

ภาคผนวก (ก)

ค่าคงที่พิโซอิเล็กทริกที่ไม่เป็นศูนย์ (d_{ij}) ของผลึกรูปแบบต่างๆ (Nye, 1987: 123) ดังนี้

1. Triclinic

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix}$$

2. Monoclinic มี 4 class คือ

class 2 (2 ขนานกับแกน x_2 standard orientation)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

class 2 (2 ขนานกับแกน x_3 standard orientation)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

class m (m ขนานกับแกน x_2 standard orientation)

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & d_{35} & 0 \end{bmatrix}$$

class m (m ขนานกับแกน x_3 standard orientation)

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & d_{35} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Orthorhombic มี 2 class

class 222

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

class mm2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Tetragonal มี 5 class

class 4

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดย $d_{14} = -d_{25}$, $d_{15} = d_{24}$ และ $d_{31} = d_{32}$ class $\bar{4}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

โดย $d_{14} = d_{25}$, $d_{15} = -d_{24}$ และ $d_{31} = -d_{32}$

class 422

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{14} = -d_{25}$

class 4mm

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{14} = d_{25}$ และ $d_{31} = d_{32}$ class $\bar{4}2m$ (2 ขนานกับแกน x_1)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{14} = d_{25}$

5. Cubic มี 2 class

class 432

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

class $\bar{4}32$ และ class 23

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{14} = d_{25} = d_{36}$

6. Trigonal มี 4 class

class 3

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & 0 & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{31} = d_{32}$, $d_{24} = d_{15}$, $d_{14} = -d_{25}$, $d_{11} = -d_{12} = 2d_{26}$ และ $-d_{21} = d_{22} = 2d_{16}$

class 32

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{14} = -d_{25}$, $d_{11} = -d_{12} = 2d_{26}$ class 3m (m ตั้งฉากกับแกน x_1 standard orientation)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{31} = d_{32}$, $d_{24} = d_{15}$ และ $-d_{21} = d_{22} = 2d_{16}$ class 3m (m ตั้งฉากกับแกน x_2)

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{31} = d_{32}$, $d_{24} = d_{15}$, $d_{11} = -d_{12} = 2d_{26}$

7. Hexagonal มี 6 class

class 6

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดย $d_{14} = -d_{25}$, $d_{15} = d_{24}$ และ $d_{31} = d_{32}$ (เหมือนกับ class 4)

class 6mm

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{14} = d_{25}$ และ $d_{31} = d_{32}$ (เหมือนกับ class 4mm)

class 622

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{14} = -d_{25}$ (เหมือนกับ class 422)class $\bar{6}$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{11} = -d_{12} = 2d_{26}$ และ $-d_{21} = d_{22} = 2d_{16}$ class $\bar{6}m2(m$ ตั้งฉากกับแกน x_1 standard orientation)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $-d_{21} = d_{22} = 2d_{16}$ class $\bar{6}m2(m$ ตั้งฉากกับแกน x_2)

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_{11} = -d_{12} = 2d_{26}$

ภาคผนวก (ข)

ปริมาณเทนเซอร์ และการเขียนปริมาณเทนเซอร์

ปรากฏการณ์ฟิสิกส์เกี่ยวกับระบบผลึก และทิศทางหรือองค์ประกอบของตัวแปรทางกลและตัวแปรทางไฟฟ้าที่กระทำต่อผลึก ในการอธิบายปรากฏการณ์ฟิสิกส์เกี่ยวกับผลึกจึงต้องใช้ทั้งปริมาณสเกลาร์ ปริมาณเวกเตอร์และปริมาณเทนเซอร์มาอธิบาย นอกจากนี้การแปลงปริมาณเทนเซอร์จากระบบพิกัดหนึ่งไปสู่อีกระบบพิกัดหนึ่ง ก็มีความจำเป็นในการอธิบายปรากฏการณ์ฟิสิกส์เกี่ยวกับผลึกต่าง ๆ

ปริมาณสเกลาร์เป็นปริมาณทางฟิสิกส์ที่มีค่าแน่นอนสำหรับวัตถุหนึ่งๆ ไม่ขึ้นกับทิศทาง มีความหมายสมบูรณ์ในตัวเอง เช่น ความหนาแน่น อุณหภูมิ และมวลสาร

ปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณทางฟิสิกส์ที่ต้องระบุทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรงที่กระทำต่อวัตถุ ความเข้มสนามไฟฟ้า ในรายงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ผู้วิจัยใช้ตัวพิมพ์พิมพ์เข้มแทนปริมาณเวกเตอร์ ส่วนทิศทางนั้น ระบุด้วยแกนอ้างอิงชนิดเดียวกับแกนอ้างอิงในระบบผลึก คือ แกน x_1 , x_2 , และ x_3 โดยทั้ง 3 แกนนี้ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ยกตัวอย่าง เช่น ความเข้มของสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งใดๆ ในปริภูมิ ระบุองค์ประกอบในแกน x_1 , x_2 , และ x_3 ได้ดังนี้

$$\bar{E} = [E_1, E_2, E_3] \quad (1)$$

ปริมาณเทนเซอร์อันดับที่สองเป็นปริมาณที่ต้องระบุขนาดและทิศทาง โดยทิศทางนั้นอยู่ในรูปแบบของเมตริก เช่น แรงเฉือนของวัตถุใดๆ ในแนวแกน x_1 แกน x_2 เป็นต้น เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนยิ่งขึ้น พิจารณาการนำไฟฟ้าของตัวนำที่มีความเป็นเนื้อเดียวกัน และมีพฤติกรรมเป็นไปตามกฎของโอห์ม มีความหนาแน่นกระแส j เป็นสัดส่วนโดยตรงกับสนามไฟฟ้า E ดังสมการ

$$\bar{j} = \sigma \bar{E} \quad (2)$$

เมื่อ σ คือสภาพนำไฟฟ้าในแกนอ้างอิง x_1 , x_2 , และ x_3 ดังนั้นองค์ประกอบของความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าคือ $\bar{j} = [j_1, j_2, j_3]$ และองค์ประกอบความเข้มของสนามไฟฟ้า $\bar{E} = [E_1, E_2, E_3]$ ดังนั้น $j_1 = \sigma E_1$, $j_2 = \sigma E_2$, และ $j_3 = \sigma E_3$ แต่ละองค์ประกอบย่อยของ j เป็นสัดส่วนโดยตรงกับองค์ประกอบย่อยที่สอดคล้องกันกับ E ในกรณีที่ตัวนำเป็นผลึก ซึ่งโดยทั่วไปการนำไฟฟ้าไม่เป็นแบบ

เนื้อเดียวกัน ความสัมพันธ์ระหว่าง j กับ E ไม่เป็นไปตามสมการ ที่ 2 แต่จะเป็นไปตามสมการต่อไปนี้คือ

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 \quad (3)$$

$$j_2 = \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3 \quad (4)$$

$$j_3 = \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3 \quad (5)$$

เมื่อ $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ ถึง σ_{33} เป็นค่าคงที่ แต่ละองค์ประกอบย่อยของ j มีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับทั้งสามองค์ประกอบย่อยของ E เช่นกรณีที่ $\bar{E} = [E_1, 0, 0]$ สมการ ที่ 3 ถึง สมการที่ 5 จะเหลือเพียง

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 \quad (6)$$

$$j_2 = \sigma_{21}E_1 \quad (7)$$

$$j_3 = \sigma_{31}E_1 \quad (8)$$

จะเห็นว่าองค์ประกอบย่อยของ j ไม่ได้มีเฉพาะแนวแกน x_1 เท่านั้น แต่ยังมีองค์ประกอบในแกนอื่นๆ ด้วย และ E_1 ไม่ได้ส่งผลแต่เฉพาะ σ_{11} เท่านั้น แต่ยังส่งผลกับ σ_{21} และ σ_{31} ซึ่งเป็นค่าคงที่ในทางแกนอื่นด้วย เช่นเดียวกับกับ σ_{23} คือองค์ประกอบของ j ในแนวแกน x_2 ในขณะที่มีสนามไฟฟ้าในแนวแกน x_3 การอธิบายการนำไฟฟ้าในผลึกต้องอาศัยค่าคงที่ทั้งเก้าองค์ประกอบจาก $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ ถึง σ_{33} สามารถเขียนแถวลำดับของค่าคงที่ทั้งเก้าในวงเล็บเดียวกันได้ดังนี้

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (9)$$

วงเล็บของแถวลำดับในสมการที่ 9 หมายถึงเทนเซอร์อันดับที่ 2 มีสมาชิก $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ ถึง σ_{33} ระบุตำแหน่งด้วยตัวห้อย (suffix) 2 ตัว ตัวแรกหมายถึงแถว และตัวห้อยที่ 2 หมายถึงคอลัมน์ σ_{11}, σ_{22} และ σ_{33} มีตำแหน่งอยู่บนแนวทะแยงมุมหลัก

กล่าวโดยทั่วไปถ้าหากมีปริมาณ T ที่มีความสัมพันธ์กับ 2 เวกเตอร์ $\bar{p} = [p_1, p_2, p_3]$ และ $\bar{q} = [q_1, q_2, q_3]$ ดังสมการต่อไปนี้

$$p_1 = T_{11}q_1 + T_{12}q_2 + T_{13}q_3 \quad (10)$$

$$p_2 = T_{21}q_1 + T_{22}q_2 + T_{23}q_3 \quad (11)$$

$$p_3 = T_{31}q_1 + T_{32}q_2 + T_{33}q_3 \quad (12)$$

สามารถเขียนแถวลำดับของปริมาณทั้งเก้าในวงเล็บเดียวกันได้ดังนี้

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (13)$$

กล่าวโดยสรุป สเกลาร์เป็นปริมาณที่ไม่เกี่ยวข้องกับทิศทางใดๆ จัดเป็นปริมาณเทนเซอร์อันดับที่ศูนย์ ไม่มีการเขียนตัวห้อย เวกเตอร์เป็นปริมาณเทนเซอร์อันดับที่หนึ่ง มีสมาชิกทั้งหมด 3 ตัวแต่ละตัวมีแกนอ้างอิงเพียงแกนเดียว จึงมีตัวห้อยเพียงตัวเดียว เทนเซอร์อันดับที่สอง มีสมาชิกทั้งหมด 9 ตัวแต่ละตัวเกี่ยวข้องกับแกนอ้างอิง 2 แกน จำนวนตัวห้อยคืออันดับของเทนเซอร์ ตัวอย่างเพิ่มเติมของปริมาณเทนเซอร์อันดับที่สองแสดงในตาราง ดังนี้

ตารางภาคผนวก 1 แสดงตัวอย่างปริมาณเทนเซอร์อันดับที่สอง

ปริมาณเทนเซอร์	เวกเตอร์ที่คู่กับสมาชิกเทนเซอร์	เวกเตอร์ผลลัพธ์
สภาพนำไฟฟ้า (σ)	สนามไฟฟ้า (\vec{E})	ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (\vec{j})
สภาพนำความร้อน (κ)	(ค่าลบ)เกรเดียนท์ของอุณหภูมิ	ความหนาแน่นกระแสเสกความร้อน (\vec{h})
สภาพยอมรับได้ (permittivity, ϵ)	สนามไฟฟ้า (\vec{E})	การกระจัดไดอิเล็กตริก (\vec{D})
สภาพซึมซาบไดอิเล็กตริก (dielectric susceptibility, χ)	สนามไฟฟ้า (\vec{E})	โพลาริเซชัน (\vec{P})
สภาพยอมให้ผ่านได้ (permeability, μ)	สนามแม่เหล็ก (\vec{H})	สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ (\vec{B})
สภาพซึมซาบได้ทางแม่เหล็ก (magnetic susceptibility, ψ)	สนามแม่เหล็ก (\vec{H})	ความเข้มของความเป็นแม่เหล็ก (\vec{M})

สัญลักษณ์ที่ใช้ระบุแทนปริมาณเทนเซอร์นั้น คือรูปแบบตัวห้อยดัมมี่ (dummy suffix notation) รูปแบบที่ระบุในสมการที่ 10 ถึง 12 สามารถเขียนให้สั้นลงได้ ดังแสดงในสมการที่ 14 ถึง 16 ตามลำดับ

$$p_1 = \sum_{j=1}^3 T_{1j} q_j \quad (14)$$

$$p_2 = \sum_{j=1}^3 T_{2j} q_j \quad (15)$$

$$p_3 = \sum_{j=1}^3 T_{3j} q_j \quad (16)$$

หรือเพื่อความกะทัดรัดยิ่งขึ้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของสมการที่ 17 ดังนี้

$$p_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} q_j \quad (17)$$

จากสมการที่ 17 เมื่อละเครื่องหมายผลรวมยอด (summation) จะได้สมการที่ 18

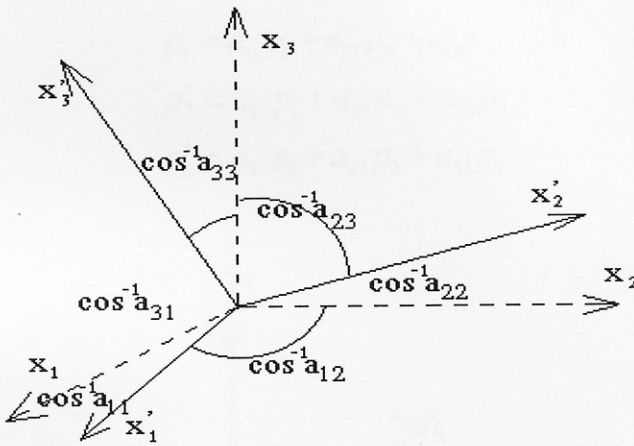
$$p_i = T_{ij} q_j \quad (i,j = 1,2,3) \quad (18)$$

สมการที่ 18 เป็นรูปแบบที่เรียกว่ารูปแบบของไอสไตน์ (Einstein convention) ในรูปแบบนี้ i คือตัวห้อยอิสระมีการเขียน j ซ้ำในเทอมเดียวกันสองครั้งแสดงว่ามีการบวกกันของเทอมต่างๆ ที่ตัวห้อย j เปลี่ยนค่าไปตั้งแต่ค่าแรกจนถึงค่าสุดท้าย อักษรแทนตัวห้อยคัมมีอาจเป็นอักษรตัวอื่น ที่ไม่ใช่ j ก็ได้ และไม่ว่าจะใช้อักษรตัวใดเป็นตัวห้อยคัมมี อักษรนั้นต้องเป็นตัวเดียวกันกับตัวห้อยตัวที่สอง ของค่าที่มีมาก่อน เช่นในสมการที่ 18 q มีตัวห้อย j เช่นเดียวกันกับตัวห้อยที่สองของ T_{ij} ดังนั้น จึงเรียก j ว่าตัวห้อยคัมมี

ภาคผนวก (ค)

การแปลงแกนพิกัด

การแปลงเวกเตอร์ในระบบแกนพิกัด (transformations of axes) คือการพิจารณาปริมาณ เตนเซอร์ที่ระบุในแกนพิกัดหนึ่ง เทียบกับอีกพิกัดหนึ่ง โดยความหมายทางฟิสิกส์ไม่เปลี่ยนแปลง ตามการอ้างอิงระบบพิกัด แต่เพื่อความสะดวกในการอธิบาย เช่น T_{ij} ในระบบแกนพิกัด $x_1, x_2,$ และ x_3 เมื่อเทียบกับแกนอ้างอิงใหม่คือระบบพิกัด $x'_1, x'_2,$ และ x'_3 T_{ij} ก็จะเป็นชุดใหม่ด้วย ซึ่ง สามารถหาค่าที่แน่นอนของ T_{ij} ชุดใหม่นี้ได้หากทราบ T_{ij} ชุดเก่า และทราบความสัมพันธ์ระหว่าง ระบบพิกัดเก่ากับระบบพิกัดใหม่ พิจารณารูปแกนพิกัด



ภาพประกอบที่ 1 แสดงระบบพิกัดเก่าและระบบพิกัดใหม่ ในปริภูมิเดียวกัน

จากรูป แกนอ้างอิงชุดเดิมทำมุมกับแกนอ้างอิงชุดใหม่ ซึ่งมีความสัมพันธ์ที่แทนได้ด้วยโคซายน์ แสดงทิศทาง (direction cosine) โดย a_{ij} คือค่าของโคซายน์ของมุมระหว่างแกน x'_i ชุดใหม่กับ x_j ชุดเก่า ดังนี้

		ชุดเดิม		
		x_1	x_2	x_3
ชุดใหม่	x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(19)

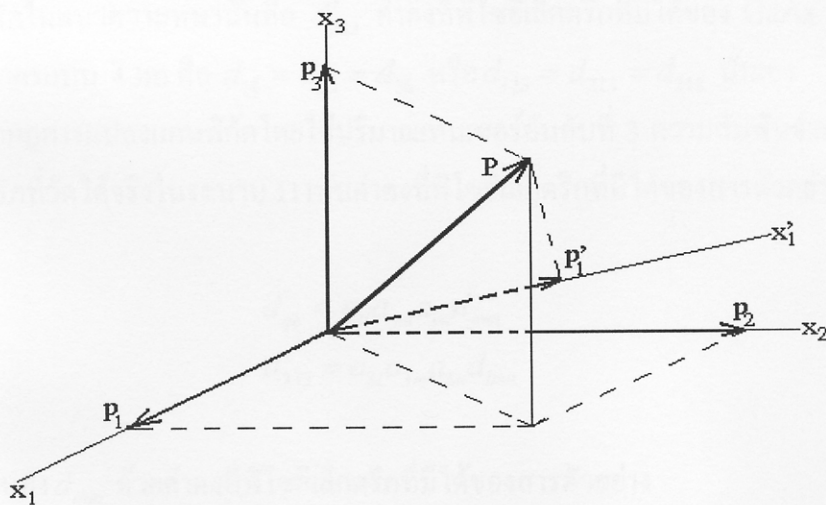
ตัวอย่างความสัมพันธ์ที่แสดงได้ด้วยโคซายน์แสดงทิศทาง เช่น โคซายน์แสดงทิศทางของ x'_2 เทียบกับแกน x_1, x_2, x_3 คือ a_{21}, a_{22} และ a_{23} ตามลำดับ และในทำนองเดียวกัน โคซายน์แสดงทิศทางของ x_3 เทียบกับแกน x'_1, x'_2, x'_3 คือ a_{13}, a_{23} และ a_{33} ตามลำดับ จะเห็นได้ว่า a_{ij} คือโคซายน์ของมุมระหว่างแกน x'_i กับ x_j ในที่นี้ i หมายถึงแกนอ้างอิงชุดใหม่และ j หมายถึงแกนอ้างอิงชุดเดิม แถวลำดับของ a_{ij} คือเมตริกที่มีสมาชิกทั้งหมดแก้ตัว โดยที่ $a_{ij} \neq a_{ji}$

การแปลงสำหรับองค์ประกอบเวกเตอร์ (transformation of vector components) พิจารณาเวกเตอร์ p อยู่ในระบบพิกัด x_1, x_2, x_3 องค์ประกอบของเวกเตอร์ p ในแนวแกน x_1, x_2, x_3 คือ p_1, p_2 และ p_3 ตามลำดับ แต่เมื่ออ้างอิงกับระบบพิกัด x'_1, x'_2, x'_3 องค์ประกอบของเวกเตอร์ p คือ p'_1, p'_2 และ p'_3 และเรียกเวกเตอร์ p ในระบบพิกัด x'_1, x'_2, x'_3 ว่า p' องค์ประกอบของเวกเตอร์ p' สัมพันธ์กับองค์ประกอบของเวกเตอร์ p โดยอาศัยสมการที่ 19 ดังนี้

$$p'_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 \quad (20)$$

$$p'_2 = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 \quad (21)$$

$$p'_3 = a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 \quad (22)$$



ภาพประกอบที่ 2 แสดงเวกเตอร์ p ในระบบพิกัด x_1, x_2, x_3 p' ในระบบพิกัด x'_1, x'_2, x'_3

สมการที่ 20 ถึง 22 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบตัวห้อยคัมมีโดยเขียนสมาชิกเทนเซอร์ชุดใหม่ในเทอมชุดเก่าได้ดังนี้

$$p'_i = a_{ij}p_j \quad (23)$$

ในการทำงานเดียวกันหากต้องการเขียนองค์ประกอบของเวกเตอร์ p ที่อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์ p' สามารถทำได้โดยอาศัยสมการที่ 18 ดังนี้

$$p_1 = a_{11}p'_1 + a_{21}p'_2 + a_{31}p'_3 \quad (24)$$

$$p_2 = a_{12}p'_1 + a_{22}p'_2 + a_{32}p'_3 \quad (25)$$

$$p_3 = a_{13}p'_1 + a_{23}p'_2 + a_{33}p'_3 \quad (26)$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของตัวห้อยดัมมี ได้ดังนี้

$$p_i = a_{ji}p'_j \quad (27)$$

การแปลงแกนพิกัดกับปริมาณเทนเซอร์ดังกล่าวมาสามารถใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ไพโซอิเล็กทริกได้ กล่าวคือ สำหรับสารตัวอย่าง GaAs เป็นผลึกที่มีความสมมาตรแบบ $\bar{4}3m$ มีระนาบ 111 เป็นความระนาบในความหนาของสารตัวอย่าง ในการทดลองใช้สนามไฟฟ้าตกคร่อมสารตัวอย่างในแนวความหนา (ระนาบ 111) และวัดความเครียดที่เกิดขึ้นในแนวความหนา ค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริกในแนวความหนานั้นคือ d'_{333} ค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริกที่มีได้ของ GaAs ซึ่งเป็นผลึกที่มีความสมมาตรแบบ $\bar{4}3m$ คือ $d_{14} = d_{25} = d_{36}$ หรือ $d_{123} = d_{213} = d_{312}$ นั่นเอง

จากกฎการแปลงแกนพิกัดโดยใช้ปริมาณเทนเซอร์อันดับที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริกที่วัดได้จริงในระนาบ 111 กับค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริกที่มีได้ของสารตัวอย่างคือ

$$d'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}d_{lmn} \quad (28)$$

$$d'_{333} = a_{3l}a_{3m}a_{3n}d_{lmn} \quad (29)$$

แทนค่า d_{lmn} ด้วยค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริกที่มีได้ของสารตัวอย่าง

$$d'_{333} = a_{31}a_{32}a_{33}d_{123} + a_{31}a_{33}a_{32}d_{132} + a_{32}a_{31}a_{33}d_{213} \\ + a_{32}a_{33}a_{31}d_{231} + a_{33}a_{31}a_{32}d_{312} + a_{33}a_{32}a_{31}d_{321} \quad (30)$$

เมื่อ a_{31}, a_{32}, a_{33} เป็นค่าโคไซน์แสดงทิศทางระหว่างมุมของแกนใหม่ (x_3) กับมุมของแกนเก่า (x_1, x_2 และ x_3) ดังนั้น $a_{31} = a_{32} = a_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ และจากค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริก

$d_{123} = d_{132}$, $d_{213} = d_{231}$ และ $d_{312} = d_{321}$ ถูกนิยามใหม่เป็น $2d_{123} = d_{14}$, $2d_{213} = d_{25}$ และ $2d_{321} = d_{36}$ โดยใช้สัญลักษณ์เมตริกแทนปริมาณเทนเซอร์ แทนค่าลงในสมการที่ 30 ดังนี้

$$d'_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{123} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{132} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{213} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{231} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{321} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{312} \quad (31)$$

$$d'_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} (d_{14} + d_{25} + d_{36}) \quad (32)$$

$$d'_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} (3d_{14}) \quad (33)$$

$$d'_{33} = \frac{3d_{14}}{3\sqrt{3}} = \frac{d_{14}}{\sqrt{3}} \quad (34)$$

ดังนั้นค่าคงที่พิโซอิเล็กทริกที่วัดได้ d'_{33} สำหรับสารตัวอย่าง GaAs เป็นผลึกที่มีความสมมาตรแบบ $\bar{4}3m$ มีความสัมพันธ์กับค่าคงที่ d_{14} คือ $d_{14} = \sqrt{3}d'_{33}$

ภาคผนวก (ข)

ปริมาณเทนเซอร์ และการเขียนปริมาณเทนเซอร์

ปรากฏการณ์ฟิสิกส์เกี่ยวกับระบบผลึก และทิศทางหรือองค์ประกอบของตัวแปรทางกลและตัวแปรทางไฟฟ้าที่กระทำต่อผลึก ในการอธิบายปรากฏการณ์ฟิสิกส์เกี่ยวกับผลึกจึงต้องใช้ทั้งปริมาณสเกลาร์ ปริมาณเวกเตอร์และปริมาณเทนเซอร์มาอธิบาย นอกจากนี้การแปลงปริมาณเทนเซอร์จากระบบพิกัดหนึ่งไปสู่อีกระบบพิกัดหนึ่ง ก็มีความจำเป็นในการอธิบายปรากฏการณ์ฟิสิกส์เกี่ยวกับผลึกต่าง ๆ

ปริมาณสเกลาร์เป็นปริมาณทางฟิสิกส์ที่มีค่าแน่นอนสำหรับวัตถุหนึ่งๆ ไม่ขึ้นกับทิศทาง มีความหมายสมบูรณ์ในตัวเอง เช่น ความหนาแน่น อุณหภูมิ และมวลสาร

ปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณทางฟิสิกส์ที่ต้องระบุทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรงที่กระทำต่อวัตถุ ความเข้มสนามไฟฟ้า ในรายงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ผู้วิจัยใช้ตัวพิมพ์พิมพ์เข้มแทนปริมาณเวกเตอร์ ส่วนทิศทางนั้น ระบุด้วยแกนอ้างอิงชนิดเดียวกับแกนอ้างอิงในระบบผลึก คือ แกน x_1 , x_2 , และ x_3 โดยทั้ง 3 แกนนี้ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ยกตัวอย่าง เช่น ความเข้มของสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งใดๆ ในปริภูมิ ระบุองค์ประกอบในแกน x_1 , x_2 , และ x_3 ได้ดังนี้

$$\bar{E} = [E_1, E_2, E_3] \quad (1)$$

ปริมาณเทนเซอร์อันดับที่สองเป็นปริมาณที่ต้องระบุขนาดและทิศทาง โดยทิศทางนั้นอยู่ในรูปแบบของเมตริก เช่น แรงเฉือนของวัตถุใดๆ ในแนวแกน x_1 แกน x_2 เป็นต้น เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนยิ่งขึ้น พิจารณาการนำไฟฟ้าของตัวนำที่มีความเป็นเนื้อเดียวกัน และมีพฤติกรรมเป็นไปตามกฎของโอห์ม มีความหนาแน่นกระแส j เป็นสัดส่วนโดยตรงกับสนามไฟฟ้า E ดังสมการ

$$\bar{j} = \sigma \bar{E} \quad (2)$$

เมื่อ σ คือสภาพนำไฟฟ้าในแกนอ้างอิง x_1 , x_2 , และ x_3 ดังนั้นองค์ประกอบของความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าคือ $\bar{j} = [j_1, j_2, j_3]$ และองค์ประกอบความเข้มของสนามไฟฟ้า $\bar{E} = [E_1, E_2, E_3]$ ดังนั้น $j_1 = \sigma E_1$, $j_2 = \sigma E_2$, และ $j_3 = \sigma E_3$ แต่ละองค์ประกอบย่อยของ j เป็นสัดส่วนโดยตรงกับองค์ประกอบย่อยที่สอดคล้องกันกับ E ในกรณีที่ตัวนำเป็นผลึก ซึ่งโดยทั่วไปการนำไฟฟ้าไม่เป็นแบบ

เนื้อเดียวกัน ความสัมพันธ์ระหว่าง j กับ E ไม่เป็นไปตามสมการ ที่ 2 แต่จะเป็นไปตามสมการต่อไปนี้คือ

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 \quad (3)$$

$$j_2 = \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3 \quad (4)$$

$$j_3 = \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3 \quad (5)$$

เมื่อ $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ ถึง σ_{33} เป็นค่าคงที่ แต่ละองค์ประกอบย่อยของ j มีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับทั้งสามองค์ประกอบย่อยของ E เช่นกรณีที่ $\bar{E} = [E_1, 0, 0]$ สมการ ที่ 3 ถึง สมการที่ 5 จะเหลือเพียง

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 \quad (6)$$

$$j_2 = \sigma_{21}E_1 \quad (7)$$

$$j_3 = \sigma_{31}E_1 \quad (8)$$

จะเห็นว่าองค์ประกอบย่อยของ j ไม่ได้มีเฉพาะแนวแกน x_1 เท่านั้น แต่ยังมีองค์ประกอบในแกนอื่นๆ ด้วย และ E_1 ไม่ได้ส่งผลแต่เฉพาะ σ_{11} เท่านั้น แต่ยังส่งผลกับ σ_{21} และ σ_{31} ซึ่งเป็นค่าคงที่ในทางแกนอื่นด้วย เช่นเดียวกับกับ σ_{23} คือองค์ประกอบของ j ในแนวแกน x_2 ในขณะที่มีสนามไฟฟ้าในแนวแกน x_3 การอธิบายการนำไฟฟ้าในผลึกต้องอาศัยค่าคงที่ทั้งเก้าองค์ประกอบจาก $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ ถึง σ_{33} สามารถเขียนแถวลำดับของค่าคงที่ทั้งเก้าในวงเล็บเดียวกันได้ดังนี้

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (9)$$

วงเล็บของแถวลำดับในสมการที่ 9 หมายถึงเทนเซอร์อันดับที่ 2 มีสมาชิก $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ ถึง σ_{33} ระบุตำแหน่งด้วยตัวห้อย (suffix) 2 ตัว ตัวแรกหมายถึงแถว และตัวห้อยที่ 2 หมายถึงคอลัมน์ σ_{11}, σ_{22} และ σ_{33} มีตำแหน่งอยู่บนแนวทแยงมุมหลัก

กล่าวโดยทั่วไปถ้าหากมีปริมาณ T ที่มีความสัมพันธ์กับ 2 เวกเตอร์ $\bar{p} = [p_1, p_2, p_3]$ และ $\bar{q} = [q_1, q_2, q_3]$ ดังสมการต่อไปนี้

$$p_1 = T_{11}q_1 + T_{12}q_2 + T_{13}q_3 \quad (10)$$

$$p_2 = T_{21}q_1 + T_{22}q_2 + T_{23}q_3 \quad (11)$$

$$p_3 = T_{31}q_1 + T_{32}q_2 + T_{33}q_3 \quad (12)$$

สามารถเขียนแถวลำดับของปริมาณทั้งเก้าในวงเล็บเดียวกันได้ดังนี้

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (13)$$

กล่าวโดยสรุป สเกลาร์เป็นปริมาณที่ไม่เกี่ยวข้องกับทิศทางใดๆ จัดเป็นปริมาณเทนเซอร์อันดับที่ศูนย์ ไม่มีการเขียนตัวห้อย เวกเตอร์เป็นปริมาณเทนเซอร์อันดับที่หนึ่ง มีสมาชิกทั้งหมด 3 ตัวแต่ละตัวมีแกนอ้างอิงเพียงแกนเดียว จึงมีตัวห้อยเพียงตัวเดียว เทนเซอร์อันดับที่สอง มีสมาชิกทั้งหมด 9 ตัวแต่ละตัวเกี่ยวข้องกับแกนอ้างอิง 2 แกน จำนวนตัวห้อยคืออันดับของเทนเซอร์ ตัวอย่างเพิ่มเติมของปริมาณเทนเซอร์อันดับที่สองแสดงในตาราง ดังนี้

ตารางภาคผนวก 1 แสดงตัวอย่างปริมาณเทนเซอร์อันดับที่สอง

ปริมาณเทนเซอร์	เวกเตอร์ที่คู่กับสมาชิกเทนเซอร์	เวกเตอร์ผลลัพธ์
สภาพนำไฟฟ้า (σ)	สนามไฟฟ้า (\vec{E})	ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (\vec{j})
สภาพนำความร้อน (κ)	(ค่าลบ)เกรเดียนท์ของอุณหภูมิ	ความหนาแน่นกระแสเสกความร้อน (\vec{h})
สภาพยอมรับได้ (permittivity, ϵ)	สนามไฟฟ้า (\vec{E})	การกระจัดไดอิเล็กตริก (\vec{D})
สภาพซึมซาบไดอิเล็กตริก (dielectric susceptibility, χ)	สนามไฟฟ้า (\vec{E})	โพลาริเซชัน (\vec{P})
สภาพยอมให้ผ่านได้ (permeability, μ)	สนามแม่เหล็ก (\vec{H})	สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ (\vec{B})
สภาพซึมซาบได้ทางแม่เหล็ก (magnetic susceptibility, ψ)	สนามแม่เหล็ก (\vec{H})	ความเข้มของความเป็นแม่เหล็ก (\vec{M})

สัญลักษณ์ที่ใช้ระบุแทนปริมาณเทนเซอร์นั้น คือรูปแบบตัวห้อยดัมมี่ (dummy suffix notation) รูปแบบที่ระบุในสมการที่ 10 ถึง 12 สามารถเขียนให้สั้นลงได้ ดังแสดงในสมการที่ 14 ถึง 16 ตามลำดับ

$$p_1 = \sum_{j=1}^3 T_{1j} q_j \quad (14)$$

$$p_2 = \sum_{j=1}^3 T_{2j} q_j \quad (15)$$

$$p_3 = \sum_{j=1}^3 T_{3j} q_j \quad (16)$$

หรือเพื่อความกะทัดรัดยิ่งขึ้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของสมการที่ 17 ดังนี้

$$p_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} q_j \quad (17)$$

จากสมการที่ 17 เมื่อละเครื่องหมายผลรวมยอด (summation) จะได้สมการที่ 18

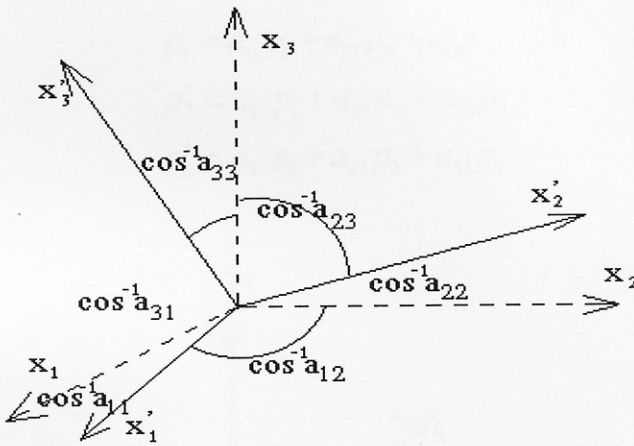
$$p_i = T_{ij} q_j \quad (i,j = 1,2,3) \quad (18)$$

สมการที่ 18 เป็นรูปแบบที่เรียกว่ารูปแบบของไอสไตน์ (Einstein convention) ในรูปแบบนี้ i คือตัวห้อยอิสระมีการเขียน j ซ้ำในเทอมเดียวกันสองครั้งแสดงว่ามีการบวกกันของเทอมต่างๆ ที่ตัวห้อย j เปลี่ยนค่าไปตั้งแต่ค่าแรกจนถึงค่าสุดท้าย อักษรแทนตัวห้อยคัมมีอาจเป็นอักษรตัวอื่น ที่ไม่ใช่ j ก็ได้ และไม่ว่าจะใช้อักษรตัวใดเป็นตัวห้อยคัมมี อักษรนั้นต้องเป็นตัวเดียวกันกับตัวห้อยตัวที่สอง ของค่าที่มีมาก่อน เช่นในสมการที่ 18 q มีตัวห้อย j เช่นเดียวกันกับตัวห้อยที่สองของ T_{ij} ดังนั้น จึงเรียก j ว่าตัวห้อยคัมมี

ภาคผนวก (ค)

การแปลงแกนพิกัด

การแปลงเวกเตอร์ในระบบแกนพิกัด (transformations of axes) คือการพิจารณาปริมาณ เตนเซอร์ที่ระบุในแกนพิกัดหนึ่ง เทียบกับอีกพิกัดหนึ่ง โดยความหมายทางฟิสิกส์ไม่เปลี่ยนแปลง ตามการอ้างอิงระบบพิกัด แต่เพื่อความสะดวกในการอธิบาย เช่น T_{ij} ในระบบแกนพิกัด $x_1, x_2,$ และ x_3 เมื่อเทียบกับแกนอ้างอิงใหม่คือระบบพิกัด $x'_1, x'_2,$ และ x'_3 T_{ij} ก็จะเป็นชุดใหม่ด้วย ซึ่งสามารถหาค่าที่แน่นอนของ T_{ij} ชุดใหม่นี้ได้หากทราบ T_{ij} ชุดเก่า และทราบความสัมพันธ์ระหว่าง ระบบพิกัดเก่ากับระบบพิกัดใหม่ พิจารณารูปแกนพิกัด



ภาพประกอบที่ 1 แสดงระบบพิกัดเก่าและระบบพิกัดใหม่ ในปริภูมิเดียวกัน

จากรูป แกนอ้างอิงชุดเดิมทำมุมกับแกนอ้างอิงชุดใหม่ ซึ่งมีความสัมพันธ์ที่แทนได้ด้วยโคซายน์ แสดงทิศทาง (direction cosine) โดย a_{ij} คือค่าของโคซายน์ของมุมระหว่างแกน x'_i ชุดใหม่กับ x_j ชุดเก่า ดังนี้

		ชุดเดิม			
		x_1	x_2	x_3	
ชุดใหม่	x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	(19)
	x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	
	x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	

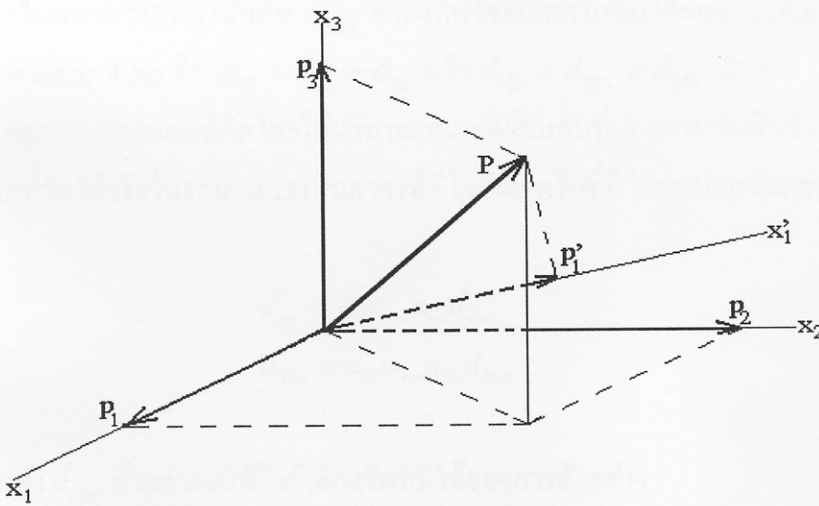
ตัวอย่างความสัมพันธ์ที่แสดงได้ด้วยโคซายน์แสดงทิศทาง เช่น โคซายน์แสดงทิศทางของ x'_2 เทียบกับแกน x_1, x_2, x_3 คือ a_{21}, a_{22} และ a_{23} ตามลำดับ และในทำนองเดียวกัน โคซายน์แสดงทิศทางของ x_3 เทียบกับแกน x'_1, x'_2, x'_3 คือ a_{13}, a_{23} และ a_{33} ตามลำดับ จะเห็นได้ว่า a_{ij} คือโคซายน์ของมุมระหว่างแกน x'_i กับ x_j ในที่นี้ i หมายถึงแกนอ้างอิงชุดใหม่และ j หมายถึงแกนอ้างอิงชุดเดิม แถวลำดับของ a_{ij} คือเมตริกที่มีสมาชิกทั้งหมดแก้ตัว โดยที่ $a_{ij} \neq a_{ji}$

การแปลงสำหรับองค์ประกอบเวกเตอร์ (transformation of vector components) พิจารณาเวกเตอร์ p อยู่ในระบบพิกัด x_1, x_2, x_3 องค์ประกอบของเวกเตอร์ p ในแนวแกน x_1, x_2, x_3 คือ p_1, p_2 และ p_3 ตามลำดับ แต่เมื่ออ้างอิงกับระบบพิกัด x'_1, x'_2, x'_3 องค์ประกอบของเวกเตอร์ p คือ p'_1, p'_2 และ p'_3 และเรียกเวกเตอร์ p ในระบบพิกัด x'_1, x'_2, x'_3 ว่า p' องค์ประกอบของเวกเตอร์ p' สัมพันธ์กับองค์ประกอบของเวกเตอร์ p โดยอาศัยสมการที่ 19 ดังนี้

$$p'_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 \quad (20)$$

$$p'_2 = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 \quad (21)$$

$$p'_3 = a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 \quad (22)$$



ภาพประกอบที่ 2 แสดงเวกเตอร์ p ในระบบพิกัด x_1, x_2, x_3 p' ในระบบพิกัด x'_1, x'_2, x'_3

สมการที่ 20 ถึง 22 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบตัวห้อยคัมมีโดยเขียนสมาชิกเทนเซอร์ชุดใหม่ในเทอมชุดเก่าได้ดังนี้

$$p'_i = a_{ij}p_j \quad (23)$$

ในการทำงานเดียวกันหากต้องการเขียนองค์ประกอบของเวกเตอร์ p ที่อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์ p' สามารถทำได้โดยอาศัยสมการที่ 18 ดังนี้

$$p_1 = a_{11}p'_1 + a_{21}p'_2 + a_{31}p'_3 \quad (24)$$

$$p_2 = a_{12}p'_1 + a_{22}p'_2 + a_{32}p'_3 \quad (25)$$

$$p_3 = a_{13}p'_1 + a_{23}p'_2 + a_{33}p'_3 \quad (26)$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของตัวห้อยดัมมี ได้ดังนี้

$$p_i = a_{ji}p'_j \quad (27)$$

การแปลงแกนพิกัดกับปริมาณเทนเซอร์ดังกล่าวมาสามารถใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ไพโซอิเล็กทริกได้ กล่าวคือ สำหรับสารตัวอย่าง GaAs เป็นผลึกที่มีความสมมาตรแบบ $\bar{4}3m$ มีระนาบ 111 เป็นความระนาบในความหนาของสารตัวอย่าง ในการทดลองใช้สนามไฟฟ้าตกคร่อมสารตัวอย่างในแนวความหนา (ระนาบ 111) และวัดความเครียดที่เกิดขึ้นในแนวความหนา ค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริกในแนวความหนานั้นคือ d'_{333} ค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริกที่มีได้ของ GaAs ซึ่งเป็นผลึกที่มีความสมมาตรแบบ $\bar{4}3m$ คือ $d_{14} = d_{25} = d_{36}$ หรือ $d_{123} = d_{213} = d_{312}$ นั่นเอง

จากกฎการแปลงแกนพิกัดโดยใช้ปริมาณเทนเซอร์อันดับที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริกที่วัดได้จริงในระนาบ 111 กับค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริกที่มีได้ของสารตัวอย่างคือ

$$d'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}d_{lmn} \quad (28)$$

$$d'_{333} = a_{31}a_{3m}a_{3n}d_{lmn} \quad (29)$$

แทนค่า d_{lmn} ด้วยค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริกที่มีได้ของสารตัวอย่าง

$$d'_{333} = a_{31}a_{32}a_{33}d_{123} + a_{31}a_{33}a_{32}d_{132} + a_{32}a_{31}a_{33}d_{213} \\ + a_{32}a_{33}a_{31}d_{231} + a_{33}a_{31}a_{32}d_{312} + a_{33}a_{32}a_{31}d_{321} \quad (30)$$

เมื่อ a_{31}, a_{32}, a_{33} เป็นค่าโคไซน์แสดงทิศทางระหว่างมุมของแกนใหม่ (x_3) กับมุมของแกนเก่า (x_1, x_2 และ x_3) ดังนั้น $a_{31} = a_{32} = a_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ และจากค่าคงที่ไพโซอิเล็กทริก

$d_{123} = d_{132}$, $d_{213} = d_{231}$ และ $d_{312} = d_{321}$ ถูกนิยามใหม่เป็น $2d_{123} = d_{14}$, $2d_{213} = d_{25}$ และ $2d_{321} = d_{36}$ โดยใช้สัญลักษณ์เมตริกแทนปริมาณเทนเซอร์ แทนค่าลงในสมการที่ 30 ดังนี้

$$d'_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{123} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{132} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{213} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{231} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{321} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} d_{312} \quad (31)$$

$$d'_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} (d_{14} + d_{25} + d_{36}) \quad (32)$$

$$d'_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} (3d_{14}) \quad (33)$$

$$d'_{33} = \frac{3d_{14}}{3\sqrt{3}} = \frac{d_{14}}{\sqrt{3}} \quad (34)$$

ดังนั้นค่าคงที่พิโซอิเล็กทริกที่วัดได้ d'_{33} สำหรับสารตัวอย่าง GaAs เป็นผลึกที่มีความสมมาตรแบบ $\bar{4}3m$ มีความสัมพันธ์กับค่าคงที่ d_{14} คือ $d_{14} = \sqrt{3}d'_{33}$