกอบของ  $\mathbf{A}_e$  คือ

$$\mathbf{A}_e(i, j) = -\frac{1}{z_j} \int_{e_l} \phi_i d\Gamma \quad i \in [1, N] \text{ และ } j \in [1, L]$$

สุดท้ายขององค์ประกอบ  $\mathbf{A}_d$  คือ

$$\mathbf{A}_d(i, j) = \begin{cases} |e_l| \frac{1}{z_j} & \text{for } i, j \in [1, L] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad e_l \text{ คือ ความยาวของอิเล็กโทรด}$$

ซึ่งติดต่อกับชั้นสัมผัสของอิเล็กโทรด ดังนั้นอันดับแรกในการหาค่าของเมตริกซ์  $\mathbf{A}$  คือแก้เงื่อนไขขอบเขตตามธรรมชาติ เช่น โมเดลแบบช่องว่าง จากนั้นขยายโดย  $\mathbf{A}_e$  และ  $\mathbf{A}_d$

### 2.2.3 อัลกอริทึมในการแก้โมเดลแบบฟอร์เวิร์ด (FWD Model)

ระบบของสมการ (2.8) และ (2.45) มีลักษณะพิเศษ โดยเมตริกซ์ของแอตมิตแดนซ์สำหรับโมเดลอิเล็กโทรดแบบช่องว่าง แทนด้วยเมตริกซ์  $\mathbf{Y}$  มีขนาดเท่ากับ  $N \times N$  สำหรับโมเดลอิเล็กโทรดแบบสมบูรณ์ แทนด้วยเมตริกซ์  $\mathbf{A}$  มีขนาด  $(N+L) \times (N+L)$  โดยเมตริกซ์  $\mathbf{A}$  และ  $\mathbf{Y}$  มีลักษณะบางเบา (sparse) เนื่องจากข้อมูลส่วนใหญ่มีค่าเป็น 0 จำนวนของค่าที่ไม่เป็น 0 ในแต่ละแถวของบล็อกลึกขึ้นกับจำนวนของจุดตัด (vertex) ข้างเคียงที่เชื่อมกับจุดตัดบริเวณขอบ ซึ่งเมตริกซ์มีลักษณะสมมาตรและมีค่าเป็นบวกเท่านั้น ค่าที่เป็นบวกภายในเมตริกซ์สามารถแยกออกเป็นแฟกเตอร์ของสามเหลี่ยม 2 รูปโดยใช้การแยกตัวประกอบด้วยวิธีโคเลสกี้ (Cholesky factorization) ร่วมกับการแทนกลับ

$$\mathbf{AV} = \mathbf{U}^T \mathbf{UV} = \mathbf{C} \quad (2.51)$$

โดยใช้การสมมติตัวแปร ดังสมการ

$$\mathbf{U}^T \mathbf{q} = \mathbf{C} \quad (2.52)$$

แก้หาค่า  $\mathbf{q}$  แล้วแทนกลับเพื่อหา  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{UV} = \mathbf{q} \quad (2.53)$$

## 2.3 การสร้างภาพ (reconstruction)

อัลกอริทึมในการสร้างภาพสามารถแบ่งได้หลายรูปแบบซึ่งแต่ละแบบมีจุดมุ่งหมายในการ

สร้างภาพที่ต่างกันตามลักษณะของอิมพีแดนซ์

- a) ระบบการสร้างภาพแบบต่างกัน (difference imaging system) เป็นการสร้างภาพการเปลี่ยนแปลงอิมพีแดนซ์ตลอดเวลา จะกล่าวถึงในตอนถัดไป
- b) แบบสถิตหรือระบบคงที่ (static system) เป็นการสร้างภาพการกระจายของอิมพีแดนซ์ปัจจุบัน
- c) ระบบการสร้างภาพแบบหลายความถี่เป็นการสร้างภาพของการเปลี่ยนแปลงอิมพีแดนซ์ที่ขึ้นกับความถี่ Griffith และ Zhang อธิบายว่าเป็นภาพที่สร้างจากการเปลี่ยนแปลงอิมพีแดนซ์ที่สองความถี่ ส่วน Brown et al อธิบายว่าเป็นการจ่ายกระแสที่หลายๆความถี่แล้วพิสูจน์หาค่าพารามิเตอร์ เช่น พารามิเตอร์ของ Cole-Cole จากการวัดค่าที่ความถี่จาก 9.6 กิโลเฮิร์ตซ์ ถึง 1.2 เมกะเฮิร์ตซ์
- d) ระบบการสร้างภาพแบบเคลื่อนที่ (dynamic imaging system) เป็นการสร้างภาพการเปลี่ยนแปลงสภาพสภาพความนำไฟฟ้าอย่างรวดเร็ว ระบบนี้สภาพความนำไฟฟ้าจะถูกสมมติให้เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วเมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้รับจากช่วงห่างระหว่างสัญญาณ แต่จะช้าเมื่อเกี่ยวข้องกับคาบเวลาของเฟรมข้อมูล

### 2.3.1 การสร้างภาพแบบต่างกัน

จุดประสงค์ของการสร้างภาพแบบต่างกันคือ การสร้างภาพการเปลี่ยนแปลงอิมพีแดนซ์หรือสภาพความนำไฟฟ้าที่เกิดขึ้นตลอดในช่วงเวลาหนึ่ง ชุดของข้อมูล  $\mathbf{v}_1$  วัดที่เวลา  $t_1$  และชุดข้อมูล  $\mathbf{v}_2$  วัดที่เวลา  $t_2$  จากนั้นจะใช้อัลกอริทึมในการคำนวณการเปลี่ยนแปลงสภาพความนำไฟฟ้าจาก  $t_1$  ไป  $t_2$  วิธีนี้ใช้สำหรับปรากฏการณ์ที่ภาพเปลี่ยนแปลงตามเวลา (temporal imaging). ในการประยุกต์ใช้ทางการแพทย์ เช่นการเปลี่ยนแปลงอิมพีแดนซ์ระหว่างการหายใจ เป็นต้น นอกจากนี้การสร้างภาพแบบต่างกันยังใช้กันอย่างกว้างขวางเพื่อปรับปรุงการสร้างภาพให้มีเสถียรภาพสำหรับปัญหาที่เกิดขึ้นเช่น การไม่รู้ค่าความต้านทานสัมผัส, ความไม่ถูกต้องของตำแหน่งของอิเล็กโทรด, รูปร่างของขบที่รู้น้อยมาก, ความไม่เป็นเชิงเส้น และใช้ในการประมาณค่าแบบ 2 มิติจากสนามไฟฟ้าแบบ 3 มิติ

ตัวดำเนินการของการประมาณค่าแบบเชิงเส้นใช้คำนวณการเปลี่ยนแปลงสภาพความนำไฟฟ้า ในกรณีที่ปัญหาแบบไม่เป็นเชิงเส้นแก้สมการด้วยตัวดำเนินการแบบเป็นเชิงเส้นร่วมกับการทำซ้ำ โดยในแต่ละรอบของการทำซ้ำจะทำการปรับ (ให้เป็นปัจจุบัน) อย่างไรก็ตามการประยุกต์ใช้การสร้างภาพแบบต่างกันส่วนใหญ่จะสมมติให้สภาพความนำไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงน้อย ดังนั้นจึงแก้ปัญหาด้วยตัวดำเนินการแบบเป็นเชิงเส้นในขั้นตอนเดียวได้ ตัวดำเนินการแบบเป็นเชิงเส้นถูกพัฒนาด้วยจาโคเบียนเมตริกซ์ (jacobian matrix) เป็นการอธิบายเกี่ยวกับผลกระทบ

ของการเปลี่ยนแปลงสภาพความนำไฟฟ้าของทุกๆเอลิเมนต์บนสัญญาณที่วัดได้ระหว่างคู่ของ อิเล็กโทรด ถ้าโมเดลมีจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ  $E$  และจำนวนของการวัดศักดาเท่ากับ  $M$  จาโคเบียนเมตริกซ์จะมีขนาดเท่ากับ  $M \times E$

### 2.3.1 การหาค่าจาโคเบียน

จากตอนที่ 2.1.2 ทั้งการสร้างภาพแบบคงที่และแบบต่างกันมีโมเดลคือ  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Bz}$  สำหรับการสร้างภาพแบบต่างกัน  $\hat{\mathbf{x}} = \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$  เป็นการเปลี่ยนแปลงการกระจายสภาพความนำไฟฟ้าภายในไฟไนต์เอลิเมนต์เนื่องจากสัญญาณเปลี่ยนไปนั่นคือ  $\mathbf{z} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  ในช่วงเวลา  $t_1$  และ  $t_2$  โดยทั่วไปสัญญาณที่เวลา  $t_1$  ใช้เป็นเฟรมอ้างอิงและ สัญญาณที่เวลา  $t_2$  ใช้เป็นเฟรมข้อมูล ถ้าไม่รู้ค่า  $\sigma_1$  ค่า  $\hat{\mathbf{x}}$  แทนการเปลี่ยนแปลงสภาพความนำไฟฟ้าที่เกี่ยวข้องสภาพความนำไฟฟ้าอ้างอิงที่ไม่รู้ค่า ดังสมการ  $\hat{\mathbf{x}} = \Delta\sigma$

จาโคเบียนเมตริกซ์จะเหมือนกันทั้งของการสร้างภาพแบบคงที่และแบบต่างกัน อย่างไรก็ตามจาโคเบียนของปัญหาแบบฟอร์เวิร์ดที่เป็นเชิงเส้นถูกพัฒนาโดยสังเกตจากการสร้างภาพแบบต่างกัน จากสมการด้านล่าง

$$\mathbf{z} = \mathbf{Hx} + \mathbf{n} \quad (2.54)$$

โดย  $\mathbf{H}$  คือ เมตริกซ์จาโคเบียน และ  $\mathbf{n}$  คือสัญญาณรบกวนของระบบเนื่องจากการวัดซึ่งไม่เกี่ยวกับสัญญาณรบกวนไวต์เกาส์เซียนแบบบวก (additive white Gaussian noise; AWGN) ในแต่ละเอลิเมนต์ แถวที่  $i$  และคอลัมน์ที่  $j$  ของ  $\mathbf{H}$  คำนวณได้จาก  $\mathbf{H}_{i,j} = \left. \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right|_{\sigma_0}$  และสัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงของการวัดในลำดับที่  $i$  ต่อการเปลี่ยนแปลงของสภาพความนำไฟฟ้าของเอลิเมนต์ลำดับที่  $j$  ดังนั้น  $\mathbf{H}$  คือฟังก์ชันของโมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์, รูปแบบการจ่ายกระแสและสภาพความนำไฟฟ้าของพื้นหลัง โดยสภาพความนำไฟฟ้าของพื้นหลังของตัวกลางเอกพันธ์มีค่า  $\sigma_0 = 1$  สำหรับทุกๆเอลิเมนต์ เพื่อจะคำนวณเมตริกซ์การประมาณค่าแบบเป็นเชิงเส้น  $\mathbf{H}$  สัญญาณที่ใช้มีค่าดังนี้

$$\mathbf{z} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad (2.55)$$

แสดงในเทอมของโมเดลแบบฟอร์เวิร์ดจะได้  $\mathbf{z} = T[\mathbf{V}(\sigma_2)] - T[\mathbf{V}(\sigma_1)]$  โดย  $T[\ ]$  คือตัวดำเนินการของการวัดระหว่างอิเล็กโทรดจากเมตริกซ์ของแรงดันที่จุดต่อ โดยสมมติให้การเปลี่ยนแปลงสภาพความนำไฟฟ้าในช่วงเวลาหนึ่งมีค่าน้อยและสามารถใช้  $\sigma_1 = \sigma$  และ  $\sigma_2 = \sigma + \Delta\sigma$  จะได้  $\mathbf{z} = T[\mathbf{V}(\sigma)] - T[\mathbf{V}(\sigma + \Delta\sigma)]$  จากนั้นทำการถ่ายโอนสมการพีชคณิต ดังสมการ

$$\mathbf{z} = -\frac{T[\mathbf{V}(\sigma + \Delta\sigma) - \mathbf{V}(\sigma)]}{\Delta\sigma} \Delta\sigma$$

กำหนดให้  $\Delta\sigma \rightarrow 0$

ฉะนั้น

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(\sigma + \Delta\sigma) - \mathbf{V}(\sigma)}{\Delta\sigma} = \frac{\partial \mathbf{V}(\sigma)}{\partial \sigma}$$

เขียนในรูปแบบสมการเชิงเส้น จากสมการ(2.54) จะได้

$$\mathbf{z} = T \left[ -\frac{\partial \mathbf{V}(\sigma)}{\partial \sigma} \right] \Delta\sigma$$

โดยจาโคเบียนเท่ากับ

$$\mathbf{H} = T \left[ -\frac{\partial \mathbf{V}(\sigma)}{\partial \sigma} \right]$$

ในเทอมของโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์

$$\frac{\partial \mathbf{V}(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} (\mathbf{Y}^{-1}(\sigma)) I$$

จากกฎลูกโซ่จะได้สมการสุดท้ายของจาโคเบียนอยู่ในเทอมของโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนี้

$$\mathbf{H} = T \left[ -\frac{\partial}{\partial \sigma} (\mathbf{Y}^{-1}(\sigma)) I \right] = -T \left[ \mathbf{Y}^{-1}(\sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbf{Y}(\sigma) \mathbf{Y}^{-1}(\sigma) I \right]$$

เฉพาะการหาอนุพันธ์คำนวณได้จากอนุพันธ์ของ stiffness matrix

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (\mathbf{Y}^{-1}(\sigma))$$

อนุพันธ์ของสมการเชิงเส้นมีค่าคงที่สำหรับเมตริกซ์ของเอลิเมนต์ ณ ตำแหน่งของเอลิเมนต์ที่กำหนดให้และเท่ากับศูนย์ที่เอลิเมนต์อื่นๆ ค่าตอบของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นสำหรับการดำเนินการในแต่ละครั้งคือเวกเตอร์อื่นแทนด้วยการเปลี่ยนแปลงแรงดันซึ่งมีจำนวนเท่ากับ  $M$  เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยใน  $\sigma_i$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_i} (\mathbf{Y}^{-1}(\sigma)) \quad i \in E$$

การคำนวณอัลกอริทึมของจาโคเบียน ในอดีตใช้วิธีมาตรฐาน(standard method) ใดๆก็ตามที่มีวิธีที่มีประสิทธิภาพมากกว่าซึ่งเกี่ยวข้องกับความคิดในรูปแบบของการวัด โดยนิยามว่าถ้ากระแสถูกจ่ายจากอิเล็กโทรดที่วัด โดย  $\nabla \Phi$  คือเกรเดียนท์ของกระแสที่ได้มาโดยการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด และ  $\nabla \Psi$  คือเกรเดียนท์ของการวัด เมื่อคอลัมน์ที่  $i$  ของจาโคเบียนสัมพันธ์กับเอลิเมนต์ลำดับที่  $i$  ที่ถูกกำหนด โดยอินทิเกรตผลคูณเชิงสเกลาร์ของทั้งสองสนามทุกๆเอลิเมนต์ ดังนี้



$$\frac{\partial U_l^k}{\partial \sigma_i} = -\int_i \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \quad (2.56)$$

Polydorides ได้อธิบายเครื่องมือของผลลัพท์นี้ซึ่งในปัจจุบันเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการประมวลผลหาค่าจาโคเบียน

### 2.3.2 วิธีเรกูลาไรเซชัน

วิธีเรกูลาไรเซชันจะช่วยลดผลกระทบจากการแก้ระบบสมการที่เป็น ill-conditioned วิธีเรกูลาไรเซชันที่นิยมและใช้อย่างแพร่หลายคือวิธีเรกูลาไรเซชันแบบ Tikhonov

สมมติให้  $\mathbf{x} (\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n)$  และ  $\mathbf{z} (\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m)$  เป็นเวกเตอร์เชิงซ้อน และ  $\mathbf{H} (\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m \times n})$  เป็นเมตริกซ์เชิงซ้อน ต้องการหาค่า  $\mathbf{x}$  โดยกำหนดให้  $\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{z}$  ในกรณีนี้  $\mathbf{H}$  คือจาโคเบียนเมตริกซ์ขณะที่  $\mathbf{x}$  คือสภาพความนำไฟฟ้าที่เปลี่ยนไป และ  $\mathbf{z}$  คือแรงดันที่เปลี่ยนไป สามารถหาค่าสภาพความนำไฟฟ้า ( $\hat{\mathbf{x}}$ ) ได้จาก

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_x \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 \quad (2.57)$$

ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาแบบกำลังสองน้อยสุด (least squares solution) โดย  $\arg \min_x$  หมายถึงอาร์กิวเมนต์ของ  $\mathbf{x}$  ซึ่งมีค่าน้อยที่สุด

#### 2.3.2.1 วิธีเรกูลาไรเซชันแบบ Tikhonov

วิธีเรกูลาไรเซชันแบบ Tikhonov มีการเพิ่มสมการลงในสมการ (2.57) แสดงในสมการ (2.58) โดยการอ้างอิงข้อมูลก่อนหน้า (prior information)

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_x \{\|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{R}\mathbf{x}\|^2\} \quad (2.58)$$

โดย  $\mathbf{R}$  คือเมตริกซ์ของเรกูลาไรเซชัน และมีค่าเท่ากับเมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) เขียนในรูปโมเดลทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  และ  $\lambda^2 \|\mathbf{R}\mathbf{x}\|^2$  แทนข้อมูลก่อนหน้าที่เกี่ยวกับสภาพความนำไฟฟ้า โดย  $\mathbf{x}$  มีค่าน้อยและเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ การแก้สมการ (2.58) คำนวณได้จากการแปลงกลับเมตริกซ์ของเรกูลาไรเซชัน ดังสมการ

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z} = \mathbf{Bz} \quad (2.59)$$

$\lambda$  คือค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ (hyperparameter) ใช้ควบคุมการแลกเปลี่ยนระหว่างเสถียรภาพของการแก้ปัญหากับความใกล้เคียงของการแก้ปัญหาด้วยเรกูลาไรเซชัน ซึ่งอาจจะต้องเสียอย่างใดอย่างหนึ่งไป

#### 2.3.2.2 วิธีเรกูลาไรเซชันแบบ Laplacian[4]

วิธีเรกูลาไรเซชันแบบ Laplacian เป็นการประยุกต์ใช้ฟิลเตอร์ที่ไวต่อขอบ (edge

sensitive filter) โดยเมตริกซ์  $\mathbf{R}$  อยู่บนพื้นฐานของฟิลเตอร์ที่ไวต่อขอบ ซึ่งคำนวณจากเอลิเมนต์ตัวมันเองและเอลิเมนต์ที่อยู่รอบๆ โดยกำหนดให้เอลิเมนต์ที่อยู่รอบๆ มีค่าน้ำหนักเท่ากับ -1 และเอลิเมนต์ตัวมันเองมีน้ำหนักเท่ากับ  $D+1$  ( $D$  คือมิติของโมเดล) สำหรับเอลิเมนต์อื่นๆ มีน้ำหนักเป็นศูนย์ ดังนี้

$$R_{i,j} = \begin{cases} D+1 & \text{if } i = j \\ -1 & \text{if element } i \text{ is adjacent to } j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

### 2.3.3 อัลกอริทึมแบบเกาส์-นิวตัน (Gauss-Newton algorithm)[10]

การแก้ปัญหของสมการกำลังสองน้อยสุดแบบไม่เป็นเชิงเส้น ทำได้โดยการทำให้ค่าในแต่ละรอบของการทำซ้ำจะใช้สมการกำลังสองน้อยสุดแบบเป็นเชิงเส้น โดยหาค่าต่ำสุดของผลรวมกำลังสองของฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น  $m$  จำนวนดังสมการ

$$\min_{x \in R^n} f(x), f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i^2(x), m \geq n \quad (2.60)$$

โดยที่  $r_i(x)$  เป็นฟังก์ชันแยกค้ำแบบไม่เป็นเชิงเส้นตลอด  $R_n$

วิธีพื้นฐานสำหรับปัญหกำลังสองน้อยสุดแบบไม่เป็นเชิงเส้นคือต้องการอนุพันธ์ของข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับองค์ประกอบของ  $r_i(x)$  จำนวนสองค่าที่ต่างกันอย่างต่อเนื่อง จะได้จาโคเบียนของเวกเตอร์แยกค้ำดังนี้

$$J(x) \in R^{m \times n}, J(x)_{ij} = \frac{\partial r_i(x)}{\partial x_j}$$

โดย  $i = 1, \dots, m$  และ  $j = 1, \dots, n$  และ Hessian matrix ของ  $r_i(x)$  คือ

$$G_i(x) = \nabla^2 r_i(x) \in R^{n \times n}, G_i(x)_{jk} = \frac{\partial^2 r_i(x)}{\partial x_j \partial x_k}, x = 1, \dots, m$$

จะได้อนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของ  $f(x) = \frac{1}{2} r(x)^T r(x) = \frac{1}{2} \|r(x)\|^2$  ดังนี้

$$\nabla f(x) = J(x)^T r(x) \quad (2.61)$$

$$\nabla^2 f(x) = J(x)^T J(x) + Q(x), Q(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x) G_i(x) \quad (2.62)$$

สามารถนำค่าทั้งสองไปใช้ประโยชน์ได้ สำหรับวิธีเกาส์-นิวตัน อาจเพิกเฉยค่า  $Q(x)$  จากสมการ 2.62 เนื่องจากมีค่าน้อย แตกต่างจากวิธีนิวตัน ทำให้การแก้สมการเร็วขึ้น อย่างไรก็ตามวิธีนิวตันดีกว่าในกรณีที่ปัญหาเป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้นมาก

วิธีเกาส์-นิวตันสำหรับปัญหาของสมการ 2.60 อยู่บนพื้นฐานของลำดับการประมาณค่าเชิงเส้นของ  $r(x)$  ถ้า  $x_k$  แทนค่า ณ ปัจจุบัน และ  $p_k$  หาได้จากสมการดังนี้

$$\min_p \|r(x_k) + J(x)_k p\|_2, p \in R^n$$

และประมาณค่าโดย  $x_{k+1} = x_k + p_k$

ข้อดีของวิธีนี้คือสามารถแก้ปัญหาแบบรอบเดียว โดยลู่เข้าได้เร็วในกรณีที่เหมาะสม การกำลังสองน้อยสุดแบบไม่เป็นเชิงเส้นมีค่าน้อย อย่างไรก็ตามมันอาจไม่ลู่เข้าถ้ามีความไม่เป็นเชิงเส้นมาก

## 2.4 EIDORS (Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software ) [4]

EIDORS เป็นซอฟต์แวร์อิสระ (free software) ที่เหมาะสำหรับการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า (electrical impedance tomography : EIT) และภาพตัดขวางการกระจายตัวทางแสง (diffuse optical tomography : DOT) EIDORS รุ่นแรกมาจากวิทยานิพนธ์ของ Vauhkonen (1997) ที่ถูกพัฒนาบน MATLAB สำหรับเมชแบบสองมิติ โดยแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด จากนั้นสร้างภาพและแสดงผล เพื่อที่จะรองรับการแก้ปัญหาการสร้างภาพของโมเดลแบบสามมิติ จึงได้มีโครงการใหม่ขึ้นมาเรียกว่า EIDORS3D (รุ่นที่ 2) โดยวิทยานิพนธ์ของ Polydorides (2002) แพจเกจของซอฟต์แวร์ EIDORS มีการแบ่งปัน (share) ในด้านพื้นฐานเชิงตัวเลขและอัลกอริทึมที่เหมือนกัน แต่มีการแบ่งปันรหัส (code) ของซอฟต์แวร์น้อยมาก ซอฟต์แวร์แต่ละตัวจะจำลองตัวกลางโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ และสร้างภาพด้วยเทคนิคการแปลงกลับของเรกูลาไรเซชัน (regularized inverse)

### 2.4.1 สถาปัตยกรรมของซอฟต์แวร์ (software architecture)

ซอฟต์แวร์ EIDORS ประกอบด้วยข้อมูล (data), ภาพ (image), fwd\_model (forward model) และ inv\_model (inverse model) โดยทั้งหมดมีคุณสมบัติตามชื่อและชนิด

2.4.1.1 fwd\_model เป็นส่วนที่ซับซ้อนที่สุดของซอฟต์แวร์ EIDORS เนื่องจากถูกออกแบบให้แทนที่โมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์, ตำแหน่งและคุณสมบัติของอิเล็กโทรด รวมทั้งรูปแบบการกระตุ้น นอกจากนี้ยังมีฟังก์ชันที่ใช้แก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด ดังภาพประกอบ 2-8

โมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกอธิบายในรูปแบบของจุดต่อ (nodes) มีมิติเท่ากับ  $V \times D$ , เอลิเมนต์ (elems) มีมิติเท่ากับ  $N \times (D+1)$  และขอบเขต (boundary) มีมิติเท่ากับ  $B \times D$  โดยที่  $V$  คือจำนวนของจุดต่อ (vertices),  $N$  คือจำนวนของเอลิเมนต์ (simplices),  $B$  คือจำนวนของเอลิเมนต์ที่อยู่บริเวณขอบของโมเดลและ  $D$  คือมิติของโมเดล โดย  $D=2$  สำหรับโมเดล 2 มิติ และ  $D=3$  สำหรับโมเดล 3 มิติ และ gnd node คือจุดต่อที่ต่อกับกราวด์

อิเล็กโทรดจะถูกกำหนดด้วยเวกเตอร์ของอิเล็กโทรดซึ่งมีขนาดเท่ากับ  $E \times 1$

และแต่ละอิเล็กโทรดประกอบด้วย  $z\_contact$  ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์ และ  $nodes$  เป็นปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งแทนที่ความต้านทานสัมผัส และจุดต่อที่เชื่อมโยงกับอิเล็กโทรดตามลำดับ อิเล็กโทรดแบบจุดจะมีจุดต่อเพียงจุดเดียวและมีค่า  $z\_contact = 0$  ขณะที่โมเดลอิเล็กโทรดแบบสมบูรณ์ จะมีจุดต่อหลายจุดและ  $z\_contact \geq 0$

ในการใช้อิเล็กโทรดเหล่านี้ ลำดับของรูปแบบการกระตุ้นแทนด้วยสัญลักษณ์  $S$  จะถูกจ่ายกระแส และวัดแรงดันเพื่อให้เกิดกรอบของข้อมูล รูปแบบของการกระตุ้นถูกกำหนดโดยเวกเตอร์ของการกระตุ้นซึ่งมีขนาดเท่ากับ  $S \times 1$  ในการกระตุ้นแต่ละครั้งจะได้ข้อมูลซึ่งประกอบด้วย  $stimulation$ ,  $stim\_pattern$  และ  $meas\_pattern$  โดย  $stimulation$  คือปริมาณของการกระตุ้นบริเวณอิเล็กโทรด (จ่ายกระแสและวัดแรงดัน),  $stim\_pattern$  คือ จำนวนครั้งของการกระตุ้น (ในที่นี้หมายถึงจำนวนครั้งของการจ่ายกระแสและเป็นเมตริกซ์ขนาด  $E \times 1$ ) และ  $meas\_pattern$  คือ จำนวนครั้งของการวัด ซึ่งเมตริกซ์มีลักษณะบางเบา (sparse matrix) และมีขนาดเท่ากับ  $E \times M_i$  โดย  $M_i$  คือแรงดันที่วัดได้บนอิเล็กโทรดจากการจ่ายกระแสครั้งที่  $i$  ยกตัวอย่างเช่น ถ้า  $k = 2$  เป็นความแตกต่างของสัญญาณระหว่างอิเล็กโทรด 4 และ 5 แล้ว  $meas\_pattern_{j,k}$  เป็น 1 เมื่อ  $j = 4$  และ -1 เมื่อ  $j = 5$  จำนวนของการวัดทั้งหมดในแต่ละเฟรมคือ  $M = \sum_{i=0}^S M_i$

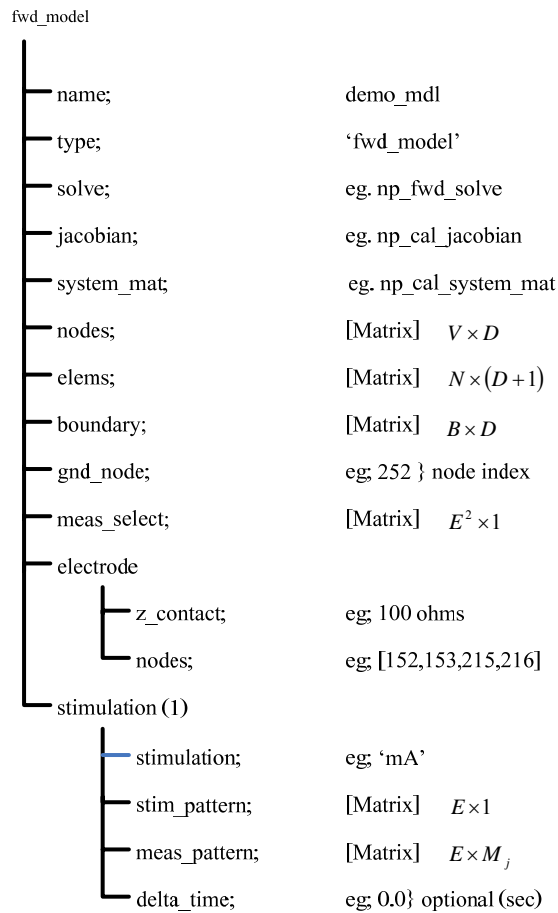
สำหรับระบบการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าหลายระบบจะมีรูปแบบการกระตุ้นแบบข้างเคียง (adjacent) คือจะไม่วัดแรงดันบนคู่อิเล็กโทรดที่จ่ายกระแส เพราะฉะนั้นจะได้จำนวนครั้งของการวัด  $M = E \times (E - 3)$  สำหรับระบบที่มี 16 อิเล็กโทรด  $M = 208$  ข้อมูลที่เก็บจะมีขนาดเท่ากับ  $E^2 \times F$  โดย  $F$  คือจำนวนของกรอบข้อมูล (data frames) เพื่อให้ง่ายขึ้นเราอาจใช้ฟังก์ชัน  $meas\_select$  ซึ่งมีขนาดเท่ากับ  $E^2 \times 1$  แทนผลตอบแทนในแต่ละตำแหน่งที่เกิดจากการวัดในแต่ละเฟรม

นอกจากนี้ EIDORS ยังมีฟังก์ชันใช้งานทั่วไป เช่น `mk_circ_tank.m`, `mk_stim_patterns.m` และ `mk_common_model.m` ฟังก์ชันเหล่านี้จะทำให้การสร้างโมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์แบบวงกลมและทรงกระบอกง่ายขึ้น และสามารถกำหนดโพลาไรเซชันของการกระตุ้นแบบข้างเคียง (ทั้งจ่ายกระแสและวัดแรงดัน) ใน `fwd_model` ยังประกอบด้วยฟังก์ชันที่ใช้แก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด คือ `solve`, `jacobian` และ `system_mat` โดยรูปแบบของฟังก์ชันคือ `fwd_solve()`, `calc_jacobian()` และ `calc_system_mat()` ยกตัวอย่างเช่น `fmdl` เป็น `fwd_model` สามารถคำนวณหาเมตริกซ์ของระบบ (system matrix) ได้จาก

$$Smat = calc\_system\_mat ( fmdl );$$

โค้ดนี้จะเรียกฟังก์ชันที่เหมาะสมและจัดการกับแคลชของการประมวลผล ใน

กรณีนี้ถ้าเมตริกซ์ของระบบถูกคำนวณมาก่อนหน้านี้ โดยมีค่าเหมือนกับ fwdl ค่านี้จะถูกนำมาใช้ใหม่โดยไม่ต้องเรียกฟังก์ชันอีกครั้ง



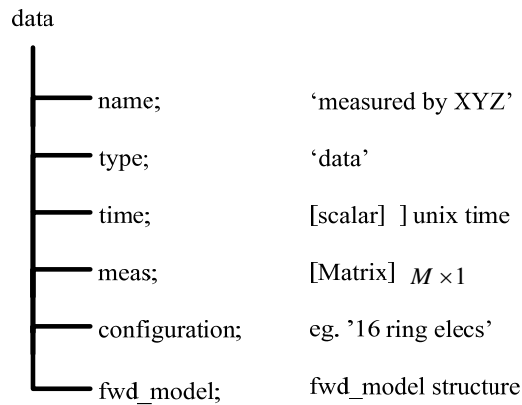
ภาพประกอบ 2-8 โครงสร้างของ fwd\_model [4]

2.4.1.2 ข้อมูล (Data) แทนกรอบของข้อมูลที่วัดหรือจำลองได้ โครงสร้างของข้อมูลแสดงดังภาพประกอบ 2-9 ประกอบด้วย frame\_data, meas และ time (acquisition time) ซึ่งมีหน่วยเป็นวินาที ในการประยุกต์ใช้งาน time ถูกกำหนดให้ขึ้นกับจุดเริ่มต้นอื่นๆ เช่น จุดเริ่มต้นของการทดลอง โดยอาจจะมีค่าเท่ากับ 0 หรือ -1 สำหรับเวลาที่ไม่ว่าง หรือการจำลองข้อมูล meas มีขนาดเมตริกซ์เท่ากับ  $M \times 1$  โดย  $M$  คือจำนวนของการวัดในแต่ละเฟรม (ผลรวมของการวัดในการกระตุ้นแต่ละครั้ง)

ข้อมูลอาจจะโหลดข้อมูลไปยัง EIDORS โดยใช้ฟังก์ชัน eidors\_readdata() ซึ่งเป็นอินเตอร์เฟซของรูปแบบการเก็บข้อมูลที่ใช้โดยผู้ผลิตเครื่องมือ EIT บางเครื่อง

ในบางครั้งข้อมูล (data object) อาจประกอบด้วยทางเลือก 2 ทางคือรูปแบบ (con -

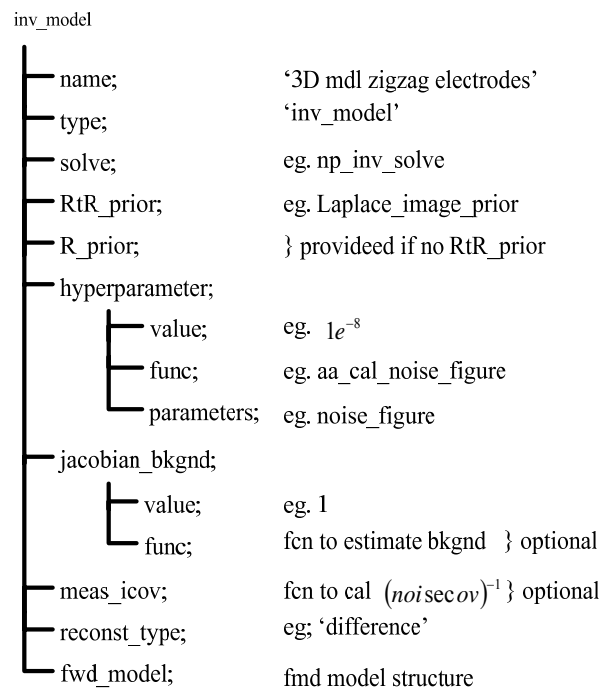
figuration) คือตัวอักษรที่ผู้ใช้ระบุขึ้นร่วมกับฟังก์ชันที่คล้ายกัน และ fwd model เป็นการรับรองว่าข้อมูลที่เสนอมีความถูกต้องและสามารถนำไปใช้สร้าง โมเดลที่ถูกต้อง



ภาพประกอบ 2-9 โครงสร้างของ data [4]

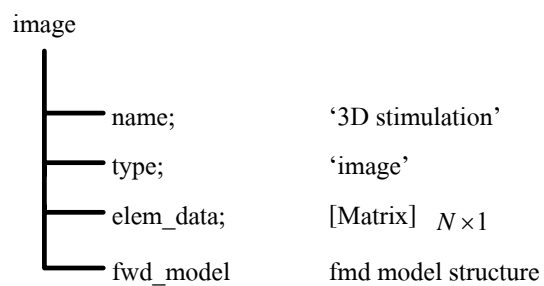
2.4.1.3 Inv\_model แสดงดังภาพประกอบ 2-10 แสดงกลุ่มของข้อมูลที่จำเป็นสำหรับการสร้างภาพ ชนิดของการสร้างภาพแบบพื้นฐานแบ่งออกเป็น 2 แบบคือ 'difference' สร้างภาพจากข้อมูลที่แตกต่างกัน 2 ข้อมูล กับ 'static' สร้างภาพจากข้อมูลเดี่ยว ซึ่งฟังก์ชันที่มีอยู่บนพื้นฐานของอัลกอริทึมการสร้างภาพร่วมกับวิธีเรกูลาไรเซชัน โดยมีข้อมูลที่จำเป็นคือ ข้อมูลก่อนหน้า (image prior) และการเลือกค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ (hyperparameter) ในกรณีทั่วไปค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์อาจมีค่าคงที่ แต่ในกรณีที่ซับซ้อนมากๆ การเลือกค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์อาจถูกระบุด้วยฟังก์ชันเช่น 'aa\_calc\_noise\_figure'

โดยปกติข้อมูลก่อนหน้าอาจถูกใช้ 2 ทาง คือรูปแบบเรกูลาไรเซชันของ  $\|\lambda \mathbf{R}\mathbf{x}\|$  หรือ  $\|\lambda \mathbf{x}\|_R$  ซึ่ง  $\mathbf{x}$  คือเวกเตอร์ของค่าเอลิเมนต์ของภาพ (image element values) กรณีทั่วไปส่วนใหญ่จะใช้ค่านอร์มกำลังสอง (quadratic norm) ซึ่งแทนด้วย  $\lambda^2 \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$  หรือ  $\lambda^2 \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$  ตามลำดับ การจำลองภาพแต่ละครั้งเพื่อให้ได้ภาพที่ชัดเจนจะขึ้นอยู่กับชนิดของข้อมูลก่อนหน้า ซึ่ง EIDORS มีฟังก์ชันที่ต่างกันสองชนิดในการคำนวณค่าข้อมูลก่อนหน้า คือ R\_prior และ RtR\_prior ในบางกรณีผู้ใช้อาจใช้ทั้งสองค่า เมื่ออัลกอริทึมใน solve ถูกเรียกใช้ มันจะเรียกไปยัง R\_prior และ RtR\_prior



ภาพประกอบ 2-10 โครงสร้างของ inv\_model[4]

2.4.1.4 ภาพ (Image) แทนค่าตัวนำไฟฟ้าที่สร้างหรือจำลองขึ้น จากภาพประกอบ 2-11 แสดงโครงสร้างของภาพ โดย elem\_data เป็นเมตริกซ์ขนาด  $N \times 1$  คือ ค่าของแต่ละเอลิเมนต์ของภาพในโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์



ภาพประกอบ 2-11 โครงสร้างของ image [4]

## บทที่ 3

### วิธีดำเนินงานวิจัย

ในบทนี้กล่าวถึงขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย โดยเริ่มจากการศึกษาการสร้างภาพตัดขวาง ความต้านทานไฟฟ้าด้วย EIDORS เวอร์ชัน 3.3 ว่ามีกระบวนการในการสร้างภาพอย่างไร จากนั้นทำการทดสอบความสามารถของเรกูลาไรเซชันที่มีอยู่คือแบบ Tikhonov และ Laplacian ร่วมกับอัลกอริทึมของเกาส์ – นิวตันแบบรอบเดียว โดยทดลองวางวัตถุที่มีระยะห่างไม่เท่ากัน 2 แบบคือที่ระยะห่างประมาณ 1.7 เซนติเมตรและแบบที่วางใกล้กันที่สุดที่ยังคงแยกแยะวัตถุจากภาพตัดขวาง ความต้านทานไฟฟ้าได้ แต่เนื่องจากเกิดข้อผิดพลาดเพราะจำนวนเอลิเมนต์น้อยเกินไป จึงต้องทำการปรับปรุงจำนวนของเอลิเมนต์ภายในโมเดลโดยใช้วิธีที่เรียกว่า dual model ประกอบด้วยโมเดลสองตัว คือแบบที่มีจำนวนเอลิเมนต์มากเรียกว่า fine model และแบบที่มีจำนวนเมชน้อย เรียกว่า coarse model เพื่อแก้ปัญหาข้อจำกัดของทรัพยากรในการคำนวณ นอกจากนี้ยังคำนึงถึงการนำไปประยุกต์ใช้งานได้จริงจึงได้มีการเปรียบเทียบผลการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าจากโมเดลแบบ 8 และ 16 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวน 2 ระนาบ สุดท้ายศึกษาผลกระทบของระยะห่างระหว่างระนาบของอิเล็กโทรดต่อขนาดและรูปร่างของวัตถุที่ตรวจจับได้จากการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า

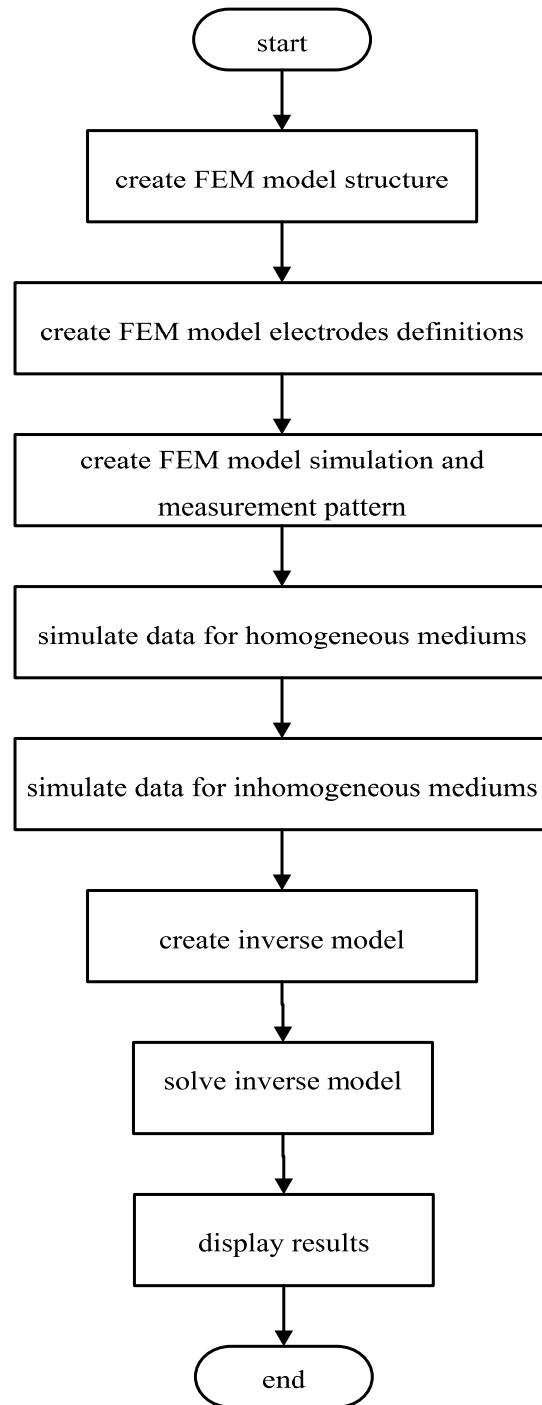
#### 3.1 การสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าด้วย EIDORS เวอร์ชัน 3.3

การสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้ามีกระบวนการดังภาพประกอบ 3-1 สามารถแบ่งออกเป็น 3 ส่วนหลักๆ โดยเริ่มจากสร้างโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) และกำหนดรูปแบบของการจ่ายกระแสและวัดแรงดันที่อิเล็กโทรด จากนั้นจำลองข้อมูลจากตัวกลางที่เป็นเอกพันธ์และไม่เป็นเอกพันธ์ สุดท้ายสร้างโมเดลของอินเวอร์ส และทำการแก้ปัญหาอินเวอร์ส พร้อมแสดงผล

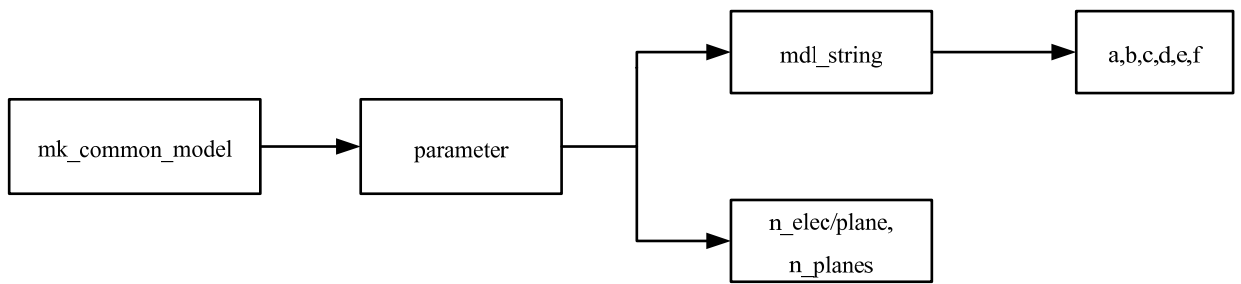
จากภาพประกอบ 3-1 ขั้นตอนแรกทำการสร้างโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งสามารถสร้างได้ทั้งแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยฟังก์ชันที่ใช้งานมีอยู่หลายฟังก์ชัน ยกตัวอย่างเช่น `mk_common_model` และ `create_tank_mesh_ng` โดย `mk_common_model` เป็นฟังก์ชันที่มีรูปแบบที่แน่นอนไม่สามารถปรับเปลี่ยนได้ ดังภาพประกอบ 3-2 ประกอบด้วยพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ `mdl_string` ซึ่งประกอบด้วยตัวอักษรจาก a ถึง f และจำนวนอิเล็กโทรดในหนึ่งระนาบและจำนวนระนาบของอิเล็กโทรด ยกตัวอย่างเช่น `mk_common_model('a2C',16)` แสดงว่าเป็นโมเดลรูปร่างกลมขนาด 2 มิติ ที่มี 16 อิเล็กโทรด ประกอบด้วย 64 เอลิเมนต์ภายในโมเดล และ `mk_common_model('b3cr',[16,3])`



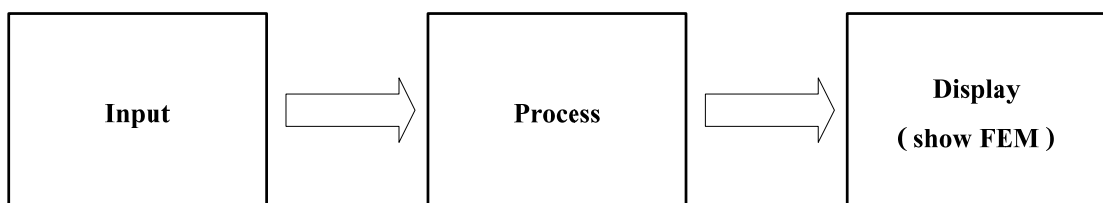
แสดงว่าเป็นรูปทรงกระบอกประกอบด้วย 16 อิเล็กโทรด 3 ชั้น สามารถดูรายละเอียดได้ในโฟลเดอร์ `models /a_adler` ไฟล์ `mk_common_model.m` อย่างไรก็ตามฟังก์ชันนี้มีข้อจำกัดคือไม่สามารถกำหนดขนาดของโมเดลและจำนวนอิเล็กโทรดได้ สำหรับ `create_tank_mesh_ng` เป็นฟังก์ชันที่ใช้สร้างโมเดลรูปทรงกระบอก โดยทำงานร่วมกับโปรแกรม Netgen เพื่อสร้างเมชภายในโมเดล ซึ่งสามารถกำหนดขนาดของโมเดล, จำนวนอิเล็กโทรด และรูปแบบของอิเล็กโทรด ดังภาพประกอบ 3-3 โดย Netgen คือเครื่องมือที่ใช้สร้างเมชแบบอัตโนมัติ ทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ โดยสำหรับ 2 มิติ จะสร้างเมชแบบสามเหลี่ยม (triangular) หรือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (quadrilateral) และรูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) สำหรับ 3 มิติ



ภาพประกอบ 3-1 กระบวนการในการสร้างภาพ



ภาพประกอบ 3-2 บล็อกไดอะแกรมการสร้างต้นแบบโมเดลด้วยฟังก์ชัน mk\_common\_model



ภาพประกอบ 3-3 ขั้นตอนการสร้างต้นแบบโมเดลด้วยฟังก์ชัน create\_tank\_mesh\_ng

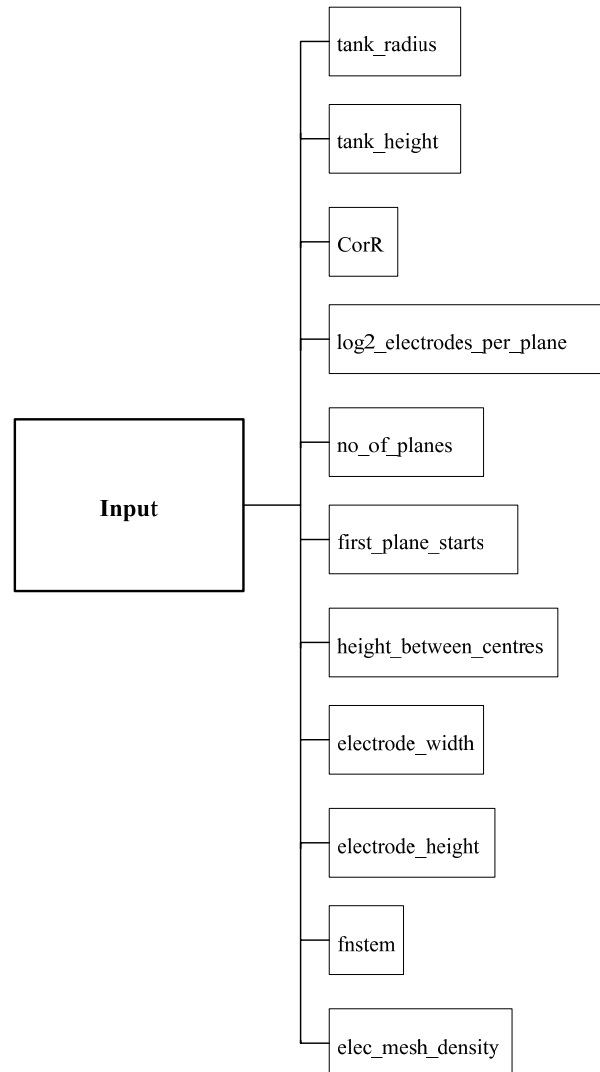
จากภาพประกอบ 3-3 อธิบายการทำงานได้ดังนี้

- ส่วนที่ 1 Input เป็นการกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆดังนี้
  - tank\_radius คือรัศมีของโมเดล มีหน่วยเป็นเซนติเมตร
  - tank\_height คือความสูงของโมเดล มีหน่วยเป็นเซนติเมตร
  - CorR คือรูปแบบของอิเล็กโทรด ถ้ากำหนดเป็น 'C' แสดงว่าอิเล็กโทรดเป็นวงกลม และ 'R' แสดงว่าอิเล็กโทรดเป็นสี่เหลี่ยม
  - log2\_electrodes\_per\_plane คือค่า log ฐาน 2 ของจำนวนอิเล็กโทรดในแต่ละชั้น
  - no\_of\_planes คือ จำนวนของชั้นอิเล็กโทรด
  - first\_plane\_starts คือตำแหน่งของอิเล็กโทรดระนาบแรก ตามพิกัดในแนวแกน z
  - height\_between\_centres คือระยะห่างระหว่างชั้นอิเล็กโทรด
  - electrode\_width คือความกว้างของแผ่นอิเล็กโทรด มีหน่วยเป็นเซนติเมตร
  - electrode\_height คือความสูงของแผ่นอิเล็กโทรด มีหน่วยเป็นเซนติเมตร
  - fnstem คือชื่อไฟล์ที่ใช้เก็บในโปรแกรม Netgen
  - elec\_mesh\_density คือ ความหนาแน่นของเมชที่มีมากบริเวณใกล้อิเล็กโทรด ดังภาพ

ประกอบ 3-4

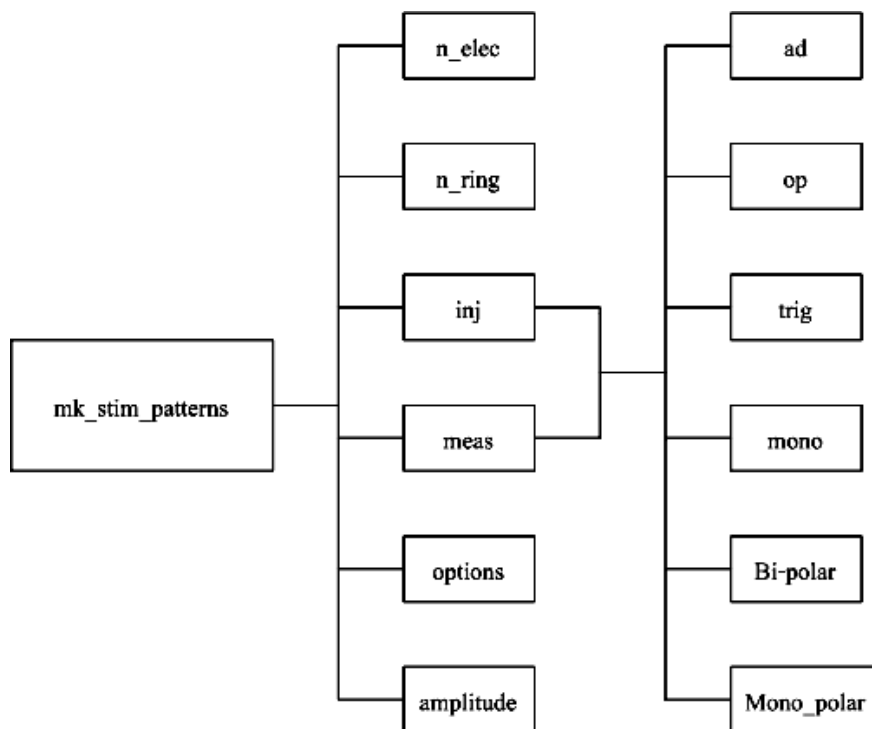
- ส่วนที่ 2 เป็นกระบวนการสร้างเมชโดยใช้ฟังก์ชัน create\_tank\_mesh\_ng

- ส่วนที่ 3 เป็นการแสดงผลโดยใช้คำสั่ง `show_fem`



ภาพประกอบ 3-4 พารามิเตอร์ของอินพุต

ต่อมากำหนดรูปแบบการจ่ายกระแสและวัดแรงดันโดยใช้ฟังก์ชัน `mk_stim_pattern` สามารถกำหนดได้หลายรูปแบบ ดังภาพประกอบ 3-5 นอกจากนี้ยังมีทางเลือก (options) ของการวัดแรงดันว่าจะให้วัดแบบใด ยกตัวอย่างเช่น `'no_meas_current'` เป็นกำหนดว่าไม่ต้องวัดแรงดันบนอิเล็กโทรดที่จ่ายกระแส



ภาพประกอบ 3-5 รูปแบบของการจ่ายกระแสและวัดแรงดัน

จากภาพประกอบ 3-5 ทำการกำหนดค่าพารามิเตอร์ดังนี้

- n\_elec คือ จำนวนของอิเล็กโทรดต่อระนาบ
- n\_rings คือ จำนวนระนาบของอิเล็กโทรด
- inj คือ รูปแบบของการจ่ายกระแส (injection pattern)
- meas คือ รูปแบบของการวัดแรงดัน (measurement pattern)
- options คือ ทางเลือกของการวัดแรงดัน
- amplitude คือ ขนาดของกระแสที่จ่ายให้อิเล็กโทรด โดยมีค่าอ้างอิงเท่ากับ 1 มิลลิแอมป์

นอกจากนี้ ยังสามารถเลือกรูปแบบการจ่ายกระแสและวัดแรงดัน ดังนี้

- '{ad}' เป็นแบบขั้วข้างเคียง (adjacent drive) สมมูลกับ [0 1]
- '{op}' เป็นแบบขั้วตรงข้าม (opposite drive) สมมูลกับ [0, n\_elec/2]
- '{trig}' เป็นการจ่ายด้วยสัญญาณตรีโกณมิติ (trigonometric drive) [sin,cos,sin,cos ...]
- '{mono}' เป็นการจ่ายระหว่างอิเล็กโทรดแต่ละตัว (กระแสออกจากกราวด์)
- แบบไป-โพลาร์ (Bi-polar injection patterns) เป็นการจ่ายกระแสแบบ [x y] โดยเริ่มจาก

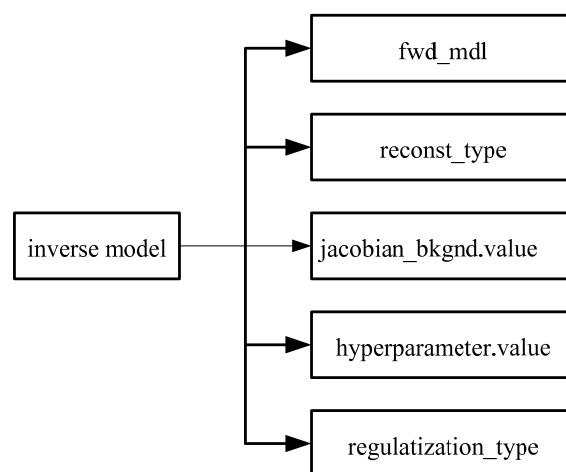
[x,y] ถัดไปคือ [x+1,y+1]

- แบบโมนโ-โพลาร์ (Mono-polar injection patterns) เป็นการจ่ายกระแสแบบ [x] โดยเริ่มจาก [x] ถัดไปคือ [x+1]

พร้อมทั้ง ทางเลือกของการวัดแรงดัน

- 'no\_meas\_current' / 'meas\_current' วัดหรือไม่วัดอิเล็กโทรดที่จ่ายกระแส
- 'rotate\_meas' / 'no\_rotate\_meas' วัดแบบวนรอบหรือไม่วนรอบ
- 'do\_redundant' / 'no\_redundant' วัดแบบทำซ้ำหรือไม่ทำซ้ำ โดยเปรียบเทียบกัน

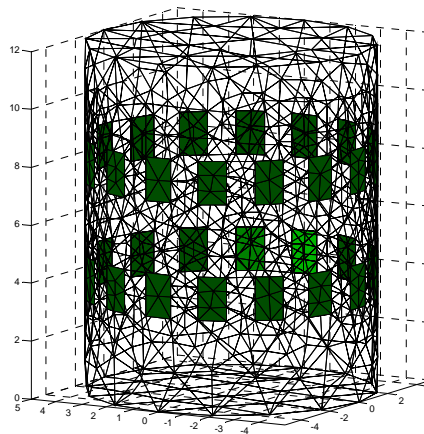
จากนั้นคำนวณหาค่าแรงดันในแต่ละเอลิเมนต์โดยใช้ฟังก์ชัน fwd\_solve เพื่อใช้เป็นข้อมูลอ้างอิง ในขั้นตอนนี้ได้ทำการกำหนดให้ทุกเอลิเมนต์มีพื้นหลังของภาพเท่ากับ 1 โดยเมทริกซ์มีขนาดเท่ากับ  $E \times 1$  ซึ่ง  $E$  คือจำนวนเอลิเมนต์ และสร้างโมเดลแบบฟอร์เวิร์ดโดยใช้ฟังก์ชัน eidors\_obj ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ใช้สร้างไฟล์ไม่ว่าจะเป็นไฟล์ชนิด fwd\_model, inv\_model, data หรือ image ต่อมาทำการจำลองวัตถุภายในโมเดล โดยใช้ความสัมพันธ์ของจุดต่อ (nodes) เชื่อมโยงเอลิเมนต์หลายๆ เอลิเมนต์จนเป็นก้อน และคำนวณหาค่าแรงดันในแต่ละเอลิเมนต์โดยใช้ฟังก์ชัน fwd\_solve เพื่อเป็นข้อมูลที่ใช้สร้างภาพ สุดท้ายกำหนดฟังก์ชันของอินเวอร์สที่จำเป็นสำหรับแก้สมการเช่น อัลกอริทึมที่ใช้แก้สมการ, ชนิดของการสร้างภาพ, ชนิดของเรกูลาไรเซชัน, ค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ และไฟล์โมเดลแบบฟอร์เวิร์ด เป็นต้น รายละเอียดดังภาพประกอบ 3-6 พร้อมสร้างโมเดลแบบอินเวอร์สด้วยฟังก์ชัน eidors\_obj อีกครั้ง แล้วทำการแก้ปัญหาด้วยฟังก์ชัน inv\_solve เพื่อหาค่าสภาพความนำไฟฟ้าที่เปลี่ยนไปและแสดงผลเป็นภาพด้วยฟังก์ชัน show\_fem หรือ show\_slice



ภาพประกอบ 3-6 ฟังก์ชันที่จำเป็นสำหรับแก้สมการของ inverse

### 3.2 การสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าโดยใช้เรกูลาไรเซชันแบบ Tikhonov และ Laplacian

ขั้นตอนแรกจำลองโมเดลที่มีลักษณะเป็นแท่งรูปทรงกระบอก (cylindrical tank) ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 เซนติเมตร สูง 12 เซนติเมตร เนื่องจากเต้านมมีขนาดรัศมีประมาณ 3-5 เซนติเมตร โมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยอิเล็กโทรดสองระนาบ ระนาบละ 16 อิเล็กโทรดวางภายในผิวของโมเดล อิเล็กโทรดระนาบแรกวางอยู่ที่ความสูง  $z = 4$  เซนติเมตร ระยะห่างระหว่างระนาบของอิเล็กโทรดเท่ากับ 4 เซนติเมตร อิเล็กโทรดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด  $15 \times 10$  ตารางมิลลิเมตร ดังภาพประกอบ 3-7 โดยใช้ฟังก์ชัน `create_tank_mesh_ng` สร้างโมเดลทรงกระบอกขนาด 3 มิติ และเก็บในไฟล์ที่ชื่อว่า `fmdl` ทั้งนี้โมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วย 4,450 อิเล็กเมนต์ และ 1,179 โหนด



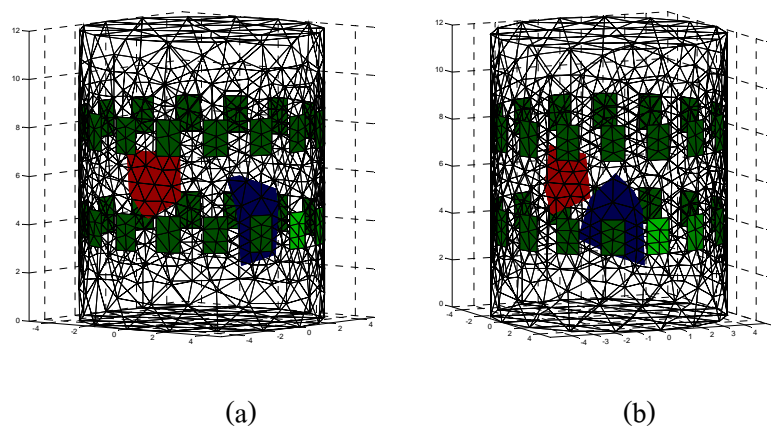
ภาพประกอบ 3-7 โมเดลของ FEM

จากนั้นกำหนดรูปแบบการจ่ายกระแสและวัดแรงดันโดยใช้ฟังก์ชัน `mk_stim_pattern` ในการทดลองนี้ใช้รูปแบบการจ่ายกระแสและวัดแรงดันแบบขั้วข้างเคียงและกำหนดขนาดของกระแสเท่ากับ 1 มิลลิแอมป์ โดยไม่ได้ระบุความถี่ของกระแส เนื่องจากซอฟต์แวร์ถูกออกแบบให้มีความยืดหยุ่นต่อระบบของการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า[4] จำนวนข้อมูลที่วัดได้ทั้งหมด 928 ข้อมูล รายละเอียดทั้งหมดดังภาพประกอบ 3-8 ซึ่งเป็นข้อมูลที่มีความสำคัญในการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด ถัดมาทำการจำลองวัดดูภายในโมเดล ดังภาพประกอบ 3-9 โดยวัดดูสีแดงและสีน้ำเงินเป็นวัตถุชนิดเดียวกัน แต่ที่แยกคนละสี เพื่อให้เห็นความแตกต่างอย่างชัดเจน และมีลักษณะเป็นแท่งยาว ขั้นตอนต่อไปทำการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด จากนั้นใช้วิธีเรกูลาไรเซชันเพื่อทำให้ระบบมีความเสถียร โดยเรกูลาไรเซชันที่เลือกใช้เป็นแบบ Tikhonov และ Laplacian ต่อมากำหนดค่า

ไฮเปอร์พารามิเตอร์ (hyperparameter) ที่เหมาะสมเพื่อให้ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่สร้างขึ้นใกล้เคียงกับภาพอ้างอิงมากที่สุด จากการสังเกต สุดท้ายแก้ปัญหาแบบอินเวอร์สโดยใช้อัลกอริทึมของเกาส์-นิวตันแบบรอบเดียว ทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการใช้เรกูลาไรเซชันแบบ Tikhonov และ Laplacian เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการสร้างภาพด้วยวิธีเรกูลาไรเซชันที่ต่างกันสองแบบ จึงได้ออกแบบการทดลองออกเป็นสองกรณี คือกรณีแรกวางวัตถุให้ห่างกันที่ระยะห่าง 1.7 เซนติเมตร และกรณีที่สองวางวัตถุให้ใกล้กันมากที่สุดที่ยังคงแยกแยะวัตถุออกจากกันได้เมื่อเปรียบเทียบกับภาพอ้างอิง

Field ▲	Value
nodes	<1179x3 double>
elems	<4450x4 double>
boundary	<1546x3 double>
gnd_node	1
np_fwd_solve	<1x1 struct>
name	'Netgen based cylindrical tank model'
electrode	<1x32 struct>
solve	'np_fwd_solve'
jacobian	'np_calc_jacobian'
system_mat	'np_calc_system_mat'
type	'fwd_model'
stimulation	<1x32 struct>

ดั่งภาพประกอบ 3-8 รายละเอียดของ fmdl



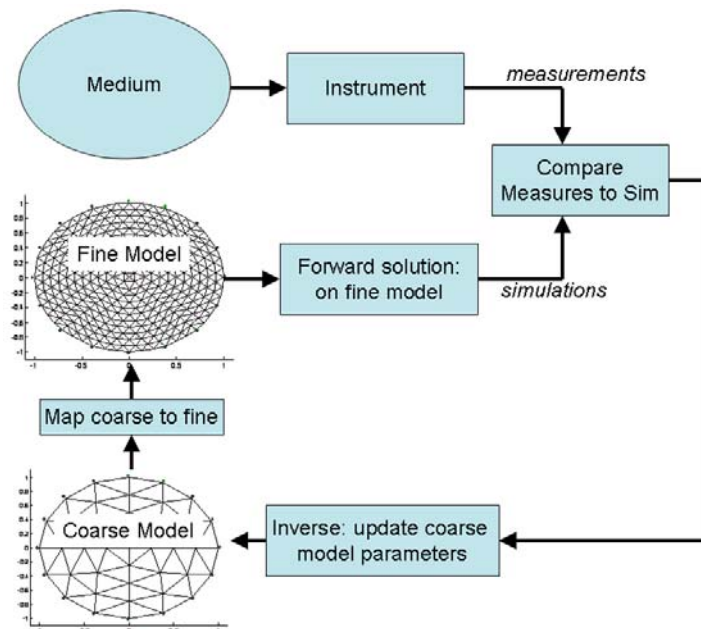
ภาพประกอบ 3-9 จำลองวัตถุสองรูปแบบ (a) วางวัตถุห่างกันประมาณ 1.7 เซนติเมตร (b) วางวัตถุใกล้กันที่สุดที่ยังคงแยกแยะวัตถุออกจากกันได้



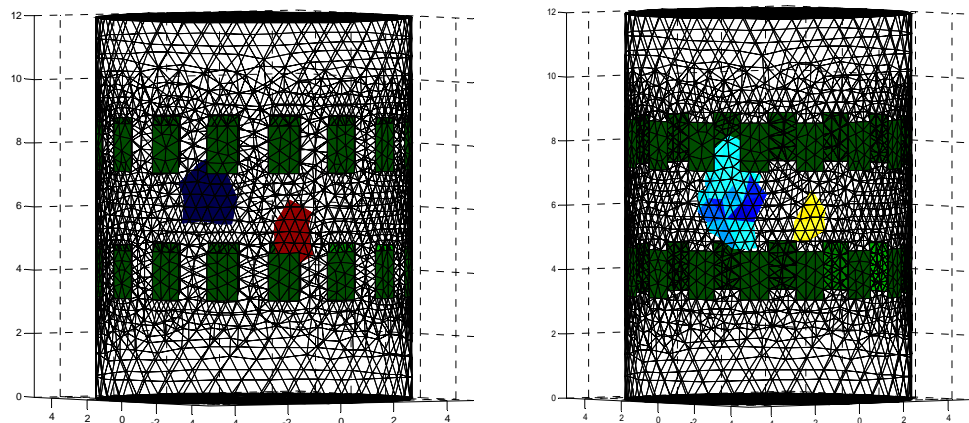
### 3.3 การปรับปรุงจำนวนเอลิเมนต์โดยใช้ dual model

จากการศึกษาในหัวข้อ 3.2 พบข้อผิดพลาดเนื่องจากเอลิเมนต์มีขนาดใหญ่เกินไป ทำให้ค่าอิมพีแดนซ์ที่คำนวณได้เกิดความคลาดเคลื่อนมาก เพราะฉะนั้นความถูกต้องของการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าจะแปรผันตามขนาดและจำนวนของเอลิเมนต์ภายในโมเดล[5] ดังนั้นถ้าโมเดลมีจำนวนเอลิเมนต์มากภาพที่ได้ก็就会有ความถูกต้องมากกว่าโมเดลที่มีจำนวนเอลิเมนต์น้อย อย่างไรก็ตามในการคำนวณก็ค่อนข้างซับซ้อน ทำให้ทรัพยากรที่มีอยู่ไม่เพียงพอเนื่องจากเมทริกซ์มีขนาดใหญ่มาก ดังนั้นจึงได้ประยุกต์เอาวิธีการแก้ปัญหาที่เรียกว่า dual model วิธีนี้จะสร้างโมเดลขึ้นมาสองตัว โมเดลแรกสร้างในส่วนของการแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด โดยให้มีจำนวนเอลิเมนต์มากๆ (fine model) เพื่อให้แม่นยำต่อการระบุตำแหน่งและรูปร่างของวัตถุ โมเดลที่สองสร้างเพื่อช่วยในการแก้สมการในการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส มีความซับซ้อนน้อยลงเนื่องจากมีจำนวนเมชน้อย (coarse model) โดยมีการแมปโมเดลระหว่างกัน ฟังก์ชันที่ใช้ในการแมปโมเดลคือ `mk_coarse_fine_mapping` สุดท้ายแก้สมการหาค่าการกระจายของอิมพีแดนซ์ ดังภาพประกอบ 3-10

ต่อมาได้ทำการทดลองสร้างวัตถุภายใน โมเดล พบว่าขนาดของวัตถุที่เล็กที่สุดที่สร้างภาพได้ประมาณ 1 เซนติเมตร ดังภาพประกอบ 3-11



ภาพประกอบ 3-10 กระบวนการสร้างภาพด้วยวิธี dual model [11]



ภาพประกอบ 3-11 ขนาดของวัตถุเล็กที่สุดที่ยังคงสร้างภาพได้

จากนั้นค้นหาระยะทางน้อยที่สุดระหว่างวัตถุทั้งสอง ซึ่งเมื่อสร้างภาพแล้วยังคงแยกแยะวัตถุทั้งสองออกจากกันได้ โดยคำนึงถึงการนำไปประยุกต์ใช้งานจริง เนื่องจากเมื่ออิเล็กโตรดมากจำนวนสายนำสัญญาณที่ต่อบริเวณอิเล็กโตรดจะมากตามไปด้วย ดังนั้นจึงออกแบบการทดลองโดยเปรียบเทียบผลการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าจากโมเดลแบบ 8 และ 16 อิเล็กโตรดต่อระยะนาบ จำนวน 2 ระยะนาบ ขั้นตอนในการดำเนินการทดลองมีดังนี้ เริ่มด้วยการสร้างโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดเท่ากับการศึกษาในหัวข้อ 3.2 จากนั้นกำหนดรูปแบบการจ่ายกระแสและวัดแรงดันเป็นแบบขั้วข้างเคียง และทำการปรับปรุงจำนวนเอลิเมนต์โดยใช้ทางเลือกที่มีใน Netgen จากการศึกษาใน tutorial/fem modeling/Build Double Plane Models with Netgen.mht ถัดมาแก้สมการแบบฟอร์เวิร์ด ทั้งข้อมูลของตัวกลางที่เป็นเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์ โดยวัตถุที่จำลองมีรูปร่างคล้ายทรงกลม และมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 2.5 และ 3 เซนติเมตร ทั้งนี้เทียบกับก้อนมะเร็งที่ตรวจพบด้วยเครื่องแมมโมแกรม โดยใช้ฟังก์ชัน `create_inclusion` ที่ทำการดัดแปลงให้สามารถสร้างวัตถุได้ 2 ก้อน และสามารถกำหนดขนาด, ตำแหน่งและความหนาแน่นของวัตถุได้ การทำงานของฟังก์ชันนี้เสมือนกับการรวมเอลิเมนต์รอบๆจุดศูนย์กลางให้มีขนาดเท่ากับรัศมีที่กำหนด ดังนั้นขอบของวัตถุจะมีลักษณะไม่เรียบและเป็นตะปุ่มตะป่ำคล้ายปลาปักเป้า โดยวางวัตถุทั้งสองที่ระยะห่างต่างกัน ในแนวแกน x ต่อมาสร้างโมเดลที่มีจำนวนเมชน้อยๆ โดยใช้ฟังก์ชัน `create_cylindrical_mesh_ng` และกำหนดขนาดของเอลิเมนต์ที่ใหญ่ที่สุด (maximum element size) เท่ากับ 1 แล้วทำการแมปโมเดลระหว่างโมเดลที่มีจำนวนเอลิเมนต์หลายๆกับโมเดลที่มีจำนวนเมชน้อย สุดท้ายสร้างภาพจากข้อมูลที่ได้จากการจำลองโดยใช้หลักการเรกูลาไรเซชันแบบ Tikhonov ร่วมกับอัลกอริทึมของเกาส์-นิวตันแบบรอบเดียว และแปรผันค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ เพื่อให้ได้ภาพที่ดีที่สุดเมื่อเทียบ

กับภาพอ้างอิง เหตุผลที่ไม่ใช้เรขาคณิต Laplacian ก็เพราะว่าเรขาคณิตแบบนี้จะตรวจจับขอบของวัตถุ แต่เนื่องจากวัตถุที่จำลองมีขอบที่ไม่ชัดเจน (ตะปุ่มตะป่ำ) ทำให้ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่สร้างเกิดความผิดพลาดมาก

### 3.4 ศึกษาผลกระทบในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า อันเนื่องมาจากระยะห่างระหว่างระนาบของอิเล็กโทรด

ข้อจำกัดข้อหนึ่งของการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าคือ ความสมมาตรของการวางอิเล็กโทรดมีผลต่อการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า [3] ดังนั้นในการออกแบบการทดลองจะต้องคำนึงถึงจุดนี้ด้วย การทดลองคล้ายกับการทดลองในหัวข้อ 3.3 แตกต่างกันตรงการตั้งค่าระยะห่างระหว่างระนาบของอิเล็กโทรดที่ค่าต่างๆคือ 2, 3, 4 และ 5 เซนติเมตร นอกจากนี้อิเล็กโทรดระนาบแรกจะแปรเปลี่ยนตามระยะห่างระหว่างระนาบของอิเล็กโทรดเพื่อทำให้การวางอิเล็กโทรดมีความสมมาตร

## บทที่ 4

### ผลการวิจัย

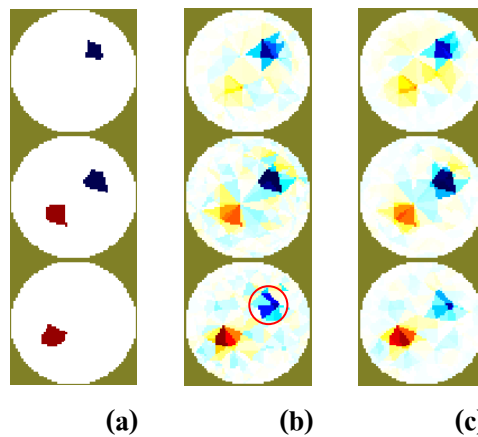
ในบทนี้อธิบายผลการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า จากการดำเนินการวิจัยในบทที่ 3 ดังนี้ กรณีแรกเป็นการเปรียบเทียบผลจากการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าโดยใช้เรกูลาไรเซชันแบบ tikhonov และ laplacian จากการทดลองพบว่าเรกูลาไรเซชันทั้งสองแบบเกิดความผิดพลาดในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่สภาวะต่างกัน ทำให้สรุปไม่ได้ว่าแบบไหนดีกว่ากัน เมื่อนำมาวิเคราะห์พบว่า สาเหตุหนึ่งที่น่าจะทำให้การทดลองผิดพลาดอาจเนื่องจากจำนวนเอลิเมนต์ที่น้อยเกินไปจึงก่อให้เกิดกรณีที่สองโดยทำการปรับปรุงจำนวนเอลิเมนต์ภายในโมเดล วิธีที่ใช้เรียกว่า dual model เป็นการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ภายในโมเดล จากนั้นจำลองวัตถุที่มีลักษณะคล้ายทรงกลมสองก้อน ในการทดลองจุดศูนย์กลางของวัตถุจะแปรผันตามแกน x เพื่อให้มีระยะห่างระหว่างวัตถุที่ค่าต่างๆกัน จากนั้นทำการเปรียบเทียบผลการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าของโมเดลแบบ 8 อิเล็กโทรดและ 16 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวน 2 ระนาบ กรณีสุดท้ายเป็นการเปรียบเทียบผลการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า อันเนื่องมาจากระยะห่างระหว่างระนาบของอิเล็กโทรดค่าต่างๆ โดยเริ่มจาก 2, 3, 4 และ 5 เซนติเมตร

#### 4.1 ผลการเปรียบเทียบภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าโดยใช้เรกูลาไรเซชันแบบ tikhonov และ laplacian

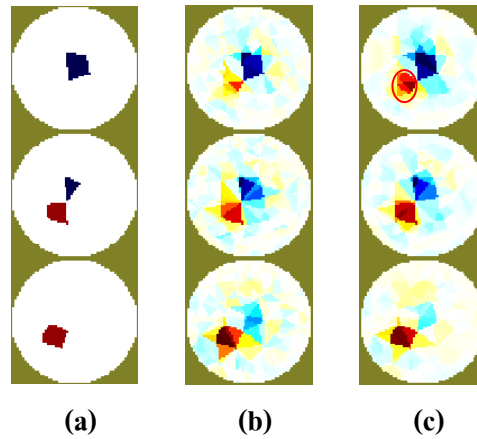
หลังจากจำลองโมเดล, จำลองการจ่ายกระแสและวัดแรงดัน และแก้สมการแบบพอร์เวิร์ด เพื่อหาค่าการกระจายของแรงดันภายใน โมเดลทั้งแบบเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์ ตามหัวข้อ 3.2 แล้ว ขั้นตอนต่อมาเป็นการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์ส โดยการกำหนดฟังก์ชันต่างๆที่จำเป็นสำหรับการแก้สมการ พบว่าค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่สุดเท่ากับ  $1 \times 10^{-6}$  และใช้การสร้างภาพแบบต่างกัน (different imaging) เนื่องจากในการวัดจริงทางคลินิกเทคนิคการสร้างภาพแบบสมบูรณ์ (absolute or static imaging) ทำได้ยากกว่าแบบต่างกันในด้านของค่าความต้านทานสัมผัส (contact impedance) ที่เกิดขึ้นบริเวณอิเล็กโทรด [12]

การทดลองแบ่งออกเป็นสองกรณี ในกรณีแรกจำลองวัตถุทั้งสองให้มีระยะห่างค่าหนึ่งแล้วทำการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า โดยวัตถุสีแดงมีความกว้างเท่ากับ 1.5 เซนติเมตรและความยาวเท่ากับ 3 เซนติเมตร ส่วนวัตถุสีน้ำเงินมีความกว้างเท่ากับ 1.3 เซนติเมตรและความยาวเท่ากับ 3.5 เซนติเมตร มีลักษณะคล้ายแท่งสี่เหลี่ยม ระยะห่างระหว่างวัตถุทั้งสองประมาณ 1.7

เซนติเมตร จากนั้นสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าได้ดังภาพประกอบ 4-1 พบว่าเรกูลาไรเซชันแบบ laplacian ดีกว่า tikhonov เนื่องจากแบบ tikhonov ทำให้เกิดความผิดพลาดที่ความสูง 6.5 เซนติเมตร นอกจากนี้เรกูลาไรเซชันแบบ laplacian ยังดีกว่าในเรื่องของความชัดเจนของขอบวัตถุ ดูได้จากภาพตัดขวางที่ความสูง 3.5 เซนติเมตร ในกรณีที่สองเป็นการจำลองวัตถุให้มีระยะห่างน้อยที่สุดที่ยังคงแยกแยะวัตถุทั้งสองได้โดยดูจากภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า โดยวัตถุสีแดงมีลักษณะเหมือนเดิม เปลี่ยนแต่วัตถุสีน้ำเงินซึ่งมีลักษณะคล้ายรูปทรงสี่หน้า จากการทดลองพบว่าเรกูลาไรเซชันแบบ tikhonov ดีกว่า laplacian ดังภาพประกอบ 4-2 เนื่องจากการใช้เรกูลาไรเซชันแบบ laplacian ทำให้เกิดความผิดพลาดที่ความสูง 4 เซนติเมตร จากการทดลองทั้งสองกรณีทำให้สรุปไม่ได้ว่าเรกูลาไรเซชันแบบไหนดีกว่ากัน ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากข้อจำกัดทางทรัพยากรที่ใช้ในการคำนวณไม่เพียงพอทำให้โมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างมีจำนวนเอลิเมนต์น้อย ดังนั้นเอลิเมนต์จึงมีขนาดใหญ่ก่อให้เกิดปัญหาหลายประการ เช่นไม่สามารถสร้างวัตถุให้มีขนาดเท่ากันหรือใกล้เคียงกันได้ และไม่สามารถกำหนดระยะห่างระหว่างวัตถุทั้งสอง ทำให้ไม่สามารถหาระยะห่างที่ใกล้ที่สุดที่ยังคงสร้างภาพได้ใกล้เคียงกับภาพอ้างอิงได้ เป็นต้น



ภาพประกอบ 4-1 ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าเมื่อวางวัตถุที่ระยะห่างประมาณ 1.7 เซนติเมตร (a) ภาพอ้างอิง (b) ภาพที่สร้างโดยวิธีเรกูลาไรเซชันแบบ tikhonov และ (c) ภาพที่สร้างโดยวิธีเรกูลาไรเซชันแบบ laplacian ซึ่งตัดที่ความสูง 3.5, 5 และ 6.5 เซนติเมตร (จากบนลงล่าง)



ภาพประกอบ 4-2 ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าเมื่อวางวัตถุที่ระยะห่างไกลที่สุด (a) ภาพอ้างอิง (b) ภาพที่สร้างโดยวิธีเรกูลาไรเซชันแบบ tikhonov และ (c) ภาพที่สร้างโดยวิธีเรกูลาไรเซชันแบบ laplacian ซึ่งตัดที่ความสูง 4, 5 และ 6.2 เซนติเมตร (จากบนลงล่าง)

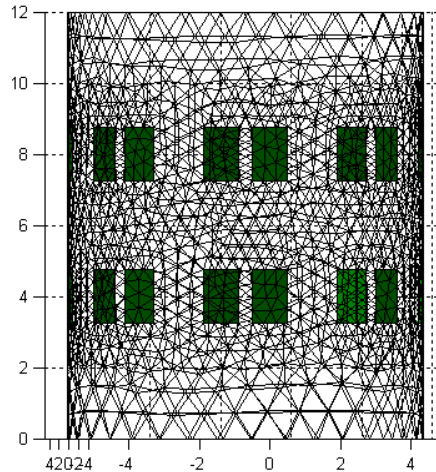
#### 4.2 การปรับปรุงจำนวนเอลิเมนต์โดยใช้ dual model เปรียบเทียบผลการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าระหว่างโมเดลแบบ 8 อิเล็กโทรด และ 16 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวน 2 ระนาบ

จากหัวข้อ 4.1 พบว่าปัญหาที่เกิดขึ้นเนื่องจากจำนวนเอลิเมนต์ภายในโมเดลน้อยเกินไป ดังนั้นจึงได้ทำการปรับปรุงจำนวนเอลิเมนต์ให้มากขึ้น แต่พบปัญหาว่าถ้าจำนวนเอลิเมนต์มากจะทำให้ไม่สามารถแก้ปัญหามาแบบอินเวอร์สได้ เพราะความไม่เพียงพอของทรัพยากร ดังนั้นจึงได้ใช้วิธีการของ dual model โดยเชื่อว่าการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าจะมีความถูกต้องมากขึ้นทั้งขนาดและตำแหน่งของวัตถุ และเพื่อให้การประยุกต์ใช้ในงานจริงสะดวกขึ้นจึงได้ทำการเปรียบเทียบโมเดลแบบ 8 อิเล็กโทรด และ 16 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวน 2 ระนาบ

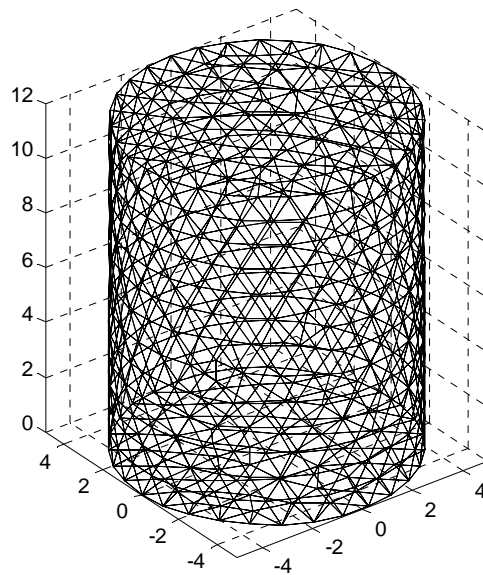
ขั้นแรกจำลองโมเดลแบบ 8 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวน 2 ระนาบก่อน โดยมีลักษณะเป็นแท่งรูปทรงกระบอกที่มีขนาดเท่ากับโมเดลในการทดลองที่ 4.1 และเป็นโมเดลที่มีจำนวนเอลิเมนต์มาก (fine model) พบว่ามีจำนวนโหนดเท่ากับ 7,312 โหนด และจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 37,518 เอลิเมนต์ ดังภาพประกอบ 4-3 จากนั้นทำการจำลองรูปแบบการจ่ายกระแสและวัดแรงดันแบบชั่วข้ามเคียง พร้อมทั้งแก้ปัญหามาแบบ forward ของตัวกลางแบบเอกพันธ์ ต่อมาจำลองวัตถุสองก้อนที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนพิกัด  $[x, 0, 6]$  ในการทดลองจะมีการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดศูนย์กลางตามแนวแกน x เพื่อหาระยะห่างน้อยสุดระหว่างวัตถุ นอกจากนี้ยังกำหนดความหนาแน่นของวัตถุให้มีค่าเท่ากับ 10 เหตุผลที่เลือกตำแหน่ง  $z = 6$  เพราะเป็นความสูงที่อยู่กึ่งกลางระนาบของอิเล็กโทรด มีจำนวนเอลิเมนต์หนาแน่นกว่าบริเวณที่อยู่ด้านบนหรือด้านล่างของระนาบของอิเล็กโทรด น่าจะทำให้ภาพที่สร้างมีความถูกต้องมากขึ้นในด้านขนาดและรูปร่างของวัตถุ พร้อมทั้ง

ได้ทำการทดลองเพื่อยืนยันยังสมมติฐาน พบว่าหากวางวัตถุที่ตำแหน่งต่ำกว่าอิเล็กโทรดระนาบแรก ( $z = 3$ ) และสูงกว่าอิเล็กโทรดระนาบที่สอง ( $z = 9$ ) จะมีความผิดพลาดในเรื่องของความยาวของวัตถุที่สร้างได้ซึ่งมากกว่าบริเวณกึ่งกลางของระนาบทั้งสอง จากนั้นแก้ปัญหาแบบฟอร์เวิร์ด ต่อมาจำลองโมเดลที่มีจำนวนเมชน้อย (coarse model) พบว่ามีจำนวน โหนดเท่ากับ 976 โหนดและจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 3,928 เอลิเมนต์ ดังภาพประกอบ 4-4 จากนั้นกำหนดค่าพารามิเตอร์ของโมเดลแบบอินเวอร์สโดยตั้งค่าไฮเปอร์พารามิเตอร์ (hyperparameter) เท่ากับ  $10^{-5}$  ในการแก้ปัญหาแบบอินเวอร์สใช้เรกูลาไรเซชันแบบ tikhonov เนื่องจากแบบ laplacian ทำให้ภาพที่สร้างเกิดการกระจายของเอลิเมนต์ เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะขอบของวัตถุไม่ราบเรียบมีลักษณะคล้ายปลาปักเป้า ดังนั้นจึงไม่เหมาะที่จะใช้เรกูลาไรเซชันแบบ laplacian สุดท้ายแก้ปัญหาโดยใช้อัลกอริทึมของเกาส์-นิวตันแบบรอบเดียวในการประมาณค่าอิมพีแดนซ์

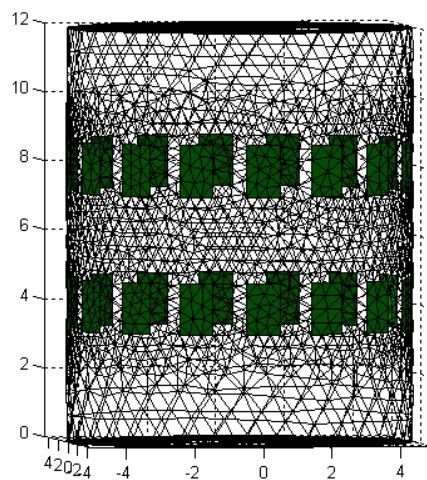
เริ่มต้นจำลองโมเดลแบบ 16 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวน 2 ระนาบ ประกอบด้วย 8,393 โหนด และ 42,580 เอลิเมนต์ ดังภาพประกอบ 4-5 และทำการกำหนดค่าต่างๆเหมือนการทดลองแบบ 8 อิเล็กโทรดทุกประการ สุดท้ายเปรียบเทียบผลการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าของโมเดลแบบ 8 อิเล็กโทรดและ 16 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวน 2 ระนาบ



ภาพประกอบ 4-3 FEM ของโมเดลแบบ 8 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวน 2 ระนาบ



ภาพประกอบ 4-4 FEM ของ coarse model

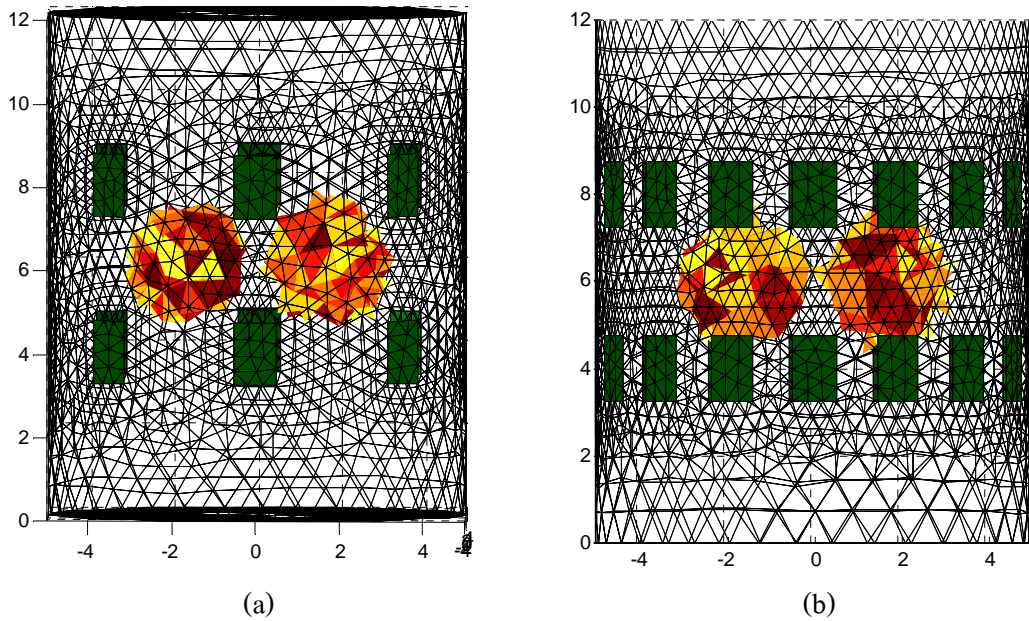


ภาพประกอบ 4-5 FEM ของโมเดลแบบ 16 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวน 2 ระนาบ

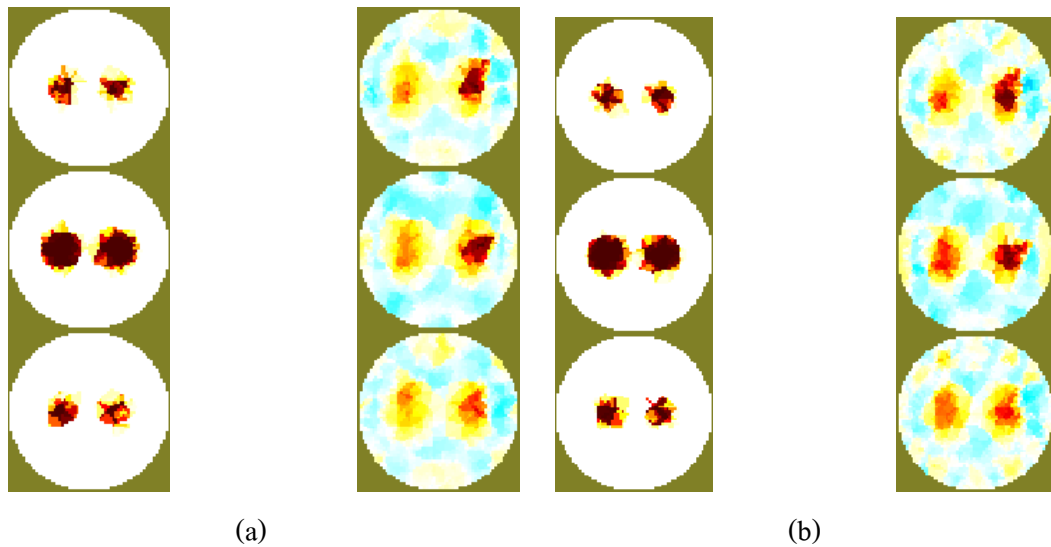
จากการจำลองวางวัตถุที่ตำแหน่งต่างๆพบว่า วัตถุที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 2.5 เซนติเมตร จะมีระยะห่างระหว่างวัตถุทั้งสองที่น้อยที่สุดที่ยังคงสร้างภาพได้ประมาณ 0.9 เซนติเมตร ทั้งแบบ 8 อิเล็กโทรด และ 16 อิเล็กโทรด ดังภาพประกอบ 4-6 แสดงการจำลองวัตถุภายในโมเดลทั้งแบบ 8 อิเล็กโทรดและ 16 อิเล็กโทรด ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $[1.7, 0, 6]$  และ  $[-1.7, 0, 6]$  ส่วนภาพประกอบ 4-7 แสดงภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่ความสูง 5, 6 และ 7 เซนติเมตร (จากบนลงล่าง) จากการสังเกตพบว่าโมเดลแบบ 16 อิเล็กโทรดสามารถแยกวัตถุได้



ชัดเจนกว่าแบบ 8 อิเล็กโทรด เนื่องจากจำนวนข้อมูลที่ได้จากการวัดหรือจำลองมีมากกว่า ส่งผลให้การแก้ปัญหาแบบอินเวอร์สมีความถูกต้องมากกว่า อย่างไรก็ตามเวลาที่ใช้ในการคำนวณย่อมมากกว่าด้วย

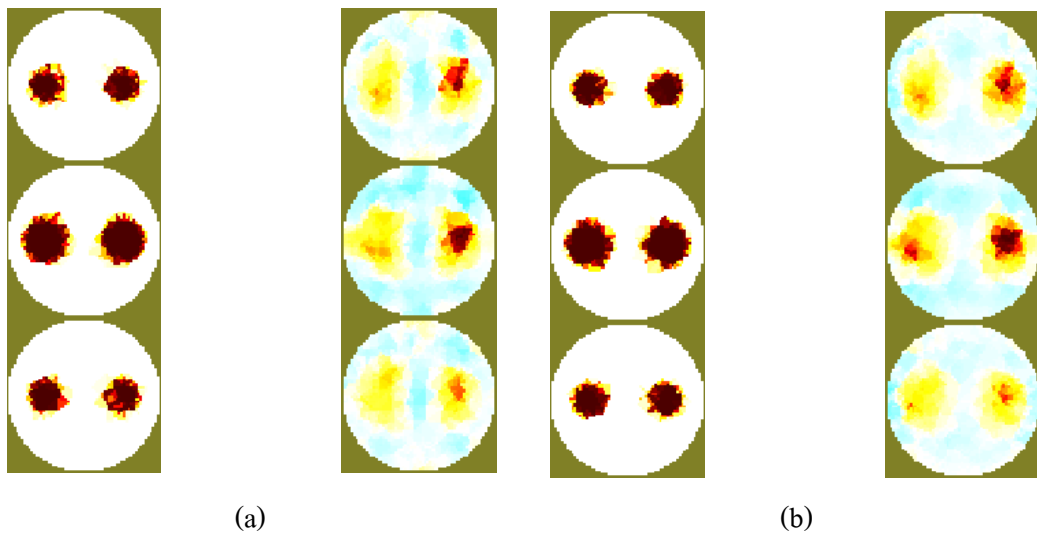


ภาพประกอบ 4-6 การจำลองวัตถุภายในโมเดล (a) แบบ 8 อิเล็กโทรด , (b) แบบ 16 อิเล็กโทรด



ภาพประกอบ 4-7 ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าตามแนวแกน z ที่ความสูง 5, 6 และ 7 เซนติเมตร (จากบนลงล่าง) (a) โมเดลแบบ 8 อิเล็กโทรด , (b) โมเดลแบบ 16 อิเล็กโทรด มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $[1.7, 0, 6]$  และ  $[-1.7, 0, 6]$  ของวัตถุขนาด เส้นผ่าศูนย์กลาง 2.5 เซนติเมตร

จากนั้นได้ทำการเพิ่มขนาดของวัตถุให้มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 3 เซนติเมตร โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $[2.5, 0, 6]$  และ  $[-2.5, 0, 6]$  จากการสังเกตภาพประกอบ 4-8 พบว่าแบบ 16 อิเล็กโทรดสามารถแยกวัตถุได้ชัดเจนกว่าแบบ 8 อิเล็กโทรดเช่นกัน ดังนั้นจึงจำนวนอิเล็กโทรดมาก ความถูกต้องของภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าก็จะยิ่งมากด้วย อย่างไรก็ตามต้องดูในเรื่องความเหมาะสมของการนำไปใช้งานจริงด้วย



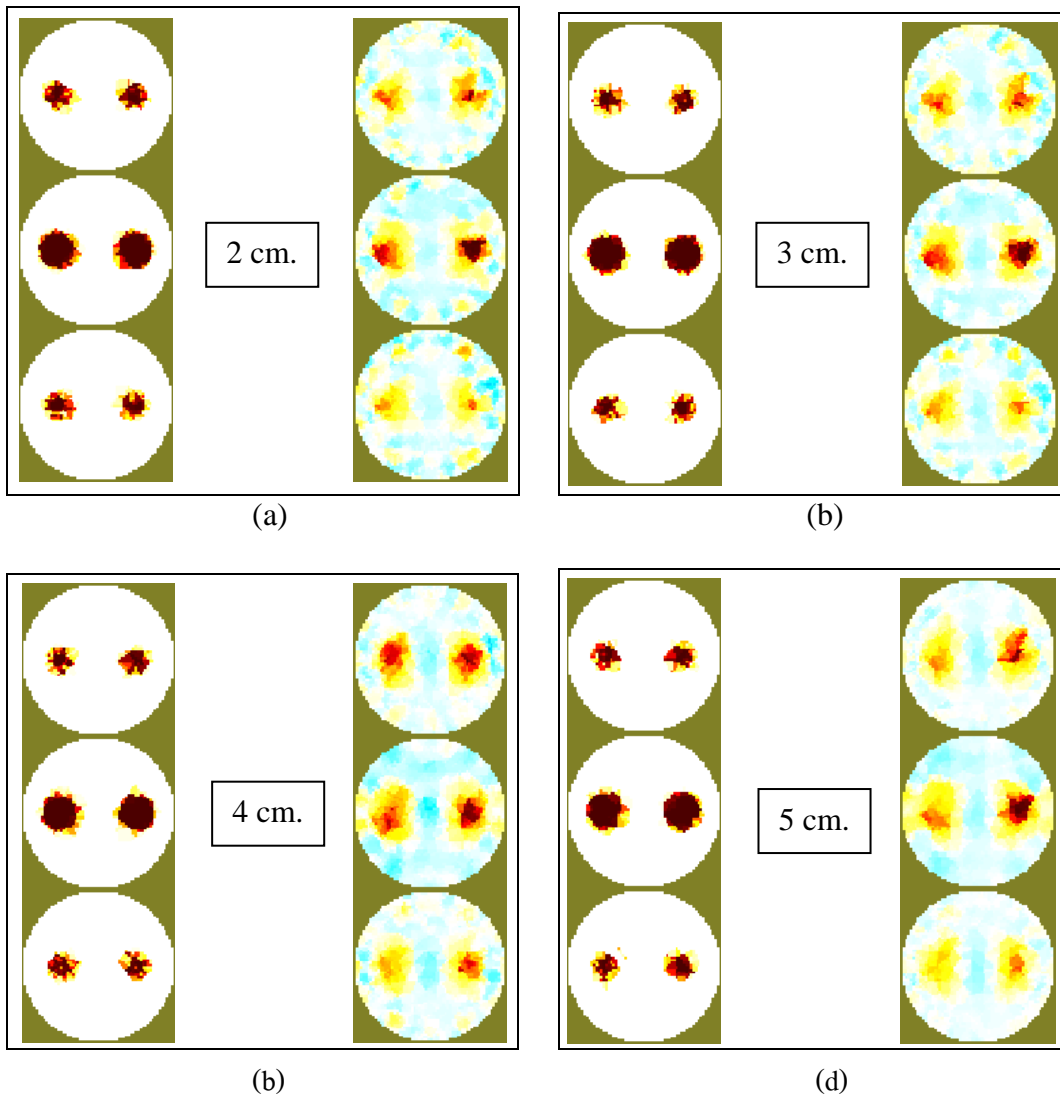
ภาพประกอบ 4-8 ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าตามแนวแกน  $z$  ที่ความสูง 5, 6 และ 7 เซนติเมตร ( จากบนลงล่าง ) (a) วัตถุมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2.5 เซนติเมตร , (b) วัตถุมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 3 เซนติเมตร

#### 4.3 ผลการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า อันเนื่องมาจากระยะห่างระหว่างระนาบของอิเล็กโทรด

วิธีการทดลองคล้ายกับหัวข้อ 4.2 เพียงแต่วางวัตถุไว้ที่ตำแหน่งเดียวคือที่  $[2.5, 0, 6]$  และ  $[-2.5, 0, 6]$  โดยการปรับระยะห่างระหว่างระนาบของอิเล็กโทรดดังนี้ 2, 3, 4 และ 5 เซนติเมตร จากการทดลองพบว่าถ้าระยะห่างมากหรือน้อยเกินไปจะทำให้ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าเกิดความผิดพลาดมากขึ้น ดังภาพประกอบ 4-9 พบว่าระยะห่างที่เหมาะสมที่สุดเท่ากับ 4 เซนติเมตร ซึ่งคำนวณจากสูตร

$$\text{ระยะห่างระหว่างระนาบ} = \text{ความสูงของโมเดล} / (\text{จำนวนระนาบของอิเล็กโทรด} + 1) \quad (4.1) [14]$$

อย่างไรก็ตามถ้าระยะห่างน้อยเกินไปจะทำให้ขนาดของภาพที่สร้างได้ใกล้เคียงกับขนาดของวัตถุมากกว่าในด้านความยาวของวัตถุ



ภาพประกอบ 4-9 ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าของโมเดล ที่มีระยะห่างระหว่างระนาบของอิเล็กโทรดต่างๆกันตามแนวแกน  $z$  ที่ความสูง 2, 3, 4 และ 5 เซนติเมตร (จากบนลงล่าง) (a) 2 เซนติเมตร, (b) 3 เซนติเมตร, (c) 4 เซนติเมตร และ (d) 5 เซนติเมตร

## บทที่ 5

### สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

หลังจากได้ทำการศึกษาและพัฒนาการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า ตามวัตถุประสงค์ของโครงการวิจัยดังกล่าวละเอียดในบทที่ 3 และ 4 มาแล้ว ในบทนี้จะกล่าวถึงบทสรุปของงานวิจัย ปัญหาและอุปสรรคในการทำงานวิจัย รวมทั้งวิจารณ์และข้อเสนอแนะสำหรับการพัฒนาการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าให้ที่มีประสิทธิภาพ เพื่อเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่ต้องการศึกษาและเป็นแนวทางในการพัฒนางานวิจัยทางด้านการพัฒนาการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า หรือด้านอื่นๆที่เกี่ยวข้อง

#### 5.1 สรุปผลการวิจัย

ผลจากการศึกษาวิจัยแสดงให้เห็นว่าจำนวนและขนาดของอิเล็กเมนต์มีผลต่อการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าของวัตถุทั้งขนาดและตำแหน่ง ดังนั้นการพัฒนาจำนวนและขนาดของอิเล็กเมนต์ให้เหมาะสมกับโมเดลจึงเป็นประเด็นที่ท้าทายในการทำวิจัย นอกจากนี้ยังพบว่าขนาดที่เล็กที่สุดของวัตถุที่สามารถตรวจจับได้มีค่าประมาณ 1 เซนติเมตร และระยะห่างน้อยสุดระหว่างวัตถุที่ยังคงแยกแยะได้โดยดูจากภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้ามีค่าประมาณ 0.9 เซนติเมตร โดยลักษณะของวัตถุที่นำมาทดลองเป็นรูปทรงกลม และมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 2.5 เซนติเมตร และยังพบว่าระยะห่างระหว่างอิเล็กโตรดมีผลต่อขนาดของวัตถุที่สร้างได้ โดยพบว่าถ้าระยะห่างมากหรือน้อยเกินไปจะทำให้ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าเกิดความผิดพลาดมากขึ้น

สำหรับการทำวิจัยจำเป็นต้องศึกษาให้เข้าใจถึงกระบวนการในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า และการใช้ซอฟต์แวร์ EIDORS สำหรับสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า ดังนั้นในบทที่ 3 จึงเป็นการศึกษากระบวนการในการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าด้วยซอฟต์แวร์ EIDORS นอกจากนี้ยังเปรียบเทียบผลที่ได้จากการใช้วิธีเรกูลาไรเซชันแบบ Tikhonov และ Laplacian รวมทั้งการปรับปรุงจำนวนอิเล็กเมนต์ภายในโมเดลด้วยวิธีที่เรียกว่า dual model เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า ในการทดลองได้จำลองโมเดลของไฟไนต์อิเล็กเมนต์ที่มีขนาดใกล้เคียงกับเต้านมโดยมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางไม่เกิน 10 เซนติเมตร และความสูงไม่เกิน 12 เซนติเมตร และจำลองวัตถุที่มีขนาดใกล้เคียงกับก้อนมะเร็งที่ตรวจพบทางการแพทย์ซึ่งมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางประมาณ 2-5 เซนติเมตร โดยกำหนดพารามิเตอร์ที่จำเป็นสำหรับการสร้างภาพ เช่นจำนวนอิเล็กโตรดต่อระนาบ, จำนวนระนาบของ

อิเล็กโทรด และรูปแบบของการจ่ายกระแสและวัดแรงดัน เป็นต้น และจำลองข้อมูลที่ใช้ในการสร้างภาพ เช่นข้อมูลที่จำลองได้ของแรงดันภายในโมเดลทั้งแบบเอกพันธ์และไม่เป็นเอกพันธ์ เป็นต้น ในการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการใช้วิธีเรกูลาไรเซชันแบบ tikhonov และ laplacian พบว่าไม่สามารถสรุปได้ว่าวิธีเรกูลาไรเซชันแบบไหนดีกว่ากัน เนื่องจากเกิดความผิดพลาดของภาพตัดขวาง ความต้านทานไฟฟ้าทั้งสองกรณีคือกรณีที่วางวัตถุใกล้กันมากที่สุดที่ยังคงสร้างภาพได้และกรณีที่วางวัตถุห่างกันประมาณ 1.7 เซนติเมตร ปัญหานี้เกิดขึ้นจากความไม่เพียงพอของจำนวนอิเล็กเมนต์ ทำให้อิเล็กเมนต์มีขนาดใหญ่ ส่งผลให้ไม่สามารถสร้างวัตถุที่มีขนาดใกล้เคียงกันและไม่สามารถหาระยะห่างน้อยสุดระหว่างวัตถุได้ ดังนั้นจึงทำการปรับปรุงจำนวนอิเล็กเมนต์โดยใช้วิธี dual model เพื่อแก้ปัญหาทรัพยากรไม่เพียงพอในการคำนวณ ผลปรากฏว่าสามารถสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าของวัตถุที่มีขนาดเล็กกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับการใช้โมเดลปกติได้ และสามารถหาระยะห่างน้อยสุดระหว่างวัตถุทั้งสองที่ยังแยกแยะได้จากภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้านอกจากนี้ยังมีการเปรียบเทียบภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าที่ได้จากโมเดลแบบ 8 และ 16 อิเล็กโทรดต่อระนาบ จำนวนสองระนาบ โดยจำกัดขนาดของวัตถุและแปรผันตำแหน่งของวัตถุ ผลปรากฏว่าภาพที่ได้จากโมเดลแบบ 16 อิเล็กโทรดมีความชัดเจนกว่า อันเนื่องมาจากข้อมูลแรงดันที่จำลองจากการวัดมีจำนวนมากกว่า ส่งผลให้การคำนวณมีความแม่นยำกว่า ทำให้ภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้ามีความถูกต้องกว่า อย่างไรก็ตามเวลาที่ใช้ในการคำนวณก็มากกว่าด้วย

อย่างไรก็ตามวิธีการที่นำเสนอก็ยังต้องมีข้อจำกัดอยู่ กล่าวคือเกิดความผิดพลาดของรูปร่างของวัตถุในแนวแกน z จากการสร้างภาพความต้านทานไฟฟ้า โดยพบว่าวัตถุที่มีลักษณะเป็นแท่งยาวจะเกิดความผิดพลาดน้อยกว่าวัตถุที่เป็นทรงกลม นอกจากนี้ยังมีปัญหาในเรื่องการจำลองวัตถุ เนื่องจากโมเดลเป็นแบบสามมิติจึงไม่สามารถกำหนดตำแหน่งของอิเล็กเมนต์ เพราะฉะนั้นในการสร้างวัตถุแต่ละครั้งค่อนข้างจะยุ่งยากเพราะต้องหาความสัมพันธ์ของจุดต่อของแต่ละอิเล็กเมนต์เพื่อนำมาสร้างเป็นวัตถุที่มีขนาดตามต้องการ และเมื่อโมเดลมีจำนวนอิเล็กเมนต์มากทำให้เกิดความยุ่งยากมากขึ้น

## 5.2 ปัญหาและข้อเสนอแนะ

### 5.2.1 ปัญหา

งานวิจัยนี้เป็นการปรับปรุงการสร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้าโดยใช้ซอฟต์แวร์ EIDORS ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์อิสระที่พัฒนามาจากวิทยานิพนธ์ของแต่ละคน ดังนั้นโค้ดของโปรแกรมจึงมีหลายรูปแบบขึ้นกับเจ้าของวิทยานิพนธ์นั้น ทำให้ทำความเข้าใจยากและไม่ค่อยมีตัวอย่างในบางเรื่องหรือไม่สามารถรันตัวอย่างที่มีได้ ทำให้ทำความเข้าใจได้ยาก

## 5.2.2 ข้อเสนอแนะ

จากการทำวิจัย ผู้วิจัยพบว่า ข้อเสนอแนะต่อไปนี้เป็นแนวทางในการพัฒนาการ  
สร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้า ที่มีประสิทธิภาพ

5.2.2.1 ในการศึกษาเรื่อง ผลกระทบจากการเคลื่อนที่ของอิเล็กโทรด เนื่องจากการ  
สร้างภาพตัดขวางความต้านทานไฟฟ้ามีความไวต่อการเคลื่อนที่ของ  
อิเล็กโทรด ทำให้เกิดความผิดพลาดได้ง่าย นอกจากนี้การวางอิเล็กโทรด  
จะต้องสมมาตร (symmetry) กัน

5.2.2.2 ในการศึกษาวิธีเรกูลาไรเซชันและอัลกอริทึมที่ใช้ในการสร้างภาพแบบอื่น  
แล้วทำการเปรียบเทียบผล

5.2.2.3 ศึกษาวิธีสร้างโมเดลของไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมอื่น

### บรรณานุกรม

- [1] Y. Zou and Z. Guo, "A review of electrical impedance techniques for breast cancer detection," *Medical Engineering & Physics*, no. 25, pp. 79-90, 2003.
- [2] T. Thanetwarodom, "An Electrical Impedance Tomographic Image Reconstruction," Master Thesis, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, 2002.
- [3] N. Polydorides and W.R.B. Lionheart, "A Matlab toolkit for three-dimensional electrical impedance tomography : a contribution to the Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software project," *Physiol. Meas.*, no. 13, pp.1871-1883, 2002.
- [4] A. Adler and W.R.B Lionheart, " Uses and abuses of EIDORS: an extensible software base for EIT ," *Physiol. Meas.*, no. 27, pp.25-42, 2006.
- [5] A. Adler, A. Borsic, N. Polydorides and W.R.B Lionheart, (2008, June). Simple FEMs aren't as good as we thought: experiences developing EIDORS v3.3, The University of Manchester. Manchester, England. [Online]. Available: [http://eprints.ma.man.ac.uk/1114/01/covered/MIMS\\_ep2008\\_64.pdf](http://eprints.ma.man.ac.uk/1114/01/covered/MIMS_ep2008_64.pdf)
- [6] D.R. Stephenson, J.L. Davidson, W.R.B. Lionheart, B.D. Grieve and T.A. York, "Comparison of 3D Image Reconstruction Techniques using Real Electrical Impedance Measurement Data," In *Proc: 4<sup>th</sup> World Congress on Industrial Process Tomography*, Japan, 2005.
- [7] B.M. Graham and A. Adler, " Objective selection of hyperparameter for EIT ," *Physiol.Meas.*, no.27, pp.65-79, 2006.
- [8] B.M. Graham and A.Adler, "A Nodal Jacobian Inverse solver for Reduced Complexity EIT Reconstruction," *International Journal for Information & Systems Sciences, Special Issue on Computational Aspect of Soft Field Tomography*, Vol.2, 2006.
- [9] B.M. Graham, "Enhancements in Electrical Impedance Tomography (EIT) Image Reconstruction for 3D Lung Imaging," PhD thesis, University of Ottawa, November, 2006.
- [10] A. Bjorck, "Non Linear Least Square Problems," *Method for Least Square problems, Handbook of Numerical Analysis, Volume I*, 1990-. , pp.342-367.
- [11] A. Adler . (2008, July). EIDORS: Electrical Impedance Tomography and Diffuse Optical Tomography Reconstruction Software. *Tutorial*. [Online]. Available: <http://eidors3d.sourceforge.net/tutorial/tutorial>
- [12] R. H. Bayford, "Bio-impedance Tomography (Electrical Impedance Tomography)," *Annu. Rev.Biomed.Eng.*, no. 8, pp.63-91,2006.

**ประวัติผู้เขียน**

ชื่อ สกุล	นางนิตา คุณถ่อง	
รหัสประจำตัวนักศึกษา	5010120038	
วุฒิการศึกษา		
วุฒิ	ชื่อสถาบัน	ปีที่สำเร็จการศึกษา
วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมไฟฟ้า)	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์	2544

ทุนการศึกษา (ที่ได้รับในระหว่างการศึกษา)

ทุนค่าเล่าเรียน คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์